Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрина, О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. II. Общий случай, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 1, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/im273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:37:37

УДК 517.55

А. В. Домрина

О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. II. Общий случай

В статье доказано, что не существует четырехлистных полиномиальных отображений $\mathbb{C}^2$ в себя, якобиан которых – ненулевая константа.

Библиография: 4 наименования.

Введение

Пусть $\tilde{\mathbb{C}}^2$ и $\mathbb{C}^2$ – два экземпляра комплексной плоскости, $f: \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – полиномиальное отображение, якобиан которого есть ненулевая константа. Известная гипотеза о якобиане состоит в том, что такое отображение f полиномиально обратимо (см. [1], [2]).

Отображение f полиномиально обратимо тогда и только тогда, когда общая точка из $\mathbb{C}^2$ имеет один прообраз. Число прообразов общей точки называется *топологической степенью* отображения. Известно, что полиномиальных отображений топологической степени два или три, якобиан которых есть ненулевая константа, не существует. Случай степени два элементарен, а случай степени три рассмотрен в [3]. Основным результатом статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Если топологическая степень полиномиального отображения $f: \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ равна четырем, то якобиан отображения f не может быть ненулевой константой.*

Эта работа продолжает статью [4], в которой доказана невозможность случая, когда f имеет одну дикритическую компоненту. Здесь мы рассмотрим оставшиеся случаи. Доказательство использует обозначения и утверждения из [4, § 1].

Автор приносит глубокую благодарность А. Г. Витушкину и С. Ю. Оревкову за полезные обсуждения и помощь при выполнении данной работы.

§ 1. Свойства дикритических компонент и их разрешения на бесконечности

Переходим к доказательству теоремы. Предположим от противного, что существует полиномиальное отображение f топологической степени 4, якобиан которого является ненулевой константой.

С помощью конечного числа σ -процессов на бесконечности можно продолжить f до регулярного рационального отображения $F: \tilde{X} \rightarrow X$, где $\tilde{X}$, X – неособые

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01218).

компактные многообразия, содержащие соответственно $\tilde{\mathbb{C}}^2$ и $\mathbb{C}^2$ в качестве открытых подмножеств, а кривые $\tilde{L} := \tilde{X} \setminus \tilde{\mathbb{C}}^2$ и $L := X \setminus \mathbb{C}^2$ состоят из конечного числа неособых рациональных компонент, пересекающихся трансверсально и не более чем попарно. Как и в [4], обозначим $\tilde{L}_\infty := F^{-1}(L)$. Дикритическими компонентами отображения F называются неприводимые компоненты $\tilde{l} \subset \tilde{L} - \tilde{L}_\infty$, на которых F непостоянно. Не ограничивая общности, считаем, что справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Отображение F удовлетворяет условию минимальности: не существует (-1) -кривой $\tilde{c} \subset \tilde{X}$ (т.е. неособой рациональной кривой с $\tilde{c}^2 = -1$), на которой F постоянно.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. 1) *Отображение F имеет две дикритические компоненты $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$, оно локально биголоморфно на $(\tilde{g}_1 \cup \tilde{g}_2) \setminus \tilde{L}_\infty$ и имеет вдоль $\tilde{g}_1$ ветвление первого порядка, вдоль $\tilde{g}_2$ – ветвление второго порядка, т.е. $m(\tilde{g}_1) = n(\tilde{g}_1) = 1$, $m(\tilde{g}_2) = 1$, $n(\tilde{g}_2) = 2$ (числа m , n определены в [4, определение 3]).*

2) *Отображение F непостоянно на каждой связной компоненте $\tilde{L} - \tilde{L}_\infty$, т.е. $\tilde{L} = \tilde{L}_\infty + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно [4] число дикритических компонент отображения F не меньше двух. По лемме 4.2 из [3] если 1) неверно, то отображение F является неразветвленным четырехлистным накрытием над $\mathbb{C}^2$ без конечного числа точек. Но это невозможно в силу односвязности базы.

2) следует из утверждения 1.1 и леммы 5.2 из [3].

Как и в [4], неприводимые компоненты кривой $\tilde{L}$ будем помечать знаком тильда, а их образы при F будем обозначать теми же буквами, но без тильды. Например, $a := F(\tilde{a})$. Обозначим $g := g_1 \cup g_2$.

Рис. 1

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Многообразия $\tilde{X}$ и X можно выбрать так, что:*

- 1) *кривая $\tilde{g}_i$ пересекается с $\tilde{L}_\infty$ трансверсально и в единственной точке $\tilde{p}_i$, $i = 1, 2$;*
- 2) *кривые g_i , $i = 1, 2$, трансверсально пересекают L ; сплайс-диаграмма кривой g возле L устроена, как на одном из рис. 1, а), б), б').*

Правая стрелка отвечает g_2 , левая — g_1 . Граф L является взвешенной частью графа $\Gamma_{L,g}$. Для каждой нодальной вершины $a \in L$ обозначим через R_a , L_a , D_a , U_a ветви графа L (возможно, пустые), выходящие из a в направлениях соответственно направо, налево, вниз и вверх; положим $U := U_h$ (вершина h определена на рис. 1). Тогда:

- а) если $a \in U$, то $\det U_a = 1$, $\det R_a > 1$, если $a \in L - U$, $a \neq h$, то $\det R_a = 1$, $\det D_a > 1$, $\det L_a > 1$;
- б) в случае рис. 1, а) $\det U = 1$, $\det R_h = 1$, $\det D_h > 1$, $\det L_h > 1$;
- в) в случае рис. 1, б) с $\det U \neq 1$ имеем $\det R_h = 1$, $\det L_h > 1$;
- г) $\det L = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полиномиальным автоморфизмом $\mathbb{C}^2$ добьемся того, что в некоторых аффинных координатах (x, y) на $\mathbb{C}^2$ ни одно из чисел $\deg_x g_2$, $\deg_y g_2$ не делит другое. Заметим, что $g_1 \neq g_2$. Действительно, в силу [3, лемма 5.2] и утверждения 1.2, 1) при $g_1 = g_2$ кривая g_1 не имеет особых точек. Применяя теорему Абъянкара–Моха, как в [3, лемма 5.3], получаем, что отображение F имеет над кривой g_1 ветвление четвертого порядка, что противоречит утверждению 1.2. Граф L' разрешения особенностей g_2 на бесконечности имеет вид [4, рис. 2], а граф L получается из L' разрешением особенностей кривой g_1 в точке $p := g_1 \cap L'$. Аналогично [3, лемма 2.1] кривые $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ имеют одну точку на бесконечности, поэтому справедливо 1). Кривые g_1 , g_2 также имеют одну точку на бесконечности, поэтому p определена однозначно. Пусть l' — вершина графа L' , содержащая p . Если l' нодальна, то L отвечает рис.1, а), если l' — корень L' , то L отвечает рис.1, б'). В остальных случаях L отвечает рис.1, б). Утверждения 2), а)–г) следуют из [4, лемма 3] и [4, предложение 3].

СОГЛАШЕНИЕ. Графы L вида рис. 1, а) будем относить к типу 1, графы вида рис. 1, б) с $\det U \neq 1$ — к типу 2, остальные графы рис. 1 — к типу 3. Графы вида рис. 1, б') будут рассматриваться как частный случай графов вида рис. 1, б) с $\det U = \det L_h = 1$. Далее для графов второго типа положим $D_h := U$. Подграфы, определенные в [4, определение 1] с объемлющим графом $\tilde{L}$ или L , не будем помечать никаким индексом (например, (ab)), подграфы с объемлющим графом $\tilde{L}_\infty$ будем помечать индексом ∞ (например, $(\tilde{a}\tilde{b})_\infty$).

СЛЕДСТВИЕ 1.4. а) Пусть $a \in L - U$, $b \in L - U - h$ нодальны, b левее a . Тогда $\det(ab)$ и $\det D_a$ взаимно просты.

б) Пусть L — граф типа 1 или 2, нодальная вершина a правее h . Тогда $\det(ah)$ и $\det D_a$ взаимно просты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 1.3 и [4, лемма 2].

ЛЕММА 1.5. Если для некоторой вершины $\tilde{a} \in \tilde{L}_\infty$ подграф $(\tilde{a}\tilde{g}_1)$ линейен, то $\text{Deg}(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 1$. Если для некоторой $\tilde{a} \in \tilde{L}_\infty$ подграф $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ линейен, то $\text{Deg}(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 1.2, 1), 1.3 и [4, предложение 1].

§ 2. Вспомогательные утверждения

Аналогично [4, лемма 12] имеем

ЛЕММА 2.1. Пусть $\tilde{K} = \sum k_{\tilde{s}} \tilde{s}$ – разложение канонического дивизора многообразия $\tilde{X}$ по неприводимым компонентам кривой $\tilde{L}$. Тогда $k_{\tilde{g}_i} = i - 1$, $i = 1, 2$.

С этого места и до конца статьи через $\tilde{v}$ обозначим корень графа $\tilde{L}$. Заметим, что $\tilde{v} \in \tilde{L}_\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Нодалная вершина $\tilde{q} \in \langle \tilde{g}_1 \tilde{v} \rangle$ (соответственно $\langle \tilde{g}_2 \tilde{v} \rangle$) называется *существенной относительно $\tilde{g}_1$* (соответственно $\tilde{g}_2$), если существует смежная с $\tilde{q}$ компонента связности $\Lambda \subset \delta(\tilde{g}_1 \tilde{v})$ (соответственно $\delta(\tilde{g}_2 \tilde{v})$) с $\det \Lambda > 1$. Такая компонента Λ единственна в силу [4, лемма 3]; ее определитель обозначается $d(\tilde{q})$. В противном случае вершина $\tilde{q}$ называется *несущественной относительно $\tilde{g}_1$* (соответственно $\tilde{g}_2$).

Несущественные вершины относительно $\tilde{g}_1$ ($\tilde{g}_2$) не вносят вклад в формулу [4, (3)] для коэффициентов при $\tilde{g}_1$ ($\tilde{g}_2$). Выражения “относительно $\tilde{g}_i$ ”, $i = 1, 2$ будут опускаться, если это понятно из контекста, например при $\tilde{v} \in \langle \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \rangle$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\tilde{q} \in \langle \tilde{g}_1 \tilde{v} \rangle$ – нодалная вершина, $\det(\tilde{q} \tilde{g}_1) = \det \delta(\tilde{q} \tilde{g}_1) = 1$. Тогда $\tilde{q}$ несущественна относительно $\tilde{g}_1$.

Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Обозначим $d = d(\tilde{q})$, $p_1 = \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{v})$, $p_2 = \det \text{br}_{\tilde{q}}(\tilde{v})$. Тогда сплайс-диаграмма кривой $\tilde{L}$ устроена, как на рис. 2. По формуле определителя подграфа $(\tilde{g}_1 \tilde{q})$ графа $\tilde{L}$ имеем

$$-1 = p_1 - dp_2. \quad (2.1)$$

Из [4, (3)] и леммы 2.1 вытекает, что

$$0 = k_{\tilde{g}_1} = -2 - p_1 + (d-1)(p_2-1) + d\Sigma, \quad (2.2)$$

где Σ – остаток разложения [4, (3)]. Подставив (2.1) в (2.2), получаем, что p_2 делится на $d \neq 1$, что противоречит [4, лемма 2].

ЛЕММА 2.4. Пусть $\tilde{q}$ удовлетворяет условиям леммы 2.3 и для любой существенной относительно $\tilde{g}_1$ вершины $\tilde{s} \in \langle \tilde{q} \tilde{v} \rangle$ верно $\det \text{br}_{\tilde{s}}(\tilde{v}) = 1$ (если подграф $(\tilde{v} \tilde{q})$ линейен, это условие выполняется автоматически). Тогда $\det \text{br}_{\tilde{q}}(\tilde{v}) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения: $p_1 = \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{v})$, $p_2 = \det \text{br}_{\tilde{q}}(\tilde{v})$, $p_3 = \det \text{br}_{\tilde{q}}(\tilde{g}_1)$. Из леммы 2.1 и из [4, (3)] имеем $p_1 = -2$. Из формулы [4, (2)] для определителя подграфа $(\tilde{g}_1 \tilde{q})$ графа $\tilde{L}$ имеем $p_2 = -2p_3 + 1 < 0$, так как $p_3 > 0$.

Леммы 2.5 и 2.6 доказываются аналогично двум предыдущим.

ЛЕММА 2.5. Пусть вершина $\tilde{q} \in \langle \tilde{g}_2 \tilde{v} \rangle$ нодальна, $\det(\tilde{q}\tilde{g}_2) = 2$, $\det \delta(\tilde{q}\tilde{g}_2) = 1$. Тогда $\tilde{q}$ несущественна относительно $\tilde{g}_2$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\tilde{q}$ удовлетворяет условиям леммы 2.5 и для любой существенной относительно $\tilde{g}_2$ вершины $\tilde{s} \in \langle \tilde{q} \tilde{v} \rangle$ верно $\det \text{br}_{\tilde{s}}(\tilde{v}) = 1$ (если подграф $(\tilde{v} \tilde{q})$ линейен, это условие выполняется автоматически). Тогда $\det \text{br}_{\tilde{q}}(\tilde{v}) < 0$.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\tilde{q}_1 \in \langle \tilde{v} \tilde{g}_2 \rangle$ – существенная вершина относительно $\tilde{g}_2$ и $\det \delta(\tilde{q}_1 \tilde{g}_2) = \det(\tilde{q}_1 \tilde{g}_2) = 1$. Пусть вершина $\tilde{q}_2 \in \langle \tilde{v} \tilde{q}_1 \rangle$ нодальна, $\det \delta(\tilde{q}_2 \tilde{q}_1) = 1$, $\det(\tilde{q}_2 \tilde{g}_2) = d(\tilde{q}_1) + 1$. Тогда $\tilde{q}_2$ несущественна относительно $\tilde{g}_2$.

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Обозначим $d = d(\tilde{q}_1)$, $d_1 = d(\tilde{q}_2)$, $p_0 := \det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{v})$, $p_1 := \det \text{br}_{\tilde{q}_1}(\tilde{v})$, $p_2 := \det \text{br}_{\tilde{q}_2}(\tilde{v})$. Так как $d \neq 1$, то $\det \text{br}_{\tilde{q}_1}(\tilde{g}_2) = 1$. Так как $d_1 \neq 1$, то $\det \text{br}_{\tilde{q}_2}(\tilde{g}_2) = 1$. Поэтому сплайс-диаграмма кривой $\tilde{L}$ устроена, как на рис. 3. Из формулы [4, (2)] для подграфов $(\tilde{q}_1 \tilde{g}_2)$ и $(\tilde{q}_2 \tilde{g}_2)$ графа $\tilde{L}$ получаем

$$-1 = p_0 - dp_1, \quad -d - 1 = p_0 - d^2 d_1 p_2. \quad (2.3)$$

Из [4, (3)] имеем

$$1 = k_{\tilde{g}_2} = -2 - p_0 + (d-1)(p_1-1) + d(d_1-1)(p_2-1) + dd_1 \Sigma, \quad (2.4)$$

где Σ – остаток разложения [4, (3)]. Подставляя (2.3) в (2.4), получаем $p_2 = -d_1 + d_1 \Sigma$, что противоречит [4, лемма 2].

ЛЕММА 2.8. Пусть $\tilde{q}_1$ – единственная нодальная вершина подграфа $\langle \tilde{v} \tilde{g}_2 \rangle$ и $\det(\tilde{q}_1 \tilde{g}_2) = 1$. Тогда $\det \text{br}_{\tilde{q}_1}(\tilde{v}) < -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вершина $\tilde{q}_1$ несущественна относительно $\tilde{g}_2$, то в силу [4, (3)] $\det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{v}) = -3$, поэтому $\det \text{br}_{\tilde{q}_1}(\tilde{v}) = -3 \det \text{br}_{\tilde{q}_1}(\tilde{g}_2) + 1 < -1$. Если вершина $\tilde{q}_1$ существенна относительно $\tilde{g}_2$, то в силу [4, лемма 3] $\det \text{br}_{\tilde{q}_1}(\tilde{g}_2) = 1$. Применяя формулу [4, (2)] к $(\tilde{q}_1 \tilde{g}_2)$ в объемлющем графе $\tilde{L}$ и формулу [4, (3)] для коэффициента $k_{\tilde{g}_2}$, получаем $\det \text{br}_{\tilde{q}_1}(\tilde{v}) = -d(\tilde{q}_1) - 1 < -1$.

В следующих трех леммах будем предполагать, что $\tilde{v} \in \langle \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \rangle$. Пусть $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n$ – все существенные вершины подграфа $\langle \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \rangle$. Обозначим $d_j = d(\tilde{k}_j)$, $r_j := \det \text{br}_{\tilde{k}_j}(\tilde{g}_2)$, $l_j := \det \text{br}_{\tilde{k}_j}(\tilde{g}_1)$, $r_{\tilde{g}_1} := \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{g}_2)$, $l_{\tilde{g}_2} := \det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{g}_1)$. Тогда сплайс-диаграмма графа $\tilde{L}$ устроена, как на рис. 4.

РИС. 4

ЛЕММА 2.9. Пусть $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n$ занумерованы в порядке их появления при движении от $\tilde{g}_1$ до $\tilde{g}_2$ и $\tilde{v} \in (\tilde{k}_n \tilde{g}_2)$. Пусть $\mu_i = \det(\tilde{k}_i \tilde{g}_2)$. Если $\mu_i = 2$ при $i > p$, то

$$0 = 3 + \det \tilde{L}_\infty + 2d_1 \dots d_p - \sum_{j=1}^p \mu_j (d_j - 1) \prod_{q < j} d_q. \quad (2.5)$$

(В частности, если $\mu_j = 2$ при $j \geq 1$, то $\det \tilde{L}_\infty = -5$.) Если, кроме того, $\mu_p = 1$, а при $s < i < p$ верно $\mu_i = d_p + 1$, то

$$0 = 3 + \det \tilde{L}_\infty + d_1 \dots d_s (d_p + 1) - \sum_{j=1}^s \mu_j (d_j - 1) \prod_{q < j} d_q. \quad (2.6)$$

(В частности, если $\mu_j = d_p + 1$ при $1 \leq j < p$, то $\det \tilde{L}_\infty = -4 - d_p$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [4, (3)] для коэффициента при $\tilde{g}_2$ получаем $l_{\tilde{g}_2} = -3$. Так как $\min(d_1, \dots, d_n) > 1$, то из [4, лемма 3] имеем $l_1 = \dots = l_n = 1$. Применяя формулу [4, (2)] к подграфу $(\tilde{k}_i \tilde{g}_2)$ в графе $\tilde{L}$, получаем

$$r_i = -\frac{1}{3} \left(d_i \prod_{q > i} d_q^2 - \mu_i \right), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad r_n = -\frac{1}{3} (d_n - \mu_n). \quad (2.7)$$

Применяя формулу [4, (2)] к подграфу $\tilde{L}_\infty$ графа $\tilde{L}$, имеем

$$r_{\tilde{g}_1} = \frac{1}{3} (\det \tilde{L}_\infty - d_1^2 \dots d_n^2). \quad (2.8)$$

С учетом тождества

$$\sum_{j=1}^n (d_j - 1) \prod_{k < j} d_k = d_1 \dots d_n - 1 \quad (2.9)$$

формула [4, (3)] для коэффициента при $\tilde{g}_1$ принимает вид

$$0 = -1 - d_1 \dots d_n - r_{\tilde{g}_1} + \sum_{j=1}^n (d_j - 1) r_j \prod_{k < j} d_k.$$

Подставив сюда (2.7), (2.8), получим

$$0 = -1 + \frac{1}{3} \left(\prod_{q=1}^n d_q^2 - \det \tilde{L}_\infty \right) - \prod_{q=1}^n d_q - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n (d_j - 1) \left(d_j \prod_{q > j} d_q^2 - \mu_j \right) \prod_{k < j} d_k,$$

что в силу (2.9) сводится к

$$0 = -3 - \det \tilde{L}_\infty - 2d_1 \dots d_n + \sum_{j=1}^n \mu_j (d_j - 1) \prod_{q < j} d_q. \quad (2.10)$$

Полагая здесь $\mu_i = 2$ при $i > p$ и снова используя (2.9), получаем (2.5). Если, кроме того, $\mu_{s+1} = \dots = \mu_{p-1} = d_p + 1$, $\mu_p = 1$, то (2.5) с учетом (2.9) дает (2.6).

Аналогично лемме 2.9 доказываются две следующие леммы.

ЛЕММА 2.10. Пусть $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n$ занумерованы в порядке их появления при движении от $\tilde{g}_2$ до $\tilde{g}_1$ и $\tilde{v} \in (\tilde{k}_n \tilde{g}_1)$. Пусть $\mu_i = \det(\tilde{k}_i \tilde{g}_1)$. Если $\mu_i = 1$ при $i > p$, то

$$0 = 4 + \det \tilde{L}_\infty + d_1 \dots d_p - \sum_{j=1}^p \mu_j (d_j - 1) \prod_{q < j} d_q. \quad (2.11)$$

(В частности, если $\mu_j = 1$ при $j \geq 1$, то $\det \tilde{L}_\infty = -5$.)

ЛЕММА 2.11. Пусть $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n$ занумерованы в порядке их появления при движении от $\tilde{g}_1$ до $\tilde{g}_2$ и $\tilde{v} \in (\tilde{k}_{n-1} \tilde{k}_n)$, $\det(\tilde{k}_n \tilde{g}_2) = 1$. Пусть $\mu_i = \det(\tilde{k}_i \tilde{g}_2)$. Если $\mu_j = d_n + 1$ при $p < j \leq n - 1$, то

$$0 = 1 + \det \tilde{L}_\infty + (d_1 \dots d_p + d_n)(d_n + 1) - \sum_{j=1}^p \mu_j (d_j - 1) \prod_{q < j} d_q. \quad (2.12)$$

(В частности, если $\mu_j = d_n + 1$ при $1 \leq j \leq n - 1$, то $\det \tilde{L}_\infty = -1 - (d_n + 1)^2$.)

Последняя лемма этого параграфа касается расположения корня $\tilde{v}$ в графе $\tilde{L}$.

ЛЕММА 2.12. Пусть $\tilde{a} \in \langle \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \rangle$, и пусть $Q_1 := \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_1)$, $Q_2 := \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2)$, Q_3 — подграф, состоящий из всех компонент связности $\delta(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2)$, смежных с $\tilde{a}$ (см. рис. 5). Пусть $\det \tilde{L}_\infty \leq 0$, $\det Q_3 > 0$, и пусть

$$\det(\tilde{a} \tilde{g}_i) \leq (\det \delta(\tilde{a} \tilde{g}_i))^2 \det Q_3 \quad (2.13)$$

при некотором $i = 1, 2$. Тогда $\tilde{v} \in Q_1 \cup Q_2$.

Рис. 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tilde{v} \notin Q_1 \cup Q_2$, то $\det Q_i > 0$, $\det(\tilde{a} \tilde{g}_i) > 0$, $\det \delta(\tilde{a} \tilde{g}_i) > 0$, $i = 1, 2$. Пусть, скажем, (2.13) выполнено при $i = 1$. Обозначим $\Delta_i = \det \text{br}_{\tilde{g}_i}(\tilde{a})$, $i = 1, 2$. Запишем формулу [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a} \tilde{g}_2)$ в графе $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a})$:

$$\Delta_1 \det(\tilde{a} \tilde{g}_2) = \det Q_2 \det \tilde{L}_\infty - \det(\tilde{a} \tilde{g}_1) \det Q_3 (\det \delta(\tilde{a} \tilde{g}_2))^2.$$

Так как правая часть отрицательна и $\det(\tilde{a} \tilde{g}_2) > 0$, то $\Delta_1 < 0$. Но формула [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a} \tilde{g}_1)$ в графе $\tilde{L}$ дает

$$-\det(\tilde{a} \tilde{g}_1) = \det Q_1 \Delta_1 - \det Q_2 \det Q_3 (\det \delta(\tilde{a} \tilde{g}_1))^2,$$

откуда в силу (2.13) и того, что $\det Q_2 \geq 1$, получаем $\det Q_1 \Delta_1 \geq 0$, т.е. $\Delta_1 \geq 0$. Противоречие.

§ 3. Структура графа $\tilde{L}$

Мы будем рассматривать граф $\tilde{L}_\infty$ как состоящий из развилок и соединяющих их подграфов “типа ребра” (определение см. ниже). Цель этого параграфа – показать, что имеется лишь конечное число возможностей для $\tilde{L}_\infty$, и описать их. Напомним, что вершины графа $\tilde{L}_\infty$ мы помечаем знаком тильда, а образы этих вершин при F обозначаем теми же буквами, но без тильды. Пусть $a \in L$. Через a' будем обозначать множество всех вершин $\tilde{a} \in F^{-1}(a)$, на которых F непостоянно.

Так как топологическая степень F равна четырем, имеем

$$\sum_{\tilde{a} \in a'} \text{Deg}(\tilde{a}) = 4. \quad (3.1)$$

Так как граф $\tilde{L}$ является деревом, то справедлива

ЛЕММА 3.1. Пусть a, b, c – вершины графа L и $b \in (ac)$. Пусть также $\tilde{a} \in a'$ и $\tilde{b} \in b'$ – вершины графа $\tilde{L}_\infty$ такие, что $(\tilde{a}\tilde{b})$ является подграфом постоянной степени (см. [4, определение 4]). Тогда

$$\sum_{\tilde{c} \in c' \cap \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})} \text{Deg}(\tilde{c}) \geq \text{Deg}(\tilde{a}\tilde{b}). \quad (3.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Связный подграф $\tilde{Q} \subset \tilde{L}_\infty$ назовем *подграфом “типа ребра”*, если:

- а) подграф $\tilde{Q}$ смежен не более чем с двумя вершинами графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ и F непостоянно на этих вершинах;
- б) если $\tilde{Q}$ смежен только с одной такой вершиной $\tilde{a}$ графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$, то $\det \tilde{Q} = (n(\tilde{a})/\text{Deg } \tilde{Q}) \det F(\tilde{Q})$; если $\tilde{Q}$ смежен с двумя такими вершинами $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$, то $\det \tilde{Q} = (n(\tilde{a})n(\tilde{b})/\text{Deg } \tilde{Q}) \det F(\tilde{Q})$;
- в) если вершина $\tilde{a} \in \tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ смежна с $\tilde{Q}$, а $\tilde{T} \subset \tilde{Q}$ – линейная цепочка, смежная с $\tilde{a}$, то $\text{Deg } \tilde{T} = \text{Deg } \tilde{Q}$.

СОГЛАШЕНИЕ О РИСУНКАХ. На дальнейших рисунках около вершины $\tilde{s}$ указана пара $(m(\tilde{s}), n(\tilde{s}))$, слева (справа) от вершины $\tilde{s}$ изображены смежные с $\tilde{s}$ подграфы, образ которых при F лежит слева (справа) от s ; если $\tilde{s} \notin h'$, то под вершиной $\tilde{s}$ изображены смежные с ней подграфы, образ которых при F лежит под s (см. рис. 1).

Если не будет оговорено противное, то ребра и числа рядом с ними отвечают подграфам “типа ребра” и их степеням, над (под) вершиной $\tilde{s} \in h'$ изображены смежные с $\tilde{s}$ подграфы, чей образ при F лежит над (под) s .

Напомним определение развилки и максимального подграфа постоянной степени (они не отличаются от введенных в [4, определение 5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. а) Вершина $\tilde{l} \in \tilde{L}_\infty$ называется *развилкой*, если $m(\tilde{l}) > 1$.

б) Подграф постоянной степени назовем *максимальным*, если он не содержится в любом другом подграфе постоянной степени.

Из следующего очевидного предложения вытекает, что вершины графа $\tilde{L}_\infty$, смежные с максимальным подграфом постоянной степени, являются развилками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\tilde{s} \in \tilde{L}_\infty$ – нодальная вершина. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) $\nu(\tilde{s}) = \nu(s)$ (здесь $\nu(s)$ – валентность s в графе $\Gamma_{L, g_1 + g_2}$);
- б) $m(\tilde{s}) = 1$;
- в) если линейная цепочка $\tilde{C}$ смежна с $\tilde{s}$, то $\text{Deg}(\tilde{C}) = \text{Deg}(\tilde{s}) = n(\tilde{s})$.

Из предложения 3.4 получаем, что сплайс-диаграммы всякого максимального графа постоянной степени $\tilde{Q}$ и его образа $F(\tilde{Q})$ отличаются только весами. Таким образом, если $\tilde{Q} \cap h' = \emptyset$, то выполнены условия а), в) определения 3.2 (см. рис. 1). Если, кроме того, $\tilde{Q}$ не смежен с $\tilde{g}_1$, то условие б) определения 3.2 следует из [4, лемма 5]. Если $\tilde{Q}$ смежен с $\tilde{g}_1$, то в силу леммы 1.5 $n(\tilde{g}_1) = 1$, и условие б) определения 3.2 вновь следует из [4, лемма 5]. Мы доказали

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Максимальный подграф $\tilde{Q}$ постоянной степени с $\tilde{Q} \cap h' = \emptyset$ является подграфом “типа ребра”.

Докажем вспомогательное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Пусть $\tilde{Q}$ – подграф “типа ребра”, смежный с одной вершиной $\tilde{a}$ графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$. Обозначим $Q = F(\tilde{Q})$, $\tilde{x} = \tilde{a} \cap \tilde{Q}$. Если $\det Q = 1$, то $\det \tilde{Q} = m_{\tilde{x}}(\tilde{a}) = 1$, $n(\tilde{a}) = \text{Deg} \tilde{Q}$ (число $m_{\tilde{x}}$ определено в [4, определение 3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 3.2, б) имеем $\det \tilde{Q} = n(\tilde{a}) / \text{Deg} \tilde{Q}$. Согласно определению 3.2, в) и [4, предложение 1, с)] для линейной цепочки $\tilde{T} \subset \tilde{Q}$, смежной с $\tilde{a}$, выполнено $\text{Deg} \tilde{Q} = \text{Deg} \tilde{T} = m_{\tilde{x}}(\tilde{a}) n(\tilde{a})$. Находим $\det \tilde{Q} = m_{\tilde{x}}(\tilde{a}) = 1$, $\text{Deg} \tilde{Q} = n(\tilde{a})$.

ЛЕММА 3.7. а) Пусть вершина $c \in U \cup h$ нодальна. Тогда любая компонента связности $\tilde{\Lambda} \subset F^{-1}(U_c)$ является подграфом “типа ребра”, смежным с одной вершиной $\tilde{c} \in c'$ графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$. (Напомним, что $U_h = U$.)

б) Если $c \in U$, то $\det \tilde{\Lambda} = 1$, все ветви $\tilde{L}_\infty$, выходящие из $\tilde{c}$, кроме двух, принадлежат $F^{-1}(U_c)$. Одна из оставшихся ветвей содержит h' , другая линейна и имеет положительный определитель.

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1, \dots, c_p = h$ – все нодальные вершины графа $U + h$, занумерованные сверху вниз (см. рис. 1).

а) Воспользуемся индукцией.

1) Пусть $\tilde{\Lambda} \subset F^{-1}(U_{c_1})$. Тогда $\tilde{\Lambda}$ линейна и смежна либо с одной вершиной $\tilde{c}_1 \in c'$, либо с двумя вершинами $\tilde{c}_1 \in c'$ и $\tilde{g}_1$. Условия а), в) определения 3.2

выполняются автоматически, условие б) определения 3.2 вытекает из [4, лемма 5] и леммы 1.5.

2) Пусть а) выполнено для $c_1, \dots, c_j$. Покажем, что а) выполнено для c_{j+1} . Пусть $\tilde{c}_j \in c'_j$, $\tilde{\Lambda} \subset F^{-1}(U_{c_{j+1}})$ – компонента связности, содержащая $\tilde{c}_j$, $m := m(\tilde{c}_j)$, $n := n(\tilde{c}_j)$. В силу утверждения 1.3 $\det U_{c_j} = 1$. Из предположения индукции, утверждения 3.6 и [4, (4)], [4, (5)] получаем, что компонента связности $\tilde{\Lambda}$ отвечает рис. 6, она смежна с единственной вершиной $\tilde{c}_{j+1} \in c'_{j+1}$ графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ (поэтому выполнены условия а), в) определения 3.2), из $\tilde{c}_j$ выходит ровно m компонент связности $F^{-1}(U_{c_j})$, определитель каждой из них равен единице. Пусть $\tilde{R} := \tilde{\Lambda} \cap F^{-1}(R_{c_j})$. Так как R_{c_j} и $(c_j c_{j+1})$ – линейные подграфы, то $\tilde{R}$ и $(\tilde{c}_j \tilde{c}_{j+1})$ – тоже линейные подграфы. В силу утверждения 1.3 и [4, лемма 5]

$$\det \tilde{R} = \frac{\det R_{c_j}}{m} > 0, \quad \det(\tilde{c}_{j+1} \tilde{c}_j) = \frac{n(\tilde{c}_{j+1})}{m} \det(c_{j+1} c_j).$$

Применяя [4, (6)] к вершине $\tilde{c}_j$ графа $\tilde{\Lambda}$, находим

$$\det \tilde{\Lambda} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{n(\tilde{c}_{j+1})}{m} \det U_{c_{j+1}} = \frac{n(\tilde{c}_{j+1})}{nm} \det U_{c_{j+1}}.$$

Так как $\text{Deg } \tilde{\Lambda} = mn$, то имеет место условие б) определения 3.2.

Утверждение б) доказывается аналогично.

Обозначим $U' = F^{-1}(U)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. а) Любая компонента связности $\tilde{U} \subset U'$ является подграфом “типа ребра”, смежным с одной вершиной $\tilde{h} \in h'$ графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$.

б) Если $\tilde{U}$ смежна с $\tilde{g}_1$, то $\tilde{v} \notin \delta(\tilde{g}_1 \tilde{h})$ и все нодальные вершины множества $\delta(\tilde{g}_1 \tilde{v}) \cap \tilde{U}$ несущественны относительно $\tilde{g}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) непосредственно следует из леммы 3.7, а), утверждение б) следует из лемм 2.3, 2.4 и 3.7, б).

Изучим теперь, как устроена окрестность множества h' . Пусть $\tilde{h} \in h'$ и либо $m(\tilde{h}) = 1$, либо L имеет тип 3. Определим подграф $\Delta_{\tilde{h}}$ следующим образом: если $m(\tilde{h}) \neq 1$, то $\Delta_{\tilde{h}}$ состоит из $\tilde{h}$, всех максимальных подграфов постоянной степени, смежных с $\tilde{h}$, и всех компонент связности множества U' , смежных с $\tilde{h}$; если $m(\tilde{h}) = 1$, то $\Delta_{\tilde{h}}$ состоит из максимального подграфа постоянной степени, содержащего $\tilde{h}$, и всех компонент связности множества U' , смежных с $\tilde{h}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.9. а) Пусть $\tilde{h} \in h'$ – развилка, L – граф типа 1 или 3. Тогда с вершиной $\tilde{h}$ смежны ровно $m(\tilde{h})$ компонент связности множества U' , определитель каждой из них равен единице. Пусть $\tilde{h} \cap U' = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$. Тогда $m_{\tilde{p}_1}(\tilde{h}) = \dots = m_{\tilde{p}_n}(\tilde{h}) = 1$.

б) $\Delta_{\tilde{h}}$ является подграфом “типа ребра”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $\det U = 1$, то утверждение следует из утверждения 3.6, следствия 3.8, а) и [4, (4)].

б) Если $\tilde{h}$ не развилка, то согласно предложению 3.4 $\Delta_{\tilde{h}}$ отвечает рис. 7, а), б), если $\tilde{h}$ – развилка, то в силу а) и [4, (4)], [4, (5)] $\Delta_{\tilde{h}}$ отвечает рис. 7, в). Ясно, что

Рис. 7

вершины графа $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$, смежные с $\Delta_{\tilde{h}}$, лежат слева или справа от $\tilde{h}$, поэтому выполнены условия а), в) определения 3.2. Проверка условия б) определения 3.2 аналогична проверке, проведенной в п. 2) доказательства леммы 3.7.

Мы показали, что подграфами “типа ребра” являются:

- а) максимальные подграфы постоянной степени, не пересекающиеся с h' ;
- б) компоненты связности множества U' ;
- в) подграфы $\Delta_{\tilde{h}}$, определенные перед утверждением 3.9.

Далее мы будем “строить” граф $\tilde{L}_\infty$ из развилок и подграфов вида а), б), в). Описанные в утверждении 3.9, а) компоненты не дают вклада в правую часть формулы [4, (5)], и их определители равны единице, поэтому они не будут изображаться на дальнейших рисунках § 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Пусть $\tilde{a}$ – вершина графа $\tilde{L}_\infty$, не содержащаяся ни в одном из подграфов вида а), б), в) (заметим, что $\tilde{a}$ – развилка, $\tilde{a} \notin U'$, а если $a = h$, то L имеет тип 1 или 2). Обозначим через $U_{\tilde{a}}$ подграф графа $\tilde{L}_\infty$, содержащий $\tilde{a}$ и все подграфы вида а), б), в), смежные с $\tilde{a}$.

На дальнейших рисунках § 3 подграфы $U_{\tilde{a}}$ будут изображены в виде вершины $\tilde{a}$ и смежных с ней правых, левых и нижних ребер, где нижние ребра отвечают компонентам связности $F^{-1}(D_a)$. Напомним, что если L – граф типа 2, то $D_h = U$ (см. соглашение в § 1). Мы также не отмечаем компоненты связности U' для графов типа 1.

Для разбора подграфов $U_{\tilde{a}}$ полезно использовать следующее простое

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.11. а) Пусть $\tilde{Q}$ – одна из левых ветвей подграфа $U_{\tilde{a}}$. Тогда $\det F(\tilde{Q})$ и $\det D_a$ взаимно просты, $\det L_a > 1$, $\det D_a > 1$, $\det R_a = 1$.

б) Определители всех нижних ветвей $U_{\tilde{a}}$ и тех левых ветвей $U_{\tilde{a}}$, которые являются ветвями $\tilde{L}_\infty$, попарно взаимно просты, кроме, может быть, одной пары. Одна из ветвей, составляющих эту исключительную пару, смежна с $\tilde{g}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) следует из утверждения 1.3, 2), следствия 1.4; б) следует из [4, лемма 2].

ЛЕММА 3.12. 1) Подграфу $U_{\tilde{a}}$ отвечает одна из диаграмм а)–в), е), ж), з)–ф) рис. 8.

2) В случаях б), у) рис. 8 левая ветвь графа $U_{\tilde{a}}$ смежна с развилкой $\tilde{b}$, $n(\tilde{b}) = m(\tilde{b}) = 2$.

3) В случаях а), м), т) рис. 8 верно: $\tilde{a} \in h'$ и одна из нижних ветвей подграфа $U_{\tilde{a}}$ смежна с $\tilde{g}_1$, в случае м) рис. 8 $\text{Deg}(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 1$.

4) В случае в) рис. 8 либо $\tilde{a}$ правее $\tilde{h}$, либо одна из левых ветвей подграфа $U_{\tilde{a}}$ смежна с некоторой развилкой.

5) В случае л) рис. 8 одна из левых ветвей подграфа $U_{\tilde{a}}$ степени 1 смежна с $\tilde{g}_1$.

6) Если подграфу $U_{\tilde{a}}$ отвечает одна из диаграмм б), у), ф) рис. 8, то $\tilde{a}$ правее $\tilde{h}$.

Рис. 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы опускаем детали, поскольку они аналогичны [4, лемма 8]. В силу определения 3.2 можно выразить определители ветвей подграфа $U_{\tilde{a}}$ через определители их образов при F . Используя [4, (4)], [4, (5)] и утверждения 3.9, 3.11, а), получаем, что подграфу $U_{\tilde{a}}$ отвечает одна из диаграмм рис. 8, а в случаях б), у) рис. 8 левая ветвь подграфа $U_{\tilde{a}}$ смежна с развилкой $\tilde{b}$, $n(\tilde{b}) = m(\tilde{b}) = 2$. Это доказывает 2).

Согласно условию б) определения 3.2 определители нижних ветвей подграфов а), д), з), т) рис. 8 и определители нижних ветвей степени 1 подграфа м) рис. 8

равны $\det D_a$. В силу утверждения 3.11 случаи ∂), ε) рис. 8 невозможны, и имеет место 3).

Согласно условию б) определения 3.2 определители левых ветвей степени 1 подграфа $U_{\tilde{a}}$, которые являются ветвями графа $\tilde{L}_\infty$, равны $\det L_a$. Из (3.2) следует, что при $\text{Deg } \tilde{a} = 4$ левые ветви степени 1 подграфа $U_{\tilde{a}}$ являются ветвями графа $\tilde{L}_\infty$. Используя эти факты и утверждение 3.11, получаем, что случай ι) рис. 8 невозможен, т.е. имеет место 4), 5), а в случае ε) рис. 8 одна из левых ветвей подграфа $U_{\tilde{a}}$ смежна с некоторой развилкой $\tilde{c}$.

Рассмотрим ε) рис. 8. Из (3.1) и (3.2) находим $\text{Deg } \tilde{c} = 2$, значит, подграфу $U_{\tilde{c}}$ отвечает б) рис. 8. Но левая ветвь $U_{\tilde{c}}$ смежна с развилкой $\tilde{b}$ степени 4, значит, все ветви $\tilde{L}$, начинающиеся слева от $\tilde{a}$, проходят через $\tilde{b}$. Это противоречит тому, что $\tilde{L}$ – дерево, поэтому диаграмма ε) рис. 8 невозможна.

Мы получили, что диаграммы ε), ∂), ε), ι) невозможны. Это доказывает 1).

Нам осталось доказать утверждение 6). Далее мы будем предполагать от противного, что либо a левее h , либо $\tilde{a} \in h'$. Нам нужно показать, что тогда диаграммы б), η), ϕ) рис. 8 невозможны.

Предположим, что подграфу $U_{\tilde{a}}$ отвечает ϕ) рис. 8. Аналогично 4) получаем, что одна из левых ветвей смежна с некоторой развилкой $\tilde{b}$. Так как $\text{Deg } \tilde{a} = 4$, то согласно (3.1) и (3.2) подграфу $U_{\tilde{b}}$ соответствует одна из диаграмм а), ϑ) рис. 8. Это противоречит 3), 4) и предположению, что a не правее h .

Допустим, что подграфу $U_{\tilde{a}}$ соответствует η) рис. 8. В силу 1) левая ветвь подграфа $U_{\tilde{a}}$ смежна с развилкой $\tilde{b}$, $m(\tilde{b}) = n(\tilde{b}) = 2$, поэтому подграфу $U_{\tilde{b}}$ отвечает одна из диаграмм m), ϕ) рис. 8. Согласно сказанному выше это противоречит предположению, что a не правее h .

Допустим, что подграфу $U_{\tilde{a}}$ соответствует б) рис. 8. В силу 1) левая ветвь подграфа $U_{\tilde{a}}$ смежна с развилкой $\tilde{b}$, $m(\tilde{b}) = n(\tilde{b}) = 2$, поэтому подграфу $U_{\tilde{b}}$ отвечает η) рис. 8, что противоречит сказанному выше. Случай 6) разобран. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 3.13. *Диаграммы б), p), c), η) рис. 8 невозможны. Если подграфу $U_{\tilde{a}}$ отвечает ϑ) рис. 8, то обе левые ветви подграфа $U_{\tilde{a}}$ являются ветвями графа $\tilde{L}_\infty$, одна из них смежна с $\tilde{g}_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что диаграмма p) рис. 8 (или c) рис. 8) отвечает некоторому подграфу $U_{\tilde{a}}$. Поскольку $\text{Deg } \tilde{a} = 4$, ветви $\tilde{L}_\infty$, начинающиеся справа от $\tilde{a}$, лежат целиком справа от $\tilde{a}$. Пусть $\tilde{R}$ – правая ветвь графа $\tilde{L}_\infty$, выходящая из $\tilde{a}$ и не смежная с $\tilde{g}_2$. По лемме 3.12 либо $\tilde{R}$ – ветвь подграфа $U_{\tilde{a}}$, либо $\tilde{R} = U_{\tilde{b}}$ и подграфу $U_{\tilde{b}}$ отвечает а) рис. 8. Если $\tilde{R}$ является ветвью $U_{\tilde{a}}$, то в силу утверждения 3.11, а) и определения 3.2, б) $\det \tilde{R} = \det R_a/2 = 1/2$, что невозможно. Пусть $\tilde{R} = U_{\tilde{b}}$. Обозначим через $\tilde{R}'$ правую ветвь $U_{\tilde{b}}$. Как и выше, получаем $\det \tilde{R}' = \det R_b/2 = 1/2$, что невозможно. Значит, диаграммы p), c) рис. 8 невозможны.

Предположим, что ϑ) рис. 8 соответствует некоторому подграфу $U_{\tilde{a}}$ и одна из левых ветвей этого подграфа смежна с развилкой $\tilde{b} \neq \tilde{a}$. Если $\text{Deg } \tilde{b} = 2$, то подграфу $U_{\tilde{b}}$ отвечает б) рис. 8, это противоречит тому, что $\tilde{L}_\infty$ – дерево. Пусть $\text{Deg } \tilde{b} = 3$. Тогда подграфу $U_{\tilde{b}}$ отвечает одна из диаграмм e), ε) рис. 8. Склеивая подграфы $U_{\tilde{a}}$ и $U_{\tilde{b}}$ по “ребру” $(\tilde{a}\tilde{b})$, получаем рис. 9. Обозначим через $R_{\tilde{a}}$ ветвь

Рис. 9

графа $\tilde{L}_\infty$, которая начинается справа от $\tilde{a}$, через $R_{\tilde{b}}$ – ветвь графа $\tilde{L}_\infty$, которая начинается справа от $\tilde{b}$ и не проходит через $\tilde{a}$. Из (3.1) и (3.2) следует, что ветвь $R_{\tilde{a}}$ ($R_{\tilde{b}}$) лежит по одну сторону от $\tilde{a}$ ($\tilde{b}$). Как и в разборе диаграмм p), c) рис. 8, получаем, что определитель той из ветвей $R_{\tilde{a}}$, $R_{\tilde{b}}$, которая не смежна с $\tilde{g}_2$, равен $1/2$, что невозможно. Значит, обе левые ветви подграфа $U_{\tilde{a}}$ являются ветвями графа $\tilde{L}_\infty$, что в силу леммы 3.12 возможно, только если одна из них смежна с $\tilde{g}_1$.

Пусть подграфу $U_{\tilde{a}}$ отвечает y) рис. 8. Тогда левая ветвь подграфа $U_{\tilde{a}}$ смежна с развилкой $\tilde{b}$, $n(\tilde{b}) = m(\tilde{b}) = 2$. Пусть $L_{\tilde{a}}$ – левая ветвь графа $\tilde{L}_\infty$, выходящая из $\tilde{a}$. По лемме 3.12 получаем, что ветви $L_{\tilde{a}}$ соответствует одна из диаграмм a)– z) рис. 10.

Рис. 10

Покажем, что $\det L_a$ четен. Разберем a) рис. 10. (Остальные рисунки разбираются аналогично.) Обозначим через d_1 (соответственно d_2, d_3) определитель левой (соответственно правой и нижней) ветви графа $U_{\tilde{b}}$ (согласно определению 3.2, б) определители нижних ветвей $U_{\tilde{b}}$ равны между собой). Из определения 3.2 имеем $\det L_b = 2d_1$, $\det(ba) = d_2$, $\det D_b = d_3$. Из следствия 1.4 следует, что d_3 нечетно. Применяя [4, (6)] к вершине $\tilde{b}$, получаем $\det L_a = (2/d_3) \det L_{\tilde{a}}$. Так как d_3 нечетно, то $\det L_a$ четен.

Пусть d_7 – определитель нижней ветви $U_{\tilde{a}}$. Из определения 3.2, б) следует, что $\det D_a = 2d_7$, значит, $\det D_a$ тоже четен, что противоречит утверждению 1.3, 2) и четности $\det L_a$. Значит, y) рис. 8 невозможен.

Рассмотрим $б$) рис. 8. Левая ветвь подграфа, соответствующего этому рисунку, смежна с развилкой $\tilde{b}$, $m(\tilde{b}) = n(\tilde{b}) = 2$. В силу рис. 8 подграф $U_{\tilde{b}}$ должен отвечать диаграмме y) рис. 8, что невозможно. Значит, диаграмма $б$) рис. 8 невозможна.

Сопоставим графу $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ диаграмму, полученную заменой подграфов $U_{\tilde{a}}$, отвечающих a), $в$) рис. 8, ребрами кратности 2 и заменой остальных подграфов $U_{\tilde{a}}$

ЛЕММА 3.14. *Графу $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$ отвечает одна из диаграмм, приведенных на рис. 11.*

Рис. 11

ЛЕММА 3.15. Пусть вершина $a \in L - U$ подальна, $\tilde{a} \in a'$, Δ — смежная с $\tilde{a}$ ветвь графа $\tilde{L}_\infty$ степени 2 такая, что $F(\Delta) = R_a$, и Δ смежна с $\tilde{g}_2$, но не смежна с $\tilde{g}_1$. Тогда $\tilde{v} \notin \delta(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ и любая подальная вершина графа $\langle \tilde{v}\tilde{g}_2 \rangle \cap \Delta$ несущественна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Δ не содержит развилку, то согласно предложению 3.4 сплайс-диаграммы графов Δ и $F(\Delta)$ отличаются только весами; если Δ содержит развилку, то согласно леммам 3.12, 3.13 Δ является подграфом графа $\Delta_{\tilde{h}}$, определенным перед утверждением 3.9, развилкой Δ может быть только $\tilde{h} \in h'$ и в этом случае определители компонент связности U' , смежных с $\tilde{h}$, равны единице. Используя [4, (6)], [4, лемма 5], утверждение 1.3 и определение 3.2, находим, что $\det \delta(\tilde{a}\tilde{g}_2) > 0$, все компоненты связности множества $\delta(\tilde{a}\tilde{g}_2) - U'$ линейны и для любой нодальной вершины $\tilde{s} \in \langle \tilde{a}\tilde{g}_2 \rangle$, которая не является развилкой, верно $\det(\tilde{s}\tilde{g}_2) = 2$. Применяя леммы 3.7, б), 2.5 и 2.6, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3.16. Пусть одна из левых ветвей $L_{\tilde{a}}$ подграфа $U_{\tilde{a}}$ не смежна с $\tilde{g}_1$, $\tilde{v} \notin L_{\tilde{a}}$, $F(L_{\tilde{a}}) = L_a$. Тогда при $h \notin L_a$ подграф $L_{\tilde{a}}$ линейен; при $h \in L_a$ подграфы L_h и (h_a) линейны, L – граф типа 3 и $\det L_h > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h \notin L_a$, то $L_{\tilde{a}}$ – максимальный подграф постоянной степени, и в силу предложения 3.4 сплайс-диаграммы графов $L_{\tilde{a}}$ и L_a отличаются только весами; если же $h \in L_a$, то $L_{\tilde{a}}$ – один из подграфов $\Delta_{\tilde{h}}$, определенных перед утверждением 3.9, и ему отвечает одна из диаграмм рис. 7. Поэтому развилкой $L_{\tilde{a}} - U'$ может быть только $\tilde{h}$, и в этом случае L – граф типа 3. Обозначим $L_{\tilde{h}} := F^{-1}(L_h) \cap L_{\tilde{a}}$. Так как $\tilde{v} \notin L_{\tilde{h}}$, то $\det L_{\tilde{h}} > 0$ и в силу [4, лемма 5] $\det L_h > 0$. Нам осталось показать, что если $\tilde{b}$ – нодальная вершина $L_{\tilde{a}} - U'$ и $m(\tilde{b}) = 1$, то $b = h$ и L – граф типа 3. Обозначим

$$L_{\tilde{b}} := F^{-1}(L_b) \cap L_{\tilde{a}}, \quad D_{\tilde{b}} := F^{-1}(D_b) \cap L_{\tilde{a}}.$$

(Напомним, что если L типа 2, то $\det L_{\tilde{h}} > 0$.) Согласно [4, (6)], [4, лемма 5] и определению 3.2

$$\det L_{\tilde{b}} = \det L_b, \quad \det D_{\tilde{b}} = \det D_b.$$

Так как $\tilde{v} \notin L_{\tilde{a}}$, то $\min(\det L_b, \det D_b) = 1$, что в силу утверждения 1.3, 2) возможно, только если $b = h$ и L – граф типа 3.

§ 4. Запрет диаграмм 2a), 2б) рис. 11

Обозначим через $\tilde{a}$ левую вершину диаграммы, через $\tilde{b}$ – правую вершину диаграммы.

ЛЕММА 4.1. Диаграммы 2a), 2б) рис. 11 невозможны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем подробно диаграмму 2a) рис. 11. Диаграмма 2б) рис. 11 разбирается аналогично. Согласно лемме 3.12, 3) вершина $\tilde{g}_1$ смежна с одной из нижних ветвей степени 1 подграфа $U_{\tilde{a}}$. Поэтому все ребра диаграммы отвечают подграфам “типа ребра”. Обозначим через l_a^i определитель левой ветви подграфа $U_{\tilde{a}}$ степени i , через d_a^i (соответственно d_b^i) – определитель нижней ветви подграфа $U_{\tilde{a}}$ (соответственно $U_{\tilde{b}}$) степени i , через r_b^i – определитель правой ветви подграфа $U_{\tilde{b}}$ степени i . Из определения 3.2 вытекает

$$\begin{aligned} l_a^1 &= 3l_a^3 = \det L_a, & d_a^1 &= 2d_a^2 = \det D_a, \\ d_b^1 &= 3d_b^3 = \det D_b, & r_b^1 &= r_b^2 = \det R_b = 1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Применяя (4.1) и [4, лемма 3] к вершинам $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, получаем

$$\tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}), \quad \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) = 1, \quad d_b^3 = 1, \quad d_b^1 = \det D_b = 3, \quad \det \text{br}_{\tilde{b}}(\tilde{g}_2) = 1. \quad (4.2)$$

Применяя [4, (6)] к вершине $\tilde{b}$ графа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$, несложно показать, что $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$. (Аналогичные вычисления уже были приведены в [4, лемма 15].) По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{b}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})$ имеем $1 = 1 - 3 \det(\tilde{a}\tilde{b})(\det \delta(\tilde{b}\tilde{g}_2))^2$, что противоречит $\tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})$.

§ 5. Запрет диаграмм 1а)–1з) рис. 11

Через $\tilde{h} \in h'$ обозначим такую вершину, что $(\tilde{h}\tilde{g}_1)$ – компонента связности U' .

Запрет диаграммы 1а) рис. 11. Обозначим через $\tilde{a}$ вершину диаграммы. Согласно утверждению 3.9 и определению 3.10 графу $\tilde{L}_\infty$ отвечает одна из диаграмм, приведенных на рис. 12.

Рис. 12

Пусть $L_{\tilde{a}} = F^{-1}(L_a)$, $D_{\tilde{a}}^i$ – компонента связности $F^{-1}(D_a)$ степени i , смежная с $\tilde{a}$. Применяя определение 3.2, получаем

$$\det L_a = 4 \det L_{\tilde{a}}, \quad \det D_{\tilde{a}}^1 = \det D_a = 3 \det D_{\tilde{a}}^3. \quad (5.1)$$

В силу утверждения 1.3, 2) $\det R_a = 1$, поэтому из определения 3.2 следует

$$\det(F^{-1}(R_a) - (\tilde{a}\tilde{g}_2)) = 1. \quad (5.2)$$

Если $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ – подграф “типа ребра”, то из определения 3.2 следует $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2)_\infty = 1$ (напомним, что $n(\tilde{g}_2) = 2$). Если $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ не является подграфом “типа ребра”, то ему соответствует диаграмма 10) рис. 12 и из [4, (6)] следует $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2)_\infty = \det U$. Поэтому

$$\det(\tilde{a}\tilde{g}_2)_\infty = \begin{cases} \det U, & \text{если } \tilde{L} \text{ отвечает 10) рис. 12,} \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Применяя [4, (6)] к вершине $\tilde{a}$ и используя (5.1)–(5.3) и утверждение 3.9, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. 1) Если $\tilde{L}$ отвечает одна из диаграмм 1)–5), 8), 9), 11), 12) рис. 12, то $\det D_a = 3$, $\det \tilde{L}_\infty = -1$.

2) Если $\tilde{L}$ отвечает одна из диаграмм 6), 7) рис. 12, то $\det \tilde{L}_\infty = -\frac{1}{3} \det U$.

3) Если $\tilde{L}$ отвечает диаграмма 10) рис. 12, то $\det \tilde{L}_\infty = -\det U$, $\det D_a = 3$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. 1) Пусть $\tilde{q}$ – подальная вершина $\langle \tilde{a}\tilde{g}_2 \rangle$, $m(\tilde{q}) = 1$ и $\tilde{g}_1 \notin \langle \tilde{g}_2\tilde{q} \rangle$. Тогда $\det(\tilde{q}\tilde{g}_2) = 2$.

2) Пусть $\tilde{q}$ – подальная вершина $L_{\tilde{a}}$ и $q \in (ha)$. Тогда $\det(\tilde{q}\tilde{g}_2) = 4$.

3) Пусть $\tilde{q}$ удовлетворяет 1) или 2), $D_{\tilde{q}}$ – смежная с $\tilde{q}$ компонента связности $F^{-1}(D_q)$. Тогда $\det D_{\tilde{q}} > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) следует из того, что $\tilde{q}$ не развилка, $n(\tilde{q}) = n(\tilde{g}_2) = 2$, $\langle \tilde{q}\tilde{g}_2 \rangle$ – подграф “типа ребра” и из [4, лемма 5].

2) Так как $\tilde{q}$ не развилка, то $n(\tilde{q}) = 4$ и $\langle \tilde{q}\tilde{a} \rangle$ – подграф постоянной степени. Из формулы [4, (8)] следует $\det(\tilde{a}\tilde{q}) = \det(aq)$. Далее следует применить [4, (6)] для вершины $\tilde{a}$ графа $\langle \tilde{q}\tilde{g}_2 \rangle$, (5.1)–(5.3) и утверждение 5.1.

3) В силу определения 3.2 и утверждения 1.3 $\det D_{\tilde{q}} = \det D_q > 1$.

ЛЕММА 5.3. Диаграммы 1)–4) рис. 12 невозможны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Обозначим $L_{\tilde{h}} = F^{-1}(L_h)$ (вершина $\tilde{h}$ определена в начале § 5). Доказательство проходит так: сначала мы покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{a}) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$, а затем – что $\tilde{v}$ не может содержаться ни в одном из этих трех множеств.

Используя определение 3.2, утверждение 5.1, (5.1)–(5.3) и формулу [4, (6)], для вершины $\tilde{a}$ подграфа $\langle \tilde{h}\tilde{g}_2 \rangle$ находим

$$\det L_{\tilde{h}} = \frac{n(\tilde{h})}{4} \det L_h, \quad \det(\tilde{a}\tilde{h}) = \frac{n(\tilde{h})}{4} \det(ah), \quad \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = n(\tilde{h}) \det R_h. \quad (5.4)$$

1) Покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{a}) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Убедимся сначала, что $\det L_{\tilde{h}} > 0$. В силу (5.4) достаточно проверить, что $\det L_h > 0$. Если L типа 1 или 2, это следует из утверждения 1.3, 2). Пусть L типа 3. В силу утверждения 1.3, 2) и утверждения 5.1 $\det R_a = 1$, $\det L_a > 1$, $\det D_a = 3$, в силу [4, лемма 4] $\det R_h > 0$, $\det(ha) > 0$, $\det \delta(ha) > 0$. Применяя формулу [4, (2)] к подграфу (ha) графа L , имеем

$$\det L_h = \frac{1}{3(\det \delta(ha))^2} (\det L_a \det R_h + \det(ha)) > 0.$$

Так как $\det L_h > 0$, то из (5.1)–(5.4) и утверждения 5.1 следует, что определители всех ветвей графа $\tilde{L}_\infty$, выходящих из вершин $\tilde{a}$ и $\tilde{h}$, положительны, $\det \tilde{L}_\infty < 0$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$. Применяя лемму 2.12 к вершине $\tilde{a}$, имеем $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2) \cup L_{\tilde{a}}$. Если $\det U = 1$, то $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, если $\det U \neq 1$, то $\tilde{L}$ отвечает 2) рис. 12, $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 4$, $\det \delta(\tilde{h}\tilde{g}_2) \geq 3$. Применяя лемму 2.12 к вершине $\tilde{h}$, получаем $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. Итак,

$$\tilde{v} \in ((\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)) \cap ((\tilde{a}\tilde{g}_2) \cup L_{\tilde{a}}) = (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{a}) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2).$$

2) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1)$. Тогда в силу леммы 3.15 и следствия 3.8 подграф $\langle \tilde{a}\tilde{g}_2 \rangle$ линейен, $\det \delta(\tilde{v}\tilde{g}_1) = 1$. Согласно [4, (3)] и лемме 2.1 $\det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a}) = -2$.

Из [4, лемма 3] следует $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = 1$. По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a})$, учитывая (5.2), (5.3) и утверждение 5.1, находим $3 \det L_{\tilde{a}} = 1$, что невозможно.

3) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{a})$. Из лемм 2.7, 2.8, 3.15, следствия 3.8, (5.3) и утверждения 5.2 следует, что подграфы $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ и $(\tilde{v}\tilde{a})$ линейны, $\det \delta(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$.

Если $\det U = 1$, то $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$ и в силу леммы 2.3 вершина $\tilde{h}$ несущественна. Если $\det U \neq 1$, то графу $\tilde{L}$ отвечает 2) рис. 12; из утверждения 1.3, 2) и (5.4) следует $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 4$. В обозначениях леммы 2.11 получаем, что независимо от $\det U$ выполнено $\tilde{k}_n = \tilde{a}$, $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 4$, $d_n = 3$, $\det \tilde{L}_\infty = -1$. Это противоречит (2.12).

4) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. В силу леммы 3.15 подграф $(\tilde{v}\tilde{g}_2)$ линейен, в силу следствия 3.8 $\det \delta(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$. Согласно утверждениям 5.1, 5.2 в условиях леммы 2.9 имеем

$$\det \tilde{L}_\infty = -1, \quad \mu_1 = \dots = \mu_{p-1} = 4, \quad \mu_p = \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1, \\ d_p = 3, \quad \mu_{p+1} = \dots = \mu_n = 2,$$

число p выбрано так, что $\tilde{k}_p = \tilde{a}$. Это противоречит (2.6).

ЛЕММА 5.4. *Диаграммы 5), 6), 7) рис. 12 невозможны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Схема доказательства аналогична доказательству леммы 5.3. Сначала покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$, а затем, что $\tilde{v}$ не может содержаться ни в одном из этих множеств.

1) В силу (5.1)–(5.3) и утверждения 5.1 определители всех ветвей графа $\tilde{L}_\infty$, выходящих из вершины $\tilde{a}$, положительны, $\det \tilde{L}_\infty < 0$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$. Применяя лемму 2.12 к вершине $\tilde{a}$, получаем, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$.

2) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1)$. Случай 5) рис. 12 разбирается аналогично п. 2) в доказательстве леммы 5.3. Если $\tilde{L}$ отвечает 6), 7) рис. 12, то аналогично п. 2) в доказательстве леммы 5.3 имеем: $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ линейен, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$, $\det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a}) = -2$.

Если $\tilde{a}$ существенна, то из [4, лемма 3] следует, что $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = 1$. Применяя формулу [4, (2)] к подграфу $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a})$ и учитывая утверждение 5.1, имеем

$$-2 = -\frac{1}{3} \det U - \frac{1}{3} (\det U)^2 \det L_{\tilde{a}},$$

что противоречит $\det L_{\tilde{a}} > 0$. Если $\tilde{a}$ несущественна, то $\tilde{L}$ отвечает 7) рис. 12, $\det U = 3$. В силу следствия 3.8 и утверждения 5.1 в обозначениях леммы 2.10 имеем $\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$, $\det \tilde{L}_\infty = -1$, что противоречит (2.11).

3) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Тогда из следствия 3.8 получаем $\det \delta(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 1$, из леммы 3.15 и утверждения 5.2 следует, что подграф $(\tilde{v}\tilde{g}_2)$ линейен.

Если $\tilde{L}$ отвечает 5) рис. 12, то $\det(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 1$ и согласно лемме 2.3 $\det D_{\tilde{a}}^1 = \det D_{\tilde{a}}^3 = 1$, что противоречит утверждению 5.1.

Пусть $\tilde{L}$ отвечает одна из диаграмм 6), 7) рис. 12. Тогда $\det \tilde{L}_\infty = -\frac{1}{3} \det U$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$. Если $\tilde{a}$ несущественна, то $\tilde{L}$ отвечает 7) рис. 12, $\det \tilde{L}_\infty = -1$, и в обозначениях леммы 2.9 в силу утверждения 5.2 имеем $\mu_1 = \dots = \mu_n = 2$, что противоречит (2.5). Если $\tilde{a}$ существенна, то в обозначениях леммы 2.9 $\mu_1 = \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$, $\mu_2 = \dots = \mu_n = 2$, $d_1 = d(\tilde{a})$ – одно из чисел $\det U$, $\frac{1}{3} \det U$, $\det L_{\tilde{a}}$,

причем $d_1 = \det L_{\tilde{a}}$, только если $\tilde{L}$ отвечает 7) рис. 12 и $\det U = 3$. Подставив эти данные в (2.6), находим $d_1 = \frac{1}{3} \det U - 4$, что несовместимо ни с одной из трех возможностей для d_1 .

ЛЕММА 5.5. *Диаграмма 8) рис. 12 невозможна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Обозначим $D_{\tilde{h}} := F^{-1}(D_h) \cap (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Из определения 3.2 и утверждений 1.3, 2), 5.1 следует, что: $\det \tilde{L}_\infty = -1$, подграф $D_{\tilde{h}}$ линейен, $\det D_{\tilde{h}} = \det D_h > 1$, $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 2$. Если $\tilde{v} \notin (\tilde{h}\tilde{g}_2)$, то в силу лемм 2.5 и 3.15 $\tilde{v} \in D_{\tilde{h}}$, что противоречит лемме 2.6. Если $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_2)$, то в силу леммы 2.3 и следствия 3.8 это противоречит $\det D_{\tilde{h}} > 1$.

ЛЕММА 5.6. *Диаграмма 9) рис. 12 невозможна. Диаграмма 10) рис. 12 невозможна при $\det U = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Схема доказательства такая же, как в лемме 5.3. В силу утверждения 5.1 $\det \tilde{L}_\infty = -1$. Согласно определению 3.2 и утверждению 1.3, 2) в случае 9) рис. 12 либо $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, либо $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 2$, в случае 10) рис. 12 с $\det U = 1$ верно $\det(U' \cap (\tilde{a}\tilde{g}_2)) = 1$.

1) Покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. Для этого достаточно убедиться в том, что $\tilde{v} \notin \tilde{h} \cup \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a})$. Действительно, в случае 9) рис. 12 имеем $\tilde{L}_\infty = (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2) \cup (\tilde{h} \cup \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}))$, а в случае 10) рис. 12 при $\tilde{v} \notin \tilde{h} \cup \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a})$ верно $\det(\tilde{L}_\infty - \tilde{h}) > 0$, $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, и из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$.

Допустим, что $\tilde{v} \in \{\text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) \cup \tilde{h}\}$. В силу следствия 3.8, леммы 3.15 и утверждения 5.2 подграф $(\tilde{h}\tilde{g}_2)$ линейен, $\det \delta(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$. Применяя утверждение 1.3, 2), леммы 2.3 и 2.5, получаем:

$$\begin{aligned} \text{если } \det U = 1, \text{ то } \det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1, \quad \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_2) = 1; \\ \text{если } \det U \neq 1, \text{ то } \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 2, \quad \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_1) = 1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

причем в последнем случае $\tilde{L}$ отвечает 9) рис. 12.

а) Покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{h})$. Согласно (5.3) $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2)_\infty = 1$. Если $\det U = 1$, то из (5.2), (5.3), (5.5) и формулы [4, (2)] для подграфа $(\tilde{h}\tilde{g}_2)$ графа $(\tilde{a}\tilde{g}_1)$ имеем $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) \det(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 1 - \det(\tilde{h}\tilde{a})$. Так как $\det R_h > 0$ и $\det(ha) > 0$, то [4, лемма 5] влечет $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) > 0$, $\det(\tilde{h}\tilde{a}) > 0$, значит, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_1) \leq 0$. Аналогично, при $\det U \neq 1$ выполнено $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) \leq 0$. Поэтому $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{h})$.

б) Покажем, что $(\tilde{v}\tilde{h})$ – линейный подграф. Если подграф $(\tilde{a}\tilde{h})$ линейен, это очевидно. Допустим, что существует нодальная вершина $\tilde{s} \in (\tilde{a}\tilde{h})$ такая, что подграф $(\tilde{s}\tilde{h})$ линейен. Обозначим $D_{\tilde{s}} = F^{-1}(D_s) \cap (\tilde{g}_2\tilde{a})$. Тогда $\det(\tilde{s}\tilde{g}_2)_\infty = 2$, $\det D_{\tilde{s}} = \det D_s > 1$. В силу (5.5) и формулы [4, (2)] $\det(\tilde{s}\tilde{g}_1) \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 2 - \det(\tilde{s}\tilde{h})$ при $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$; $\det(\tilde{s}\tilde{g}_2) \det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 2 - 2\det(\tilde{h}\tilde{s})$ при $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 2$. Отсюда и из [4, лемма 4] следует, что либо $\tilde{v} \in (\tilde{s}\tilde{g}_1)_\infty$, либо $\det(\tilde{s}\tilde{g}_1) = \det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$. Во втором случае в силу лемм 2.3, 2.4 и неравенства $\det D_{\tilde{s}} > 1$ получаем $\tilde{v} \in (\tilde{s}\tilde{g}_1)_\infty$. Согласно выбору $\tilde{s}$ имеем $\tilde{v} \in (\tilde{s}\tilde{h})$, подграф $(\tilde{v}\tilde{h})$ линейен.

в) Покажем теперь, что $\tilde{v} \notin \tilde{h} \cup \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a})$. Если $\det U = 1$, то (5.5) и [4, (3)] влекут $\det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h}) = -2$. По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{h}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h})$ имеем $\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) = 2 \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) - 1 \geq 1$ и из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \notin \{\text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) \cup \tilde{h}\}$. Если $\det U \neq 1$, то из (5.5) и [4, (3)] следует, что $\det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{h}) = -3$. Используя

$\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = \det U > 1$, $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 2$ и формулу [4, (2)] для подграфа $(\tilde{h}\tilde{g}_1)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{h})$, получаем $\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) = \frac{1}{2}(3\det U - 1) > 2$, и из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \notin \{\text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) \cup \tilde{h}\}$. Это доказывает 1).

2) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1)$. Тогда подграф $(\tilde{h}\tilde{g}_2)$ линейен. Если $\det U = 1$, то $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, если $\det U \neq 1$, то $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 2$, и согласно лемме 2.5 вершина $\tilde{h}$ несущественна. Отсюда и из следствия 3.8 в обозначениях леммы 2.10 имеем $\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$, $\det \tilde{L}_\infty = -1$, что противоречит (2.11).

3) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. В силу леммы 3.15 подграф $(\tilde{v}\tilde{g}_2)$ линейен. Рассуждая так же, как и выше, и используя лемму 2.3 и утверждения 5.1, 5.2, получаем, что в обозначениях леммы 2.9 $\mu_1 = \dots = \mu_n = 2$, $\det \tilde{L}_\infty = -1$, что противоречит (2.5).

ЛЕММА 5.7. *Диаграмма 10) рис. 12 с $\det U \neq 1$ не реализуется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Схема доказательства аналогична лемме 5.3. Пусть $d := \det U$, $\tilde{U}$ – компонента связности U' , смежная с $\tilde{h}$, но не смежная с $\tilde{g}_1$. Согласно [4, лемма 5], (5.3) и утверждению 5.1 имеем

$$\det \tilde{U} = \det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = d > 1, \quad \det \tilde{L}_\infty = -d, \quad \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 1. \quad (5.6)$$

1) Покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_2) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_1)$. Для этого нам достаточно показать, что $\tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a})$, так как тогда $\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) > 0$ и из (5.6), леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_2) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_1)$.

Допустим, что $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a})$. Применяя [4, лемма 3] к $\tilde{h}$, находим

$$\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_1) = \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_2) = 1.$$

В силу следствия 3.8 и леммы 3.15 подграф $(\tilde{h}\tilde{g}_2)$ линейен, $\det \delta(\tilde{g}_1\tilde{h}) = 1$. По формуле [4, (2)] для подграфов $(\tilde{g}_1\tilde{h})$ и $(\tilde{g}_2\tilde{h})$ графа $\tilde{L}$ находим

$$-1 = \det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{h}) - d \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}), \quad -d = \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h}) - d \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}). \quad (5.7)$$

Из леммы 2.1 и [4, (3)] получаем

$$k_{\tilde{g}_1} = 0 = -2 - \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h}) + \Sigma, \quad k_{\tilde{g}_2} = 1 = -2 - \det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{h}) + \Sigma,$$

где Σ – остаток разложения [4, (3)]. Отсюда $\det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{h}) - \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h}) = -1$. Подставив это в (5.7), находим $d = 0$, что невозможно.

2) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. В обозначениях леммы 2.9 имеем $\det \tilde{L}_\infty = -d$, $\mu_1 = 1$, $d_1 = d$, $\mu_2 = \dots = \mu_n = 2$, что противоречит (2.6).

3) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1)$. В обозначениях леммы 2.10 имеем $\det \tilde{L}_\infty = -d$, $\mu_1 = d$, $d_1 = d$, $\mu_2 = \dots = \mu_n = 1$. Подставив это в (2.11), имеем $d(d-1) = 4$, но это уравнение не имеет целых решений.

ЛЕММА 5.8. *Диаграммы 11), 12) рис. 12 не реализуются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Обозначим $R_{\tilde{h}} = \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{h}) \cap F^{-1}(R_h)$.

1) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1)$. В силу леммы 3.15 $\det \delta(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$. Поэтому L – граф типа 3, подграфы $(\tilde{a}\tilde{h})$ и $R_{\tilde{h}}$ линейны. Так как $\det U = 1$, то $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, и, рассуждая, как в доказательстве следствия 3.8, находим $\tilde{v} \in \langle \tilde{a}\tilde{g}_1 \rangle$, $\det \delta(\tilde{v}\tilde{g}_1) = 1$. В обозначениях леммы 2.10 получаем $\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$, что вместе с $\det \tilde{L}_\infty = -1$ противоречит (2.11).

2) Допустим, что $\tilde{v} \notin (\tilde{a}\tilde{g}_1)$. В силу утверждения 1.3, 2) и следствия 3.8 для любой существенной нодальной вершины $\tilde{s} \in \langle \tilde{a}\tilde{g}_1 \rangle$ верно $\det(\tilde{s}\tilde{g}_1) = 1$. Поэтому из леммы 2.3 следует $\tilde{v} \in D_a^1$, что в силу леммы 2.7 противоречит $\det D_a^1 = 3$ и линейности D_a^1 .

Из лемм 5.3–5.8 вытекает

ЛЕММА 5.9. *Диаграмма 1а) рис. 11 не реализуется.*

Запрет диаграмм 1б)–1г) рис. 11.

ЛЕММА 5.10. *Диаграммы 1б), 1в) рис. 11 не реализуются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Пусть $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – соответственно правая и левая вершины диаграммы, D_a^i , $i = 1, 3$, – компоненты связности $F^{-1}(D_a)$ степени i , выходящие из вершины $\tilde{a}$, $d = \det(\tilde{b}\tilde{g}_1)$. Как и в (5.1), (5.4), несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \det D_a^3 &= 1, & \det D_a^1 &= \det D_a = 3, & \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) &= 1, \\ \det(\tilde{b}\tilde{g}_2) &= 2, & \det(\tilde{a}\tilde{b}) &= \frac{1}{2} \det(ab) > 0, \\ \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})_\infty &> 0, & \det \tilde{L}_\infty &< 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Аналогично (5.4) для любой нодальной вершины $\tilde{s} \in (\tilde{b}\tilde{a})$ верно $\det(\tilde{s}\tilde{g}_2) = 4$.

1) Покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{b}\tilde{a}) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. В силу (5.8) и леммы 2.12 имеем $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_1)$. Нам достаточно показать, что $\tilde{v} \notin (\tilde{a}\tilde{g}_1) - (\tilde{a}\tilde{b})$.

Допустим, что это не так. В силу [4, лемма 3] $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = 1$. Используя (5.8) и формулу [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{b}}(\tilde{g}_2)$, имеем

$$\det \text{br}_{\tilde{b}}(\tilde{g}_2) = 2 - 3 \det(\tilde{a}\tilde{b})(\det \delta(\tilde{a}\tilde{g}_2))^2 < 0,$$

что противоречит нашему предположению.

2) Покажем, что $\det \delta(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1$. Если $\tilde{L}$ отвечает 1б) рис. 11, это следует из следствия 3.8. Если $\tilde{L}$ отвечает 1е) рис. 11, то применяя лемму 3.16 к ветви степени 2, выходящей из $\tilde{b}$ и не смежной с $\tilde{g}_1$, находим, что L – граф типа 3, подграфы (bh) и L_b линейны. Поэтому подграф $(\tilde{b}\tilde{h})$ линейен, в силу утверждения 3.6 $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$. Так как $\tilde{v} \notin (\tilde{b}\tilde{g}_1)$, то из следствия 3.8 и леммы 2.3 находим $\det \delta(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1$. Так как L типа 3, то ветви степени 2 графа $\tilde{L}_\infty$, смежные с $\tilde{b}$, являются подграфами “типа ребра”. Применяя (5.8) и [4, (6)], получаем $\det \tilde{L}_\infty = -d$.

3) Допустим $\tilde{v} \in (\tilde{b}\tilde{a})$. По леммам 2.7, 2.8 и 3.15 подграфы $(\tilde{v}\tilde{a})$ и $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ линейны. Так как $\det \delta(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1$, то согласно (5.8) и утверждению 5.2 в обозначениях леммы 2.11 имеем $\mu_1 = \det(\tilde{b}\tilde{g}_2) = 2$, $d_1 = d$, $\mu_2 = \dots = \mu_{n-1} = 4$, $d_n = 3$,

$\det \tilde{L}_\infty = -d$. Подставив эти данные в (2.12), находим $0 = 15 + d$, что противоречит $d > 0$.

4) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Из леммы 3.15 вытекает, что подграф $(\tilde{v}\tilde{g}_2)$ линейен. В обозначениях леммы 2.9 получаем, что для некоторого натурального p выполнено $\mu_1 = 2$, $d_1 = d$, $\mu_2 = \dots = \mu_{p-1} = 4$, $\mu_p = 1$, $d_p = 3$, $\mu_{p+1} = \dots = \mu_n = 2$, $\det \tilde{L}_\infty = -d$. Подставив эти данные в (2.6), имеем $0 = 5 + d$, что противоречит $d > 0$.

ЛЕММА 5.11. *Диаграмма 1г) рис. 11 невозможна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Обозначим через $\tilde{a}$ вершину диаграммы. Тогда $\tilde{L}_\infty = U_{\tilde{a}}$ (см. лемму 3.12). Аналогично запрету диаграмм 5), 8)–12) рис. 12 доказывается, что $\tilde{g}_1$ не смежна ни с одной из правых ветвей графа $U_{\tilde{a}}$, а при $a = h$ граф L имеет тип 2 или 3. Поэтому $\tilde{g}_1$ смежна либо с нижней, либо с одной из левых ветвей графа $U_{\tilde{a}}$. Обозначим $D_{\tilde{a}} = F^{-1}(D_a)$, $L_{\tilde{a}}^i$ – компонента связности $F^{-1}(L_a)$ степени i . Аналогично (5.1), (5.3), утверждению 5.1 имеем:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) &= 1, & \det D_a &= 4 \det \tilde{D}_a, & \det L_a &= \det L_{\tilde{a}}^1 = 3 \det L_{\tilde{a}}^3, \\ \det \tilde{L}_\infty &= \begin{cases} -1, & \text{если } \tilde{g}_1 \text{ смежна с } D_{\tilde{a}}, \\ -\frac{1}{3} \det L_a, & \text{если } \tilde{g}_1 \text{ смежна с } L_{\tilde{a}}^1 \text{ или } L_{\tilde{a}}^3. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Применяя лемму 2.12 к вершине $\tilde{a}$, имеем $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$.

1) Допустим, что $\tilde{g}_1$ смежна с одним из подграфов $L_{\tilde{a}}^1, L_{\tilde{a}}^3$. Из леммы 3.16 следует, что подграфы L_h и (ha) линейны, L типа 3, $\det L_h > 0$. Обозначим $L_{\tilde{h}} = F^{-1}(L_h) \cap (\tilde{a}\tilde{g}_1)$. Имеем: $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, подграфы $L_{\tilde{h}}$ и $(\tilde{h}\tilde{a})$ линейны, $\det L_{\tilde{h}} > 0$. Применяя следствие 3.8 и леммы 2.3, 2.4, находим, что $\tilde{v} \notin \delta(\tilde{g}_1\tilde{a})$ и для каждой существенной вершины $\tilde{s} \in \langle \tilde{a}\tilde{g}_1 \rangle$ верно $\det(\tilde{s}\tilde{g}_1) = 1$. Далее этот случай разбирается так же, как 6), 7) рис. 12.

2) Допустим, что $\tilde{g}_1$ смежна с $D_{\tilde{a}}$. Тогда $a = h$. Применяя [4, лемма 3] к вершине $\tilde{a}$, получаем, что $\det L_{\tilde{a}}^1 = \det L_a = 3$, $\det L_{\tilde{a}}^3 = 1$. Аналогично утверждению 5.2 для любой нодальной вершины $\tilde{s} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$ выполнено $\det(\tilde{s}\tilde{g}_2) = 2$.

а) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Согласно лемме 3.15 и следствию 3.8 в обозначениях леммы 2.9 имеем $\det \tilde{L}_\infty = -1$, $\mu_1 = \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$, $d_1 = \det L_{\tilde{a}}^1 = 3$, $\mu_2 = \dots = \mu_n = 2$, что противоречит (2.6).

б) Невозможность случая $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1)$ показывается аналогично п. 2) в доказательстве леммы 5.3.

§ 6. Запрет диаграмм 3а), 3б) рис. 11

Допустим, что $\tilde{L}$ отвечает одна из диаграмм 3а), 3б) рис. 11. Обозначим через $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ соответственно правую и левую вершины диаграммы.

ЛЕММА 6.1. *Вершина $\tilde{g}_1$ смежна с $(\tilde{b}\tilde{g}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем подробно диаграмму 3а) рис. 11. Диаграмма 3б) разбирается аналогично. Предположим противное. Обозначим через $D_{\tilde{a}}^i$ ($D_{\tilde{b}}^i$) компоненту связности $F^{-1}(D_a)$ ($F^{-1}(D_b)$) степени i , смежную с $\tilde{a}$ ($\tilde{b}$) и отвечающую нижней ветви диаграммы, через $R_{\tilde{a}}^1$ ($R_{\tilde{b}}^1$) – компоненту связности $F^{-1}(R_a)$

$(F^{-1}(R_b))$ степени 1, смежную с $\tilde{a}$ ($\tilde{b}$), через L_1 и L_2 – компоненты связности $F^{-1}(L_b)$. Тогда

$$\begin{aligned} \det D_{\tilde{a}}^1 &= \det D_a = 2, & \det D_{\tilde{a}}^2 &= 1, & \det R_{\tilde{a}}^1 &= \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = \det R_a = 1, \\ \det(\tilde{a}\tilde{b}) &= \frac{1}{3} \det(ab) > 0, & \det(\tilde{b}\tilde{g}_2) &= \det R_b^1 = \det R_b = 1, \\ \det D_b^1 &= 3 \det D_b^3, & \det L_1 &= \det L_2 = \frac{1}{2} \det L_b, \\ \det \tilde{L}_\infty &= -2 \det L_1 \det D_b^3 < 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

1) Покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2) \cup (\tilde{a}\tilde{b})$. Действительно, при $\tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})_\infty$ в силу [4, лемма 4] и (6.1) верно $\det(\tilde{L}_\infty - \tilde{a}) > 0$, $\det \tilde{L}_\infty < 0$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$, поэтому из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. При $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})_\infty$ аналогично п. 1) в доказательстве леммы 5.10 имеем $\tilde{v} \in (\tilde{b}\tilde{a})$.

2) Если $h = b$ и L типа 1, то из следствия 3.8 и утверждения 3.9 следует, что $\det(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1$, $\det \delta(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1$, и согласно лемме 2.3 вершина $\tilde{b}$ несущественна, что противоречит (6.1).

3) Пусть $\tilde{g}_1$ смежна с R_b^1 . Так как $\text{Deg } R_b^1 = 1$, то сплайс-диаграммы графов R_b^1 и R_b изоморфны. Применяя утверждение 1.3, 2) и лемму 2.3, находим, что $\det \delta(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1$ и вершина $\tilde{b}$ несущественна относительно $\tilde{g}_1$, что противоречит (6.1).

4) Допустим, что $\tilde{g}_1$ смежна с L_1 или L_2 (например, с L_1). В силу [4, лемма 3] имеем

$$\det D_b^1 = 3, \quad \det D_b^3 = 1, \quad \det L_1 = \det L_2 = 1.$$

Рассуждая аналогично п. 2) в доказательстве леммы 5.10, находим $\det \delta(\tilde{g}_1\tilde{b}) = 1$. Так как $\det L_1 = 1$, то в силу леммы 2.3 вершина $\tilde{b}$ несущественна, что противоречит (6.1).

5) Допустим, что $\tilde{g}_1$ смежна с одним из подграфов D_b^i , $i = 1, 3$. Тогда из [4, лемма 3] и (6.1) следует $\det L_1 = \det L_2 = 1$. В силу следствия 3.8 $\det \delta(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1$. Несложно проверить, что для нодальной вершины $\tilde{s}$

$$\det(\tilde{s}\tilde{g}_2) = 3, \quad \text{если } \tilde{s} \in (\tilde{a}\tilde{b}), \quad \det(\tilde{s}\tilde{g}_2) = 2, \quad \text{если } \tilde{s} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2). \tag{6.2}$$

а) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{b})$. В силу (6.1), (6.2), следствия 3.8 и леммы 3.15 в обозначениях леммы 2.11 имеем

$$\det \tilde{L}_\infty = -2 \det D_b^3, \quad \mu_2 = \dots = \mu_{n-1} = 3, \quad \mu_n = 1, \quad d_n = 2.$$

Если вершина $\tilde{b}$ несущественна, то $\mu_1 = 3$, $\det \tilde{L}_\infty = -2$, что противоречит (2.12). Если $\tilde{b}$ существенна, то $\mu_1 = 1$, $d_1 = d(\tilde{b})$ – одно из чисел $\det D_b^1 = 3 \det D_b^3$, $\det D_b^3$. Подставив эти данные в (2.12), находим $d_1 = \det D_b^3 - 4$, что несовместно ни с одной из двух возможностей для d_1 .

б) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Из леммы 3.15 следует, что подграф $(\tilde{v}\tilde{g}_2)$ линейен. В силу (6.1), (6.2) в обозначениях леммы 2.9 для некоторого p имеем $k_p = \tilde{a}$, $\det \tilde{L}_\infty = -2 \det D_b^3$, $\mu_2 = \dots = \mu_{p-1} = 3$, $\mu_p = 1$, $d_p = 2$, $\mu_{p+1} = \dots = \mu_n = 2$. Если вершина $\tilde{b}$ несущественна, то $\mu_1 = 3$, $\det \tilde{L}_\infty = -2$, что противоречит (2.6). Если $\tilde{b}$ существенна, то $\mu_1 = 1$, а d_1 то же, что и в а). Подставив эти данные в (2.6), находим $d_1 = \det D_b^3 - 2$, что, как и в а), невозможно.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. $\det \tilde{L}_\infty = -2 \det(\tilde{b}\tilde{g}_2)_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.1 и [4, лемма 3] определители ветвей степени 2 и 3, смежных с $\tilde{b}$, равны единице, определитель нижней ветви степени 1, смежной с $\tilde{b}$, равен трем. Далее следует применить [4, (6)] к вершине $\tilde{b}$.

Изучим теперь более подробно граф $\text{br}_{\tilde{b}}(\tilde{a})$. Согласно утверждению 3.9 и определению 3.10 ему отвечает одна из диаграмм рис. 13.

Рис. 13

Обозначим через D_a^i , $i = 1, 2$, компоненты связности $F^{-1}(D_a)$ степени i , смежные с $\tilde{a}$. Следующее утверждение доказывается аналогично утверждениям 5.1, 5.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.3. а) Если $\tilde{L}$ отвечает одна из диаграмм 1)–4), 7)–10) рис. 13, то $\det D_a^1 = \det D_a = 2$, $\det D_a^2 = 1$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2)_\infty = \det(\tilde{b}\tilde{g}_2)_\infty = 1$, $\det \tilde{L}_\infty = -2$.

б) Если $\tilde{L}$ отвечает одна из диаграмм 5), 6) рис. 13, то $\det D_a^1 = \det U = 2 \det D_a^2$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$, $\det \tilde{L}_\infty = -\det U$.

в) Если $\tilde{L}$ отвечает диаграмма 11) рис. 13, то $\det \tilde{L}_\infty = -2 \det U$, $\det D_a^2 = 1$, $\det D_a^1 = \det D_a = 2$, $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2)_\infty = \det U$, определитель каждого из подграфов, отвечающих верхним ребрам, выходящим из $\tilde{h}$, равен $\det U$.

г) Если $\tilde{L}_\infty$ отвечает одна из диаграмм 1)–4) рис. 13, а подальная вершина $\tilde{s} \in \langle \tilde{h}\tilde{a} \rangle \cup \tilde{h}$ не развилка, то $\det(\tilde{s}\tilde{g}_2) = 3$.

ЛЕММА 6.4. Диаграмма 1) рис. 13 не реализуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D_{\tilde{h}} := F^{-1}(D_h) \cap (\tilde{a}\tilde{b})$. Подграф $D_{\tilde{h}}$ линейен, $\det D_{\tilde{h}} = \det D_h > 1$, $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = \det U = 1$. В силу лемм 2.3, 2.4 $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1)$. Так как $\tilde{h}$

не развилка, то из леммы 2.7 и утверждения 6.3, г) следует, что $\det D_{\tilde{h}} = 1$, что неверно.

ЛЕММА 6.5. Если графу $\tilde{L}$ отвечает одна из диаграмм 2), 3) рис. 13, то $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\tilde{v} \notin (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. Тогда $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = 1$, $\det \delta(\tilde{h}\tilde{g}_1) = 1$, подграфы $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ и $(\tilde{h}\tilde{a})$ линейны и $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{b})$. В силу утверждения 6.3 и формулы [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $(\tilde{b}\tilde{g}_1)$ верно $\det(\tilde{b}\tilde{g}_1) = 1 - 2 \det(\tilde{a}\tilde{b})_\infty < 0$. Поэтому $\tilde{v} \in [\tilde{h}\tilde{b})$. Заметим, что $\det(\tilde{h}\tilde{g}_1) = \det U$. Из утверждения 1.3, 2), лемм 2.3, 2.4 и 2.7 следует:

$$\begin{aligned} \text{если } \det U = 1, \text{ то } \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_2) &= 1; \\ \text{если } \det U \neq 1, \text{ то } \tilde{L} \text{ отвечает 2) рис. 13, } \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) &= 3, \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_1) = 1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Аналогично п. б) в доказательстве леммы 5.6 показывается, что подграф $(\tilde{v}\tilde{h})$ линейен.

Если $\det U = 1$, то из [4, (3)] и (6.3) следует $\det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h}) = -2$. Применяя формулу [4, (2)] к подграфу $(\tilde{h}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h})$ и к подграфу $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_2)$ и используя утверждение 6.3 и (6.3), находим

$$-2 \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = -2 - 4 \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{b}), \quad 1 = \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) - 2 \det(\tilde{a}\tilde{h}).$$

Поэтому $\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{b}) = \det(\tilde{a}\tilde{h}) > 0$. Так как $\det U = 1$, то из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$, а это противоречит предположению $\tilde{v} \notin (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$.

Если $\det U \neq 1$, то из (6.3) следует, что $\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{g}_1) = 1$. С помощью формул [4, (3)] и [4, (2)] несложно показать, что $\det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{h}) = -7$. В силу (6.3), утверждения 6.3 и формулы [4, (2)] для подграфа $(\tilde{h}\tilde{g}_1)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{h})$ находим $-7 \det U = -2 - 3 \det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{b})$, значит, $\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{b}) > \det U$ и из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$, а это противоречит предположению $\tilde{v} \notin (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$.

ЛЕММА 6.6. Диаграммы 2), 3) рис. 13 не реализуются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Согласно утверждению 6.3 $\det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1$. Из лемм 2.12 и 6.5 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{a}) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. Покажем, что $\tilde{v}$ не может содержаться ни в одном из этих трех множеств.

1) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1)$. Тогда $(\tilde{a}\tilde{h})$ и $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ линейны, $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = 1$, из [4, (3)] и следствия 3.8 следует, что $\det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h}) = -2$. По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{h})$ находим $\det(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 0$. Если $\det U \neq 1$, то в силу утверждения 6.3, г) и леммы 2.7 вершина $\tilde{h}$ несущественна, поэтому независимо от $\det U$ в обозначениях леммы 2.10 имеем: $\det \tilde{L}_\infty = -2$, $\mu_1 = \det(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 0$, $d_1 = 2$, $\mu_2 = \dots = \mu_n = 1$, что противоречит (2.11).

2) Аналогично пп. 3), 4) в доказательстве леммы 5.3 находим $\tilde{v} \notin (\tilde{h}\tilde{a}) \cup (\tilde{g}_2\tilde{a})$.

ЛЕММА 6.7. Диаграмма 4) рис. 13 не реализуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. В силу утверждения 6.3 и лемм 2.3, 2.4 получаем $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1)$, из леммы 3.15 следует, что подграф $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ линейен. В силу следствия 3.8 в обозначениях леммы 2.10 имеем $\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$, $\det \tilde{L}_\infty = -2$, что противоречит (2.11).

ЛЕММА 6.8. Если подграфу $\tilde{L}_\infty$ отвечает одна из диаграмм 5), 6) рис. 13, то $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем сначала, что $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Действительно, при $\tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})$ верно $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) > 0$, учитывая определение 3.2 и утверждения 1.3, 2), 6.3, находим

$$\det(\tilde{L}_\infty - \tilde{a}) > 0, \quad \det \tilde{L}_\infty < 0, \quad \det(\tilde{a}\tilde{g}_2) = 1,$$

поэтому из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$.

2) Покажем, что $\tilde{v} \notin \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})$. Допустим противное. В силу следствия 3.8 и леммы 3.15 подграф $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ линейен и $\det \delta(\tilde{a}\tilde{g}_1) = 1$.

Невозможность случая $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_1) = \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = 1$ доказывается аналогично лемме 5.7 (то, что теперь определители компонент связности U' , смежных с $\tilde{a}$, различны, не влияет на рассуждения).

Обозначим $d = \max(\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_1), \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2))$. Так как $d > 1$, то $\tilde{L}$ отвечает 6) рис. 13, $\det U = 2 = \det(\tilde{a}\tilde{g}_1)$, $\min(\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_i)) = 1$, $i = 1, 2$. Из утверждения 6.3 следует $\det \tilde{L}_\infty = -2$.

а) Пусть $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_1) = d$. По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\tilde{L}$ и для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_1)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{a})$ имеем

$$-1 = \det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{a}) - d \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}), \quad 2 \det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{a}) = -2d - \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}).$$

Отсюда $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) = -(2d - 2)/(2d + 1)$, что в силу $d > 1$ не является целым числом.

б) Пусть $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = d$. Как и выше, по формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_1)$ графа $\tilde{L}$ и для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a})$ имеем

$$-2 = \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a}) - d \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}), \quad \det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a}) = -2d - 2 \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}).$$

Отсюда $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) = -(2d - 2)/(d + 2)$. Так как $d > 1$, то $d = 4$, $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) = -1$, $\det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a}) = -6$. По формуле [4, (2)] для подграфа $\tilde{L}_\infty$ графа $\tilde{L}$ имеем $2 = -6 \det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{a}) - 1$, что невозможно.

ЛЕММА 6.9. Диаграммы 5), 6) рис. 13 невозможны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. В силу леммы 6.8 $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{a}\tilde{g}_2)$.

1) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_2)$. Если $\tilde{a}$ несущественна, то $\tilde{L}$ отвечает 6) рис. 13, $\det U = 2$ и в обозначениях леммы 2.9 $\mu_1 = \dots = \mu_n = 2$, $\det \tilde{L}_\infty = -2$, что противоречит (2.5). Если $\tilde{a}$ существенна, то в обозначениях леммы 2.9 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \dots = \mu_n = 2$, $\det \tilde{L}_\infty = -\det U$, $d_1 = d(\tilde{a})$ — одно из чисел $\det U$, $(1/2) \det U$ и $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})$, причем $d_1 = \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})$, только если $\tilde{L}$ отвечает 6) рис. 13, и $\det U = 2$. Подставив эти данные в (2.6), находим $0 = 4 - \det U + d_1$, что возможно, только если $\det U = 8$, $d(\tilde{a}) = 4$. Из [4, (3)] следует, что $\det \text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{v}) = -3$. Применяя [4, лемма 3] к вершине $\tilde{a}$, имеем $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b}) = \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_1) = 1$. По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_1)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_2}(\tilde{v})$, учитывая утверждение 6.3, имеем $-3 \det U = -\det U - d(\tilde{a})$, что противоречит $\det U = 8$, $d(\tilde{a}) = 4$.

2) Предположим, что $\tilde{v} \in (\tilde{a}\tilde{g}_1)$. Если $\tilde{a}$ несущественна, то аналогично п. 2) в доказательстве леммы 5.4 получаем противоречие. Если $\tilde{a}$ существенна, то аналогично п. 2) в доказательстве леммы 5.3 имеем $\det \text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a}) = -2$, $\det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{g}_2) = 1$. По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}\tilde{g}_2)$ графа $\text{br}_{\tilde{g}_1}(\tilde{a})$, учитывая утверждение 6.3, имеем $-2 = -\det U - (1/2) \det^2 U \det \text{br}_{\tilde{a}}(\tilde{b})$, что противоречит $\det U \geq 2$.

Аналогично леммам 5.5 и 5.8 доказывается

ЛЕММА 6.10. *Диаграммы 7), 8), 10) рис. 13 не реализуются.*

ЛЕММА 6.11. *Диаграммы 9), 11) рис. 13 не реализуются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное.

1) Покажем, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. Случай 11) рис. 13 с $\det U \neq 1$ разбирается аналогично п. 1) в доказательстве леммы 5.7. Разберем остальные случаи: 11) рис. 13 с $\det U = 1$ и 9) рис. 13. Из утверждения 6.3 следует, что $\det \tilde{L}_\infty = -2$. Если допустить, что $\tilde{v} \notin (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$, то аналогично а), б) в доказательстве леммы 5.6 получаем, что $\tilde{v} \in [\tilde{h}\tilde{a}]$ и подграф $(\tilde{v}\tilde{h})$ линейен; аналогично в) в доказательстве леммы 5.6 (там $\det \tilde{L}_\infty = -1$, здесь $\det \tilde{L}_\infty = -2$) получаем

$$\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) = \begin{cases} 2 \det(\tilde{h}\tilde{g}_2) - 2 \geq 0 & \text{при } \det U = 1, \\ \frac{3 \det U - 2}{2} \geq 2 & \text{при } \det U \neq 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

Если $\det \text{br}_{\tilde{h}}(\tilde{a}) = 0$, то $\det(\tilde{h}\tilde{g}_2) = 1$, что противоречит лемме 2.8. В силу (6.4) и леммы 2.12 получаем $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1) \cup (\tilde{h}\tilde{g}_2)$, что противоречит нашему предположению.

2) Аналогично пп. 2), 3) в доказательстве леммы 5.6 показывается невозможность случаев 11) рис. 13 с $\det U = 1$ и 9) рис. 13. Покажем, что 11) рис. 13 с $\det U \neq 1$ тоже невозможен.

а) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_2)$. В обозначениях леммы 2.9 имеем $\mu_1 = 1$, $d_1 = \det U$, $\det \tilde{L}_\infty = -2 \det U$, $\mu_2 = \dots = \mu_n = 2$. Подставив эти данные в (2.6), находим $\det U = 4$. Согласно [4, лемма 5] $\det(ah) = 2 \det(\tilde{a}\tilde{h})$, значит, числа $\det U$ и $\det(ah)$ не взаимно просты, что противоречит $\det R_a = 1$.

б) Допустим, что $\tilde{v} \in (\tilde{h}\tilde{g}_1)$. Аналогично п. 3) в доказательстве леммы 5.7 (там $\det \tilde{L}_\infty = -\det U$, здесь $\det \tilde{L}_\infty = -2 \det U$) находим $\det U = 2$, что, как и в а), невозможно.

Объединяя утверждения лемм 6.4, 6.6, 6.7, 6.9–6.11, получаем

ЛЕММА 6.12. *Диаграммы 3а), 3б) рис. 11 не реализуются.*

§ 7. Запрет диаграмм 4а), 4б) рис. 11

Разберем подробно 4б) рис. 11 (аналогично разбирается 4а) рис. 11). Пусть $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_2$ – развилки, отвечающие соответственно левой и правой вершинам, $a := F(\tilde{a}_1)$, $b := F(\tilde{b}_2)$, $\tilde{a}_2 := a' \setminus \tilde{a}_1$, $\tilde{b}_1 := b' \setminus \tilde{b}_2$. Заметим, что если $a = h$ или $b = h$, то L – граф типа 1 или 2.

На рис. 14 верхняя диаграмма отвечает графу $\tilde{L}_\infty + \tilde{g}_2$, нижняя – графу L . Подграфы (ab) , R_b и L_a графа L изображены ребрами, ребра под вершиной a (b) отвечают D_a (D_b). (Напомним, что если L – граф типа 2, то $D_h = U$ (см. соглашение в § 1).) На верхней диаграмме ребра отвечают компонентам связности $F^{-1}(L_a \cup (ab) \cup R_b \cup D_a \cup D_b)$. Числа около ребер отвечают определителям подграфов (подробно см. ниже).

Таким образом, если L – граф типа 1 и h совпадает с a или b , то на рис. 14 отмечены все компоненты связности $L - a - b$, кроме U , и все компоненты связности

Рис. 14

$F^{-1}(L - a - b)$, кроме содержащихся в U' . Неотмеченные компоненты не повлияют на дальнейшие рассуждения (см. § 3).

Проведем некоторые вспомогательные вычисления. По лемме 3.14 все ребра 4б) рис. 11, кроме, быть может, одного, отвечают подграфам “типа ребра”. Это исключительное ребро отвечает смежному с $\tilde{g}_1$ подграфу $\tilde{V}$ вида а), в) рис. 8. Пусть d_4 – определитель ветви степени 1 графа $\tilde{V}$. Применяя определение 3.2 и [4, (6)], получаем

$$\det \tilde{V} = d_4 \frac{n(\tilde{p})n(\tilde{q})}{2} \det F(\tilde{V}),$$

где $\tilde{p}, \tilde{q}$ – смежные с $\tilde{V}$ вершины графа $\tilde{L}_\infty - \tilde{g}_1$ (мы считаем, что $n(\emptyset) = 1$). Числа около ребер – это определители соответствующих им подграфов, причем число в скобках отвечает подграфу $\tilde{V}$.

Из рис. 14 получаем, что $d_1, d_3, 2d_0, 2d_2$ – целые числа. Покажем, что d_0 целое. В силу рис. 14 нам достаточно показать, что если $\tilde{V}$ – левая ветвь $\tilde{L}_\infty$, выходящая из $\tilde{a}_1$, то d_4 нечетно. Предположим, что $\tilde{V}$ соответствует а) рис. 8 (аналогично разбирается в) рис. 8). Согласно определению 3.2 $\det U = d_4$ и $\det L_h$ четен, поэтому из [4, лемма 2] следует, что d_4 нечетно. Так как $n(\tilde{a}_1) = 1$, $\det R_a = 1$, то аналогично предыдущему получаем, что d_2 целое.

Мы будем опускать некоторые промежуточные вычисления, поскольку они аналогичны приведенным в [4, лемма 10]. Обозначим $\delta := \det \delta(ab)$. Применяя [4, лемма 5] и определение 3.2, получаем

$$\det \delta(\tilde{a}_2 \tilde{b}_2)_\infty = \det \delta(\tilde{a}_1 \tilde{b}_1)_\infty = \delta, \quad \det \delta(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2)_\infty = \lambda \delta. \quad (7.1)$$

Здесь и ниже $\lambda = 1$, если граф $\delta(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2)$ не содержит $\tilde{V}$, иначе $\lambda = d_4$. Применяя определение 3.2 и формулу [4, (2)] для подграфа (ab) графа L , находим

$$\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)_\infty = \det L_b = 18d_0d_1d_3\delta^2 - 2d_2, \quad \det \text{br}_{\tilde{a}_1}(\tilde{b}_1)_\infty = \det R_a = 1. \quad (7.2)$$

Обозначим через $\Delta_{\tilde{a}_1}$ компоненту связности $F^{-1}(L_b)$, содержащую $\tilde{a}_1$, через $\Delta_{\tilde{b}_2}$ – компоненту связности $F^{-1}(R_a)$, содержащую $\tilde{b}_2$. По формуле [4, (6)] для вершин $\tilde{a}_1 \in \Delta_{\tilde{a}_1}$ и $\tilde{b}_2 \in \Delta_{\tilde{b}_2}$ получаем

$$\det \Delta_{\tilde{a}_1} = \lambda d_0 d_2 \det L_b, \quad \det \Delta_{\tilde{b}_2} = \lambda d_2. \quad (7.3)$$

Из (7.1)–(7.3) и формулы [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}_1 \tilde{b}_1)_\infty$ графа $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty$ находим

$$2d_2 \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty = \lambda(d_0 d_2 \det L_b - 6d_0^2 d_1 d_2 d_3 \delta^2).$$

Подставив сюда (7.2), получаем

$$\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty = \lambda d_0 (6d_0 d_1 d_3 \delta^2 - d_2). \quad (7.4)$$

Аналогично, по формулам (7.1)–(7.3) и формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}_2 \tilde{b}_2)_\infty$ графа $\text{br}_{\tilde{a}_1}(\tilde{b}_2)_\infty$ получаем

$$\det \text{br}_{\tilde{a}_1}(\tilde{b}_2)_\infty = \lambda(6d_0 d_1 d_3 \delta^2 - d_2). \quad (7.5)$$

Покажем, что

$$\det \tilde{L}_\infty = \lambda d_0 (-8d_0 d_1 d_3 \delta^2 + d_2), \quad \det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2)_\infty = \lambda d_0 (2d_0 d_1 d_3 \delta^2 - d_2). \quad (7.6)$$

Разберем случай, когда $(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2) = \tilde{V}$. Остальные случаи разбираются аналогично. Подставив (7.1), (7.4), (7.5) в формулу [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2)_\infty$ графа $\tilde{L}_\infty$, находим

$$d_4 d_2 \det \tilde{L}_\infty = (6d_0 d_1 d_3 \delta^2 - d_2)^2 d_4^2 d_0 - d_3 \det L_b 2d_0^2 d_1 \delta^2 d_4^2.$$

Используя (7.2), получаем первую формулу (7.6). Подставив (7.1)–(7.4) в выражение [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2)_\infty$ графа $\text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2)_\infty$, получаем

$$d_4 d_2 \det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2)_\infty = d_0 d_2 d_4^2 (6d_0 d_1 d_3 \delta^2 - d_2) - 4d_2 d_0^2 d_3 d_1 d_4^2 \delta^2,$$

откуда следует вторая формула (7.6).

Обозначим $L_{\tilde{a}_2} = F^{-1}(L_a) \cap \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)_\infty$, $D_{\tilde{a}_2} = F^{-1}(D_a) \cap \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)_\infty$.

ЛЕММА 7.1. 1) Если $\tilde{g}_1$ не смежна с $L_{\tilde{a}_2} \cup D_{\tilde{a}_2}$, то $\tilde{v} \in L_{\tilde{a}_2} \cup D_{\tilde{a}_2}$.

2) Если $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty \leq 0$, то $\tilde{v} \in (\tilde{a}_1 \tilde{b}_2)_\infty$.

3) Если $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty > 0$, то $\det \tilde{L}_\infty < 0$ и $\tilde{v} \in (\tilde{b}_2 \tilde{g}_2) \cup \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Подграфы $L_{\tilde{a}_2}$ и $D_{\tilde{a}_2}$ являются ветвями графа $\tilde{L}$; согласно рис. 14 $\min(\det L_{\tilde{a}_2}, \det D_{\tilde{a}_2}) > 1$ и утверждение следует из [4, лемма 3].

2) Из (7.4), (7.5) имеем $\det \text{br}_{\tilde{a}_1}(\tilde{b}_2)_\infty \leq 0$, значит, $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty \cap \text{br}_{\tilde{a}_1}(\tilde{b}_2)_\infty = (\tilde{a}_1 \tilde{b}_2)_\infty$.

3) Согласно (7.4) $d_2 < 6d_0 d_1 d_3 \delta^2$. Подставив это в (7.6), получаем $\det \tilde{L}_\infty < -2d_0 d_1 d_3 \delta^2 < 0$. Допустим $\tilde{v} \notin (\tilde{b}_2 \tilde{g}_2) \cup \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)$. Тогда из 1) следует, что $\tilde{g}_1 \in \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)$; $\det(\tilde{b}_2 \tilde{g}_2) = 1$, $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) > 0$. Применяя лемму 2.12, получаем $\tilde{v} \in (\tilde{b}_2 \tilde{g}_2) \cup \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)$, что противоречит допущению.

ЛЕММА 7.2. Если $\tilde{v} \in L_{\tilde{a}_2} \cup D_{\tilde{a}_2}$, то $\tilde{g}_1 \in (\tilde{b}_2\tilde{g}_2) \cup \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)_\infty$, то $\det(\tilde{L}_\infty - \tilde{b}_2 - \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)_\infty) > 0$, поэтому из леммы 7.1, 3) следует, что $\det \tilde{L}_\infty < 0$. Согласно (7.2) и утверждению 1.3, 2) $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)_\infty = \det L_b > 0$, поэтому $\det(\tilde{L}_\infty - \tilde{b}_2) > 0$.

Если $\tilde{g}_1 \notin (\tilde{b}_2\tilde{g}_2)$, то $\det(\tilde{b}_2\tilde{g}_2) = 1$ и из леммы 2.12 следует, что $\tilde{v} \in (\tilde{b}_2\tilde{g}_2) \cup \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{g}_1)$. Учитывая условие леммы, получаем $\tilde{g}_1 \in \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)$.

ЛЕММА 7.3. $\tilde{v} \notin L_{\tilde{a}_2} \cup D_{\tilde{a}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Имеем $\det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2)_\infty > 0$ в силу [4, лемма 4]. Согласно лемме 7.2 $\text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty$. Учитывая (7.4), (7.6) и [4, лемма 3], находим

$$\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) > 4, \quad \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{g}_2) = d_3 = d_0 = d_1 = 1. \quad (7.7)$$

1) Допустим $\tilde{g}_1 \in \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2)$. Тогда $\det(\tilde{b}_2\tilde{g}_2) = 1$, $\det(\tilde{a}_1\tilde{b}_2) = d_2$. Обозначим $\Delta := \Delta_{\tilde{b}_2} \cup \tilde{g}_2$. Так как $\tilde{v} \notin \Delta$, то $\det \Delta > 0$. Используя (7.3), (7.7) и формулу [4, (2)] для подграфа $(\tilde{b}_2\tilde{g}_2)$ графа Δ , имеем $\det \Delta = d_2 - 2d_2^2 \det^2 \delta(\tilde{b}_2\tilde{g}_2) < 0$. Противоречие.

2) Допустим $\tilde{g}_1 \in (\tilde{b}_2\tilde{g}_2)$. В силу [4, лемма 3] $\det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{g}_2) = 1$. Используя (7.1), (7.2), (7.7) и формулу [4, (2)] для подграфа $(\tilde{b}_2\tilde{a}_2)$ графа $\tilde{L}$, имеем $-2d_2 = (18\delta^2 - 2d_2) - 6 \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)\delta^2$, откуда $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = 3$, что противоречит (7.7). Мы получили $\tilde{g}_1 \notin \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) \cup (\tilde{b}_2\tilde{g}_2)$, что противоречит лемме 7.2 и первоначальному предположению.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. $\tilde{g}_1$ смежна с $L_{\tilde{a}_2} \cup D_{\tilde{a}_2}$, $\tilde{v} \in (\tilde{a}_1\tilde{b}_2) \cup (\tilde{b}_2\tilde{g}_2) \cup (\tilde{b}_2\tilde{a}_2)$, $d_0 = d_1 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из лемм 7.1, 7.3 и [4, лемма 3] для вершин $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$.

Таким образом, мы показали, что все ребра рис. 14 отвечают подграфам “типа ребра”.

ЛЕММА 7.5. $\det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{g}_1) = 1$, $\det \delta(\tilde{g}_1\tilde{a}_2) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из следствия 7.4 и [4, лемма 3] для вершины $\tilde{a}_2$, второе получается аналогично п. 2) в доказательстве леммы 5.10.

ЛЕММА 7.6. Если $\tilde{g}_1$ смежна с $L_{\tilde{a}_2}$, то $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) = 9d_3\delta^2 - 4d_2$, если $\tilde{g}_1$ смежна с $D_{\tilde{a}_2}$, то $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) = 6d_3\delta^2 - 2d_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из (7.2), следствия 7.4, леммы 7.5 и формулы [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}_2\tilde{g}_1)$ графа $\text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{g}_1)$.

ЛЕММА 7.7. $\tilde{v} \in (\tilde{b}_2\tilde{a}_2) \cup (\tilde{b}_2\tilde{g}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. В силу следствия 7.4 и леммы 7.1, 3) $\tilde{v} \in (\tilde{a}_1\tilde{b}_2)$, $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)_\infty \leq 0$. Отсюда и из (7.4) следует, что $d_2 \geq 6d_3\delta^2$, поэтому из леммы 7.6 следует, что $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) < 0$, что противоречит $\tilde{v} \in (\tilde{a}_1\tilde{b}_2)$.

ЛЕММА 7.8. $\delta(ab) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует нодальная вершина $k \in (ab)$ такая, что подграф (ka) линейен. Обозначим $\tilde{k}_1 := (\tilde{a}_1\tilde{b}_1) \cap k'$, $\tilde{k}_2 := (\tilde{a}_1\tilde{b}_2) \cap k'$, $\tilde{k}_3 := (\tilde{a}_2\tilde{b}_2) \cap k'$, $d_5 := \det(ak)$, $d_6 := \det D_k$, $d_7 = \det(kb)$. Так как $(\tilde{a}_2\tilde{b}_2)$, $(\tilde{a}_1\tilde{b}_2)$, $(\tilde{a}_1\tilde{b}_1)$ являются подграфами постоянной степени, то $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_3$ – не развилки. Приведем рис. 15, более подробный, чем рис. 14. Рядом с ребрами рисунка указаны определители отвечающих им подграфов. Они могут быть вычислены с помощью [4, лемма 5].

Рис. 15

Покажем сначала, что $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{k}_3}(\tilde{a}_2)$. В силу утверждения 1.3, 2) $\det R_k = 1$, $\det R_a = 1$, $d_6 > 1$. Аналогично выводу (7.2), (7.3) получаем

$$\begin{aligned} \det(\tilde{k}_3\tilde{g}_1) &= \det L_k, & \det(\tilde{k}_1\tilde{k}_2) &= d_5 \det L_k, \\ \det(\tilde{k}_3\tilde{k}_2)_\infty &= d_7, & \det L_k &= 6d_6 - d_5. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Применяя [4, лемма 3] к вершинам $\tilde{k}_2$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{k}_1$, находим

$$\det \text{br}_{\tilde{k}_2}(\tilde{a}_1) = \det \text{br}_{\tilde{a}_1}(\tilde{b}_1) = \det \text{br}_{\tilde{k}_1}(\tilde{b}_1) = 1. \quad (7.9)$$

Учитывая (7.8), (7.9) и формулу [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}_1\tilde{k}_1)$ графа $\text{br}_{\tilde{k}_2}(\tilde{a}_1)$, получаем

$$\det L_k = 1 + 2d_6, \quad d_5 = 4d_6 - 1. \quad (7.10)$$

Найдем $\det \text{br}_{\tilde{k}_3}(\tilde{a}_2)$ в зависимости от расположения $\tilde{g}_1$. По формуле [4, (2)] для подграфа $(\tilde{a}_2\tilde{g}_1)$ в графе $\text{br}_{\tilde{k}_3}(\tilde{a}_2)$, учитывая лемму 7.5, имеем

$$\det \text{br}_{\tilde{k}_3}(\tilde{a}_2) = \begin{cases} 2 - 5d_6 < 0, & \text{если } \tilde{g}_1 \text{ смежна с } L_{\tilde{a}_2}, \\ 1 - 2d_6 < 0, & \text{если } \tilde{g}_1 \text{ смежна с } D_{\tilde{a}_2}, \end{cases}$$

поэтому $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{k}_3}(\tilde{a}_2)$. В силу леммы 3.15 $\det \delta(\tilde{b}_2\tilde{g}_2) = 1$. Применяя формулу [4, (2)] к подграфу $(\tilde{b}_2\tilde{g}_2)$ графа $(\tilde{k}_3\tilde{k}_2)$ и учитывая (7.8), имеем

$$\det(\tilde{k}_3\tilde{k}_2) = d_7 \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{g}_2) - d_7^2 d_3.$$

Так как $\tilde{v} \notin (\tilde{k}_3\tilde{k}_2)$, то $\det(\tilde{k}_3\tilde{k}_2) > 0$, значит, $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{g}_2) > 1$. Применяя [4, лемма 3] к вершине $\tilde{b}_2$, получаем $d_3 = \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = 1$. Отсюда и из (7.8), (7.9) и формулы [4, (2)] для подграфа $(\tilde{k}_2\tilde{b}_2)$ графа $(\tilde{k}_3\tilde{g}_2)$ находим $d_7 \det(\tilde{k}_3\tilde{g}_2) = d_7 - d_7 d_6 \det^2 \delta(\tilde{k}_2\tilde{b}_2) < 0$, что противоречит [4, лемма 4] и полученному ранее $\tilde{v} \in \text{br}_{\tilde{k}_3}(\tilde{a}_2)$.

Итак, чтобы запретить диаграмму 4б) рис. 11, в силу леммы 7.7 нам достаточно показать, что $\tilde{v} \notin (\tilde{b}_2\tilde{g}_2) \cup (\tilde{a}_2\tilde{b}_2)$.

ЛЕММА 7.9. $\tilde{v} \notin (\tilde{b}_2\tilde{g}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) > 0$ и из леммы 7.6 и (7.4) следует, что $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) > 1$. Применяя [4, лемма 3] к вершине $\tilde{b}_2$, получаем

$$\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_2) = 1, \quad d_3 = 1.$$

Подставив это в лемму 7.6, (7.4) и (7.6) и учитывая лемму 7.8, находим

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 \text{ смежна с } L_{\tilde{a}_2}, \quad d_2 = 2, \quad \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = 4, \\ \det \tilde{L}_\infty = -6, \quad \det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2)_\infty = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

В силу лемм 3.15, 7.5 и (7.11) в обозначениях леммы 2.9 имеем $\mu_1 = \det(\tilde{a}_2\tilde{g}_2) = 0$, $d_1 = \det D_{\tilde{a}_2} = 3$, $\mu_2 = \det(\tilde{b}_2\tilde{g}_2) = 1$, $d_2 = \det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = 4$, $\mu_3 = \dots = \mu_n = 2$, $\det \tilde{L}_\infty = -6$, что противоречит (2.5).

ЛЕММА 7.10. $\tilde{v} \notin (\tilde{a}_2\tilde{b}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Из лемм 3.15, 7.5 получаем, что $\det \delta(\tilde{b}_2\tilde{g}_2) = \det \delta(\tilde{g}_1\tilde{a}_2) = 1$. В силу [4, лемма 3] два из трех чисел $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{g}_2)$, d_3 , $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1)$ равны единице.

1) Предположим, что вершина $\tilde{b}_2$ несущественна, т.е. $d_3 = 1$, $\det \text{br}_{\tilde{b}_2}(\tilde{a}_1) = 1$. Из (7.4), (7.6) получаем, что $d_2 = 5$, $\det \tilde{L}_\infty = -3$, $\det \text{br}_{\tilde{a}_2}(\tilde{b}_2)_\infty = -3$. В обозначениях леммы 2.9 имеем $n = 1$, $\mu_1 = -3$, $d_1 = 2$ или $d_1 = 3$. Подставив эти данные в (2.5), получаем $0 = 5d_1 - 3 > 0$. Противоречие (здесь $d_1 := d(\tilde{a}_2)$).

2) Предположим, что вершина $\tilde{b}_2$ существенна. Пусть $\delta_1 = d(\tilde{a}_2)$, $\delta_2 = d(\tilde{b}_2)$, $\mu_1 = \det(\tilde{a}_2\tilde{g}_2)$. Тогда δ_1 равно 2 или 3, $\delta_2 = \max(d_3, 6d_3 - d_2)$. Поскольку $\det(\tilde{b}_2\tilde{g}_2) = 1$, лемма 2.11 влечет

$$0 = 1 + \det \tilde{L}_\infty + (\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + 1) - \mu_1(\delta_1 - 1), \quad (7.12)$$

где в силу (7.6) $\det \tilde{L}_\infty = -8d_3 + d_2$, $\mu_1 = 2d_3 - d_2$. Перебором убеждаемся в том, что ни одна из возможных комбинаций δ_1, δ_2 не удовлетворяет (7.12).

Объединяя леммы 7.7, 7.9 и 7.10, получаем

ЛЕММА 7.11. *Диаграммы 4а), 4б) рис. 11 не реализуются.*

Мы получили, что ни одна из диаграмм рис. 11 не реализуется. Тем самым основная теорема доказана.

Список литературы

1. *Vitushkin A. G.* On polynomial transformation of $\mathbb{C}^n$ // Manifolds. Tokio. 1973. Tokio Univ. Press, 1975. P. 415–417.
2. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. № 2. P. 287–330.
3. *Орееков С. Ю.* О трехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 6. С. 1231–1240.
4. *Домрина А. В., Орееков С. Ю.* О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$. I. Случай неприводимой кривой ветвления // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 847–862.

Поступило в редакцию
5.III.1998