Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Гиллиган, А. Т. Хаклберри, Слоения и глобализации компактных однородных CR -многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 3, 67–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:50:50

УДК 517.55

Б. Гиллиган, А. Т. Хаклберри

Слоения и глобализации компактных однородных CR-многообразий

Развиты в общей постановке методы теории слоений, ранее применявшиеся для комплексных однородных пространств и однородных CR-пространств специального вида [1]–[4]. Использование CR-версии понятия $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения сводит некоторые рассуждения к компактному проективному алгебраическому случаю, для которого доказана теорема типа Бореля–Реммерта о расщеплении. Это дает возможность редукции к пространствам, однородным относительно действия компактной группы Ли. Доказаны общие теоремы о глобализации, позволяющие рассматривать однородное CR-многообразие как орбиту вещественной группы Ли на комплексном однородном пространстве комплексной группы Ли. В случае, когда CR-коразмерность не превосходит 2, получены точные классификационные результаты, с помощью которых установлено существование требуемой глобализации в большинстве случаев.

Библиография: 41 наименование.

Ключевые слова: комплексные однородные пространства, однородные CR-пространства, однородные расслоения, глобализация.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются однородные CR-многообразия (многообразия Коши–Римана). Предполагается, что они имеют вид $M = G/H$, где G – связная группа Ли, действующая CR-автоморфизмами на M . Мы опишем несколько методов изучения таких многообразий с точки зрения теории групп Ли. Эти методы используют понятия эквивариантных CR-слоений и глобализаций. В качестве их приложений получены структурные и классификационные результаты в проективном случае и в случае малой коразмерности. Отметим, что хотя мы рассматриваем только случай, когда на нашем CR-многообразии транзитивно действует некоторая группа Ли, полная группа CR-автоморфизмов может оказаться бесконечномерной.

Эквивариантное CR-слоение – это некоторое CR-отображение $G/H \rightarrow G/I$ однородных CR-многообразий. Понятие глобализации определяется в нашем контексте следующим образом. Поскольку многообразие M вещественно-аналитическое, оно вкладывается (единственным образом на уровне ростков) в некоторое комплексное многообразие X в качестве порождающего подмногообразия. Если X выбрано достаточно малым, то алгебра Ли $\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ действует локально на X и это действие локально транзитивно. Скажем, что действие G

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта NSERC Discovery и проекта SFB/TR-12 Немецкого исследовательского общества.

на M допускает глобализацию, если найдется такая связная комплексная группа Ли $\widehat{G}$ с алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, что в качестве X можно взять глобальное комплексное однородное многообразие $\widehat{G}/\widehat{H}$, т. е. если M является G -орбитой на таком многообразии.

Пусть $\widehat{G}$ – комплексная группа Ли, и пусть $\widehat{H}$ – замкнутая комплексная подгруппа в $\widehat{G}$. Тогда, обозначая через $\widehat{N} := N_{\widehat{G}}(\widehat{H}^\circ)$ нормализатор в $\widehat{G}$ связной компоненты единицы группы $\widehat{H}$, получаем важный объект: нормализирующее слоение $\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{N}$. Это понятие оказалось очень полезным, поскольку оно позволяет разделять и изучать независимо друг от друга аналитические задачи, связанные с дискретной группой изотропии его слоя, и задачи теории алгебраических групп, связанные с его базой, эквивариантно вложенной в некоторое проективное пространство.

Известно, что для любого однородного CR-многообразия $M = G/H$ существует аналог нормализирующего слоения: $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение. С помощью этого слоения

$$G/H \xrightarrow{F} G/J$$

можно попытаться построить глобализацию данного многообразия M . База этого слоения глобализуема: она является G -орбитой в некотором проективном пространстве. Остается выяснить, глобализуем ли его (параллелизуемый) слой $F = J/H$, и если глобализуем, то совместима ли его глобализация с глобализацией базы.

В § 2 мы напоминаем основные факты о CR-многообразиях, включая построение и свойства $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения, а также доказываем существование глобализации $\widehat{F}$ в том случае, когда F имеет коразмерность не выше 2.

Как указано ранее, база G/J также допускает глобализацию $\widehat{G}/\widehat{J}$, которая является $\widehat{G}$ -орбитой в проективном пространстве. Основной вопрос состоит в том, действует ли $\widehat{J}$ голоморфно на $\widehat{F}$. Для изучения случая, когда действие $\widehat{G}$ на пространстве $\widehat{G}/\widehat{J}$ неэффективно, вводится условие сюръективности индуцированного отображения фундаментальных групп, называемое далее условием (C). Если это условие выполнено и радикал $\widehat{R}$ группы $\widehat{G}$ действует на базе $\widehat{G}/\widehat{J}$ как абелева группа (что является необходимым условием), то глобализация существует. Этот результат доказан в общей постановке в теореме 3.1 и специализируется для случая $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения в теореме 3.2.

В § 4 с помощью методов теории вещественных и комплексных алгебраических групп описывается структура проективно вложенных компактных однородных CR-многообразий. Мы показываем, что комплексифицированная группа $\widehat{G}$ редуктивна и, в частности, ее радикал $\widehat{R}$ абелев. Доказана теорема о расщеплении, которую можно рассматривать как аналог теоремы Бореля–Реммерта о комплексных однородных пространствах. Эти результаты получены в общей постановке и могут быть полезны и для других задач.

В § 5 методами теории алгебраических групп дается подробное описание проективных однородных CR-многообразий коразмерности не выше 2. В частности, получены требуемые результаты о глобализации для тех случаев, когда не возникает двумерная аффинная квадрика $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.

Известна тонкая классификация компактных однородных CR-гиперповерхностей с невырожденной формой Леви. В § 6 мы отмечаем, что классификационные результаты из § 5 также дают некоторую классификацию компактных

однородных CR-многообразий M коразмерности 2 с невырожденной формой Леви. Здесь же содержатся замечания о случае, когда пространство $\widehat{G}/\widehat{H}$ келерово.

Настоящая работа посвящена памяти А. Г. Витушкина, с которым мы непрерывно и очень плодотворно сотрудничали начиная с середины 1980-х годов. Анатолий Георгиевич был не только математиком высочайшего уровня, но и замечательным педагогом. Его ученики работают во многих областях комплексного анализа, и в рассматриваемых ими вопросах часто возникают комплексные и CR-многообразия с высокой степенью симметрии. Мы уверены, что слияние методов настоящей работы с (совершенно независимыми от них) методами, развитыми в школе Витушкина, приведет к более глубокому пониманию роли симметрии в комплексном анализе.

Закончим введение кратким обзором работ учеников А. Г. Витушкина, относящихся к теме статьи. А. В. Лобода (см., например, [5]) получил классификацию локально однородных CR-многообразий малой размерности. В. В. Ежов и В. К. Белошапка с соавторами (к ним относится и Г. Шмальц, который также участвовал в московском семинаре будучи учеником Б. В. Шабата) провели вычисления инвариантов Черна–Мозера CR-многообразий, обладающих достаточно высокой степенью симметрии. Классификационные результаты А. В. Исаева и Н. Г. Кружилина о действиях больших унитарных групп (см. [6]) и проведенная А. В. Исаевым с соавторами классификация областей и гиперболических многообразий, размерность группы автоморфизмов которых близка к максимальной для областей данной размерности (см. работу [7] и ссылки в ней), также включают в себя случаи, когда интересующие нас орбиты вещественной группы Ли – это CR-многообразия малой коразмерности. Такие случаи могут быть изучены и методами настоящей работы.

Другие недавние результаты по данной тематике содержатся в работах Г. Фелса и В. Каупа (см., например, [8]). О классификации гиперповерхностей см., например, [2]–[4], [9]–[12].

Наконец, мы благодарны рецензенту за его критические замечания, которые привели к значительным улучшениям настоящей работы.

§ 2. Основные сведения о CR-многообразиях

2.1. CR-структуры. CR-многообразие – это вещественное многообразие, снабженное “частично комплексной структурой”. Такие многообразия всегда вызывали интерес, так как они естественно возникают во многих вопросах. Например, множество уровня гладкой вещественнозначной функции на комплексном многообразии является CR-подмногообразием в тех точках, где градиент функции отличен от нуля. Другой важный класс примеров – это орбиты вещественных подмногообразий на однородном пространстве некоторой глобализации этой группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть M – n -мерное (дифференцируемое) многообразие. CR-структурой типа (n, l) на M называется подрасслоение H ранга l в комплексифицированном касательном расслоении $TM \otimes \mathbb{C}$ такое, что:

- 1) $H \cap \overline{H} = \{0\}$ – нулевое сечение расслоения $TM \otimes \mathbb{C}$;
- 2) H инволютивно.

CR-многообразием типа (n, l) называется пара (M, H) , состоящая из n -мерного многообразия M и CR-структуры H типа (n, l) на M .

Если (M, H) – CR-многообразие типа (n, l) , то H определяет подрасслоение $T^{\text{CR}}M$ вещественного ранга $2l$ в TM , называемое *голоморфным касательным расслоением* многообразия M и обладающее следующими свойствами:

1') существует изоморфизм расслоений $\mathcal{J}: T^{\text{CR}}M \rightarrow T^{\text{CR}}M$ такой, что $\mathcal{J}^2 = -\text{Id}_{T^{\text{CR}}M}$;

2') для всех $\hat{\xi}, \hat{\zeta} \in \Gamma(M, T^{\text{CR}}M)$ имеем $[\hat{\xi}, \hat{\zeta}] - [\mathcal{J}\hat{\xi}, \mathcal{J}\hat{\zeta}] \in \Gamma(M, T^{\text{CR}}M)$ и $N(\hat{\xi}, \hat{\zeta}) := \mathcal{J}([\hat{\xi}, \hat{\zeta}] - [\mathcal{J}\hat{\xi}, \mathcal{J}\hat{\zeta}]) - [\hat{\xi}, \mathcal{J}\hat{\zeta}] - [\mathcal{J}\hat{\xi}, \hat{\zeta}] = 0$.

Отметим эквивалентности $1) \iff 1')$ и $2) \iff 2')$. Кроме того, гомоморфизм векторных расслоений $\alpha: T^{\text{CR}}M \rightarrow H$, заданный формулой $\alpha(\hat{\xi}) := \frac{1}{2}(\hat{\xi} - i\mathcal{J}\hat{\xi})$, является изоморфизмом и удовлетворяет $\alpha(\mathcal{J}\hat{\xi}) = i\alpha(\hat{\xi})$. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между CR-структурами H на многообразии M и голоморфными касательными подрасслоениями $T^{\text{CR}}M$ расслоения TM .

CR-многообразия часто возникают как подмногообразия, вложенные в комплексное многообразие. Пусть $(X, \tilde{\mathcal{J}})$ – комплексное многообразие. Тогда $\tilde{\mathcal{J}}$ единственным образом продолжается до комплексно-линейного эндоморфизма комплексифицированного касательного пространства $TX \otimes \mathbb{C}$. Поскольку $\tilde{\mathcal{J}}^2 = -\text{Id}_{TX \otimes \mathbb{C}}$, собственные значения $\tilde{\mathcal{J}}$ равны $+i$ и $-i$. Как обычно, обозначим отвечающие им собственные подпространства в $TX \otimes \mathbb{C}$ через $TX^{1,0}$ и $TX^{0,1}$ соответственно. Пусть теперь $M \subset X$ – такое вещественное подмногообразие, что

$$H_x := (T_x M \otimes \mathbb{C}) \cap T_x X^{1,0}$$

имеет постоянный ранг для всех $x \in M$. Тогда (M, H) – CR-многообразие. Заметим, что эта же CR-структура на M задается подраслоением

$$\begin{aligned} T^{\text{CR}}M &:= TM \cap \tilde{\mathcal{J}}TM, \\ \mathcal{J} &:= \tilde{\mathcal{J}}|_{T^{\text{CR}}M}, \end{aligned}$$

при этом $T_x^{\text{CR}}M$ имеет постоянный ранг для всех $x \in M$. Кроме того, для любой точки $x \in M$ справедливо следующее разложение касательного пространства:

$$T_x(X) = T_x^{\text{CR}}(M) \oplus N_x \oplus \mathcal{J}(N_x),$$

причем

$$T_x(M) = T_x^{\text{CR}}(M) \oplus N_x,$$

а N – дополнительное к $T^{\text{CR}}(M)$ подрасслоение в TM .

Скажем, что на M задана *порождающая CR-структура*, если $TM + \tilde{\mathcal{J}}TM = TX|_M$ (сумма не обязательно прямая).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если CR-структура на M имеет тип (n, l) и M вложено в комплексное многообразие X как порождающее подмногообразие, то вещественная коразмерность этой структуры выражается формулами

$$k := \dim_{\mathbb{R}} X - \dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(N) = \dim_{\mathbb{R}} N = \dim_{\mathbb{R}} M - \dim_{\mathbb{R}} T^{\text{CR}}M = n - 2l,$$

последняя из которых справедлива и в случае, когда M не предполагается куда-либо вложенным. Отсюда вытекает, что

$$\dim_{\mathbb{R}} X = n + k = 2(n - l), \quad \text{т. е.} \quad \dim_{\mathbb{C}} X = n - l.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $(M_1, T^{\text{CR}}(M_1), \mathcal{J}_1)$ и $(M_2, T^{\text{CR}}(M_2), \mathcal{J}_2)$ – CR-многообразия. Гладкое отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ называется *CR-отображением*, если

$$f_*(T_x^{\text{CR}}(M_1)) \subset T_{f(x)}^{\text{CR}}(M_2)$$

для всех $x \in M_1$ и

$$\mathcal{J}_2 \circ f_* = f_* \circ \mathcal{J}_1.$$

Очевидным образом определяются такие понятия, как CR-субмерсия, CR-изоморфизм и CR-функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Векторное поле $\hat{\xi} \in \Gamma(M, TM)$ называется *CR-векторным полем*, если порожденная им локальная однопараметрическая группа преобразований многообразия M состоит из CR-преобразований. Множество всех CR-векторных полей на M будем обозначать через $\Gamma_{\text{CR}}(M, TM)$.

CR-многообразие (M, H) называется *аналитическим CR-многообразием*, если M является аналитическим многообразием, а H – аналитическим подрасслоением в $TM \otimes \mathbb{C}$, т. е. H локально порождается аналитическими локальными сечениями расслоения $TM \otimes \mathbb{C}$.

Имея CR-многообразие, было бы идеальным реализовать его в качестве вложенного подмногообразия в некотором комплексном многообразии, из которого оно наследовало бы свою CR-структуру.

Вложение $\sigma: M \rightarrow X$ некоторого CR-многообразия M в комплексное многообразие X называется *CR-вложением*, если множество $\sigma(M) \subset X$ является CR-подмногообразием, а отображение σ – CR-изоморфизмом многообразия M на его образ. Такое вложение называется *порождающим*, если его образ $\sigma(M)$ является порождающим CR-подмногообразием в X . В этом случае будем говорить, что (X, σ) – *комплексификация* CR-многообразия M .

ТЕОРЕМА 2.1 (Андреотти–Фридрихс [13]). *Всякое аналитическое CR-многообразие M допускает комплексификацию (X, σ) , причем только одну с точностью до бигоморфизма.*

ТЕОРЕМА 2.2. 1) Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ – аналитическое CR-отображение между порождающими аналитическими CR-подмногообразиями $M_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, где X_i – комплексные многообразия. Тогда найдутся открытые окрестности $U_i \subset X_i$ подмногообразий M_i для $i = 1, 2$ и голоморфное отображение $\hat{f}: U_1 \rightarrow U_2$ такие, что $\hat{f}|_{M_1} = f$.

2) Голоморфное отображение $\hat{f}$, определенное на открытой связной окрестности вложенного порождающего CR-многообразия M , является постоянным тогда и только тогда, когда сужение $\hat{f}|_M$ постоянно.

3) Пусть $M \subset X$ – порождающее CR-подмногообразие комплексного многообразия X , и пусть $\hat{\xi} \in \Gamma_{\text{CR}}(M, TM)$ – CR-векторное поле на M . Тогда

найдутся открытая окрестность U подмногообразия M в X и голоморфное векторное поле $\hat{\zeta}$ на U такие, что

$$\hat{\xi}(x) = \hat{\zeta}(x) + \hat{\zeta}^\dagger(x)$$

при каждом $x \in M$, где $\hat{\zeta}^\dagger$ – векторное поле, комплексно-сопряженное к $\hat{\zeta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть M и B – CR-многообразия, а (M, π, B, G) – главное расслоение, где $\pi: M \rightarrow B$ – проекция расслоения, а G – структурная группа. Если правое действие G на M осуществляется CR-преобразованиями, то четверка (M, π, B, G) называется **CR-главным расслоением**.

2.2. Форма Леви. Пусть (M, H) – CR-многообразие. Тогда проекция $\pi: TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow TM \otimes \mathbb{C}/H \oplus \bar{H}$ индуцирует $\mathbb{R}$ -линейный гомоморфизм векторных расслоений

$$L(M, H): H \times H \longrightarrow TM \otimes \mathbb{C}/H \oplus \bar{H},$$

определяемый следующим образом. Для $x \in M$ и $(a, b) \in H_x \times H_x$ выберем локальные сечения $\hat{\xi}, \hat{\zeta}$ расслоения H так, что $\hat{\xi}(x) = a$, $\hat{\zeta}(x) = b$, и положим

$$L(M, H)(a, b) := \pi_x[\hat{\xi}, \bar{\hat{\zeta}}](x).$$

Отображение $L(M, H)$ корректно определено и называется *формой Леви* CR-многообразия (M, H) . Приведем некоторые связанные с этим понятием факты и определения.

1. Отображение L косоэрмитово.
2. Множество $L^\circ := \{\hat{\xi} \in H \mid L(\hat{\xi}, \hat{\zeta}) = 0 \ \forall \ \hat{\zeta} \in H\}$ называется *ядром Леви* многообразия M . Скажем, что форма Леви L *невырождена*, если $L^\circ = \{0\}$.
3. Если M – вещественная гиперповерхность в комплексном многообразии X , то эрмитова форма iL имеет ту же сигнатуру, что и сужение комплексного гессиана определяющей функции гиперповерхности M на пространство $H = (TM \otimes \mathbb{C}) \cap TX^{1,0}$. Это сужение совпадает с классической формой Леви (см. [14, теорема 11, с. 290 и далее]).
4. CR-многообразие называется *леви-плоским*, если $L^\circ = H$.

2.3. Однородные CR-структуры. CR-автоморфизмом данного CR-многообразия называется его диффеоморфное CR-отображение на себя. Если группа всех CR-автоморфизмов многообразия M действует транзитивно на M , то M называется *однородным CR-многообразием*.

ТЕОРЕМА 2.3 [4, теорема 1.3.1.2]. Пусть $M = G/H$ – однородное CR-многообразие. Тогда G -инвариантные CR-структуры $(R, \mathcal{J})$ на M находятся во взаимно однозначном соответствии с парами $(\tilde{R}, \tilde{\mathcal{J}})$, где $\tilde{R}$ – векторное подпространство в $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{h} \subset \tilde{R} \subset \mathfrak{g}$, а $\tilde{\mathcal{J}}: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$ – эндоморфизм со следующими свойствами:

- 1) $\tilde{\mathcal{J}}\xi = 0$, если и только если $\xi \in \mathfrak{h}$;
- 2) $\tilde{\mathcal{J}}^2\xi + \xi \in \mathfrak{h}$ для всех $\xi \in \tilde{R}$;
- 3) $\text{Ad}_g \xi \in \tilde{R}$ и $\text{Ad}_g \tilde{\mathcal{J}}\xi - \tilde{\mathcal{J}} \text{Ad}_g \xi \in \mathfrak{h}$ для всех $g \in H$ и $\xi \in \tilde{R}$;
- 4) $[\xi, \zeta] - [\tilde{\mathcal{J}}\xi, \tilde{\mathcal{J}}\zeta] \in \tilde{R}$ и $\tilde{\mathcal{J}}([\xi, \zeta] - [\tilde{\mathcal{J}}\xi, \tilde{\mathcal{J}}\zeta]) - [\tilde{\mathcal{J}}\xi, \zeta] - [\xi, \tilde{\mathcal{J}}\zeta] \in \mathfrak{h}$ для всех $\xi, \zeta \in \tilde{R}$.

Пары $(\tilde{R}, \tilde{\mathcal{J}})$ и $(\tilde{R}', \tilde{\mathcal{J}}')$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tilde{R} = \tilde{R}'$ и $\tilde{\mathcal{J}}\xi - \tilde{\mathcal{J}}'\xi \in \mathfrak{h}$ для всех $\xi \in \tilde{R} = \tilde{R}'$. Если подгруппа H связна, то условие 3) можно заменить на условие

3') $[\xi, \zeta] \in \tilde{R}$ и $\tilde{\mathcal{J}}[\xi, \zeta] - [\xi, \tilde{\mathcal{J}}\zeta] \in \mathfrak{h}$ для всех $\xi \in \mathfrak{h}$ и $\zeta \in \tilde{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в [4, с. 18–21]. Оно следует, в основном, книге [15], за исключением того, что $\tilde{R} \neq \mathfrak{g}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 [4, дополнение к теореме 2, с. 21]. Все G -инвариантные CR-структуры на M аналитичны.

Отсюда вытекает важный вывод: всякое однородное CR-многообразие $M = G/H$ имеет комплексификацию.

2.4. Комплексификация алгебры Ли. Пусть $M = G/H$ – однородное CR-многообразие. Поскольку инвариантная CR-структура $(R, \mathcal{J})$ на G/H аналитична, существует комплексификация $(\widehat{M}, \sigma)$ многообразия G/H . Предположим, что M уже вложено в $\widehat{M}$, т.е. что $M = \sigma(G/H)$. Отображение действия $\lambda: G \times M \rightarrow M, (g, \sigma(aH)) \mapsto \sigma(gaH)$ индуцирует гомоморфизм $\phi: G \rightarrow \text{Aut}_{\text{CR}}(M)$ в группу всех CR-автоморфизмов многообразия M , а также гомоморфизм

$$\alpha: \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma_{\text{CR}}(M, TM).$$

(По модулю возможной неэффективности действия мы отождествляем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G с некоторой подалгеброй алгебры CR-векторных полей на M .) Для каждого $\xi \in \mathfrak{g}$ обозначим через $(\hat{\xi}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ однопараметрическую группу, порожденную векторным полем $\alpha(X)$. Очевидно, $\hat{\xi}_t = \phi(\exp(t\xi))$. Поэтому найдутся окрестность U многообразия M в $\widehat{M}$ и голоморфное векторное поле $\hat{\zeta}$ на U такие, что $\hat{\zeta} + \tilde{\zeta}|_M = \hat{\xi}$ (см. теорему 2.2). Поскольку алгебра Ли $\alpha(\mathfrak{g})$ конечномерна, мы можем выбрать ее базис и тем самым найти такую открытую окрестность U многообразия M , что всякое векторное поле $\hat{\xi} \in \alpha(\mathfrak{g})$ “продолжается” указанным образом до голоморфного векторного поля $\tilde{\xi}$ на U , причем отображение $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ является гомоморфизмом алгебр Ли. Эта конструкция позволяет нам определить комплексификацию $\hat{\mathfrak{g}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ как

$$\hat{\mathfrak{g}} := \{\tilde{\xi} + \mathcal{J}\tilde{\zeta} \mid \xi, \zeta \in \mathfrak{g}\}.$$

А именно, $\hat{\mathfrak{g}}$ есть комплексная подалгебра Ли в $\Gamma(U, T^{1,0}U)$, порожденная образом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Легко проверить, что $\mathfrak{m} := \mathfrak{g} \cap \mathcal{J}\mathfrak{g}$ – идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

2.5. Действие G на $\hat{\mathfrak{g}}$. Чтобы определить действие группы G на комплексной алгебре Ли $\hat{\mathfrak{g}}$, рассмотрим действие

$$G \times \alpha(\mathfrak{g}) \longrightarrow \alpha(\mathfrak{g}),$$

заданное формулой

$$g.\alpha(\xi) = \alpha(\text{Ad}_g \xi)$$

или

$$g.\alpha(\xi)(p) = d\lambda_g(\alpha(\xi)(g^{-1}.p)), \quad p \in M.$$

Если $\xi \in \mathfrak{m}$, то векторное поле $\mathcal{J}\alpha(\xi)$ касательно к M и мы имеем $g.\mathcal{J}\alpha(\xi) = \mathcal{J}g.\alpha(\xi)$, поскольку G действует CR-преобразованиями на M . Продолжим это действие на $\hat{\mathfrak{g}}$ следующим образом. Пусть $\tilde{\eta} = \tilde{\xi} + \mathcal{J}\tilde{\zeta} \in \hat{\mathfrak{g}}$. Положим $g\eta = g\tilde{\xi} + \mathcal{J}g\tilde{\zeta}$, где $g\tilde{\xi}$ – продолжение $g.\alpha(\xi)$, а $g\tilde{\zeta}$ – продолжение $g.\alpha(\zeta)$. Поскольку действие G на $\alpha(\mathfrak{m})$ комплексно-линейно, описанное его продолжение корректно определено и отображение $\eta \mapsto g.\eta$ является комплексно-линейным отображением $\hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$, т. е. $g.\mathcal{J}\eta = \mathcal{J}g.\eta$.

Часто встречается следующая ситуация. Пусть $\hat{G}$ – комплексная группа Ли, а $\hat{H}$ – замкнутая комплексная подгруппа в $\hat{G}$. Пусть G – такая вещественная подгруппа в $\hat{G}$, что $G/H \hookrightarrow \hat{G}/\hat{H}$ – порождающее CR-подмногообразие, где $H = \hat{H} \cap G$. Всюду в этой работе мы будем называть такое комплексное многообразие $\hat{M} := \hat{G}/\hat{H}$ глобализацией многообразия M , поскольку на нем глобализуется локальное действие группы $\hat{G}$, определенное в окрестности M . В предположении эффективности всех действий алгебра Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ группы $\hat{G}$ будет изоморфна определенной выше комплексификации алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G .

2.6. $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение. Существуют два основных подхода к определению $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения. Мы изложим их оба: начнем с более алгебраического, а затем перейдем к методу, использующему средства комплексного анализа в предположении вложенности. Большая часть следующего материала содержится в [2]–[4].

2.6.1. Эквивариантные CR-слоения. Если дана такая замкнутая подгруппа $I \subset G$ с $H \subset I$, что G/I обладает G -инвариантной CR-структурой, а проекция $\pi: G/H \rightarrow G/I$ является CR-отображением, то будем говорить, что задано CR-слоение. Основной вопрос состоит в том, существуют ли такие слоения и какую информацию они дают об изучаемом однородном CR-многообразии. Пусть CR-структура на $M = G/H$ задается парой $(R, \mathcal{J})$, а соответствующая структура на $\mathfrak{g}$ – парой $(\tilde{R}, \tilde{\mathcal{J}})$ (см. теорему 2.3). Положим

$$N(H^\circ) := \{g \in G \mid gH^\circ g^{-1} \subset H^\circ\}.$$

Ясно, что $H \subset N(H^\circ)$ и что на уровне алгебр Ли имеем $N(H^\circ) := \{g \in G \mid \text{Ad}_g \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\}$. Чтобы учитывать еще и CR-структуру на G/H , рассмотрим CR-нормализатор $N_{\text{CR}}(H)$ подгруппы H , определяемый следующим образом:

$$N_{\text{CR}}(H) := \{g \in G \mid \text{Ad}_g \xi \in \tilde{R} \text{ и } \text{Ad}_g \tilde{\mathcal{J}}\xi - \tilde{\mathcal{J}}\text{Ad}_g \xi \in \mathfrak{h} \quad \forall \xi \in \tilde{R}\}.$$

Заметим, что $N_{\text{CR}}(H) = N_{\text{CR}}(H^\circ)$ и что определение $N_{\text{CR}}(H)$ использует только класс эквивалентности пары $(\tilde{R}, \tilde{\mathcal{J}})$ (см. теорему 2.3). По теореме 2.3 пара $(\tilde{R}, \tilde{\mathcal{J}})$ определяет CR-структуру и на G/H° . Поэтому можно определить вещественно-аналитическое правое действие

$$r: G/H^\circ \times N(H^\circ) \longrightarrow G/H^\circ,$$

полагая $r(gH^\circ, n) := r_n(gH^\circ) := gnH^\circ$ для $g \in G$ и $n \in N(H^\circ)$. Вообще говоря, неверно, что r_n – CR-отображение для всех $n \in N(H^\circ)$. Однако имеется следующее описание подгруппы $N_{\text{CR}}(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [4, с. 23]. Имеем $H \subset N_{\text{CR}}(H) \subset N(H^\circ)$. Группа $N_{\text{CR}}(H)$ состоит из всех элементов $n \in N_G(H^\circ)$ таких, что правый сдвиг r_n , заданный формулой

$$r_n: G/H^\circ \longrightarrow G/H^\circ, \quad gH^\circ \mapsto gnH^\circ,$$

является CR-отображением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Отображение $\varphi_{\hat{\mathfrak{g}}}: G/H \rightarrow G/N_{\text{CR}}(H)$ называется $\mathfrak{g}$ -антиканоническим слоением многообразия G/H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Ниже будет показано, что это отображение действительно является CR-отображением. Важно иметь в виду, что в следующем пункте будет дана другая конструкция $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения вместе с дальнейшими сведениями о его свойствах. Эта конструкция также объясняет обозначение $\varphi_{\hat{\mathfrak{g}}}$ (см. п. 2.6.2).

Из сказанного выше вытекает следующее важное утверждение, очень полезное для дальнейшего.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение вырождено (т.е. $N_{\text{CR}}(H) = G$), а действие G предполагается почти эффективным, то подгруппа H дискретна.

Допустим, что многообразие M вложено в некоторую свою комплексификацию $\widehat{M}$. Положим $\hat{\mathfrak{h}} := \{\zeta \in \hat{\mathfrak{g}} \mid \zeta(o) = 0\}$, где $o = \pi(e)$ и $\pi: G \rightarrow G/H$. Напомним, что

$$\widehat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g} + \mathcal{J}\mathfrak{g},$$

где $\mathcal{J}$ – комплексная структура на $\widehat{M}$, а $\mathfrak{g}$ рассматривается как вещественная подалгебра в $\Gamma_{\mathcal{O}}(\widehat{M}, T\widehat{M})$. Оказывается, что

$$N_{\text{CR}}(H) = \{g \in G \mid \text{Ad}_g \hat{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}}\},$$

где $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathfrak{g}})$ – присоединенное действие G на $\hat{\mathfrak{g}}$, индуцированное обычным присоединенным действием G на $\mathfrak{g}$. Это показывает, что пространство $G/N_{\text{CR}}(H)$ наследует G -инвариантную CR-структуру из грассманиана, образованного всеми комплексными векторными подпространствами в $\hat{\mathfrak{g}}$, имеющими ту же размерность, что и $\hat{\mathfrak{h}}$. Кроме того, $N_{\text{CR}}(H)$ – группа изотропии присоединенного G -действия в точке, отвечающей подпространству $\hat{\mathfrak{h}}$. Тогда плюкетово вложение задает G -эквивариантное отображение

$$G/H \longrightarrow G/N_{\text{CR}}(H) \longrightarrow \mathbb{P}_k.$$

Это отображение совпадает с отображением, заданным теми голоморфными сечениями антиканонического расслоения многообразия $\widehat{M}$, которые порождаются $\hat{\mathfrak{g}}$ -сечениями. Именно этим фактом объясняется термин “ $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение”.

Мы имеем представление группы G со значениями в $\text{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$. Однако, поскольку мы рассматривали только действие на проективном пространстве,

можно считать, что G отображается в $\mathrm{PGL}_{k+1}(\mathbb{C})$. Обозначим через $\tilde{G}$ наименьшую комплексную подгруппу Ли, содержащую образ G , а через $\tilde{N}_{\mathrm{CR}}(H)$ – подгруппу изотропии $\tilde{G}$ -действия в точке, отвечающей $N_{\mathrm{CR}}(H)$.

Поскольку $N_{\mathrm{CR}}(H) \subset N_G(H^\circ)$, можно представить слой $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения в виде факторпространства A/Γ , где $A := N_{\mathrm{CR}}(H)/H^\circ$ – группа Ли, а $\Gamma := H/H^\circ$ – дискретная подгруппа в A . Некоторые замечания об этой ситуации будут сделаны в п. 2.7.

Следующий результат отвечает на вопрос о том, допускает ли пространство $G/N_{\mathrm{CR}}(H)$ такую CR-структуру, что отображение $G/H \rightarrow G/N_{\mathrm{CR}}(H)$ является CR-субмерсией. На самом деле этот результат носит чуть более общий характер.

ТЕОРЕМА 2.4 [4, теорема 1.3.2.2]. *Пусть $L \subset N_{\mathrm{CR}}(H)$ – такая замкнутая подгруппа, что $H \subset L$ и $\tilde{\mathcal{J}}(\mathfrak{l} \cap \tilde{R}) \subset (\mathfrak{l} \cap \tilde{R})$, где $\mathfrak{l}$ – алгебра Ли группы L . Тогда пространство G/L обладает такой G -инвариантной CR-структурой, что отображение $G/H \rightarrow G/L$ является CR-субмерсией.*

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Многообразие $G/N_{\mathrm{CR}}(H)$ обладает такой G -инвариантной CR-структурой, что отображение $G/H \rightarrow G/N_{\mathrm{CR}}(H)$ является CR-субмерсией.*

Чтобы более подробно описать слоение $G/H \rightarrow G/N_{\mathrm{CR}}(H)$, изложим некоторые наблюдения о форме Леви инвариантных CR-структур $(R, \mathcal{J})$ на $M = G/H$.

Пусть снова $\pi: G \rightarrow G/H$ – факторотображение. Положим $o = \pi(e)$. Обозначим через $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\tilde{R}$ отображение проекции и положим $\tilde{L}(\xi, \zeta) := \psi[\xi, \zeta]$ для $\xi, \zeta \in \tilde{R}$. Тогда

$$\tilde{L} = \pi^* L_R|_{\tilde{R}}.$$

Это вытекает из того, что $P(\tilde{R})$ порождает $\tilde{R}_g$ в каждой точке $g \in G$, а $\tilde{R}$ является левоинвариантным подрасслоением в TG . (По поводу обозначений см. теорему 2.3.)

ТЕОРЕМА 2.5 [4, теорема 7]. *Если подгруппа H связна, то имеем CR-главное расслоение $G/H \rightarrow G/N_{\mathrm{CR}}(H)$.*

ЛЕММА 2.1 [2, лемма 1]. *Если векторное поле $\zeta \in \hat{\mathfrak{g}}$ обращается в нуль в точке $p \in M$, то ζ тождественно равно нулю на F_p .*

СЛЕДСТВИЕ 2.4 [2]. *Слои отображения $\varphi_{\hat{\mathfrak{g}}}$ являются леви-плоскими CR-подмногообразиями в M . Если образ $\varphi_{\hat{\mathfrak{g}}}$ является точкой, то множество*

$$\mathfrak{m} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathcal{J}\hat{\xi} \in \Gamma(M, TM)\}$$

порождает $L^\circ(M)$. Если M – CR-гиперповерхность, то $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m} = n - 1$, где $n := \dim_{\mathbb{C}} \hat{M}$.

Если образ $\varphi_{\hat{\mathfrak{g}}}$ является точкой, то $F_p = M$. Поэтому $\mathfrak{m}_p F := \mathfrak{m}_p = \mathfrak{m}$. Поскольку G -действие почти эффективно, этого наблюдения достаточно для завершения доказательства следствия 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.5 [2]. Пусть (M, G) – однородное CR-многообразие. Положим $k := \text{rank}_{\mathbb{C}} L^{\circ}(M)$. Пусть F – слой $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения многообразия M . Тогда F является леви-плоским CR-подмногообразием в M типа (α, β) , где $\beta \leq k$. Идеал $\mathfrak{m}_j/\mathfrak{h}$, возникающий из правого действия J/H° на G/H° , порождает комплексное подрасслоение ранга β в $L^{\circ}(M)$.

2.6.2. Другая конструкция и дальнейшие свойства. Здесь мы всегда считаем, что группа G связна и действует на M почти эффективно. Тогда отображение $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(M, TM)$, индуцированное действием $\lambda: G \times M \rightarrow M$, инъективно. Для $g \in G$ обозначим через $\lambda_g: M \rightarrow M$ отображение $\lambda_g(x) := \lambda(g, x)$, а через $g \cdot x$ – точку $\lambda(g, x)$.

Пусть $(\widehat{M}, \sigma)$ – какая-либо $\mathfrak{g}$ -комплексификация многообразия M (см. п. 2.4) и $n = \dim_{\mathbb{C}} \widehat{M}$. Далее мы считаем, что M уже вложено в $\widehat{M}$, т. е. $\sigma|_M = \text{id}_M$. Положим

$$V_{\mathfrak{g}} := \bigwedge_n \hat{\mathfrak{g}}.$$

Это $(k+1)$ -мерное комплексное векторное подпространство в пространстве всех голоморфных сечений антиканонического расслоения многообразия $\widehat{M}$:

$$V_{\mathfrak{g}} \subset \Gamma_{\mathcal{O}}\left(\widehat{M}, \bigwedge_n T\widehat{M}^{1,0}\right).$$

Естественное действие G на $\hat{\mathfrak{g}}$ (см. п. 2.5) определяет действие G на $\mathbb{P}(V_{\mathfrak{g}}^*) \cong \mathbb{P}_k$ по формуле $g \cdot f(\sigma) = f(g^{-1} \cdot \sigma)$ для $g \in G$, $f \in \mathbb{P}(V_{\mathfrak{g}}^*)$, $\sigma \in V_{\mathfrak{g}}$. Отображение $\mathbb{P}(V_{\mathfrak{g}}^*) \rightarrow \mathbb{P}(V_{\mathfrak{g}}^*)$, $f \mapsto g \cdot f$ является проективно линейным для каждого $g \in G$ (см. п. 2.5). Пусть $U \subset \widehat{M}$ – такая открытая окрестность многообразия M , что для каждого $x \in U$ существует $\sigma \in V_{\mathfrak{g}}$, $\sigma(x) \neq 0$. Зададим отображение

$$\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}: U \longrightarrow \mathbb{P}(V_{\mathfrak{g}}^*)$$

формулой $\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}(x)(\sigma) = \sigma(x)$. Это определение корректно, так как $\bigwedge_n T\widehat{M}^{1,0}$ – линейное расслоение и для каждого $x \in U$ найдется сечение $\sigma \in V_{\mathfrak{g}}$ такое, что $\sigma(x) \neq 0$. Чтобы доказать голоморфность отображения $\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}$, выберем базис $\{\sigma_0, \dots, \sigma_k\}$ пространства $V_{\mathfrak{g}}$ и положим $\sigma = \sum_{i=0}^k a_i(\sigma) \sigma_i$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}(x)(\sigma) = \sigma(x) = \sum_{i=0}^k a_i(\sigma) \sigma_i(x).$$

Пусть $\{\sigma_0^*, \dots, \sigma_k^*\}$ – двойственный базис пространства $V_{\mathfrak{g}}^*$, а $[z_0: \dots: z_k]$ – однородные координаты на $\mathbb{P}(V_{\mathfrak{g}}^*)$, порожденные базисом $\{\sigma_0^*, \dots, \sigma_k^*\}$. Любой элемент $f \in \mathbb{P}(V_{\mathfrak{g}}^*)$ записывается в виде $f = [z_0(f): \dots: z_k(f)]$, где $z_j(f) = f(\sigma_j)$ для $j = 0, \dots, k$. Тогда

$$z_j(\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}(x)) = \widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}(x)(\sigma_j) = \sigma_j(x)$$

и, следовательно,

$$\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}(x) = [\sigma_0(x): \dots: \sigma_k(x)].$$

Поскольку все σ_j лежат в $\Gamma_{\mathcal{O}}(\widehat{M}, \bigwedge_n T\widehat{M}^{1,0})$, из выбора U видно, что отображение $\widehat{\varphi}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ голоморфно и корректно определено.

Для $x \in \widehat{\varphi}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(M)$ имеем

$$g \cdot \widehat{\varphi}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(x)(\sigma) = \widehat{\varphi}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(x)(g^{-1} \cdot \sigma) = [\sigma(g \cdot x)].$$

Тем самым, в выбранных выше координатах,

$$g \cdot \widehat{\varphi}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(x) = [\sigma_0(g \cdot x) : \dots : \sigma_k(g \cdot x)].$$

Отсюда вытекает G -эквивариантность отображения $\varphi_{\widehat{\mathfrak{g}}} := \widehat{\varphi}_{\widehat{\mathfrak{g}}}|_M$. Положим

$$J = \{g \in G : g \cdot \varphi_{\widehat{\mathfrak{g}}} \circ \pi(e) = \varphi_{\widehat{\mathfrak{g}}} \circ \pi(e)\},$$

где e – единица группы G , а $\pi : G \rightarrow G/H$ – факторотображение. Тогда G/J есть (не обязательно замкнутое) CR-подмногообразие в $\mathbb{P}_k$.

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть $G/H \rightarrow G/J$ – построенное выше слоение. Тогда $J = N_{\text{CR}}(H)$ (см. п. 2.6.1), и если снабдить многообразие $G/N_{\text{CR}}(H)$ его G -инвариантной CR-структурой, то отображение $G/N_{\text{CR}}(H) \rightarrow G/J$ будет CR-отображением. В частности, $G/H \rightarrow G/J$ – $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение многообразия G/H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $J \subset N(H^\circ)$. Действительно, иначе существовали бы элемент ξ в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы H и элемент $g \in J$ такие, что $\text{Ad}_g \xi \notin \mathfrak{h}$. Однако тогда

$$\eta(\pi(e)) := \frac{1}{2}(\tilde{\xi} - i\mathcal{J}\tilde{\xi})(\pi(e)) = 0 \neq \eta(\pi(g)),$$

что противоречит предыдущей лемме.

Поскольку $(\widetilde{R}, \widetilde{\mathcal{J}})$ определяется только по $\mathfrak{h}$ и $(R, \mathcal{J})$ (см. определение $N_{\text{CR}}(H)$ в п. 2.6.1), можно перейти на универсальное накрытие G/H° многообразия G/H с поднятой CR-структурой. В силу предложения 2.1 надо показать, что J состоит из всех элементов $g \in N(H^\circ)$ таких, что отображение $r_g : G/H^\circ \rightarrow G/H^\circ$, $a \cdot H^\circ \mapsto a \cdot gH^\circ$ является CR-отображением.

Пусть $g \in J$, и для $x \in G/H^\circ$ положим $\mathfrak{m}_x = \{\hat{\xi} \in \alpha(\mathfrak{g}) : \xi(x) \in R_x\}$. Пусть $\hat{\xi}$ и $\hat{\xi}'$ – голоморфные векторные поля на U , соответствующие $\hat{\xi}$ и $\hat{\xi}'$. Тогда векторное поле $(\hat{\xi}' - i\hat{\xi}) \in \widehat{\mathfrak{g}}$ обращается в нуль в точке x . По лемме 2.1 оно обращается в нуль и на F_x . Это означает, что $\mathcal{J}\hat{\xi} = \hat{\xi}'$ на F_x . Таким образом, $\mathfrak{m}_x$ порождает пространство R_p при каждом $p \in F_x$. Для $g \in J$ также имеем

$$dr_g(\mathcal{J}\hat{\xi}(x)) = dr_g \hat{\xi}'(x) = \hat{\xi}'(r_g(x)) = \mathcal{J}\hat{\xi}(r_g(x)) = \mathcal{J} dr_g(\hat{\xi}(x)),$$

так что r_g является CR-отображением для каждого $g \in J$.

Обратно, если $g \in N_{\text{CR}}(H^\circ)$, то отображение r_g продолжается до биголоморфизма $\tilde{r}_g : V \rightarrow W$ некоторых окрестностей V, W многообразия M в U . Полагая $\eta := \tilde{\xi} + \mathcal{J}\tilde{\xi} \in \widehat{\mathfrak{g}}$, имеем на W равенства

$$\tilde{r}_g \cdot \eta(x) = d\tilde{r}_g \hat{\eta}(\tilde{r}_g^{-1}(x)) = d\tilde{r}_g \tilde{\xi}(\tilde{r}_g^{-1}(x)) + \mathcal{J} d\tilde{r}_g \tilde{\xi}(\tilde{r}_g^{-1}(x)).$$

При $x \in M$ имеем $d\tilde{r}_g \tilde{\xi}(\tilde{r}_g^{-1}(x)) = (r_g \hat{\xi})(x) = \hat{\xi}(x)$ для всех $\hat{\xi} \in \alpha(\mathfrak{g})$. Поскольку вещественное голоморфное векторное поле $(\tilde{r}_g \cdot \hat{\xi})(x) = d\tilde{r}_g \tilde{\xi}(\tilde{r}_g^{-1}(x))$ является продолжением поля $r_g \cdot \hat{\xi}$ (что верно и для $\tilde{r}_g \cdot \tilde{\zeta}$), отсюда вытекает, что $\tilde{r}_g \cdot \hat{\eta} = \hat{\eta}$ на W , так как G/H° – порождающее CR-подмногообразие в W . В частности, имеем

$$\hat{\eta}(g \cdot \pi(e)) = \hat{\eta}(r_g \cdot \pi(e)) = d\tilde{r}_g \hat{\eta}(\pi(e)).$$

Следовательно, для $\sigma = \hat{\eta}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\eta}_n \in V_{\mathfrak{g}}$ имеем

$$\sigma(g \cdot \pi(e)) = d\tilde{r}_g \hat{\eta}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{r}_g \hat{\eta}_n(\pi(e)),$$

откуда получаем

$$\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}(g \cdot \pi(e))(\sigma) = \widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}(\pi(e))\sigma$$

и, тем самым, $g \in J$. Этим доказано, что $J = N_{\text{CR}}(H)$. То, что $G/N_{\text{CR}}(H) \rightarrow G/J$ – CR-отображение, вытекает из того факта, что $G/H \rightarrow G/N_{\text{CR}}(H)$ является CR-субмерсией и, в силу голоморфности отображения $\widehat{\varphi}_{\hat{\mathfrak{g}}}$, отображение $\varphi_{\hat{\mathfrak{g}}}$ является CR-отображением. (CR-структура на G/J содержит $d\varphi_{\hat{\mathfrak{g}}}(R)$ и, тем самым, по крайней мере столь же велика, как и структура на $G/N_{\text{CR}}(H)$.) Теорема доказана.

2.7. Глобализация слоя. Здесь докажем теорему о глобализации для компактных однородных CR-многообразий G/H коразмерности 1 или 2 в предположении, что $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение вырождено, т.е. $N_{\text{CR}}(H) = G$. Отсюда вытекает, что подгруппа изотропии H дискретна. Доказательство получается простой модификацией доказательства теоремы 1.4.2.1 из работы [4].

ТЕОРЕМА 2.7 [4, теорема 1.4.2.1]. Пусть $M = G/H$ – порождающее однородное CR-многообразие коразмерности не выше 2. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G . Допустим, что G действует эффективно на M и что $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение многообразия M вырождено, т.е. $N_{\text{CR}}(H) = G$. Тогда существуют односвязная комплексная группа Ли $\widehat{G}$, замкнутое CR-вложение универсального накрытия $\tilde{G}$ группы G в $\widehat{G}$ и дискретная подгруппа $\tilde{\Gamma}$ в $\tilde{G}$ такие, что $\widehat{G}/\tilde{\Gamma}$ является $\mathfrak{g}$ -глобализацией многообразия $\tilde{G}/\tilde{\Gamma} = G/H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathcal{I}\mathfrak{g}$ максимальный комплексный идеал в $\mathfrak{g}$. Пусть $\widehat{M}$ – какая-либо $\mathfrak{g}$ -комплексификация многообразия M , и пусть $\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{M}$ -комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\widehat{G}$ связную и односвязную комплексную группу Ли с алгеброй Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ (такая группа единственна с точностью до изоморфизма). Будем отождествлять $\mathfrak{g}$ с $\{\tilde{\xi} \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$. Из вырожденности $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения многообразия G/H и из предположения о коразмерности CR-структуры на M вытекает, что

$$\dim_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}} \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m} + 2.$$

Рассмотрим разложения Леви

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{t}} + \hat{\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{s}$$

алгебр Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$. Тогда $\widehat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{s}}$ – идеал в $\hat{\mathfrak{s}}$ и из соображений размерности вытекает, что

$$\widehat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{s}} = \hat{\mathfrak{s}},$$

откуда имеем

$$\hat{\mathfrak{s}} \subset \hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}.$$

В частности, $\hat{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}$.

Радикал $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, очевидно, удовлетворяет $\mathfrak{r} = \hat{\mathfrak{r}} \cap \mathfrak{g}$. Пусть $\hat{R}$ – односвязная комплексная группа Ли с алгеброй Ли $\hat{\mathfrak{t}}$, а $\tilde{R}$ – универсальное накрытие радикала R группы G . Тогда $\tilde{G} = \tilde{R} \cdot S$, где через S обозначена (максимальная) односвязная полупростая комплексная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{s} = \hat{\mathfrak{s}}$. Группа $\hat{G}$ имеет разложение Леви–Мальцева вида $\hat{G} = \hat{R} \rtimes S$. Поскольку $\mathfrak{r}$ и $\hat{\mathfrak{t}}$ разрешимы, то включение $\mathfrak{r} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{t}}$ индуцирует вложение $i: \tilde{R} \hookrightarrow \hat{R}$ (см. [16]). Гомоморфизм $G \rightarrow \hat{G}$, индуцированный вложением $\mathfrak{g} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}}$, имеет вид

$$(i, \text{id}_S): \tilde{R} \rtimes S = G \rightarrow \hat{G} = \hat{R} \rtimes S.$$

Поскольку S содержит максимальную компактную подгруппу группы $\hat{G}$, образ G замкнут в $\hat{G}$ (см. [17]). Рассмотрим универсальное накрытие $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ и положим $\tilde{\Gamma} := \pi^{-1}(H)$. Из эффективности действия G на G/H и вырожденности $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения вытекает, что H дискретна в G и, следовательно, $\tilde{\Gamma}$ дискретна в $\tilde{G}$. Поскольку подгруппа $G \subset \hat{G}$ замкнута, подгруппа $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{G}$ также замкнута и $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$, очевидно, является $\mathfrak{g}$ -глобализацией многообразия $\tilde{G}/\tilde{\Gamma} = G/H$. Ясно, что вложение $\tilde{G} \hookrightarrow \hat{G}$ является CR-отображением. Теорема доказана.

§ 3. Глобализация

Нашей целью в этом параграфе является вывод условий, при которых локальное действие $\hat{G}$ на окрестности CR-однородного многообразия M допускает глобализацию, т. е. существует такое комплексное однородное многообразие $X = \hat{G}/\hat{H}$, что M будет CR-эквивариантно эквивалентно G -орбите его нейтральной точки. Здесь многообразие M не предполагается компактным, но остальные предположения и обозначения настоящей работы сохраняют силу. В частности, предполагается, что группа G вложена в односвязную комплексную группу Ли $\hat{G}$.

Следующий пример показывает, что для достижения глобализации иногда необходимо модифицировать M (см., например, более подробное изложение в [3] и намного более общие рассуждения в [18]). В § 5 приводятся примеры, где требуется модифицировать M намного сильнее. С другой стороны, в § 5 мы покажем с помощью критериев, полученных в настоящем параграфе, что “большинство” многообразий M можно глобализовать без существенных модификаций.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим двумерную аффинную квадрику $X := \hat{G}/\hat{J}$, где $\hat{G} = \text{SL}_2(\mathbb{C})$, а $\hat{J}$ – подгруппа диагональных матриц. Заметим, что $\hat{J}$ содержит группу, состоящую из $\pm \text{Id}$, так что $\hat{G}$ действует с этой небольшой неэффективностью. Фиксируем нейтральную точку $x_0 \in X$ так, что $\hat{J} = \hat{G}_{x_0}$. Унипотентная группа $\hat{U} \cong \mathbb{C}$ верхнетреугольных матриц реализует X как тотальное пространство главного $\mathbb{C}$ -расслоения $\hat{G}/\hat{J} \rightarrow \hat{G}/\hat{J}\hat{U} \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. отождествляя $\hat{U}$ -орбиту $\hat{U}.x_0$ с $\mathbb{C}$, мы обозначим через Σ подмножество квадрики X , отвечающее лучу $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Положим теперь $G = \mathrm{SU}_2$ и заметим, что всякая G -орбита в X пересекает *срез* Σ ровно в одной точке. Тогда G -орбита M_{x_0} нейтральной точки есть 2-сфера, вложенная как вполне вещественное подмногообразие, а орбиты $M_x = G \cdot x$ остальных точек $x \in \Sigma \setminus \{x_0\}$ являются гиперповерхностями. Поскольку G_x совпадает с упомянутой выше группой $\pm \mathrm{Id}$, описывающей неэффективность, то M_x – просто группа PSU_2 , снабженная левоинвариантной CR-структурой.

Рассмотрим универсальное накрытие $\tilde{Z}$ дополнения Z к множеству M_{x_0} в X . Здесь G свободно действует как группа голоморфных преобразований. Срез Σ поднимается до некоторого среза $\tilde{\Sigma}$ этого G -действия. Если $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$, то CR-однородное пространство $\tilde{M}_x$ есть в точности группа G , снабженная левоинвариантной CR-структурой. Это пример строго псевдовыпуклой гиперповерхности, которую *нельзя* заполнить так, чтобы получить пространство Штейна. Ее нельзя также глобализовать в нашем смысле, поскольку из существования глобализации $\hat{G}/\hat{H}$ вытекало бы, что $\hat{H}$ – подгруппа в $\hat{J}$, откуда $\hat{H} = \hat{J}$ и, следовательно, $\tilde{M}_x = M_x$.

3.1. Однородные слоения. Здесь мы дадим критерий существования глобализации тотального пространства однородного расслоения в предположении, что его слой и база глобализуемы. Как обычно, мы считаем, что $\hat{G}$ – связная односвязная комплексная группа Ли, а G – связная вещественная (не обязательно вполне вещественная) подгруппа в $\hat{G}$ такая, что $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$. Допустим, что однородное CR-многообразие $M = G/H$ является тотальным пространством G -однородного расслоения $\pi: G/H \rightarrow G/J$, база которого – это G -орбита нейтральной точки в некотором комплексном однородном многообразии $\hat{G}/\hat{J}$. Отображение π предполагается голоморфным и локально $\hat{G}$ -эquivariantным в некоторой окрестности многообразия M . Связную компоненту $J^\circ H/H$ слоя J/H обозначим через F .

Если слой F допускает $\hat{J}$ -глобализацию $\hat{F}$, то естественно рассмотреть комплексное $\hat{G}$ -многообразие $\hat{M} := \hat{G} \times_{\hat{J}} \hat{F}$. Тогда G -орбита нейтральной точки в $\hat{M}$ действительно совпадает с CR-однородным пространством $M = G/H$.

Самое большее, на что можно надеяться в приложениях, – это то, что $\hat{F}$ – комплексное многообразие, снабженное локальным голоморфным действием группы $\hat{J}^0$. Поэтому мы сначала допустим, что группа $\hat{J}$ связна (этого можно добиться переходом к некоторому G -эquivariantному накрытию многообразия M). В конце концов окажется, что это не налагает вообще никаких ограничений. Даже если допускать несвязность F , то в силу связности $\hat{J}$ мы должны предполагать связность $\hat{F}$. Поэтому данные F и $\hat{F}$ должны быть заменены на их связные компоненты. Наконец, мы будем считать, что голоморфные векторные поля, возникающие из $\hat{J}$ -действия на $\hat{F}$, можно проинтегрировать, так что универсальное накрытие $\hat{J}_1$ группы $\hat{J}$ действует голоморфно на $\hat{F}$. При выполнении всех этих условий будем говорить, что *слой и база CR-однородного расслоения $G/H \rightarrow G/J$ глобализуемы*. Следующее предложение дает первый критерий существования $\hat{G}$ -глобализации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если включение $J^\circ \hookrightarrow \hat{J}$ индуцирует сюръективное отображение фундаментальных групп, то $\hat{J}_1$ -действие на $\hat{F}$ опускается до $\hat{J}$ -действия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если J_1° – поднятие J° на $\hat{J}_1$, то условие сюръективности на уровне фундаментальных групп влечет, что ядро Λ отображения $J_1^\circ \rightarrow J^\circ$ совпадает с ядром отображения $\hat{J}_1 \rightarrow \hat{J}$. Поскольку Λ действует тривиально на $\hat{F}$, действие $\hat{J}_1$ опускается до действия группы $\hat{J}_1/\Lambda = \hat{J}$. Предложение доказано.

В наших приложениях такие гомотопические вопросы допускают решение только по модулю неэффективности действий на базовом многообразии. Поэтому полезные критерии следует формулировать именно на этом уровне. Пусть $\hat{I}$ – неэффективность $\hat{G}$ -действия на $\hat{G}/\hat{J}$, а $I = \hat{I} \cap G$ – G -неэффективность. Для упрощения ссылок введем следующее

Условие (C). Включение $J^\circ/(I \cap J^\circ) \hookrightarrow \hat{J}/\hat{I}$ индуцирует сюръективное отображение фундаментальных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если

$$J^\circ \cap \hat{I}^\circ = I^\circ, \quad (3.1)$$

то из условия (C) вытекает, что $\hat{J}_1$ -действие на $\hat{F}$ опускается до $\hat{J}$ -действия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1) вытекает, что гомотопические последовательности, ассоциированные со слоениями

$$\hat{I}^\circ \rightarrow \hat{J} \rightarrow \hat{J}/\hat{I}^\circ, \quad I^\circ \rightarrow J^\circ \rightarrow J^\circ/I^\circ,$$

задают естественную коммутативную диаграмму. Многообразие $\hat{I}^\circ$ односвязно, так как является нормальной связной подгруппой в односвязной группе Ли. В силу упомянутых гомотопических последовательностей для доказательства того, что включение $J^\circ \hookrightarrow \hat{J}$ индуцирует сюръективное отображение фундаментальных групп, достаточно установить сюръективность отображения

$$\pi_1(J^\circ/I^\circ) \rightarrow \pi_1(\hat{J}/\hat{I}^\circ).$$

Покажем, что данная сюръективность вытекает из условия (C).

Для этого заметим, что если путь γ представляет гомотопический класс в $\hat{J}/\hat{I}^\circ$ с базовой точкой из J°/I° , то условие сюръективности влечет существование гомотопии между его образом в $\hat{J}/\hat{I}$ и некоторой замкнутой кривой в $J^\circ/J^\circ \cap I$. Поскольку эту гомотопию можно поднять до гомотопии между γ и некоторой кривой в J°/I° , получаем требуемый результат. Предложение доказано.

Опишем ситуацию, в которой применимо предложение 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если радикал $\hat{R}$ группы $\hat{G}$ действует на $\hat{G}/\hat{J}$ как абелева группа (т.е. если его коммутант $\hat{R}'$ содержится в $\hat{J}$), то выполнено условие (3.1).

В основе доказательства этого результата лежит общий факт, выражаемый следующей леммой.

ЛЕММА 3.1. Если $\hat{N}$ – связная комплексная нормальная подгруппа в $\hat{G}$, содержащая коммутант $\hat{R}'$, то множество $\hat{N} \cap G$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На уровне алгебр Ли имеем $\hat{\mathfrak{t}}' = \mathfrak{t}' + i\mathfrak{t}'$. Тем самым получаем $\hat{R}' \cap G = R'$. Поэтому $\hat{N} \supset R'$ и достаточно доказать лемму для случая, когда группа $\hat{R}$ абелева. В самом общем случае множество $\hat{N} \cap \hat{R}$ совпадает с радикалом $\hat{R}_{\hat{N}}$. В абелевом же случае оно является векторным подпространством в $\hat{R}$. Поскольку то же самое верно и для R , получаем, что множество $\hat{N} \cap R$ связно. Осталось показать, что $\hat{N}/\hat{R}$ имеет связное пересечение с образом G в $\hat{G}/\hat{R}$.

Для этого удобно рассмотреть разложение Леви–Мальцева $G = R \rtimes S$, согласованное с разложением Леви–Мальцева $\hat{G} = \hat{R} \rtimes \hat{S}$ в том смысле, что $S \subset \hat{S}$. Тогда простые множители группы S – это либо комплексные простые множители группы $\hat{S}$, либо вещественные формы комплексных простых множителей группы $\hat{S}$, либо антиголоморфные диагонали произведений двух изоморфных простых множителей группы $\hat{S}$. Поскольку образ G в факторгруппе $\hat{G}/\hat{R} = \hat{S}$ можно отождествить с S , а $\hat{N}/\hat{R}$ – с произведением некоторых простых множителей $\hat{S}$, мы получаем требуемый результат. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.3. Из леммы 3.1 следует равенство $\hat{I}^0 \cap G = I^0$, и поскольку $I^0 \subset J^0$, условие (3.1) выполнено.

3.2. Замечания о накрытиях. В начале этого пункта мы следуем соглашениям из предыдущего пункта; в частности, $\hat{J}$ предполагается связным. Из рассуждений, приведенных в п. 3.1, вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Если $\hat{R}$ действует на $\hat{G}/\hat{J}$ как абелева группа и выполнено условие (C), то $\hat{J}$ действует голоморфно на $\hat{F}$.*

В этой ситуации мы рассмотрим G -орбиту $G/\tilde{H}$ нейтральной точки на комплексном $\hat{G}$ -многообразии $\hat{G} \times_j \hat{F} = \hat{G}/\hat{H}$. Поскольку H по построению оставляет нейтральную точку на месте, имеем $\tilde{H} \supset H$. Далее, $G/\tilde{H}$ – F -расслоение над G/J , откуда $\dim G/H = \dim G/\tilde{H}$. Поэтому $M = G/H \rightarrow G/\tilde{H} = \tilde{M}$ является накрытием. Таким образом, в ситуации, рассмотренной в п. 3.1, если выполнено условие (C) и $\hat{R}$ действует на $\hat{G}/\hat{J}$ как абелева группа, то локальное действие $\hat{G}$ в окрестности M допускает глобализацию после замены многообразия M на некоторый его дискретный G -эквивариантный фактор.

Пример 3.1 показывает, что переход к дискретному фактору может быть действительно необходим. Этот переход осуществляется рассмотренным в примере отображением данного неглобализуемого многообразия на орбиту-гиперповерхность в аффинной квадрике.

Выше неявно использовалось еще одно накрытие, которое на самом деле не является необходимым для глобализации. Возникает оно следующим образом. Не будем предполагать, что $\hat{J}$ связно, и изменим предыдущие обозначения, положив $H_1 := H \cap \hat{J}^\circ$ и $J_1 := J \cap \hat{J}^\circ$. Тогда применимы предыдущие результаты. Если выполнены глобализационные условия и $\hat{G}/\hat{H}_1$ – полученное комплексное $\hat{G}$ -однородное многообразие, то можно вернуться к исходной ситуации. Для этого заметим, что слой F полученного отображения $G \times_{H_1} F \rightarrow G/J_1$ есть в точности связная компонента слоя J/H . В частности, H оставляет на месте нейтральную точку из F , откуда вытекает включение $H \subset \hat{H}_1$. Если теперь вернуться к исходной ситуации посредством замены $\hat{J}^\circ$ на исходную комплексную группу $\hat{J}$, то получим требуемую глобализацию (но, конечно, слой может

быть несвязным). Сейчас мы сформулируем этот результат для дальнейших ссылок. Для простоты соберем вместе все условия следующей *стандартной ситуации*:

- 1) комплексная группа Ли $\hat{G}$ связна и односвязна;
- 2) вещественная (но не обязательно вполне вещественная) подгруппа G связна и $\mathfrak{g} + i\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}}$;
- 3) $M = G/H$ – однородное CR-многообразие, причем $\hat{G}$ действует локально голоморфно на комплексном многообразии, являющемся локальной окрестностью M ;
- 4) $G/H \rightarrow G/J$ – CR-однородное расслоение;
- 5) база G/J этого расслоения является G -орбитой нейтральной точки в $\hat{G}$ -однородном пространстве $\hat{G}/\hat{J}$;
- 6) связная компонента F слоя J/H допускает (связную) глобализацию $\hat{F}$, на которой голоморфно действует универсальное накрытие $\hat{J}_1$ связной компоненты $\hat{J}^\circ$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если в стандартной ситуации радикал $\hat{R}$ действует на $\hat{G}/\hat{J}$ как абелева группа и выполнено условие (C), то $\hat{J}^\circ$ действует голоморфно на $\hat{F}$ и существует такое накрытие $M := G/H \rightarrow G/\tilde{H} = \tilde{M}$, что CR-расслоение $G/\tilde{H} \rightarrow G/J$ допускает глобализацию $\hat{G}/\tilde{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{J}$.*

Заметим, что в случае компактного M накрытие $M \rightarrow \tilde{M}$ конечнолистно, так что глобализуемость достигается небольшой ценой.

В приложениях теоремы 3.1 часто можно проверить лишь выполнение более слабой версии условия (C), состоящей в том, что образ $\pi_1(J^0/(I \cap J^0))$ при отображении фундаментальных групп, индуцированном включением $J^0/(I \cap J^0) \hookrightarrow \hat{J}/\hat{I}$, имеет конечный индекс в $\pi_1(\hat{J}/\hat{I})$. Заменяв условие (C) на эту более слабую версию, имеем следующее дополнение к теореме о глобализации.

ТЕОРЕМА 3.1'. *Теорема 3.1 верна и при выполнении описанной более слабой версии условия (C).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнен лишь ослабленный вариант условия (C), то по сказанному выше некоторое конечнолистное накрытие $\hat{J}_1$ группы $\hat{J}$ действует (транзитивно) на $\hat{F}$. Положим $\hat{F} = \hat{J}_1/\hat{I}$ и обозначим ядро отображения $\hat{J}_1 \rightarrow \hat{J}$ через Γ (это конечная центральная подгруппа в $\hat{J}_1$). Если мы заменим $\hat{F}$ на $\hat{F}_1 := \hat{J}_1/\Gamma\hat{I}$, то $\hat{J}$ будет действовать на $\hat{F}_1$ и мы имеем глобализацию $\hat{G} \times_j \hat{F}_1$. При этом G -орбита нейтральной точки на данном многообразии может быть конечным фактором исходного многообразия G/H , однако конечные факторы допускаются в формулировке теоремы 3.1

3.3. Случай $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения. Наше основное приложение глобализационного критерия относится к случаю $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения $M := G/H \rightarrow G/J \hookrightarrow \hat{G}/\hat{J}$. Обозначим через ℓ вещественную алгебру Ли $\mathfrak{j}/\mathfrak{h}$ и положим $\hat{\ell} := \hat{j}/\hat{h}$. Если L и $\hat{L}$ – соответствующие группы (причем $\hat{L}$, как всегда, считается односвязной), то $F = L/\Gamma$ для некоторой дискретной подгруппы Γ . Если локальное $\hat{L}$ -действие можно глобализовать до голоморфного действия на $\hat{F}$, удовлетворяющего стандартным предположениям, то применим глобализационный критерий.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $M = G/H \rightarrow G/J \hookrightarrow \hat{G}/\hat{J}$ – $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение однородного CR-многообразия M . Допустим, что связная компонента $F = L/\Gamma$ слоя допускает $\hat{L}$ -глобализацию $\hat{F}$. Если $\hat{R}$ действует на $\hat{G}/\hat{J}$ как абелева группа и выполнено условие (C), то $\hat{J}^\circ$ голоморфно действует на $\hat{F}$ и существует накрытие $M := G/H \rightarrow G/\tilde{H} = \tilde{M}$ такое, что CR-расслоение $G/\tilde{H} \rightarrow G/J$ допускает глобализацию $\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{J}$.

§ 4. Структурная теорема в проективном случае

В § 3 мы дали критерий существования $\hat{G}$ -глобализации CR-однородного пространства M . Для его применения нужны детальные сведения о некоторых свойствах базы $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения. Основная цель настоящего параграфа – доказать первое из этих свойств, состоящее в том, что радикал $\hat{R}$ группы $\hat{G}$ действует как абелева группа на глобализации $\hat{G}/\hat{J}$ базы G/J указанного $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения. Отметим, что это выполняется для CR-структур любой коразмерности на G/J . Другое свойство, нужное для применимости теоремы 3.2, – это выполнение условия (C). Ситуации, когда условие (C) выполняется, будут обсуждены в следующем параграфе.

База $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения сама является CR-однородным пространством: G -орбитой в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ некоторого пространства $\hat{G}$ -представления V . В обозначениях из § 3 имеем глобализацию

$$G/J \hookrightarrow \hat{G}/\hat{J} \hookrightarrow \mathbb{P}(V).$$

Мы здесь докажем структурную теорему, дающую первое описание этой ситуации. Отметим, что группа $\hat{G}$ всего лишь представлена на V ; в частности, она может действовать неэффективно, и как G , так и $\hat{G}$ могут быть незамкнуты в $\mathrm{PGL}_{\mathbb{C}}(V)$. Хотя в глобализационном критерии требуется информация о G -действии, мы, тем не менее, заменим группу G на замыкание ее образа в $\mathrm{PGL}_{\mathbb{C}}(V)$. Поскольку мы рассматриваем здесь компактные CR-однородные пространства, это замыкание стабилизирует базу $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения. Пользуясь структурной теоремой настоящего параграфа и подробными классификационными результатами следующего параграфа, мы затем получим достаточно информации об исходной группе для того, чтобы применить теорию глобализации.

Комплексная группа Ли называется *редуктивной*, если она является комплексификацией некоторой максимальной компактной подгруппы. Напомним, что редуктивная группа Ли всегда обладает структурой линейной алгебраической группы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть G – связная вещественная (но не обязательно вполне вещественная) замкнутая подгруппа Ли в $\mathrm{PGL}_{\mathbb{C}}(V)$, и пусть $M = G.x_0$ – компактная орбита в $\mathbb{P}(V)$, проективная линейная оболочка которой равна всему $\mathbb{P}(V)$. Пусть $\hat{G}$ – наименьшая комплексная группа Ли, содержащая G в $\mathrm{PGL}_{\mathbb{C}}(V)$, т.е. группа с алгеброй Ли $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$. Обозначим комплексное алгебраическое замыкание группы G через $\bar{G}$. Пусть $G = R \cdot S$ – разложение Леви–Мальцева группы G , а $\hat{G} = \hat{R} \cdot \hat{S}$ – разложение Леви–Мальцева группы $\hat{G}$. Тогда подгруппа R центральна, компактна, действует свободно на M

u является вполне вещественной с комплексификацией $\hat{R} \cong (\mathbb{C}^*)^k$. Группа $\hat{G} = \hat{S} \cdot \hat{R}$ редуктивна и, следовательно, алгебраична, откуда вытекает равенство $\hat{G} = \bar{G}$. Всякая максимальная компактная подгруппа группы G действует транзитивно на M .

Этот результат вытекает из ряда наблюдений, которые мы изложим ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Радикал R группы G абелев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутант R' является вещественной унипотентной группой и, в частности, вещественной алгебраической подгруппой в $\mathrm{PGL}_{\mathbb{C}}(V)$. Тем самым на границе любой R' -орбиты в $\mathbb{P}(V)$ лежат только R' -орбиты меньших размерностей. Далее, каждая R' -орбита алгебраически диффеоморфна некоторому $\mathbb{R}^m$. В частности, единственная возможность для замкнутой орбиты – это неподвижная точка. Поскольку R' является нормальной подгруппой в G , получаем, что G действует транзитивно на множестве R' -орбит в M . В частности, все R' -орбиты в M имеют одинаковую размерность, и поскольку M компактно, все они должны быть замкнуты, т. е. R' оставляет на месте каждую точку из M . Из того, что проективная линейная оболочка M равна $\mathbb{P}(V)$, получаем теперь, что $R' = \{\mathrm{Id}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что процесс перехода от исходной группы G к замыканию образа ее представления на $\mathbb{P}(V)$ только увеличивает радикал. Поэтому из предложения 4.1 вытекает, что радикал исходной группы действует на $\mathbb{P}(V)$ как абелева группа.

Будучи абелевой группой, R имеет единственную максимальную компактную подгруппу T , т. е. максимальный компактный тор. Покажем, что на самом деле $R = T$. Заметим, что так как тор T стабилизируется сопряжением на S и его группа автоморфизмов (в теоретико-групповом смысле) дискретна, то T является центральной подгруппой в G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Радикал R является центральной подгруппой в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Радикал R аналитически разлагается в G -инвариантное произведение $R = T \times V$, где V – аддитивная группа некоторого векторного пространства. Из центральности T вытекает, что $R_{G'} \subset V$. По теореме Шевалле группа G' (и тем самым $R_{G'}$) является вещественной алгебраической. Если она нетривиальна, то она некомпактна и все ее орбиты некомпактны. Поскольку подгруппа $R_{G'}$ нормальна в G , все указанные орбиты на M имеют одинаковую размерность. Повторяя приведенное выше доказательство тривиальности R' , мы получаем, что группа $R_{G'}$ тривиальна и, следовательно, подгруппа R центральна.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Радикал группы G есть компактный тор, т. е. $R = T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из центральности R в G вытекает, что радикал $\bar{R}$ алгебраического замыкания $\bar{G}$ централен в $\bar{G}$. Следовательно, группы изотропии $\bar{R}_x$ и $\bar{R}_y$ совпадают для любых двух точек $x, y \in \bar{G}.x_0$. Поскольку линейная оболочка M равна всему пространству $\mathbb{P}(V)$ и $\bar{G}.x_0 \supset M$, получаем, что $\bar{R}$ действует свободно на $\bar{G}.x_0$. Поскольку $\bar{R}$ – нормальная алгебраическая подгруппа в $\bar{G}$,

ее орбиты в $\overline{G}.x_0$ замкнуты. При этом R есть замкнутая подгруппа в $\overline{R}$, так что все ее орбиты тоже замкнуты в $\overline{G}.x_0$. В частности, ее орбиты на M замкнуты в M . Однако R действует свободно на M , и потому $R = T$.

Будучи компактным тором в линейной группе, T является вполне вещественным подмногообразием, так что $\hat{T} = T^{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^*)^m$. Отсюда вытекает, что группа $\hat{G} = \hat{T}\hat{S}$ редуктивна и, тем самым, $\hat{G} = \overline{G}$.

Поскольку группа G есть произведение, $G = T \cdot S$, компактного тора и полупростой группы, она является (вещественной, но не обязательно вполне вещественной) алгебраической подгруппой в $\mathrm{PGL}_{\mathbb{C}}(V)$. Следовательно, ее группа изотропии G_{x_0} имеет лишь конечное число компонент.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Всякая максимальная компактная подгруппа $K = T \cdot K_S$ группы G действует транзитивно на M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку M компактно и G_{x_0} имеет лишь конечное число компонент, требуемое утверждение вытекает из теоремы Монтгомери [19].

Факторизуя по $\hat{T}$, приходим к следующему:

$$\begin{array}{ccccccc} M & = & G/H & \hookrightarrow & \hat{G}/\hat{H} & \hookrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ N & = & G/TH & \hookrightarrow & \hat{G}/\hat{T}\hat{H} & \hookrightarrow & \mathbb{P}(W) \end{array} \quad (4.1)$$

Здесь $G/H \rightarrow G/TH$ и $\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{T}\hat{H}$ – главные T - и $\hat{T}$ -расслоения. Поскольку расслоение $\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{T}\hat{H}$ задает фактор в смысле алгебраических групп (как показывают сами обозначения), его база эквивариантно вложена в качестве $\hat{G}$ -орбиты в некоторое проективное пространство.

Группа S действует транзитивно на N и алгебраически на M , а также является нормальной подгруппой в G . Поэтому уже неоднократно применявшееся рассуждение показывает, что S -орбиты в M также компактны. Мы рассматриваем $S.x_0$ как *толстое сечение* слоения $M = G/H \rightarrow G/TH = S/I_S = N$. Связную компоненту слоя отображения $\Sigma := S.x_0 = S/H_S \rightarrow S/I_S$ можно рассматривать как подтор T_0 в T . Пусть T_1 – тор, дополняющий T_0 до T . Тогда имеем следующее наблюдение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Отображение $T_1 \times \Sigma \rightarrow M$, заданное действием T_1 и каноническим вложением Σ , представляет M в виде некоторого конечного фактора $T_1 \times_{\Gamma} \Sigma$.*

Таким образом, с точностью до взятия конечного фактора наше CR-однородное пространство есть произведение вполне вещественного тора T_1 и CR-однородного пространства Σ . Эта структура произведения может быть не оптимальной с точки зрения CR-геометрии, потому что на комплексифицированном уровне расслоение $\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{T}_1\hat{H}$ может и не допускать соответствующего расщепления. Например, $\hat{S}$ может действовать транзитивно на $\hat{G}/\hat{H}$.

Пользуясь тем, что S – нормальная подгруппа в G , мы можем отщепить от G максимальную комплексную подгруппу и во всех дальнейших рассмотрениях проективных CR-однородных пространств предполагать, что G – вещественная

форма группы $\hat{G}$. Для этого рассмотрим идеал $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g}$, определяющий эту подгруппу на уровне алгебр Ли. Поскольку $\mathfrak{g}$ – ли-алгебраическая прямая сумма, $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{s}$, а подалгебра $\mathfrak{t}$ вполне вещественна в $\hat{\mathfrak{g}}$, получаем, что $\mathfrak{l}$ – сумма тех прямых слагаемых из $\mathfrak{s}$, которые являются прямыми слагаемыми в $\hat{\mathfrak{s}}$. Поэтому соответствующая комплексная группа L есть произведение тех множителей из S , которые являются также множителями в $\hat{S}$. Поскольку $L = \hat{L}$ – алгебраическая нормальная подгруппа в G , алгебраически действующая на компактном многообразии M , все ее орбиты изоморфны некоторому фиксированному компактному проективному алгебраическому однородному пространству Z (L -флаговому многообразию).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Комплексное алгебраическое расслоение $\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{H}\hat{L}$ является $\hat{G}$ -эквивариантно тривиальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\hat{L}$ -изотропии $\hat{P}$ в точке x_0 имеет ровно одну неподвижную точку на флаговом многообразии $Z = \hat{L}/\hat{P}$. Поэтому то же самое верно для любой $\hat{L}$ -орбиты в $\hat{G}/\hat{H}$. Следовательно, множество неподвижных точек $\mathcal{F} := \text{Fix}(\hat{P})$ группы $\hat{P}$ на $\hat{G}/\hat{H}$ есть сечение рассматриваемого слоения, и естественное отображение $\hat{L} \times \mathcal{F} \rightarrow \hat{G}/\hat{H}$ пропускается через $\hat{L}$ -эквивариантный изоморфизм произведения многообразия $Z = \hat{L}/\hat{P}$ и базы $\hat{G}/\hat{H}\hat{L}$. Поскольку произведение $\hat{G}_1$ остальных множителей из $\hat{S}$ и комплексного тора $\hat{T}$ централизует $\hat{L}$, это произведение стабилизирует множество неподвижных точек $\mathcal{F}$, а многообразие $\hat{G}/\hat{H} = Z \times \mathcal{F} = \hat{L}.x_0 \times \hat{G}_1.x_0$ распадается также и на уровне групп.

Определим теперь нормальную вполне вещественную подгруппу G_1 группы G как произведение T и тех множителей группы S , которые не входят в L . В полученных выше результатах содержится упомянутый во введении структурный результат типа Бореля–Реммерта [20].

ТЕОРЕМА 4.2. *Исходное CR-однородное пространство M является CR-произведением компактного комплексного флагового многообразия $Z = L.x_0$ и CR-однородного пространства $M_1 = G_1.x_0 = G_1/H_1 \hookrightarrow \hat{G}_1/\hat{H}_1$.*

§ 5. Проективные однородные пространства коразмерности не выше двух

Мы продолжаем использовать обозначения из § 4, где $\hat{G}$ – связная комплексная группа Ли, действующая посредством некоторого представления на комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ и имеющая такую вещественную (связную) подгруппу G , что ее орбита $G.x_0 =: M$ – изучаемое компактное CR-однородное пространство. Структурные теоремы позволяют нам считать, что группа $\hat{G} = \hat{T}\hat{S}$ редуктивна с радикалом $\hat{T}$ и полупростой частью $\hat{S}$, а $G = TS$ является ее вещественной формой. Поскольку G – вещественная алгебраическая группа, действующая алгебраически, а многообразие M компактно, каждая максимальная компактная подгруппа K группы G действует транзитивно на M . Цель настоящего параграфа – подробно описать эту ситуацию в предположении, что M имеет коразмерность не выше 2 как CR-многообразие, т. е. имеет коразмерность не выше 2 в комплексной орбите $\hat{G}.x_0 = \hat{G}/\hat{H}$.

5.1. Описание проективной глобализации. Комплексное однородное многообразие $X := \widehat{G}.x_0 = \widehat{G}/\widehat{H}$ является $\widehat{G}$ -глобализацией CR-многообразия $M = G.x_0$ (по предположению имеющего коразмерность не выше 2) в проективном пространстве. Здесь мы дадим описание X с помощью ставших уже классическими методов теории действий комплексных алгебраических групп.

5.1.1. Свойство сферичности. В качестве первого шага покажем, что многообразие X *сферично*. Это понятие, происходящее из классического гармонического анализа, естественно переносится на случай действий комплексных редуктивных групп и состоит в требовании, чтобы некоторая борелевская подгруппа $\widehat{B}$ группы $\widehat{G}$ имела открытую орбиту в X (см. [21]). По определению борелевская подгруппа есть максимальная связная разрешимая подгруппа в $\widehat{G}$. Все такие подгруппы являются комплексными алгебраическими, и любые две из них сопряжены (основы теории изложены, например, в [22]). Поэтому условие *сферичности* определено независимо от рассматриваемой борелевской подгруппы. Оно оказывается весьма ограничительным и приводит к тонким классификационным результатам, особенно полезным в нашей ситуации.

Существует несколько разных способов проверки свойства сферичности. Здесь мы сосредоточимся на K -действии и используем гамильтонов подход. Для этого рассмотрим K -инвариантную кэлерову структуру ω на X . Поскольку можно считать K представленной как группа унитарных преобразований, возьмем в качестве ω сужение формы Фубини–Штуди. В частности, с кэлеровой структурой ассоциировано K -эквивариантное отображение моментов $\mu: X \rightarrow \mathfrak{k}^*$. Обозначим через $\widehat{K}$ (редуктивную) комплексификацию группы K в $\widehat{G}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Многообразие X является $\widehat{K}$ -сферическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что K -действие на X коизотропно, т. е. что μ -слои (общего положения) содержатся в K -орбитах [23]. Для этого рассмотрим общую (в смысле теории размерности) K -орбиту $Y := K.x$. Мы знаем, что она имеет коразмерность не выше 2. Касательное пространство к μ -слою в точке x есть $T_x Y^{\perp \omega}$ (см., например, [24, формула (26.3)]). Надо показать, что это касательное пространство содержится в $T_x Y$.

Заметим, что комплексное касательное пространство $T_x^{\text{CR}} Y$ к Y содержится в $T_x Y$ и является комплексным подпространством коразмерности не выше 2 в $T_x X$. Поскольку ω – кэлерова форма, то $T_x Y^{\perp \omega}$ содержится в ортогональном дополнении P_x пространства $T_x^{\text{CR}} Y$ относительно индуцированной эрмитовой метрики. Заметим, что P_x имеет естественную вещественную структуру: $P_x^{\mathbb{R}}$ определяется как $P_x \cap T_x Y$. Поскольку $\widehat{K}$ действует транзитивно на X , орбита Y не является комплексной. Поэтому остается рассмотреть два случая.

В первом случае, если пространство P_x комплексно-одномерно, $\dim_{\mathbb{R}} P_x^{\mathbb{R}} = 1$, то $\text{codim}_{\mathbb{R}}(Y) = 1$ и орбита Y нечетномерна. Однако $\mu(Y)$ является флаговым многообразием и, следовательно, четномерно; поэтому слой отображения $\mu|_Y$ имеет положительную размерность. Поскольку касательное пространство к μ -слою в точке x есть $T_x Y^{\perp \omega}$, полный μ -слой одномерен. Поэтому он должен (локально) содержаться в Y , т. е. Y коизотропно.

Во втором случае, когда P_x двумерно, получаем, что $\text{codim}_{\mathbb{R}}(Y) = 2$ и пространство $P_x^{\mathbb{R}}$ двумерно. Теоретически могло бы оказаться, что K_x действует на P_x с орбитами положительной размерности. Но так как Y выбрана K -орбитой общего положения, то все близкие K -орбиты тоже имеют коразмерность 2. В результате связная компонента K_x^0 действует тривиально на двумерном дополнении $P_x^{\mathbb{R}}$ к пространству $T_x^{\text{CR}}Y$ в T_xY . Следовательно, орбита $N(K_x^0).x$ нормализатора группы K_x в K имеет размерность не меньше 2. Поскольку множество $\mu(Y)$ четномерно, мы получаем, что либо $\mu \mid Y$ имеет двумерные слои (откуда вытекает требуемый результат), либо μ отображает Y биективно на некоторую коприсоединенную орбиту. В последнем случае в силу односвязности коприсоединенных орбит мы имели бы равенство $K_{\mu(x)} = K_x^0$. Но поскольку коприсоединенные орбиты суть флаговые многообразия, орбита $N(K_{\mu(x)}).x$ конечна. Противоречие. Следовательно, $\mu \mid Y$ имеет двумерные слои, откуда вытекает коизотропность Y .

5.1.2. Аффинно-рациональные слоения. Из предложения 5.1 следует, что пространство $X = \hat{G}/\hat{H}$ является $\hat{G}$ -сферическим. Поскольку группа K действует транзитивно на M , ее орбиты общего положения на X имеют коразмерность не выше 2. То же самое верно для максимальной компактной подгруппы $\hat{G}_u$ в $\hat{G}$, содержащей K . Поэтому говорят, что X есть $\hat{G}$ -однородное сферическое многообразие ранга не выше 2. Сферические многообразия очень хорошо изучены (см., например, [25]–[29]), что позволяет дать подробный список всех многообразий X , возникающих в рассматриваемой ситуации. Здесь изложение будем вести достаточно подробно для того, чтобы для любого из возможных приложений читатель мог сам получить нужный ему более тонкий результат.

В основе первого применяемого нами метода лежит понятие “аффинно-рационального” слоения, являющегося в некотором смысле каноническим. Как ясно из самого названия, основные строительные блоки этого слоения $\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{Q}$ суть аффинные и проективные рациональные однородные многообразия, причем слой аффинный, а база рациональная. Это условие, налагаемое на базу, равносильно тому, что $\hat{Q}$ содержит некоторую борелевскую подгруппу, т.е. группа $\hat{Q}$ (комплексно) параболична. Самая элементарная часть *теории корней* позволяет полностью описать все параболические подгруппы в $\hat{G}$ (см., например, [22]).

Хотя конечная группа $\hat{H}/\hat{H}^0$ может быть нетривиальной, это приводит лишь к утяжелению обозначений, так что мы будем предполагать группу $\hat{H}$ связной. Вместо разложения Леви–Мальцева (которое справедливо в самом общем случае) мы будем пользоваться разложением Леви $\hat{H} = \hat{H}_u \rtimes \hat{H}_r$, справедливым только для алгебраических групп. Здесь $\hat{H}_u$ – унипотентный радикал группы $\hat{H}$, состоящий из всех унипотентных элементов ее радикала, а $\hat{H}_r$ – максимальная редуктивная подгруппа. “Крышка” над буквами в данных обозначениях указывает лишь на то, что мы работаем с комплексными алгебраическими группами, и не имеет никакого отношения к вещественной группе G .

Если группа $\hat{H}$ не редуктивна, то так называемый *метод Вайсфайлера* (см. [30, § 30]) дает систематический подход к нахождению параболической группы $\hat{Q} = \hat{Q}_u \rtimes \hat{Q}_r$, для которой $\hat{H}_u \subset \hat{Q}_u$ и $\hat{H}_r \subset \hat{Q}_r$. База слоения

$\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}$ есть проективное рациональное многообразие, а слой $\widehat{Q}/\widehat{H}$ является однородным расслоением

$$A := \widehat{Q}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{Q}/\widehat{Q}_u\widehat{H} = \widehat{Q}_r/\widehat{H}_r,$$

слоем которого служит аффинное однородное пространство $\widehat{Q}_u/\widehat{H}_u = \mathbb{C}^n$, а базой – фактор редуктивной группы по ее редуктивной подгруппе. Последняя является аффинной алгебраической, а значит, поскольку мы рассматриваем алгебраические однородные расслоения, тотальное пространство тоже аффинно. Поэтому мы называем слоение $\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}$ *аффинно-рациональным*. Оно, вообще говоря, не единственно, но мы уменьшим неединственность, потребовав, чтобы его слой был минимален в том смысле, что он не может быть $\widehat{Q}$ -эквивариантно расслоен над проективным рациональным многообразием.

5.1.3. Слой аффинно-рационального слоения. Нас интересует случай, когда X имеет ранг не выше 2. В этом случае, хотя группа $\widehat{Q}$ может и не действовать на слое A как редуктивная группа, но поскольку общие орбиты ее максимальных компактных подгрупп, например $U := \widehat{G}_u \cap \widehat{Q}$, имеют коразмерность не выше 2, мы все же можем рассматривать A как сферическое многообразие ранга не выше 2 в чуть более общем смысле. Сейчас мы опишем все возможные случаи для $A = \widehat{Q}/\widehat{H}$ (см. табл. 1 ниже). Изложение приведено достаточно подробно для того, чтобы с помощью элементарной теории корней и представлений можно было получить точные комбинаторные описания.

Напомним, что центр группы $\widehat{Q}$ есть комплексный тор $\widehat{T} \cong (\mathbb{C}^*)^r$, и рассмотрим слоение $\widehat{Q}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{Q}/\widehat{T}\widehat{H}$ со слоем $(\mathbb{C}^*)^n$. Поскольку база аффинна и для каждого $\mathbb{C}^*$ коразмерность общей U -орбиты на базе убывает на единицу, имеем $0 \leq n \leq 2$. Если $n = 2$, то $\widehat{H}_u = \widehat{Q}_u$. В этом случае полупростые части $\widehat{H}_r^{ss}$ и $\widehat{Q}_r^{ss}$ также совпадают и на самом деле $\widehat{Q}$ действует просто как $(\mathbb{C}^*)^2$. Иными словами, слоение $\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}$ есть $(\mathbb{C}^*)^2$ -главное расслоение.

Если $n = 1$, то общие U -орбиты в $\widehat{Q}/\widehat{T}\widehat{H}$ имеют коразмерность 1. Эта ситуация подробно описана в [2]. Существуют два случая в зависимости от наличия или отсутствия действия группы $\widehat{Q}_u$. Если такое действие имеет место, то из того, что коразмерность U убывает всякий раз, когда мы расслаиваем с некомпактным слоем, мы опять получаем, что $\widehat{Q}_u$ действует транзитивно на $\widehat{Q}/\widehat{T}\widehat{H} = \mathbb{C}^m$, а U действует на том же пространстве линейно как компактная симплектическая группа, SU_m или U_m . Если группа $\widehat{Q}_u$ действует тривиально на этом многообразии (т.е. если $\widehat{Q}_u = \widehat{H}_u$), то она представляет собой фактор $\widehat{Q}_r^{ss}/\widehat{H}_r^{ss}$ полупростых частей множителей Леви. Поскольку компактная группа U имеет орбиты коразмерности 1, мы заключаем, что это многообразие есть не что иное, как полупростое симметрическое пространство ранга 1, т.е. касательное расслоение сферы S^n или ее $(2:1)$ -фактора $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, комплексное проективное пространство $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, гиперболическое проективное пространство $\mathbb{P}_n(\mathbb{H})$ или плоскость Кэли $\mathbb{P}_2(\mathbb{O})$. Эти последние результаты принадлежат А. Моримото и Т. Нагано [9].

До сих пор мы изучили только случай, когда действие $\widehat{T}$ на A нетривиально. Если оно тривиально, то рассмотрим слоение $\widehat{Q}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{Q}/\widehat{Q}_u\widehat{H}$ со слоем $\mathbb{C}^n$. Как обычно, существуют два случая: база либо тривиальна, либо нетривиальна. Если она тривиальна, то получаем, что редуктивные части $\widehat{Q}_r$ и $\widehat{H}_r$ совпадают, а $\widehat{H}$ строится из $\widehat{Q}$ удалением двух корневых групп. В такой ситуации

легко провести классификацию. Если база $\widehat{Q}/\widehat{Q}_u\widehat{H}$ нетривиальна, то, поскольку центр группы $\widehat{Q}$ действует тривиально на A , мы опять получаем фактор полупростых частей $\widehat{Q}_r$ и $\widehat{H}_r$, т. е. комплексное полупростое симметрическое пространство ранга 1, как и выше. Когда будут описаны все возможности для пар $(\widehat{Q}, \widehat{H})$ с этим свойством, останется только отсеять те из них, для которых из $\widehat{Q}_u$ можно удалить какую-либо корневую группу. Комбинаторные рассуждения такого типа проводились также в [2].

Наконец мы приходим к случаю, когда как центр $\widehat{T}$, так и унипотентный радикал $\widehat{Q}_u$ действуют тривиально на слое A . Иными словами, после исключения неэффективности слой A становится полупростым аффинным сферическим пространством ранга 2. Такие пространства были классифицированы М. Кремером [31] с очень полезными дополнениями, сделанными Д. Н. Ахиезером [26]. Приведем одну из точек зрения на эту классификацию.

ТАБЛИЦА 1. Слой $A = \widehat{Q}/\widehat{H}$ аффинно-рационального слоения

Слой	База	Замечания
$\widehat{T}$ -слоение		
$(\mathbb{C}^*)^2$ $\mathbb{C}^*$	Точка $\mathbb{C}^m$	$\widehat{G}/\widehat{H} \xrightarrow{(\mathbb{C}^*)^2} \widehat{G}/\widehat{Q}$ – главное линейное U -действие на $\widehat{Q}/\widehat{T}\widehat{H}$
$\widehat{Q}_u$ -слоение		
$\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}^n$	Точка Симметрическое пространство ранга 1	$\widehat{H} = \widehat{Q}$ – две корневые группы $\widehat{H}_u = \widehat{Q}_u$ – одна корневая группа
$\mathbb{C}^*$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$	$T(\mathbb{P}_m)$ $T(\mathbb{P}_n(\mathbb{H}))$	$A = \mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ $A = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/(\mathrm{Sp}_{2n-2}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*)$ – аффинные сферические пространства ранга 2, одно исключение: $\mathrm{SO}_9(\mathbb{C})/\mathrm{Spin}_7(\mathbb{C})$

Все примеры, за одним исключением (в котором $\widehat{Q}$ действует как SO_9 с изотропией Spin_7), являются либо аффинными симметрическими пространствами ранга 2, либо описываемыми, как выше, естественными расслоениями над симметрическими пространствами ранга 1. Имеют место две бесконечные серии таких расслоений:

$$\mathrm{SL}_{m+1}/\mathrm{SL}_m \rightarrow \mathrm{SL}_{m+1}/\mathrm{SL}_m \cdot \mathbb{C}^*, \quad (5.1)$$

$$\mathrm{Sp}_{2n}/(\mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathbb{C}^*) \rightarrow \mathrm{Sp}_{2n}/\mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_2. \quad (5.2)$$

Опишем эти примеры подробнее. В случае (5.1) базой является касательное расслоение к $\mathbb{P}_m$, а слоем – $\mathbb{C}^*$. Тотальное пространство можно рассматривать как тотальное пространство расслоения единичных окружностей в расслоении гиперплоскости над $\mathbb{P}_m$. В случае (5.2) базой служит касательное расслоение к $\mathbb{P}_n(\mathbb{H})$, а слоем – двумерная аффинная квадрака. При этом важно помнить,

что $\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{SL}_2$. Заметим, что это многообразие есть касательное расслоение к очень естественному S^2 -расслоению над $\mathbb{P}_n(\mathbb{H})$.

Приведенные описания слоя A аффинно-рационального расслоения $\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}$ сведены в табл. 1. Классификацию симметрических пространств можно найти в [32].

5.2. Случай нетривиального радикала. Вернемся к изучению G -действия на $\widehat{G}$ -однородном пространстве $\widehat{G}/\widehat{H}$. Как принято в настоящем параграфе, орбита $M = G.x_0$ имеет коразмерность не больше 2. Опишем, как действовать в ситуации, когда радикал R группы G нетривиален. Этот случай изучается перебором всех возможных вариантов для последовательности слоений

$$\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{R\widehat{H}} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}.$$

Слоем является $(\mathbb{C}^*)^n$, и в предположении, что M имеет коразмерность не выше 2 и R нетривиален, имеем $n = 1, 2$. В случае $n = 2$ группа G действует транзитивно на базе $\widehat{G}/\widehat{Q}$. Если $n = 1$, то возможны два случая: либо $\widehat{R\widehat{H}} = \widehat{Q}$ и M отображается в некоторую вещественную гиперповерхность, являющуюся орбитой G на базе, либо G действует транзитивно на $\widehat{G}/\widehat{Q}$ и M отображается в гиперповерхность, являющуюся орбитой G на некомпактном многообразии $\widehat{G}/\widehat{R\widehat{H}}$.

В случае $n = 2$ многообразие M есть главное $(S^1)^2$ -расслоение над компактной базой $\widehat{G}/\widehat{H}$, на которой G действует транзитивно. Если $n = 1$ и G также действует транзитивно на базе, то M – главное S^1 -расслоение над гиперповерхностью, являющейся орбитой полупростой части группы G на $\widehat{G}/\widehat{R\widehat{H}}$. Точное описание этого случая гиперповерхности можно найти в [2]. Остается случай, когда $n = 1$ и $\widehat{G}/\widehat{R\widehat{H}} = \widehat{G}/\widehat{Q}$, а M отображается в гиперповерхность, являющуюся орбитой G на базе. Ниже мы приведем полное описание базы, а тогда элементарные соображения уже дают список всех возможных главных S^1 -расслоений над указанной гиперповерхностью.

Таким образом, за исключением последнего случая, который разбирается ниже, при наличии нетривиального радикала классификация сводится к известным результатам.

5.3. Транзитивные действия на базе. Здесь делается основной упрощающий шаг в описании тех ситуаций, когда группа G некомпактна.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если пространство $X = \widehat{G}/\widehat{H}$ некомпактно, а вещественная форма G действует транзитивно на базе $Y = \widehat{G}/\widehat{Q}$ аффинно-рационального слоения, то группа G компактна.*

Мы дадим подробное доказательство для случая, когда G полупроста, а в конце укажем, как изменить доказательство в случае, когда G имеет нетривиальный радикал. Нам потребуется несколько промежуточных шагов, где от противного предполагается, что G действует транзитивно на базе данного аффинно-рационального слоения. Напомним, что хотя G является вещественной формой группы $\widehat{G}$, представленной как подгруппа проективной линейной группы, это может быть и не так для ее действия на Y . Такое может случиться только тогда, когда один или несколько простых множителей S группы G являются комплексными группами Ли, вложение которых в их комплексификацию

$S \times S$ в качестве вещественной формы осуществляется посредством *антиголоморфных диагоналей*. Это означает, что S вложена по формуле $s \mapsto (s, \varphi(s))$ для некоторого антиголоморфного автоморфизма $\varphi: S \rightarrow S$. Если какой-то множитель комплексификации $S \times S$ действует тривиально на Y , то группа S , которая исходно была вещественной формой, действует голоморфно как комплексная группа Ли.

Многообразие Y распадается в произведение однородных рациональных факторов простых множителей группы $\widehat{G}$ (по модулю неэффективности). Запишем это в виде

$$Y = \Pi_i Y_i^1 \times \Pi_j Y_j^{2,1} \times \Pi_k Y_k^{2,2},$$

где простой некомплексный множитель S_i действует транзитивно на Y_i^1 как вещественная форма его простой комплексификации $\widehat{S}_i$, простой комплексный множитель S_j действует на $Y_j^{2,1}$ как вещественная форма своей комплексификации $S_j \times S_j$ (причем действие последней почти эффективно), а простой комплексный множитель S_k действует как комплексная группа Ли на $Y_k^{2,2}$, причем его комплексификация тоже действует как S_k . Сразу видно, что большинство из этих возможностей исключается, если предполагать, что G действует транзитивно на Y .

Например, если записать $Y_j^{2,1}$ в виде $S/Q_1 \times S/Q_2$, то для того, чтобы диагонально вложенный экземпляр S действовал транзитивно на этом произведении, необходимо, чтобы параболическая подгруппа Q_2 группы S действовала транзитивно на рациональном многообразии S/Q_1 . Предполагая после сопряжения, что Q_1 и Q_2 содержат одну и ту же борелевскую подгруппу, получаем из элементарных рассуждений с использованием корней, что это невозможно. Следовательно, множителей типа $Y_j^{2,2}$ в произведении нет.

Стратегия доказательства теоремы 5.1 состоит в том, чтобы сначала изучить случай простых групп G и $\widehat{G}$ (предложение 5.2), затем случай, когда группа G простая и комплексная, а ее комплексификация имеет вид $\widehat{G} = G \times G$ (предложение 5.4), и, наконец, свести все воедино в теорему 5.1.

5.3.1. Транзитивное действие простой вещественной формы. Имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если группа $\widehat{G}$ проста, $\widehat{Q}$ является собственной подгруппой в $\widehat{G}$ и G действует транзитивно на $\widehat{G}/\widehat{Q}$, то группа G компактна.*

Для доказательства требуются некоторые приготовления. Во-первых, из классификационных результатов А. Л. Онищика [33], [34] вытекает, что ситуация из предложения 5.2 (т.е. транзитивное действие простой вещественной формы G на рациональном однородном пространстве $Y = \widehat{G}/\widehat{Q}$ своей простой комплексификации) возможна только в двух сериях примеров, которые можно описать следующим образом:

- 1) нечетномерное комплексное проективное пространство $\mathbb{P}_{2n-1}$;
- 2) пространство $\mathcal{C}_n$ комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$.

Это компактные эрмитовы симметрические пространства с группами изометрий SU_{2n} и $SO_{2n}(\mathbb{R})$ соответственно. Как пространства смежных классов они имеют вид $\mathbb{P}_{2n-1} = SU_{2n} / U(2n-1)$ и $\mathcal{C}_n = SO_{2n}(\mathbb{R}) / U(n)$. В первом случае транзитивно действующая вещественная форма группы $SL_{2n}(\mathbb{C})$ – это группа

кватернионно-линейных преобразований $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{H})$, ее максимальная компактная подгруппа USp_{2n} тоже действует транзитивно. Во втором случае нужной некомпактной вещественной формой является $\mathrm{SO}(1, 2n-1)$, причем максимальная компактная подгруппа $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(2n-1)$ также действует транзитивно на $\mathcal{C}_n$.

Доказательство предложения 5.2 сводится к проверке того, что все эти случаи в наших условиях невозможны. Одна из ситуаций, которые надо исключить, – это случай, когда унипотентный радикал $\hat{Q}_u$ действует тривиально на слое $\hat{Q}/\hat{H}$. Прежде чем перейти к доказательству предложения 5.2, отметим следующий факт, полезный для изучения указанной ситуации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\hat{G} = K_G^{\mathbb{C}}$ – комплексная редуктивная группа с редуктивными подгруппами $\hat{H}$ и $\hat{L}$ такими, что $\hat{L} = K_L^{\mathbb{C}}$ имеет открытую орбиту Ω на аффинном однородном пространстве $\hat{G}/\hat{H}$. Допустим, что максимальная компактная группа K_G содержит K_L и что все рассматриваемые группы связны. Тогда минимальные (в смысле теории размерности) K_G -орбиты в $\hat{G}/\hat{H}$ содержатся в Ω и являются K_L -орбитами. В частности, многообразие Ω также аффинно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественная размерность любой минимальной (в смысле теории размерности) K_G -орбиты N совпадает с комплексной размерностью пространства $\hat{G}/\hat{H}$ (или орбиты Ω). Все K_L -орбиты в Ω имеют размерность не меньше размерности N . Тем самым, если K_G -орбита имеет непустое пересечение с Ω и является минимальной, то она содержится в Ω . С другой стороны, никакая минимальная K_G -орбита не может содержаться в собственном комплексном аналитическом подмножестве пространства $\hat{G}/\hat{H}$, так как она вполне вещественна и ее вещественная размерность равна комплексной размерности $\hat{G}/\hat{H}$. Применяя это и к дополнению множества Ω , получаем требуемый результат.

ПРИМЕР 5.1. Отметим, что в предыдущих условиях группа $\hat{L}$ не обязана действовать транзитивно на $\hat{G}/\hat{H}$. Например, если $\hat{G} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, а $\hat{H} \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ – стабилизатор в $\hat{G}$ разложения $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Span}(e_1) \oplus \mathrm{Span}(e_2, e_3)$, то $\hat{H}$ имеет открытую орбиту в $\hat{G}/\hat{H}$.

Допустим, что унипотентный радикал $\hat{Q}_u$ действует тривиально на слое $\hat{Q}/\hat{H}$. Тогда (при необходимости переходя к промежуточному слоению) можно считать, что этот слой есть либо $(\mathbb{C}^*)^n$, либо аффинное симметрическое пространство группы $\hat{Q}_r$. Поскольку центр группы $\hat{Q}_r$ в обоих случаях одномерен, мы в первом случае имеем $n = 1$. Тем самым, для доказательства предложения 5.2 надо исключить следующие три случая:

- 1°) унипотентный радикал $\hat{Q}_u$ действует транзитивно на $\hat{Q}/\hat{H}$;
- 2°) $\hat{Q}/\hat{H} = \mathbb{C}^*$;
- 3°) радикал группы $\hat{Q}_r$ действует тривиально на $\hat{Q}/\hat{H}$, причем $\hat{Q}/\hat{H}$ является симметрическим пространством полупростой части Q_r^{ss} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.2 в случаях 1°) и 2°). Заметим, что представление $\hat{Q}_r$ на $\hat{Q}_u$ неприводимо и можно отождествить $\hat{Q}_u$ с касательным пространством эрмитова симметрического пространства $\hat{G}/\hat{Q}$. Поэтому если $\hat{Q}_u$ действует транзитивно на слое, то $\hat{G}/\hat{H}$ – в точности касательное расслоение многообразия $\hat{G}/\hat{Q}$. В обоих случаях $\hat{Q}_r$ задается некоторой группой

$GL_m(\mathbb{C})$, центр которой действует на касательном пространстве в нейтральной точке посредством умножения на скаляры из $\mathbb{C}^*$. Как обычно, обозначим основной характер через $\text{Det}: \widehat{Q}_r \rightarrow \mathbb{C}^*$. Выберем стандартным образом разложение Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ и максимальное абелево подпространство $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{p}$. Тогда проверяется, что подгруппа изотропии G -действия на базе содержит картановскую подгруппу $H = T \times A$, $\text{Det}(A) = \mathbb{R}^{>0}$. Тем самым, A не может стабилизировать никакое компактное подмножество касательного пространства и случай 1°) невозможен. Случай 2°) разбирается тем же способом, так как соответствующее $\mathbb{C}^*$ -расслоение определяется некоторой степенью Det^k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.2 В СЛУЧАЕ 3°). Здесь слой $\widehat{Q}/\widehat{H}$ является аффинным симметрическим пространством некоторой группы $SL_m(\mathbb{C})$. Если его ранг равен 1, то оно является касательным расслоением проективного пространства, и такое же рассуждение, как и выше, показывает, что G -орбита не может быть компактной. Если его ранг равен 2, то на уровне компактных групп оно будет либо грассманианом двумерных плоскостей $SU(2+q)/S(U(2) \times U(q))$, либо одним из изолированных случаев $SU(3)/SO(3)$ или $SU(6)/USp(6)$. Здесь мы применяем предложение 5.3: $K.x_0 = M$ расслаивается над $\widehat{G}/\widehat{Q} = K/L$, где $L.x_0$ имеет коразмерность 2 (над $\mathbb{R}$) в $\widehat{Q}/\widehat{H}$. Поскольку орбита $L.x_0$ не может быть комплексной (тогда она была бы компактным комплексным многообразием аффинного многообразия), то орбита комплексификации $\widehat{L}.x_0$ открыта в слое. По предложению 5.3 меньшая группа L также действует транзитивно на указанном компактном симметрическом пространстве ранга 2. Однако известно, что никакая меньшая компактная группа не может действовать транзитивно ни на каком грассманиане, отличном от проективного пространства [33], [34].

Прямая проверка групп в наших случаях показывает, что $SU(3)/SO(3)$ не может возникнуть в качестве группы L . С другой стороны, $SU(5)$ все-таки действует транзитивно на $SU(6)/USp(6) = SU(5)/USp(4)$, но это пространство не симметрическое и не расслаивается над симметрическим, так что оно не может быть сферическим ранга 2.

5.3.2. Простые вещественные формы, являющиеся комплексными группами Ли. Результат в этом случае можно сформулировать следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Группа G не может быть простой комплексной группой и в то же время вещественной формой в $\widehat{G} = G \times G$, действующей транзитивно на базе $\widehat{G}/\widehat{Q}$ положительной размерности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущем случае, начнем доказательство с некоторой подготовки. Сначала рассмотрим разложение $G = KAN$. Поскольку G комплексна, то N – унипотентный радикал некоторой комплексной борелевской подгруппы, $A \cong (\mathbb{R}^{>0})^r$ – некомпактная вещественная форма некоторого максимального комплексного тора. Из компактности M и того, что группа AN действует алгебраически, вытекает, что ее действие имеет неподвижную точку в M . Поэтому можно считать, что подгруппа изотропии $\widehat{H}$ содержит ее комплексификацию $\widehat{AN} = T \ltimes (N \times N)$ в $\widehat{G}$. Здесь $T \cong (\mathbb{C}^*)^r$ – упомянутый выше максимальный комплексный тор, который (голоморфно) диагонально вложен в $\widehat{G} = G \times G$.

Для ясности обозначим первый сомножитель этой комплексификации через G_1 , а второй – через G_2 и рассмотрим последовательность слоений

$$G_1 \times G_2 / (T \ltimes (N \times N)) \rightarrow G_1 \times G_2 / H \rightarrow G_1 \times G_2 / (H_1 \times H_2).$$

Здесь H_1 и H_2 – проекции H на G_1 и G_2 соответственно. Поскольку они содержат борелевскую группу $T \ltimes N$, то являются параболическими и выписанные факторпространства компактны. По условию группа G действует транзитивно на базе $\widehat{G}/\widehat{Q}$. Поэтому $\widehat{Q}$ содержит один из множителей (скажем, G_2), откуда $\widehat{Q} = H_1 \times G_2$. Теперь из предположения о минимальности (т.е. о том, что слой нельзя нетривиально расслоить над компактной базой положительной размерности) вытекает, что $H_2 = G_2$. Значит, максимальная полупростая подгруппа H_r^{ss} содержит G_2 в качестве простого множителя, откуда по предположению об эффективности вытекает, что H содержит диагонально вложенный экземпляр G . В силу максимальной подгруппы и аффинности $(G \times G)/G$ это заключение противоречит предположению о том, что размерность базы положительна.

Как отмечено выше, если группа G простая, комплексная и вложена в $G \times G$ как вещественная форма посредством антиголоморфного автоморфизма, то G не может транзитивно действовать на произведении $G/P_1 \times G/P_2$ двух G -однородных рациональных многообразий. Тем не менее, этим способом можно получить интересные примеры орбит коразмерности 2.

ПРИМЕР 5.2. Пусть V – комплексное векторное пространство. Снабдим $V \oplus V^*$ стандартной симметрической комплексно-билинейной формой b по формуле $b(v, f) = f(v)$. Эта форма инвариантна относительно диагонального действия группы $G = \mathrm{SL}(V)$. Рассмотрим G -инвариантную комплексную гиперповерхность

$$D = \{([v], [f]) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*); b(v, f) = 0\}.$$

Тогда G действует транзитивно как на D , так и на дополнении к D в $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, причем это дополнение является аффинным симметрическим пространством ранга 1 и совпадает с кокасательным расслоением пространства $\mathbb{P}(V)$.

Выбрав базис в V и обозначив соответствующие координаты на V и V^* через z и w , мы можем записать $b(z, w) = z^t w$. В терминах матриц действие группы G выражается формулами $z \mapsto Az$ и $w \mapsto (A^t)^{-1}w$. Это можно рассматривать как действие на $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$, заданное голоморфным автоморфизмом $A \mapsto (A^t)^{-1}$. Рассмотрим чуть модифицированное действие $(z, w) \mapsto (Az, \varphi(A)w)$, где $\varphi(A) = (\bar{A}^t)^{-1} = A^\dagger$. Тогда $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ распадается на две орбиты, меньшая из которых представляет собой многообразие $M := \{([z], [w]); z^t \bar{w} = 0\}$ вещественной коразмерности 2.

Приведем более общий вариант рассмотренного примера. Пусть S – комплексная группа Ли, снабженная антиголоморфным автоморфизмом $\varphi: S \rightarrow S$. Если I – замкнутая комплексная подгруппа, то $\varphi(I)$ также является замкнутой комплексной подгруппой. Отображение φ индуцирует антиголоморфный S -эквивариантный диффеоморфизм $S/I \rightarrow S/\varphi(I)$, если действие на пространстве-образе задать формулой $t(sI) := \varphi(t)sI$. Для любых двух замкнутых комплексных подгрупп I_1 и I_2 группы S формула $s \mapsto (s, \varphi(s))$ определяет

диагональное действие вещественной формы S группы $S \times S$ на $S/I_1 \times S/\varphi(I_2)$. Это действие есть не что иное, как перенос стандартного голоморфного диагонального действия на $S/I_1 \times S/I_2$, определенного тождественным отображением на первом множителе и указанным антиголоморфным отображением на втором. Если $I_1 = I_2 = I$ и $Z = S/I$, то будем обозначать через $Z \times \bar{Z}$ произведение $S/I \times S/\varphi(I)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть G – простая комплексная группа Ли, вложенная как вещественная форма в $\hat{G} = G \times G$ посредством антиголоморфного автоморфизма φ . Допустим, что G имеет замкнутую орбиту M коразмерности не выше 2 в произведении $Y = \hat{G}/\hat{Q} = G/Q_1 \times G/Q_2 = Y_1 \times Y_2$. Тогда $G = \mathrm{SL}(V)$, $Y_1 = Z = \mathbb{P}(V) = G/Q$, $Y_2 = \bar{Z} = G/\varphi(Q)$ и $Y = Z \times \bar{Z}$. В координатных терминах многообразие M получается переносом комплексной гиперповерхности D из приведенного выше примера посредством отображения $Z \times Z \rightarrow Z \times \bar{Z}$, индуцированного отображением φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем записать Q_2 как $\varphi(Q_2)$ и рассмотреть стандартное (голоморфное) диагональное действие группы G на $G/Q_1 \times G/Q_2$. Единственная в наших условиях возможность для существования орбиты вещественной коразмерности не выше 2 – это существование орбиты E , являющейся комплексной гиперповерхностью. Поскольку максимальная компактная подгруппа K группы G действует транзитивно на E , легко проверить, что орбиты общего положения группы K на дополнении к E суть вещественные гиперповерхности (например, потому что нормальное расслоение многообразия E не может быть топологически тривиальным).

Будем рассматривать открытую G -орбиту $Y \setminus E$ как расслоение над G/Q_1 , слой которого – открытая орбита параболической группы Q_1 на G/Q_2 . Тогда группа Q_2 является максимальной параболической, так как иначе G/Q_2 расслаивалась бы над некоторым пространством вида G/P , на котором параболическая группа Q_1 должна была бы действовать транзитивно, что невозможно. Таким образом, $\mathrm{Pic}(G/Q_2) \cong \mathbb{Z}$. Поэтому маломерная Q_1 -орбита $E \cap Y_2$ является обильным дивизором, следовательно, ее дополнение в G/Q_2 аффинно.

Из классификации однородных аффинных многообразий, на которых наша максимальная компактная подгруппа L действует с вещественными гиперповерхностями в качестве орбит общего положения (см. [2]), получаем, что единственный случай, допускающий действие группы, большей, чем $L^{\mathbb{C}}$, – это случай $\mathbb{P}(V)$ (причем большей группой является подгруппа изотропии $\mathrm{SL}(V)$ -действия). Применяя это рассуждение к обоим множителям, получаем требуемый результат.

5.3.3. Случай нескольких множителей. Перейдем к последнему шагу доказательства теоремы 5.1, а именно рассмотрим случай, когда группа G полупроста, но не проста. Затем сделаем замечание о случае, когда радикал нетривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Опишем изучаемую ситуацию. Даны полупростая вещественная форма G группы $\hat{G}$ и орбита $M = G.x_0 \hookrightarrow \hat{G}.x_0 = \hat{G}/\hat{H}$, причем аффинно-рациональное слоение $X = \hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{Q}$ имеет слой положительной размерности и G действует транзитивно на базе. Напомним

также, что можно считать G (с точностью до связных компонент) стабилизатором M в $\widehat{G}$ и предполагать действие G на X почти эффективным.

Покажем, что при этих условиях группа G компактна. Для этого допустим от противного, что G_1 – простая некомпактная вещественная форма группы $\widehat{G}_1$ с дополнительным полупростым множителем G_2 такая, что $Y = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1 \times \widehat{G}_2/\widehat{Q}_2$. Спроектируем базу на второй множитель $\widehat{G}_2/\widehat{Q}_2$ и рассмотрим слой $\widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H}\widehat{Q}_2$ ассоциированного слоения на X . Теперь заменим многообразие M на его пересечение с этим слоем, являющееся CR-однородным многообразием относительно $G_1 \times (G_2 \cap \widehat{Q}_2)$. Поскольку последняя группа действует транзитивно на базе $\widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$, мы почти достигли ситуации, когда можно использовать индукцию по размерности. Но из-за того, что в нашем рассуждении группа G предполагается полупростой, индуктивное предположение все-таки не применимо. Поэтому приходится рассматривать действие радикала Z группы $(G_2 \cap \widehat{Q}_2)$. Он действует как компактная центральная подгруппа. Рассмотрим промежуточное слоение

$$\widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H}\widehat{Z}.$$

Его слоем является $(\mathbb{C}^*)^n$ для $n = 0, 1, 2$, причем M представляется соответствующим $(S^1)^n$ -расслоением.

Если $n = 2$, то база уже имеет вид $\widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$, где некомпактная вещественная форма G_1 действует транзитивно. Если группа $\widehat{G}_1$ проста, то на базе получается один из исключительных случаев, описанных А. Л. Онициком [33], [34]. Но мы уже видели, что всякий характер группы $\widehat{Q}_1$ сужается до характера группы G_1 -изотропии со значениями в $\mathbb{R}^{>0}$. Поскольку в таких условиях невозможно стабилизировать компактный слой $(S^1)^2$, получаем, что группа G_1 -изотропии действует тривиально на этом слое. Таким образом, G_1 -орбиты на M суть сечения, и на комплексном уровне мы получаем топологически тривиальное $(\mathbb{C}^*)^2$ -расслоение над $\widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$. Пользуясь комплексной геометрией (база рациональна) или простым теоретико-групповым рассуждением, получаем отсюда, что расслоение голоморфно тривиально и что $\widehat{G}_1$ -орбиты суть сечения, следовательно, совпадают с G_1 -орбитами. Тем самым, $\widehat{G}_1$ стабилизирует исходное многообразие M (а не только его пересечение с этим слоем) вопреки нашему предположению о том, что G – вещественная форма, равная стабилизатору M в $\widehat{G}$. Заметим, что если группа G_1 комплексна и $\widehat{G}_1 = G_1 \times G_1$, то теоретически G_1 могла бы действовать транзитивно на базе. Но это означало бы, что один из сомножителей $\widehat{G}_1$ действовал бы тривиально, так что он действовал бы почти эффективно на слое $(\mathbb{C}^*)^2$. Последнее, конечно, невозможно, и этим доказательство для случая $n = 2$ закончено.

Если $n = 1$, то мы подробнее рассмотрим базу $\widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H}\widehat{Z}$. Унипотентный радикал группы $\widehat{Q}_2$ теоретически мог бы действовать на ней нетривиально. С другой стороны, соответствующая группа $G_2 \cap \widehat{Q}_2$ для CR-слоения имеет вид $Z \cdot S$, где S полупроста. Поэтому далее в рассуждении мы можем заменить $\widehat{Q}_2$ на $\widehat{Z}\widehat{S}$, так что группой, действующей на базе этого промежуточного слоения, будет полупростая группа $\widehat{G}_1 \times \widehat{S}$. Рассуждая, как выше, мы видим, что $G_1 \times S$ действует здесь как вещественная форма группы $\widehat{G}_1 \times \widehat{S}$ и что ни один из простых вещественных множителей не может быть комплексным. Теперь теоретически возможно, что некоторый комплексный простой множитель

группы $\widehat{G} \times S$ стабилизирует образ M в этой группе. Тогда, чтобы выполнялось предположение индукции, необходимо сократить на этот множитель, тем самым отщепляя некоторый комплексный множитель от M . Если этот множитель не равен $\widehat{G}_1$, то, применяя индукцию к полученному многообразию, мы приходим к требуемому противоречию. Если же он равен $\widehat{G}_1$, то мы сужаем наше $\mathbb{C}^*$ -расслоение на соответствующую компактную орбиту группы $\widehat{G}_1$. В силу предположения о минимальности аффинно-рационального слоения $\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q} = Y$ эта орбита есть не что иное, как G_1 -орбита в Y (т. е. $\widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$), где G_1 также действует транзитивно. Теперь мы можем применить то же рассуждение, что и выше для случая $(\mathbb{C}^*)^2$ -расслоения над $\widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$, и завершить доказательство.

Наконец, если $n = 0$, то мы можем заменить $G_2 \cap \widehat{Q}_2$ на полупростую группу S так, чтобы иметь дело с CR-многообразием $M.x_0 = G_2 S.x_0$, являющимся орбитой полупростой группы, после чего становится применимо предположение индукции.

Выше мы для простоты считали группу G полупростой. Однако, проследив доказательство в случаях, когда используется радикал группы $\widehat{Q}_2$ (в случаях $n = 1, 2$), мы видим, что те же рассуждения дают требуемый результат и в случае, когда радикал группы G нетривиален. Этим теорема полностью доказана.

5.4. Действия вещественных форм на флаговых многообразиях.

Рассмотрим теперь случай, когда G действует нетранзитивно на базе некоторого аффинно-рационального слоения $\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}$. Здесь мы изучим только действие G на однородном рациональном многообразии $Y = \widehat{G}/\widehat{Q}$, где интересующая нас G -орбита $G.x_0 =: M$ имеет коразмерность 1 или 2. Напомним, что Y разлагается в произведение, $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$, согласно разложению $\widehat{G} = \widehat{G}_1 \cdots \widehat{G}_m$ на простые множители. Если один из простых множителей группы G окажется действующим как комплексный простой множитель группы $\widehat{G}$, то мы отщепим соответствующий множитель (скажем, Y_1) от Y , что даст представление $M = Y_1 \times M_1$. После этого видно, что M – произведение некоторых множителей многообразия Y и такой G -орбиты, что G действует как вещественная форма. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда G – вещественная форма группы $\widehat{G}$.

Далее, Y разлагается в произведение, $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$, согласно разложению $\widehat{G}$ на множители $\widehat{G}_i$, полученные комплексификацией простых множителей G_i группы G . Поскольку M тоже допускает аналогичное разложение, достаточно изучать действия групп G_i на многообразиях Y_i . Заметим, что если какой-то из множителей $\widehat{G}_i$ не простой, то группа G_i является комплексной и вложенной в $\widehat{G}_i = G_i \times G_i$ посредством антиголоморфного автоморфизма. Такая ситуация была полностью описана выше (см. предложение 5.5). Поэтому остается рассмотреть случай, когда G – простая вещественная форма простой комплексной группы $\widehat{G}$.

5.4.1. *Предварительные сведения.* Здесь предположим, что G – простая вещественная форма простой комплексной группы $\widehat{G}$. Изучим ее действие на $\widehat{G}$ -флаговом многообразии $Y = \widehat{G}/\widehat{Q}$. Особенность нашей ситуации состоит в том, что G имеет замкнутую орбиту $M = G.x_0$ коразмерности не выше 2.

Прежде чем перейти к этому частному случаю, напомним здесь то, что известно об общем случае. Детали и дальнейшую информацию можно найти в [35].

Для наших приложений важен тот факт, что G имеет ровно одну замкнутую орбиту в Y . При этом число орбит G на Y конечно, и потому существует открытая орбита. Напомним, что через K обозначается максимальная компактная подгруппа в G , а через $\hat{K}$ – ее комплексификация в $\hat{G}$. Имеется важная двойственность между G - и $\hat{K}$ -орбитами в Y (так называемая двойственность Мацуки [36], [37]): для каждой G -орбиты существует единственная $\hat{K}$ -орбита, пересекающая эту G -орбиту по K -орбите, и наоборот. В случае замкнутой G -орбиты M легко проверить, что K действует транзитивно на M и что $\hat{K}$ -орбита любой точки из M открыта в Y .

На Y существует естественный K -инвариантный градиентный поток, критические точки которого лежат в K -орбитах, возникающих в описании двойственности. Этот поток касателен как к G -орбитам, так и к $\hat{K}$ -орбитам и, например, стягивает каждую $\hat{K}$ -орбиту на ту K -орбиту, которая пересекает соответствующую G -орбиту, как в теореме двойственности. Мы используем частный случай этого факта: поток стягивает открытую $\hat{K}$ -орбиту на замкнутую G -орбиту.

Пусть D – открытая G -орбита в Y . Из упомянутой выше двойственности вытекает, что в D существует единственная компактная (комплексная) $\hat{K}$ -орбита C_0 . Последнюю часто удобно рассматривать как точку пространства циклов многообразия D (или Y). Поэтому при фиксированном выборе K мы будем называть ее *базовым циклом*. Ее можно также описать как единственную K -орбиту минимальной размерности в D .

Хотелось бы иметь K -инвариантное исчерпание открытой орбиты, которое отражало бы теоретико-групповую ситуацию. Такое исчерпание известно для *измеримых орбит*. Если группа G эрмитова типа (т.е. размерность центра группы K положительна и, следовательно, равна 1), то всякая открытая G -орбита в каждом $\hat{G}$ -флаговом многообразии измерима. Такие исчерпания $\rho: D \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ являются q -выпуклыми в том смысле, что в каждой точке области D форма Леви $L(\rho)$ имеет не менее $n - q$ положительных собственных значений, где $n := \dim D$. Вблизи базового цикла эта форма Леви имеет сигнатуру в точности $(n - q, q)$.

В следующих двух пунктах мы полностью опишем два случая, важных для нашей классификации, т.е. случаи $\text{codim}_Y M = 1, 2$. Число возможностей здесь не очень велико, что совсем не типично для общих действий вещественных форм на флаговых многообразиях.

5.4.2. Замкнутые орбиты коразмерности 1. Здесь G – простая вещественная форма группы $\hat{G}$, которая сама предполагается простой, а замкнутая G -орбита на флаговом многообразии $Y = \hat{G}/\hat{Q}$ предполагается имеющей коразмерность 1. Рассмотрим пример, который в дальнейшем окажется единственно возможным.

ПРИМЕР 5.3. Пусть p, q – неотрицательные целые, $n + 1 = p + q$. Рассмотрим действие вещественной формы $G = \text{SU}(p, q)$ группы $\hat{G} = \text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ на проективном пространстве $Y := \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Если рассматривать точку из Y как одномерное подпространство L в $\mathbb{C}^{n+1}$, то, сужая эрмитову форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}$ смешанной сигнатуры на L , мы будем называть прямую L положительной, отрицательной

или изотропной в зависимости от того, будет ли это сужение положительно, отрицательно определенным или равным нулю. Группа G имеет три орбиты в Y : открытые множества D_+ и D_- положительных и отрицательных прямых, а также вещественную гиперповерхность M изотропных прямых. Норма вектора с координатами $z = (z_0, \dots, z_n)$ задается формулой

$$\|z\|_{p,q} = \sum_{i=0}^{p-1} |z_i|^2 - \sum_{i=p}^n |z_i|^2.$$

Это соответствует расщеплению $\mathbb{C}^{n+1} = V_+ \oplus V_-$, где $V_+ := \{z_p = \dots = z_n = 0\}$ и $V_- = \{z_0 = \dots = z_{p-1} = 0\}$, инвариантному относительно максимальной компактной подгруппы $K = S(U(V_+) \times U(V_-))$ группы G . Базовые циклы в D_+ и D_- суть $C_+ := \mathbb{P}(V_+)$ и $C_- := \mathbb{P}(V_-)$ соответственно. Поскольку G имеет три орбиты, то столько же их имеет $\hat{K}$: это два базовых цикла и их дополнение $Y \setminus (C_+ \cup C_-)$. Последнее является открытой $\hat{K}$ -орбитой, содержащей M .

Заметим, что если число $n = 2m - 1$ нечетно, то симплектическая группа $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ действует транзитивно на $\mathbb{P}_n$, а вещественная форма $\mathrm{Sp}(2p, 2q)$, содержащаяся в $\mathrm{SU}(2p, 2q)$, является претендентом на роль меньшей вещественной формы, действующей транзитивно на M . Ниже мы покажем, что это действительно так.

Теперь покажем, что других примеров нет. Сначала заметим, что, поскольку минимальная G -орбита есть вещественная гиперповерхность, все остальные G -орбиты открыты. Далее, $\hat{K}$ -орбита $\hat{K}.x_0 = \hat{K}/\hat{H}$ точки из M тоже открыта. Рассмотрим аффинно-рациональное слоение $\hat{K}/\hat{H} \rightarrow \hat{K}/\hat{P}$. Как обычно, компактифицируем его $\hat{K}$ -эквивариантно до $\hat{K}$ -многообразия Y_1 , взяв единственную $\hat{P}$ -компактификацию аффинного слоя и перейдя к ассоциированному расслоению над базой. Покажем, что $\hat{P}/\hat{H}$ равно $\mathbb{C}^*$, т. е. что $\hat{K}/\hat{H}$ имеет два конца, отвечающие двум базовым циклам. Действительно, иначе гиперповерхность M была бы линией уровня некоторого K -инвариантного исчерпания и потому ограничивала бы относительно компактную область в $\hat{K}/\hat{H}$, следовательно, ограничивала бы две области в Y .

Поэтому G имеет ровно две открытые орбиты: D_+ и D_- , границы которых содержат M . Поскольку M – единственная замкнутая G -орбита, то D_+ и D_- суть единственные открытые G -орбиты в Y и каждая из них содержит базовые циклы C_+ и C_- . Следовательно, открытая $\hat{K}$ -орбита действительно имеет два конца, и $\hat{P}/\hat{H} = \mathbb{C}^*$. Тогда компактификация Y_1 имеет две $\hat{K}$ -орбиты коразмерности один: E_+ и E_- . Естественное отождествление открытых $\hat{K}$ -орбит в Y и Y_1 продолжается до эквивариантного бирационального отображения $\pi: Y_1 \rightarrow Y$. Это отображение на самом деле регулярно, так как точки неопределенности существуют только в коразмерности 2. Как и указывают обозначения, E_+ отображается в C_+ , а E_- – в C_- . Заметим, что главное $\mathbb{C}^*$ -действие продолжается до действия на Y , которое оставляет на месте все точки наших циклов. Соответствующее S^1 -действие стабилизирует каждую K -орбиту и централизует K -действие на Y . По предположению о максимальной мы можем считать, что $\hat{G}$ содержит эту группу $\mathbb{C}^*$ в качестве подгруппы, а тогда проверяется, что K должно содержать соответствующую группу S^1 . Поэтому группа G эрмитова типа.

Теперь положим $p - 1 := \dim C_+$ и $q - 1 := \dim C_-$. Поскольку группа G эрмитова типа, мы имеем обсуждавшиеся выше K -инвариантные исчерпания ρ_+ и ρ_- открытых G -орбит D_+ и D_- . Вблизи C_+ форма Леви $L(\rho_+)$ имеет сигнатуру $(n - (p - 1), p - 1)$, а вблизи C_- форма Леви $L(\rho_-)$ имеет сигнатуру $(n - (q - 1), q - 1)$. Важно, что группа $\mathbb{R}^{>0}$, приходящая из центрального $\mathbb{C}^*$ -действия, действует транзитивно на K -орбитах, являющихся гиперповерхностями. Поэтому последние с точки зрения комплексной геометрии идентичны друг другу. Так как положительные собственные значения форм Леви возникают из нормы в направлении, нормальном к циклам, то сужения форм Леви на комплексные касательные пространства этих K -орбит имеют сигнатуру $(n - p, p - 1)$ и $(n - q, q - 1)$ соответственно. При этом, обсуждая выше форму Леви вблизи C_+ , мы рассматривали ее с точки зрения цикла C_+ , находящегося внутри некоторой области, определенной функцией ρ_+ . То же самое верно и для C_- . Поскольку эти гиперповерхности идентичны с комплексно-аналитической точки зрения, а сигнатура сужения формы Леви есть комплексно-аналитический инвариант, мы имеем следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть некоторая K -орбита в Y является гиперповерхностью и рассматривается как граница области, содержащей C_+ . Тогда ее форма Леви имеет сигнатуру $(p - 1, q - 1)$, где $p - 1 = \dim C_+$, $q - 1 = \dim C_-$, $(p - 1) + (q - 1) = n - 1$ и $n = \dim Y$.

Чтобы показать, что на самом деле $G = \mathrm{SU}(p, q)$ и $Y = \mathbb{P}_n$ (как в примере 5.3), мы рассмотрим слоения $E_+ = \widehat{K}/\widehat{P} \rightarrow \widehat{K}/\widehat{P}_1 = C_+$ и $E_- = \widehat{K}/\widehat{P} \rightarrow \widehat{K}/\widehat{P}_1 = C_-$. Например, взяв композицию слоения $\widehat{K}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{K}/\widehat{P}$ открытой $\widehat{K}$ -орбиты с первым слоением, получаем слоение этой открытой орбиты, продолжающееся до слоения несвязного объединения открытой орбиты и C_+ на C_+ . Его слой получается стягиванием (в точку) нулевого сечения того $\mathbb{C}$ -расслоения, которое получается добавлением одного конца к нашему $\mathbb{C}^*$ -расслоению над $\widehat{P}_1/\widehat{P}$. Таким образом, $\widehat{P}_1/\widehat{P}$ – некоторое проективное пространство, и простой подсчет размерностей дает, что это $\mathbb{P}_{n-p}$. Аналогично получаем, что $\widehat{P}_2/\widehat{P}$ есть $\mathbb{P}_{n-q}$. Теперь мы можем доказать основной результат данного пункта.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть G – простая вещественная форма простой комплексной группы Ли $\widehat{G}$, и пусть замкнутая орбита M группы G на флаговом многообразии $Y = \widehat{G}/\widehat{Q}$ имеет коразмерность 1. Тогда $Y = \mathbb{P}_n$, а M является многообразием изотропных прямых в Y . Если $\widehat{G} = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, то $G = \mathrm{SU}(p, q)$, где $p + q = n + 1$. Если $n = 2m - 1$ нечетно, то группа $\mathrm{Sp}(2p, 2q)$, являющаяся вещественной формой для $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ и подгруппой в $\mathrm{SU}(2p, 2q)$, также действует транзитивно на M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что диагональное $\widehat{K}$ -действие на $\widehat{K}/\widehat{P}_1 \times \widehat{K}/\widehat{P}_2$, возникающее из двух слоений многообразия $\widehat{K}/\widehat{P}$, определяет изоморфизм

$$\widehat{K}/\widehat{P} \rightarrow \widehat{K}/\widehat{P}_1 \times \widehat{K}/\widehat{P}_2 \cong \mathbb{P}_{p-1} \times \mathbb{P}_{q-1}. \quad (5.3)$$

Для этого заметим, что слои $\widehat{P}_1/\widehat{P} = \mathbb{P}_{q-1}$ и $\widehat{P}_2/\widehat{P} = \mathbb{P}_{p-1}$ трансверсальны друг другу, так как они отвечают отрицательному и положительному собственным

подпространствам формы Леви. Так, например, замкнутая $\hat{P}_2$ -орбита $\hat{P}_2/\hat{P}$ в $\hat{K}/\hat{P}$ биголоморфно отображается на базу слоения $\hat{K}/\hat{P} \rightarrow \hat{K}/\hat{P}_1$. Таким образом, как и требовалось, базы рассматриваемых слоений суть $\mathbb{P}_{p-1}$ и $\mathbb{P}_{q-1}$ соответственно.

Далее, по модулю неэффективности $\hat{K}$ -действия на базе $\hat{K}/\hat{P}_1$ полупростая часть группы $\hat{P}_1$ не превосходит $\mathrm{SL}_{p-2}(\mathbb{C})$. Поскольку можно без ограничения общности считать $q \geq p$, этого недостаточно для полупростой части группы, действующей транзитивно на слое $\hat{P}_1/\hat{P}$. Таким образом, полупростая часть неэффективности $\hat{K}$ -действия на $\hat{K}/\hat{P}_1$ должна переводить полупростую часть группы P_1 в группу, которая может действовать транзитивно на $\mathbb{P}_{q_1}$. Единственная возможность для этого состоит в том, что сама эта неэффективность действует транзитивно на слое $\mathbb{P}_{q-1}$. Этим доказан изоморфизм (5.3).

Чтобы доказать следующее утверждение, заметим, что все линейные расслоения на $\mathbb{P}_{p-1} \times \mathbb{P}_{q-1}$ суть тензорные произведения прообразов степеней расслоений гиперплоских сечений на множителях. Единственная возможность стянуть нулевое и бесконечное сечения так, чтобы получить *гладкое* многообразие, дается расслоением с числом Чженя $(1, 1)$. После стягиваний получаем проективное пространство $\mathbb{P}_n$.

Наконец, осталось показать, что единственные подходящие группы – это $\mathrm{SU}(p, q)$ как вещественная форма $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ или, в случае нечетного $n = 2m - 1$, $\mathrm{Sp}(2p, 2q)$ как вещественная форма $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$. Мы знаем, что многообразие M есть тотальное пространство главного S^1 -расслоения для $(1, 1)$ -расслоения над $\mathbb{P}_{p-1} \times \mathbb{P}_{q-1}$. Поэтому если в $\mathrm{SU}(p, q)$ существует подгруппа, действующая транзитивно на M , то ее максимальная компактная подгруппа должна действовать транзитивно на указанном произведении. Меняя обозначения, мы видим, что максимальная компактная подгруппа $\mathrm{USp}_{2p} \times \mathrm{USp}_{2q}$ вещественной формы $\mathrm{Sp}(2p, 2q)$ группы Sp_{2m} и в самом деле действует транзитивно на произведении. Далее, изучаемое S^1 -расслоение топологически нетривиально, так что эта максимальная компактная подгруппа тоже должна действовать на нем транзитивно. Таким образом, в этом случае подгруппа $\mathrm{Sp}(2p, 2q)$ группы $\mathrm{SU}(2p, 2q)$ также действует транзитивно на M .

5.4.3. Замкнутые орбиты коразмерности 2. Напомним, что G – полупростая вещественная форма полупростой комплексной группы $\hat{G}$. Предполагается, что G имеет замкнутую орбиту M коразмерности 2 на флаговом многообразии $Y = \hat{G}/\hat{Q}$. Разложим многообразие $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ согласно множителям $\hat{G}_i$, полученным комплексификацией простых сомножителей G_i группы G . Если простой множитель G_i является комплексной группой и его комплексификация равна $G_i \times G_i$, а G_i не действует транзитивно на флаговом многообразии Y_i , то M разлагается в произведение остальных Y_j с орбитами $M_i \hookrightarrow Y_i = \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$, как в предложении 5.5. Изучив этот случай, мы можем считать, что все $\hat{G}_i$ просты.

Отщипив все множители Y_i , на которых G_i действует транзитивно, получаем два случая: либо $Y = Y_1 \times Y_2$ и замкнутые G_i -орбиты на каждом множителе суть вещественные гиперповерхности (как описано в п. 5.4.2), либо G и $\hat{G}$ просты. В настоящем пункте мы изучаем второй из этих случаев. Приведем основной результат.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть G и $\hat{G}$ просты и замкнутая G -орбита M на флаговом многообразии $\hat{G}/\hat{Q}$ имеет коразмерность 2. Тогда $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, $\hat{G} = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, флаговое многообразие $\hat{G}/\hat{Q}$ есть проективное пространство $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, а замкнутая G -орбита есть множество вещественных точек $M = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать теорему индукцией по размерности $n = \dim Y$. Базой индукции является случай $n = 2$. В этом случае Y должно быть равно $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Единственная комплексная группа $\hat{G}$, действующая транзитивно на $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, есть (с точностью до накрытий) $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, имеющая только $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SU}(2, 1)$ в качестве вещественных форм. Второй из этих случаев разобран выше, а первый есть в точности случай, фигурирующий в теореме. Далее мы принимаем предположение индукции. Иными словами, мы рассматриваем флаговое многообразие размерности n (удовлетворяющее условиям теоремы) и считаем, что теорема верна для всех флаговых многообразий меньшей размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Группа $\hat{Q}$ является максимальной параболической подгруппой в $\hat{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\hat{Q}$ не является максимальной параболической подгруппой, то имеем нетривиальное слоение $\hat{G}/\hat{Q} \rightarrow \hat{G}/\hat{Q}_1$. Изучим, как может действовать G на его базе. Если это действие транзитивно, то наша ситуация воспроизводится на слое. Здесь, однако, нужна осторожность с предположением индукции. Если группа слоя $G_1 = G \cap \hat{Q}_1$ действует, как в теореме, то по модулю неэффективности она равна $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ и имеет максимальную компактную подгруппу $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. В этом случае перебор всех возможностей, указанных А. Л. Онищиком [33], [34], показывает, что максимальная компактная подгруппа группы G_1 -изотропии базы никогда не имеет $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ -фактора. Оставшиеся две возможности, где предположение индукции на самом деле неприменимо, разбираются аналогично. Это случаи, когда слой является произведением орбит-гиперповерхностей и когда он является орбитой комплексной простой группы, действующей как вещественная форма. Нужные для этих случаев группы просто не являются факторами групп G_1 -изотропии, описанных А. Л. Онищиком [33], [34].

Если G не действует транзитивно на базе и ситуация теоремы воспроизводится, то $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, база есть $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, а Y должно быть многообразием полных флагов, на котором замкнутая G -орбита имеет коразмерность 3. Итак, этот случай также невозможен.

Наконец, если замкнутая G -орбита в $\hat{G}/\hat{Q}_1 = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ есть вещественная гиперповерхность, то прямая проверка показывает, что ни одна из возможных вещественных форм G не действует с замкнутыми орбитами коразмерности 2 на большем флаговом многообразии $\hat{G}/\hat{Q}$. Предложение доказано.

Обратимся к изучению открытой $\hat{K}$ -орбиты Ω в Y . Обозначим ее границу через $E := \mathrm{bd}(\Omega)$. Например, мы хотим показать, что K -орбита общего положения в Ω есть вещественная гиперповерхность. Для этого заметим, что в силу K -инвариантности градиентного потока, который реализует двойственность и стягивает Ω на M , всякая K -орбита в Ω расслаивается над M .

В частности, если бы K -орбиты общего положения в Ω не были гиперповерхностями, то *любая* K -орбита в Ω имела бы коразмерность 2. Покажем, что это на самом деле не так.

Будем говорить, что точки $\widehat{K}$ -орбиты $\mathcal{O}_1$ достижимы только с орбиты $\mathcal{O}_2$, если единственной орбитой, в замыкании которой содержится $\mathcal{O}_1$, является $\mathcal{O}_2$.

ЛЕММА 5.1. *Пусть $\mathcal{O}$ – $\widehat{K}$ -орбита в E и точка $y_0 \in \mathcal{O}$ достижима только с открытой орбиты Ω . Допустим, что все K -орбиты в Ω имеют коразмерность 2 над $\mathbb{R}$. Тогда коразмерность $K.y_0$ в $\mathcal{O}$ не превосходит 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из того, что группа изотропии K_{y_0} стабилизирует полидиск, трансверсальный к $\mathcal{O}$, где все орбиты имеют коразмерность не выше 1. Лемма доказана.

Таким образом, если точка $y_0 \in \mathcal{O}$ достижима только с открытой орбиты, то и каждая точка $y \in \mathcal{O}$ обладает этим же свойством. Отсюда вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Если орбита $\mathcal{O}$ содержит точку, достижимую только с открытой орбиты Ω , то $\mathcal{O}$ не аффинна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{O}$ аффинна и полупростая часть группы $\widehat{K}$ действует нетривиально на $\mathcal{O}$, то коразмерность минимальной K -орбиты в $\mathcal{O}$ не равна 1. Напомним, что группа K полупроста, если только G не эрмитова типа, и даже в эрмитовом случае K имеет лишь одномерный центр. Поэтому если полупростая часть действует тривиально на $\mathcal{O}$, то $\mathcal{O} \cong \mathbb{C}^*$ и $\widehat{K}$ имеет неподвижную точку на границе. Тогда G -орбита этого цикла была бы ограниченной симметрической областью в Y . Однако, поскольку $Y \neq \mathbb{P}_1$, мы знаем, что минимальная K -орбита в этой ограниченной симметрической области имеет размерность, большую 1. Следствие доказано.

Допустим теперь, что E содержит неприводимые компоненты коразмерности 1 и обозначим объединение этих компонент через E_0 . В силу максимальной $\widehat{Q}$ этот дивизор обилён и его дополнение штейново. Пусть $\mathcal{O}$ – орбита максимальной размерности в E , лежащая в дополнении к E_0 . Ясно, что она достижима только с открытой орбиты, и потому K -орбиты общего положения в $\mathcal{O}$ суть вещественные гиперповерхности в $\mathcal{O}$. Поскольку орбита максимальной размерности на границе орбиты $\mathcal{O}$ достижима только с $\mathcal{O}$, то же самое рассуждение показывает, что ее K -орбиты имеют коразмерность 0, т. е. $\widehat{K}$ -орбиты на границе $\mathcal{O}$ даже замкнуты в Y . Поскольку дивизор E_0 обилён, такие орбиты должны иметь непустое пересечение с E_0 и, следовательно, содержаться в Y . Итак, имеем следующую ситуацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. *Либо $E_0 = \emptyset$ (т. е. граница E открытой $\widehat{K}$ -орбиты в Y всюду имеет коразмерность не ниже 2), либо $E_0 = E$ – обильный дивизор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы только что видели, что если E_0 непусто, но $E_0 \neq E$, то каждая орбита $\mathcal{O}$ в дополнении к E_0 в E замкнута в дополнении к E_0 в Y . В силу обильности E_0 это означает, что каждая такая орбита $\mathcal{O}$ аффинна. Но этот случай был исключён выше (напомним, что мы сохраняем предположение о том, что всякая K -орбита в Ω имеет коразмерность 2). Предложение доказано.

Наконец мы подошли к ключевому месту. Если $E_0 = \emptyset$, то вещественная коразмерность E в Y не меньше 4. Следовательно, гомологические группы $H_2(\Omega)$ и $H_2(Y)$ совпадают. Из максимальности $\hat{Q}$ получаем, что $b_2(Y) = 1$. Эти факты позволяют нам доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.4. *Граница E является обильным дивизором в Y , а K -орбита общего положения в Ω есть вещественная гиперповерхность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше мы видели, что если E не является обильным дивизором, то $H_2(\Omega) = H_2(Y) = \mathbb{Z}$. При этом слой $\hat{P}/\hat{H}$ есть аффинное однородное пространство, которое либо является $\mathbb{C}^*$ -расслоением над некоторым аффинным симметрическим пространством, либо равно $(\mathbb{C}^*)^2$. В первом случае всегда найдутся K -орбиты коразмерности выше 2. Поэтому если всякая K -орбита имеет коразмерность 2, то указанный слой равен $(\mathbb{C}^*)^2$. В этом случае группа $\hat{P}$ представляется на слое как $(\mathbb{C}^*)^2$ и, следовательно, не является максимальной параболической подгруппой. Таким образом, $b_2(Y_1) \geq 2$.

Наконец, M является сильным деформационным ретрактом Ω , и (даже в эрмитовом случае, когда центр группы K может вносить свой вклад) группа $\pi_1(M)$ либо равна $\mathbb{Z}$, либо конечна. Таким образом, если все K -орбиты имеют коразмерность 2 и $E_0 \neq E$, то применение точной гомотопической последовательности к слоению $Y \rightarrow Y_1$ дает, что $b_2(Y) \geq 2$. Это противоречие означает, что либо дивизор E обилён, либо K -орбиты общего положения в Ω являются гиперповерхностями, либо выполнено и то, и другое. Покажем, что имеет место и то, и другое.

Для этого заметим, что если K -орбиты общего положения суть гиперповерхности, то дополнение к Ω является объединением замкнутых $\hat{K}$ -орбит, т.е. определенных выше циклов. Теорема Нагано утверждает, что в этой ситуации не более двух K -орбит на Y могут иметь размерность, меньшую, чем размерность гиперповерхности. Поскольку M уже является одной из таких орбит, получаем, что в нашей ситуации есть ровно один цикл. Далее, M – минимальная K -орбита в Ω . Так как M имеет коразмерность 2, то слой аффинно-рационального слоения двумерен, т.е. является либо аффинной двумерной квадрикой, либо ее $(2 : 1)$ -фактором, равным дополнению к кривой четвертой степени в $\mathbb{P}_2$. В любом случае этот слой единственным образом эквивариантно компактифицируется: добавление к нему экземпляра $\mathbb{P}_1$ дает многообразие из двух орбит, регулярно отображаемое в Y , причем орбита меньшей размерности (построенная как компактификация слоя) отображается в E . Но это отображение будет стягивать кривую, добавленную к аффинному слою, если только сам исходный цикл не был дивизором. Итак, если K -орбиты общего положения в Ω суть гиперповерхности, то E действительно является обильным дивизором.

Обратно, если E – обильный дивизор, то орбита Ω уже аффинна. Тогда многообразие M вполне вещественно и, следовательно, двумерно. Поскольку эта ситуация полностью описана в первом шаге индукции, классификационный результат для нашего случая полностью доказан.

Доказательство теоремы 5.3 теперь тоже завершено. Поскольку известно, что E – обильный дивизор, мы видим (как на последнем шаге), что $Y = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ и $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ действует на Y обычным образом.

5.5. Классификационная теорема. Выше доказаны классификационные результаты для всех ситуаций, возникающих в предположении, что $M = G/H = G.x_0$ – компактное однородное пространство Коши–Римана, реализованное как G -орбита в некотором проективном пространстве. Здесь мы сведем эти результаты воедино систематическим образом.

В нашей специальной ситуации автоматически существует глобализация $X = \widehat{G}/\widehat{H} = \widehat{G}.x_0$ на объемлющем проективном пространстве. Напомним, что радикал T группы G есть компактный тор и что $G = T \cdot S$ является произведением (возможно, с конечным пересечением) тора T и полупростой части S . Соответственно распадается комплексная группа $\widehat{G} = \widehat{T} \cdot \widehat{S}$, причем T является вещественной формой ее радикала $\widehat{T} = (\mathbb{C}^*)^n$. Однако вполне возможно, что один или несколько простых множителей группы S являются комплексными простыми множителями в $\widehat{S}$. С другой стороны, мы показали, что орбиты такого множителя компактны и что M является G -эквивариантным CR-произведением: $M = M' \times Z$, где $Z = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$ – компактное комплексное однородное рациональное многообразие, являющееся орбитой произведения всех таких множителей. Поскольку мы имеем дело с алгебраическими группами, ситуация воспроизводится (в том смысле, что M' тоже является такой орбитой), но с одним преимуществом: теперь G – вещественная форма группы $\widehat{G}$. На разных этапах классификации будут возникать такие компактные комплексные множители Z и нам будет удобно говорить, что M имеет тот или иной вид *с точностью до компактных комплексных множителей*. Это означает, что имеется в виду многообразие M' .

Итак, после удаления таких компактных множителей рассмотрим аффинно-рациональное слоение

$$X = \widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q} = Y,$$

которое предполагается минимальным в том смысле, что не существует промежуточных слоений с компактной базой. Оно сужается до CR-слоения $M = G/H \rightarrow G/Q = N$. На уровне комплексных групп база $\widehat{G}/\widehat{Q}$ является классическим объектом, для которого, например, структура группы $\widehat{Q}$ хорошо изучена. Выше мы перечислили все возможные варианты для слоя $\widehat{Q}/\widehat{H}$, откуда, имея описание $\widehat{Q}$ в терминах корней, нетрудно извлечь список всех возможностей для $\widehat{H}$. Теперь рассмотрим все возможные способы вложения M в X .

5.5.1. Компактный сферический тип. Выше показано, что если G действует транзитивно на базе $\widehat{G}/\widehat{Q}$, т. е. если

$$Y = \widehat{G}/\widehat{Q} = G/Q = N,$$

то G компактна. Те CR-однородные многообразия $M = G/H \hookrightarrow \widehat{G}/\widehat{H} = X$, которые возникают при этом способе, отнесем к *компактному сферическому типу*. Они строятся следующим образом.

Рассмотрим компактную группу G с комплексификацией $\widehat{G}$ и параболическую подгруппу $\widehat{Q}$ с $Y := \widehat{G}/\widehat{Q}$. Не теряя общности, можно считать, что корневое описание группы $\widehat{Q}$ исходит из максимального комплексного тора $\widehat{T}$ в $\widehat{Q}$, полученного комплексификацией некоторого максимального компактного тора

группы G . Это корневое описание определяет некоторую максимальную редуктивную подгруппу $\hat{L}$ группы $\hat{Q}$ (множитель Леви $\hat{Q}_r$), являющуюся комплексификацией некоторой компактной подгруппы L компактной группы K . Теперь перебором списка всех возможных аффинно-сферических слоев $\hat{F}$ (см. табл. 1) мы проверяем, допускает ли $\hat{L}$ представление (с возможной неэффективностью) в виде редуктивной группы, действующей на $\hat{F}$.

Учитывая, что $\hat{Q} = \hat{L} \ltimes \hat{Q}_u$, имеем действие группы $\hat{Q}$ на $\hat{F}$ и получаем $\hat{G}$ -алгебраическое однородное пространство

$$X = \hat{G}/\hat{H} = \hat{G} \times_{\hat{Q}} \hat{F}.$$

Здесь в качестве $x_0 \in X$ выбрана такая точка в стандартном вложении слоя $\hat{F}$ в $\hat{G} \times_{\hat{Q}} \hat{F}$, что орбита $L.x_0$ имеет коразмерность 1 или 2 (в зависимости от ранга $\hat{F}$). Интересующее нас CR-однородное пространство есть $M := G.x_0$. Отметим, что существует открытое всюду плотное подмножество X_{gen} в X , на котором любые две G -орбиты эквивариантно вещественно-аналитически диффеоморфны. Такие орбиты будем называть *общими*. Каждая из них наследует инвариантную CR-структуру из охватывающего многообразия. Однако отнюдь не следует ожидать, что любые две такие орбиты CR-эквивалентны.

5.5.2. Основные модели с некомпактными группами симметрий. Теперь рассмотрим основные строительные блоки для проективных CR-многообразий $M := G/H$ коразмерности 1 или 2, являющихся однородными относительно некомпактной группы симметрий. Это орбиты простых вещественных форм G комплексных полупростых групп на $\hat{G}$ -флаговых многообразиях $X = \hat{G}/\hat{H}$. Как показано выше, в этом случае есть две бесконечные серии примеров и один особый случай. Дадим краткий обзор этих основных моделей.

5.5.3. Квадрики смешанной сигнатуры. Здесь $X = Y = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, а $M = M_{p,q}$ – многообразие изотропных прямых для стандартной эрмитовой нормы сигнатуры (p, q) . Такую вещественную гиперповерхность M будем называть *квадрикой смешанной сигнатуры*. Ее стабилизатором в группе автоморфизмов $\mathbb{P}_n$ является вещественная форма $SU(p, q)$ группы $SL_{n+1}(\mathbb{C})$. Если $n + 1$ четно и рассматривается форма сигнатуры $(2p, 2q)$, то вещественная форма $Sp(2p, 2q)$ группы $Sr_{n+1}(\mathbb{C})$ также действует транзитивно на M . Как показано выше, если G – некомпактная группа Ли, действующая на M при стандартных предположениях, сделанных в настоящем параграфе, а M имеет коразмерность 1, то с точностью до компактных множителей M является квадрикой $M_{p,q}$ смешанной сигнатуры, а G – одной из только что упомянутых групп.

5.5.4. Подкрученные диагональные действия на произведениях проективных пространств. Если G является комплексной группой Ли и задан ее антиголоморфный автоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$, то можно вложить G в ее комплексификацию $\hat{G} = G \times G = G_1 \times G_2$ с помощью подкрученного диагонального отображения $(g, \varphi(g))$. Если Q_1 – параболическая подгруппа в G_1 , то $Q_2 = \varphi(Q_1)$ является параболической подгруппой в G_2 и G действует посредством этого вложения на однородном рациональном многообразии $X = Y = \hat{G}/\hat{Q} = G_1/Q_1 \times G_2/Q_2$. Эту ситуацию следовало бы изучить подробнее. Но для нас интересен только один ее частный случай: когда $G_1 = G_2 = SL_{n+1}(\mathbb{C})$, а Q_1 – стандартная группа

изотропии G_1 -действия на $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. В случае антиголоморфного автоморфизма, заданного комплексным сопряжением (т.е. $\varphi(A) = \bar{A}$), мы имеем $Q_2 = Q_1$, и оба сомножителя произведения X совпадают. Интересующая нас замкнутая G -орбита – это антиголоморфная диагональ $M = \{([z], [w]) \in \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n; z = \bar{w}\}$. Поэтому в нашем случае, когда предполагается, что M имеет коразмерность не выше 2, есть только один интересный пример: он возникает при $n = 1$.

С точностью до сопряжения единственный оставшийся антиголоморфный автоморфизм группы $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ получается композицией предыдущего отображения φ и голоморфного внешнего автоморфизма $A \rightarrow (A^{-1})^t$. Тогда $X = \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n^*$, где через $\mathbb{P}_n^*$ обозначено $\mathbb{P}((\mathbb{C}^n)^*)$. Замкнутая орбита в этом случае описывается в стандартных координатах:

$$M = \{([z], [w]) \in \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n; z^t \bar{w} = 0\}.$$

Она является образом комплексной гиперповерхности $\{([z], [w]); z^t w = 0\}$ при комплексном сопряжении второй компоненты и потому имеет коразмерность 2 независимо от n . Будем говорить, что эти CR-однородные пространства получаются *подкрученными диагональными действиями на произведениях проективных пространств*. При $n = 1$ проективное пространство $\mathbb{P}_1$ голоморфно эквивариантно изоморфно своему двойственному. Поэтому предыдущий случай антиголоморфной диагонали в $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ совпадает с обсуждаемым здесь частным случаем $n = 1$. Тем самым, имеется только одна серия многообразий M_n , полученных подкрученными диагональными действиями.

5.5.5. Вещественные точки в $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Если $\mathbb{C}^n$ снабжено стандартной вещественной структурой, то ассоциированное с ним проективное пространство $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ определено над полем вещественных чисел и множество его вещественных точек совпадает с проективизацией $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Вещественная форма $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ группы $\hat{G} = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ имеет на $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ровно две орбиты: $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ и его дополнение. Мы не будем рассматривать здесь случай $n = 1$, когда получается квадрака смешанной сигнатуры для группы $\mathrm{SU}(1, 1)$. Остается единственный интересный для нас сейчас случай: замкнутая орбита $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ группы $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ на $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Теперь сведем воедино результаты о классификации (в стандартной ситуации этого параграфа) основных моделей с некомпактными группами симметрий.

ТЕОРЕМА 5.5. *Если группа G проста и некомпактна, то M является одним из следующих многообразий:*

- 1) *квадрика смешанной сигнатуры $M_{p,q}$ коразмерности 1;*
- 2) *замкнутая орбита M_n коразмерности 2 в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n^*$ относительно действия группы $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, заданного антиголоморфно подкрученным диагональным вложением $A \rightarrow (A, (\bar{A}^{-1})^t)$ в $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$;*
- 3) *особый случай вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, вложенной обычным образом как замкнутая орбита группы $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ на $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.*

5.5.6. Теорема о расщеплении. Следующее утверждение позволяет более ясно сформулировать наш классификационный результат. Чтобы поместить его в нужный контекст, напомним, что если вещественная форма G действует транзитивно на базе $\widehat{G}/\widehat{Q}$, то она компактна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. Пусть G_1 – некомпактный простой множитель группы $G = G_1 \cdot G_2$ с комплексификацией $\widehat{G}_1$. Обозначим соответствующие разложения комплексифицированной группы и базы через $\widehat{G} = \widehat{G}_1 \cdot \widehat{G}_2$ и $X = \widehat{G}/\widehat{Q} = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1 \times \widehat{G}_2/\widehat{Q}_2$. Допустим, что действие G_1 на $\widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$ не транзитивно. Тогда X допускает $\widehat{G}$ -эквивариантное расщепление вида $X = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1 \times \widehat{G}_2/\widehat{H}_2$, где $\widehat{Q}_1 = \widehat{H} \cap \widehat{G}_1$ и $\widehat{H}_2 = \widehat{H} \cap \widehat{G}_2$. При этом CR-однородное многообразие M допускает аналогичное G -эквивариантное расщепление: $M = M_1 \times M_2$.

Прежде чем переходить к доказательству, сформулируем нашу основную классификационную теорему, которая непосредственно вытекает из теоремы о расщеплении (т. е. предложения 5.9) и доказанных выше классификационных результатов. Мы рассматриваем стандартную ситуацию из настоящего параграфа. В частности, $M = G/H$ имеет коразмерность не выше 2 в $X = \widehat{G}/\widehat{H}$, а на X есть аффинно-рациональное слоение $X = \widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q} = Y$. Индуцированное слоение на M обозначается через $M := G/H \rightarrow G/Q = N$.

ТЕОРЕМА 5.6. Если N имеет коразмерность 2 в базе, то $M = N$, $X = Y$ и M входит в следующий список:

1) произведение $M = M_{p,q} \times M_{p',q'}$ квадрик смешанной сигнатуры, причем в качестве групп рассматриваются $G = G_1 \times G_2$ и $\widehat{G} = \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2$, а комплексная модель $X = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1 \times \widehat{G}_2/\widehat{Q}_2$ имеет аналогичное расщепление;

2) одно из многообразий M_n , являющихся замкнутыми $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ -орбитами в $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_n(\mathbb{C})^*$, где $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ действует посредством антиголоморфно подкрученного диагонального представления;

3) замкнутая орбита $M = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ группы $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ на $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Если N имеет коразмерность 1 в базе, а M – коразмерность 1 в X , то $X = Y = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, а M – квадрика смешанной сигнатуры, тогда как G есть либо $\mathrm{SU}(p, q)$, либо $\mathrm{Sp}(2p, 2q)$.

Если N имеет коразмерность 1 в базе, а M – коразмерность 2 в X , то $M = M_1 \times M_2$ разлагается в произведение квадрики смешанной сигнатуры M_1 и многообразия M_2 компактного сферического типа. Это разложение G -эквивариантно и определяется расщеплением $X = \widehat{G}/\widehat{H} = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1 \times \widehat{G}_2/\widehat{H}_2 = X_1 \times X_2$, где M_1 – квадрика смешанной сигнатуры, являющаяся орбитой некомпактной вещественной формы G_1 ($\mathrm{SU}(p, q)$ или $\mathrm{Sp}(2p, 2q)$) на $Y_1 = \mathbb{P}_n$. Группа G_2 компактна, а M_2 является G_2 -орбитой коразмерности 1 на $X_2 = \widehat{G}_2/\widehat{H}_2$.

Если G действует транзитивно на базе (т. е. если $N = Y$), то M относится к компактному сферическому типу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.9. Необходимо изучить только случай, когда образ $N = G/Q$ в базе является произведением замкнутой орбиты $N_1 = G_1/Q_1$ простого множителя G_1 в $Y_1 = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1$ и другого множителя

$Y_2 = \widehat{G}_2/\widehat{Q}_2 = G_2/Q_2 = N_2$ рациональной однородной базы. Для этого рассмотрим слой $\widehat{F} = \widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H}$ слоения $\widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}_2/\widehat{Q}_2$ над этим множителем. Имеем промежуточное слоение

$$\widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H}\widehat{Q}_2 = \widehat{G}_1/\widehat{H}_1 \rightarrow \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1.$$

Из условия минимальности исходного аффинно-рационального слоения вытекает, что $\widehat{H}_1 = \widehat{Q}_1$.

Единственный интересующий нас случай возникает, когда слой индуцированного слоения CR-многообразия F является вещественной гиперповерхностью в его комплексификации $\widehat{H}\widehat{Q}_2$. Если бы вещественная группа, действующая на этом слое, была некомпактной, то из нашей классификации вытекало бы, что $\widehat{H}\widehat{Q}_2/\widehat{H}$ – компакт. Это означало бы компактность $X = Y$, а $M = M_1 \times M_2$ было бы произведением квадрик смешанной сигнатуры. Конечно, все это возможно, но мы уже отмечали в начале доказательства, что нам надо рассмотреть лишь случай, когда только один некомпактный множитель группы G имеет некомпактную орбиту на базе $\widehat{G}/\widehat{Q}$.

В итоге сказанное выше означает, что мы имеем слоение

$$\widehat{G}_1 \times \widehat{Q}_2/\widehat{H} \rightarrow \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1 = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}),$$

причем вещественная группа, действующая на его базе, есть либо $SU(p, q)$, либо $SU(2p, 2q)$. Если квадрика смешанной сигнатуры на базе есть орбита $N_1 = G_1.y_0 = G_1/Q_1$, то мы знаем, что Q_1 действует на слое как компактная группа. Поскольку связные разрешимые подгруппы компактных групп абелевы, отсюда вытекает, что коммутант каждой некомпактной разрешимой подгруппы в Q_1 действует тривиально на слое. В частности, $\widehat{Q}_1$ содержит нормальную подгруппу $\widehat{I}$, содержащую каждую такую группу. Явная проверка вида Q_1 показывает, что единственная возможность для $\widehat{I}$ – это сама группа $\widehat{Q}_1$. Например, если рассмотреть стабилизатор в G_1 двумерного комплексного подпространства в $\mathbb{C}^n$ сигнатуры $(1, 1)$, то изотропия этого экземпляра $SU(1, 1)$ в базовой точке из N_1 есть вещественная борелевская группа, коммутант которой не содержится ни в какой собственной нормальной подгруппе группы $\widehat{Q}_1$.

Этим доказательство закончено, поскольку из сказанного вытекает, что $\widehat{Q}_1$ действует тривиально на слое и потому содержится в $\widehat{H}$. Отсюда следует, что $X = X_1 \times X_2 = \widehat{G}_1/\widehat{Q}_1 \times \widehat{G}_2/\widehat{H}_2$ и M расщепляется аналогично.

5.6. Приложения к глобализации. Несмотря на то, что нашей целью здесь является доказательство существования глобализации при некоторых условиях, мы начнем этот пункт с замечания о том, что наличие некоторых 3-мерных CR-гиперповерхностей препятствует такому существованию.

5.6.1. О роли аффинной квадрики. Приведем несколько примеров того, как двумерная аффинная квадрика $SL_2(\mathbb{C})/T$, где T – подгруппа диагональных матриц, может помешать глобализации. Эта квадрика совпадает с касательным расслоением сферы S^2 , на котором всякая $SO_3(\mathbb{R})$ -орбита (за исключением нулевого сечения) имеет коразмерность 1 и равна $SO_3(\mathbb{R})$. Таким образом, CR-структуры на этих орбитах – это левоинвариантные структуры типа

гиперповерхности на самой группе. Препятствия к глобализации создаются универсальными накрытиями этих многообразий, т.е. левоинвариантными CR-структурами типа гиперповерхности на группе SU_2 . Существуют разные способы встроить эти неглобализуемые структуры в другие CR-однородные пространства и построить другие неглобализуемые примеры, которые мы сейчас и обсудим.

ПРИМЕР 5.4. Сначала рассмотрим представление $SL_2(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^N$ в виде прямой суммы двух неприводимых представлений: в первом $-\text{Id}$ действует как единица (т.е. это представление с четным старшим весом), а во втором $-\text{Id}$ действует как $-\text{Id}$. Рассмотрим аффинное симметрическое пространство $X := SL_2(\mathbb{C})/D$, где $D \cong \mathbb{C}^*$ – пространство диагональных матриц в $SL_2(\mathbb{C})$, и снабдим SU_2 левоинвариантной CR-структурой, взятой с одной из тех ее орбит, которые являются вещественными гиперповерхностями в X .

Как отмечено в примере 3.1, многообразие $M = SU_2$ с этой структурой не глобализуемо. С другой стороны, его $(2 : 1)$ -фактор $M/\pm \text{Id}$ глобализуется в X . Здесь мы слегка модифицируем этот пример и получим CR-однородное пространство коразмерности 1, с которым хлопот будет намного больше.

ПРИМЕР 5.5. Представим $SL_2(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^N$ как прямую сумму ρ двух неприводимых представлений: в первом $-\text{Id}$ действует как единица (т.е. это представление с четным старшим весом), а во втором $-\text{Id}$ действует как $-\text{Id}$, и обозначим через $\widehat{G} := \mathbb{C}^N \rtimes_{\rho} SL_2(\mathbb{C})$ полученную комплексную группу Ли. Положим $G = \mathbb{C}^N \rtimes SU_2$, где SU_2 снабжена определенной выше CR-структурой. Наконец, пусть Γ – полная решетка в $\mathbb{C}^N$, так что $\mathbb{C}^N/\Gamma = T$ – комплексный тор. Согласно выбору смешанного представления элемент $-\text{Id} \in SU_2$ не нормализует большинство решеток Γ . Поэтому можно выбрать Γ так, что центр $Z = \{\pm \text{Id}\}$ группы SU_2 не действует на $M = T \rtimes SU_2$ справа. Иными словами, в отличие от примера 5.4, когда многообразие M можно было заменить на его фактор по Z , теперь никакие простые модификации M не дадут глобализуемости.

Можно сильно изменить M : перейти к его универсальному накрытию $\widetilde{M} = \mathbb{C}^N \rtimes SU_2$, а затем к фактору по Z в SU_2 . Такая изогения действительно позволяет глобализовать M , но при этом теряется компактность.

Заметим, что у этой конструкции есть еще преимущество: группа $SL_2(\mathbb{C})$, от которой исходят проблемы, является простым множителем группы $\widehat{G}$. Можно было бы далее ухудшить ситуацию, рассмотрев аффинно-рациональное слоение $\widehat{G}/\widehat{J} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}$ базы антиканонического расслоения, где X теперь фигурирует в качестве слоя $\widehat{Q}/\widehat{J}$ и является орбитой некоторого $SL_2(\mathbb{C})$ -множителя в множителе Леви группы $\widehat{Q}$.

Из примера 5.5 следует, что всякий раз, когда аффинная квадрика $SL_2(\mathbb{C})/D$ возникает в слое аффинно-рационального слоения, надо изучать конкретный случай, чтобы узнать, глобализуемо ли многообразие M . Если $N(D)$ – нормализатор подгруппы D , то столь же опасен и $(2 : 1)$ -фактор $SL_2(\mathbb{C})/N(D)$, представляющий собой дополнение к гладкой конике в $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Если $\widehat{G}$ представлена как полупростая группа на проективном пространстве, а аффинно-рациональное слоение имеет слой $\widehat{Q}/\widehat{H} \cong \mathbb{C}$, то существует дальнейшее слоение

$\widehat{G}/\widehat{H} \rightarrow \widehat{H}/\widehat{Q}_1$, где $\widehat{Q}_1/\widehat{Q} \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и $\widehat{Q}_1/\widehat{H}$ – снова аффинная квадрика [2]. Таким образом, и этот случай надо рассматривать отдельно. Для простоты будем говорить, что в каждом из этих случаев *возникает двумерная аффинная квадрика*.

Заметим, что двумерная аффинная квадрика является аффинным симметрическим пространством – касательным расслоением эрмитова симметрического пространства S^2 . Явление неглобализуемости можно объяснить невыполнением нашего гомотопического условия (см. предложение 3.1). Напомним это условие: если CR-многообразие G/J реализовано как орбита на проективном пространстве и имеет в этом пространстве глобализацию $\widehat{G}/\widehat{J}$, то включение $J \hookrightarrow \widehat{J}$ должно индуцировать отображение $\pi_1(J) \rightarrow \pi_1(\widehat{J})$ с не более чем конечным коядром. Аффинная квадрика – единственное симметрическое пространство ранга 1, для которого это условие не выполнено: группа J тривиальна, а $\widehat{J} \cong \mathbb{C}^*$. Ниже мы укажем другие примеры однородных пространств ранга 2, не удовлетворяющих гомотопическому условию. Здесь также возникает аффинная квадрика, хотя это и не сразу заметно. Покажем, как это происходит.

Пусть группа G полупроста и компактна, и пусть $M = G/J$ – ее орбита на проективном пространстве, имеющая в этом пространстве глобализацию $\widehat{M} = \widehat{G}/\widehat{J}$. Допустим, что M имеет коразмерность 2 в $\widehat{M}$. Ниже мы увидим, что для изучения топологических препятствий достаточно рассмотреть случай, когда пространство $\widehat{G}/\widehat{J}$ аффинно, а внутри этого случая – подслучай, когда $\widehat{G}/\widehat{J}$ – касательное пространство некоторого компактного эрмитова симметрического пространства G/L ранга 2. Тогда G/L – сильный деформационный ретракт $\widehat{G}/\widehat{J}$. Поэтому наше гомотопическое условие сводится к проверке того, что естественное отображение $\pi_1(J) \rightarrow \pi_1(L)$ имеет конечное коядро. Для такой проверки достаточно показать, что полупростая часть L_{ss} действует транзитивно на L/J .

Один из очевидных случаев возможной нетранзитивности действия L_{ss} на L/J – это когда эрмитово симметрическое пространство G/L приводимо, т. е. является произведением двух эрмитовых симметрических пространств ранга 1. Но тогда нетранзитивность действия L_{ss} эквивалентна тому, что один из этих множителей равен S^2 и, в частности, возникает двумерная аффинная квадрика.

Нам нужен следующий факт, который можно усмотреть из таблицы E в [38] или, за исключением симметрического пространства группы E_6 , установить прямой проверкой с помощью стандартных матричных моделей возникающих здесь групп. (Список всех эрмитовых симметрических пространств см. в [32].) Если G/L – неприводимое эрмитово симметрическое пространство ранга 2 и L_{ss} действует нетранзитивно на общей орбите L/J коразмерности 2 в касательном пространстве, взятом в нейтральной точке, то G/L принадлежит серии симметрических пространств $\mathrm{SO}_{p+2}(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_p(\mathbb{R}) \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Аффинная квадрика возникает в каждом пространстве этой серии, и, переходя к $(2:1)$ -накрытиям, можно построить неглобализуемые примеры. Чтобы проверить это, рассмотрим простейший пример.

ПРИМЕР 5.6. Пусть $G = \mathrm{SO}_4(R) = (\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2)/\Gamma$, где Γ – диагонально вложенная центральная подгруппа порядка 2. Заметим, что диагональную подгруппу SU_2/Γ можно отождествить с $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. В этом случае интересующее

нас эрмитово симметрическое пространство есть

$$G/L = \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),$$

а группа изотропии определяется стандартным вложением $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ в $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$. Общая G -орбита $M := G/J$ в $\hat{G}/\hat{J}$ есть группа G , т.е. $J = \{e\}$. Пусть теперь $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}_2/\Gamma$ вложено, как выше. Определим базовые точки x_1 в G/L и x_0 в $\hat{G}/\hat{J}$ так, что $M = G.x_0 = G/J = G$ и $x_0 = g(x_1)$ для некоторого $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$. Тогда $M_1 := \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).x_0$ – CR-гиперповерхность в аффинной квадрике, содержащейся в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}).x_1$. Наконец, рассмотрим универсальное накрытие

$$\widetilde{M} := \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 = \widetilde{G} \rightarrow G = M.$$

Тогда $\mathrm{SU}_2 = \widetilde{M}_1$ – универсальное накрытие многообразия M_1 , снабженное неглобализуемой структурой. Следовательно, $\widetilde{M}$ тоже неглобализуемо.

Этот маломерный пример входит как частный случай в следующую более общую картину. Рассмотрим опять аффинно-рациональное слоение $\hat{G}/\hat{J} \rightarrow \hat{G}/\hat{Q}$ глобализации базы $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения. Как указано выше, достаточно рассмотреть случай, когда слой $\hat{Q}/\hat{J}$ – неприводимое аффинное симметрическое пространство ранга 2, являющееся касательным расслоением некоторого эрмитова симметрического пространства. Пример 5.6 вписывается в этот общий контекст следующим образом. Рассмотрим эрмитово симметрическое пространство $\mathrm{SO}_{p+2}/\mathrm{SO}_p \cdot \mathrm{SO}_2$. Вложим $\mathrm{SO}_{p-2}(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ обычным блочным способом так, что подгруппа $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ группы изотропии $\mathrm{SO}_p(\mathbb{R}) \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ диагонально вложена в $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, как выше. Опять положим $x_0 = g(x_1)$, где x_1 – базовая точка эрмитова симметрического пространства и $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$. Тогда $M = G.x_0 = G/J$, где $J = \mathrm{SO}_{p-2}(\mathbb{R}) \times \Gamma$ с подгруппой Γ , как и выше. Аналогично, универсальное накрытие $\widetilde{M} = G/J^\circ$ содержит пространство $\widetilde{M}_1 = \mathrm{SU}_2$, снабженное стандартной неглобализуемой структурой. Поэтому $\widetilde{M}$ неглобализуемо.

5.6.2. О роли вещественного проективного пространства. Еще один случай, когда глобализации может не быть, возникает, если G представлена на образе антиканонического слоения как $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, причем образ M есть $G/J = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ с проективной глобализацией $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Как и в предыдущем случае, по модулю неэффективности имеем $\pi_1(\hat{J}) = \mathbb{Z}$, тогда как группа $\pi_1(J)$ тривиальна. В частности, наш гомотопический критерий не гарантирует глобализуемость. С другой стороны, в этом случае $\hat{G}/\hat{J} = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, так что нет смешивания со слоениями. Далее, если заменить G на меньшую группу – прообраз максимальной компактной подгруппы $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, то наше гомотопическое условие гарантирует глобализацию.

5.6.3. Условия глобализуемости. Не вдаваясь в подробное перечисление исключений, сформулируем наилучший глобализационный результат, известный нам в настоящее время.

ТЕОРЕМА 5.7. *Если аффинная quadrка не возникает и база G/J антиканонического слоения не является вещественной проективной плоскостью, то M*

допускает глобализацию. Если G представлена на базе $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения как компактная группа, то единственной причиной отсутствия глобализации может быть появление аффинной квадрики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим гомотопическое условие из § 3. Согласно предложению 5.9 достаточно изучать индивидуальные множители базы антиканонического слоения. Особый случай проективной плоскости обсуждался выше. Другой случай, где возникает некомпактная группа, – это когда множитель группы G представлен как $SU(p, q)$ или $Sp(2p, 2q)$, а интересующее нас проективное CR -однородное пространство есть квадрака смешанной сигнатуры. Здесь выполнено гомотопическое условие из § 3.

Чтобы убедиться в этом, например, для случая $Sp(2p, 2q)$, рассмотрим разложение $\mathbb{C}^n = V_+ \oplus V_-$, стабилизируемое максимальной компактной подгруппой $K \cong USp(2p) \times USp(2q)$. Группа $USp(2p)$ -изотропии ненулевого вектора $v_+ \in V_+$ действует на этом векторе как нетривиальный характер. Поскольку то же самое верно для $USp(2q)$ на V_- , а вектор $v = v_+ + v_-$ можно выбрать изотропным, максимальная компактная подгруппа группы $Sp(2p, 2q)$ -изотропии в точке v равна группе K -изотропии K_v . Полученные два характера дают представление группы K_v на $S^1 \times S^1$, и надлежащим образом выбранная диагональ будет действовать на v тем же характером, что и группа $SL_n(\mathbb{C})$ -изотропии соответствующей точки проективного пространства. В частности, фундаментальная группа группы изотропии вещественной формы отображается на всю фундаментальную группу группы изотропии комплексной формы. Таким образом, гомотопическое условие в случае $Sp(2p, 2q)$ выполнено. Случай $SU(p, q)$ проверяется аналогично.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда G представлена как компактная группа на проективном пространстве, а аффинной квадрики не возникает. Для этого рассмотрим аффинно-рациональное слоение $\widehat{G}/\widehat{J} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}$ глобализации базы антиканонического слоения. Поскольку группа G компактна, она действует транзитивно на базе. Если центр $\widehat{Z}$ группы $\widehat{Q}$ действует транзитивно на слое, то имеем промежуточное слоение

$$\widehat{G}/\widehat{J} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Z}\widehat{J} \rightarrow \widehat{G}/\widehat{Q}.$$

Слой $\widehat{Z}\widehat{J}/\widehat{J}$ изоморфен $(\mathbb{C}^*)^n$, $n = 1, 2$, а индуцированный слой G -орбиты есть $(S^1)^n$. Поэтому вопрос о сюръективности отображения гомотопических групп сводится к тому же вопросу, но уже после выполнения промежуточного слоения. Таким образом, можно считать, что центр группы $\widehat{Q}$ действует тривиально на слое.

В этом случае слой $\widehat{Q}/\widehat{J}$ есть либо $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, либо аффинное сферическое пространство с действием полупростой группы. Поскольку аффинная квадрака не возникает, этот слой должен быть либо аффинным симметрическим пространством ранга 1 или 2, либо одним из двух особых случаев: SL_{m+1}/SL_m или $SO_9/Spin_7$. После этого доказательство завершается проводимым ниже анализом гомотопических групп.

Рассмотрим длинные точные гомотопические последовательности расслоений, составляющих строки следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} \hat{J} & \longrightarrow & \hat{G} & \longrightarrow & \hat{G}/\hat{J} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ J & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/J \end{array}$$

Из этих последовательностей вытекает, что для сюръективности отображения $\pi_1(J) \rightarrow \pi_1(\hat{J})$ достаточна сюръективность отображения

$$\pi_2(G/J) \rightarrow \pi_2(\hat{G}/\hat{J}). \quad (5.4)$$

Далее, минимальная G -орбита G/L в $\hat{G}/\hat{J}$ является сильным деформационным ретрактом пространства $\hat{G}/\hat{J}$. Поэтому нам надо показать, что отображение $G/J \rightarrow G/L$ индуцирует сюръекцию на уровне π_2 . Рассмотрим гомотопическую последовательность расслоения

$$L/J \rightarrow G/J \rightarrow G/L.$$

Поскольку нас интересует сюръективность лишь с точностью до конечного ядра, достаточно доказать конечность $\pi_1(L/J)$. Если группа L полупроста, то это очевидно. Остается рассмотреть случай, когда Q/L – эрмитово симметрическое пространство, а Q/J – орбита общего положения (коразмерности 1 или 2) на его касательном расслоении, т. е. L/J – общая орбита в касательном пространстве. Как показано выше, если аффинных квадрик не возникает, то L_{ss} действует транзитивно на L/J , и потому группа $\pi_1(L/J)$ конечна. Теорема доказана.

§ 6. Тонкая классификация

6.1. Леви-невыврожденный случай. В этом пункте $M = G/H$ считается компактным однородным CR-многообразием коразмерности не выше 2, причем форма Леви многообразия M предполагается невырожденной. Пусть $G/H \rightarrow G/J - \mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение на M . Тогда можно описать слой J/H этого $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения и дать тонкую классификацию многообразий M . Подобные результаты для коразмерности 1 содержатся в [2].

Сначала заметим, что по предложению 2.1 группа H° нормальна в $J = N_{CR}(H)$, поскольку $N_{CR}(H) \subset N(H^\circ)$. Следовательно, $N := J/H^\circ$ является группой, а $\Gamma := J/H$ – дискретная подгруппа в N . Напомним также, что существует комплексификация $\hat{N}$ многообразия N (см. теорему 2.7). Не теряя общности, можно считать группу $\hat{N}$ односвязной и рассмотреть разложение Леви $\hat{N} = \hat{R} \rtimes \hat{S}_{\hat{N}}$, где $\hat{R}$ – радикал группы $\hat{N}$, а $\hat{S}_{\hat{N}}$ – максимальная полупростая подгруппа в $\hat{N}$. Обозначим через $\mathfrak{n}$ алгебру Ли группы N , а через $\mathfrak{m}_{\mathfrak{n}}$ – ее максимальный комплексный идеал. Также обозначим через $\hat{\mathfrak{n}}$ алгебру Ли комплексификации $\hat{N}$ группы N и рассмотрим разложение Леви $\hat{\mathfrak{n}} = \hat{\mathfrak{t}} \oplus \hat{\mathfrak{s}}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ алгебры $\hat{\mathfrak{n}}$, где $\hat{\mathfrak{t}}$ – радикал алгебры $\hat{\mathfrak{n}}$, а $\hat{\mathfrak{s}}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ – максимальная полупростая подалгебра в $\hat{\mathfrak{n}}$. При доказательстве теоремы 2.7 мы заметили, что

$$\hat{\mathfrak{s}}_{\hat{\mathfrak{n}}} \subset \mathfrak{m}_{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{n}. \quad (6.1)$$

Этот факт используется в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $M = G/H$ – компактное однородное CR-многообразие коразмерности 2 с невырожденной формой Леви. Пусть $G/H \rightarrow G/J$ – $\mathfrak{g}$ -антиканоническое слоение многообразия M , а

$$X = \widehat{G}/\widehat{H} \xrightarrow{\widehat{F}} \widehat{G}/\widehat{J}$$

– соответствующая глобализация. Тогда слой $\widehat{F}$ биголоморфен $(\mathbb{C}^*)^k$ для некоторого $k \leq \text{codim}_X M$, а $\widehat{N}$ – комплексная абелева группа Ли размерности не выше 2. Кроме того:

1) $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{F} = 0$: $M = G/H \rightarrow G/J$ – конечное накрытие и максимальная компактная подгруппа группы G действует транзитивно на M ;

2) $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{F} = 1$: $\widehat{F} = \mathbb{C}^*$, а база $\Sigma := G/J$ $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения M есть компактная однородная CR-гиперповерхность, эквивариантно вложенная в некоторое проективное пространство; в частности, M является главным S^1 -расслоением над Σ ;

3) $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{F} = 2$: с точностью до накрытий, $\widehat{F}$ биголоморфно $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, а база $G/J = \widehat{G}/\widehat{J} = K/L = \widehat{K}/\widehat{P}$ $\mathfrak{g}$ -антиканонического слоения M есть однородное рациональное многообразие, при этом имеет место один из следующих случаев:

(i) $\widehat{P}$ действует транзитивно на $\widehat{F}$, а комплексификация $\widehat{K}$ группы K действует транзитивно на X , определяя $\widehat{K}$ -эквивариантное слоение $X = \widehat{K}/\widehat{I} \rightarrow \widehat{K}/\widehat{P}$, являющееся главным $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$ -расслоением, при этом M является $(S^1 \times S^1)$ -главным расслоением над однородным рациональным многообразием G/J ;

(ii) $\widehat{L}$ действует на $\widehat{F}$ как $\mathbb{C}^*$, причем:

(а) $\widehat{P}$ действует на $\widehat{F}$ как $\mathbb{C}^*$ и с точностью до конечных накрытий многообразие M допускает CR-разложение в произведение леви-невырожденной гиперповерхности и S^1 ;

(б) $\widehat{P}$ действует транзитивно на $\widehat{F}$ и существует корневая группа SL_2 , ассоциированная с некоторой специальной корневой группой U в $\widehat{P}$; параболическая группа $\widehat{P}$ является полупрямым произведением $I_{\widehat{P}} \rtimes A$, где $I_{\widehat{P}}$ – неэффективность $\widehat{P}$ -действия на $\widehat{F}$, а A – двумерная разрешимая группа, равная полупрямому произведению одномерного тора и U ; группа изотропии $\widehat{I}$ нашего $\widehat{K}$ -действия на X есть расширение подгруппы $I_{\widehat{P}}$ посредством некоторой изоморфной $\mathbb{Z}$ подгруппы $U_{\mathbb{Z}}$ группы U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку форма Леви многообразия M невырождена, то $\mathfrak{m}_{\mathfrak{n}} = (0)$. Поэтому из включений (6.1) имеем $\widehat{\mathfrak{s}}_{\widehat{\mathfrak{n}}} = (0)$. Значит, N и $\widehat{N}$ разрешимы.

Если $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{N} = 0$, то получаем накрытие одного из многообразий, заданных в теореме 5.6. Так как действие максимальной компактной подгруппы транзитивно и алгебраично на этом проективно вложенном многообразии, то накрытие конечно. Нетрудно описать все такие накрытия.

Если $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{N} = 1$, то единственной возможностью является $N/\Gamma = S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^* = \widehat{N}/\Gamma$, поскольку $\Gamma \subset N \subset \widehat{N}$. Тогда имеем $\mathbb{C}^*$ -расслоение над $\widehat{S}$ -орбитой. Если группа $\widehat{S}$ не транзитивна на тотальном пространстве этого расслоения, то $\widehat{S}$ -орбиты имеют коразмерность 1 в этом тотальном пространстве и с точностью

до конечных накрытий являются сечениями. Отсюда вытекает, что некоторое конечное накрытие биголоморфно произведению. В противном случае $\hat{S}$ действует транзитивно на тотальном пространстве расслоения $X = \hat{S}/\Gamma \rightarrow \hat{S}/\hat{H}$, а его слой равен $\mathbb{C}^*$. Таким образом, M – S^1 -расслоение над некоторой компактной гиперповерхностью, являющейся орбитой группы S на $\hat{S}/\hat{H}$. Последняя подробно описана в [2], и $\hat{H}$ действует на слое как некоторый характер. Теперь нетрудно описать все возможности.

Допустим, наконец, что $\dim_{\mathbb{C}} \hat{N} > 1$. Согласно [1, предложение 7] существует собственная замкнутая комплексная подгруппа $\hat{I}$ положительной размерности в $\hat{N}$, содержащая Γ , и без потери общности можно считать, что $\dim_{\mathbb{C}} \hat{N}/\hat{I} = 1$. Имеем также соответствующие слоения $N/\Gamma \rightarrow N/I$, где $I := N \cap \hat{I}$, и $\hat{N}/\Gamma \rightarrow \hat{N}/\hat{I}$. При этом $\hat{N}/\hat{I}$ есть $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ или комплексный тор. Первый случай невозможен, поскольку в нем (по предположению о коразмерности) слой $I/\Gamma = \hat{I}/\Gamma$ был бы компактным комплексным многообразием вопреки предположению о невырожденности формы Леви многообразия M . Покажем теперь, что тор тоже не может быть базой. Здесь выделяются два случая в зависимости от $\text{codim}_{\mathbb{R}} M$. Сначала допустим, что M имеет CR-структуру коразмерности 2. По индукции комплексный слой $\hat{N}/\hat{I}$ есть либо $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, либо комплексная бутылка Клейна (являющаяся $(2:1)$ -фактором многообразия $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$). Отсюда $\dim_{\mathbb{C}} \hat{I} = 2$ и, следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} \hat{N} = 3$. Поскольку $M = N/\Gamma$ расслаивается с вещественно двумерным слоем, то $\dim_{\mathbb{R}} N = 4$. Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_n = 1$, что противоречит предположению о невырожденности формы Леви многообразия M . Итак, база $\hat{N}/\hat{I}$ биголоморфна $\mathbb{C}^*$, а тогда слой по индукции равен $\mathbb{C}^*$. В силу аддитивности коразмерности CR-структур получаем S^1 -расслоение над S^1 . В частности, $\dim_{\mathbb{C}} \hat{N} = 2$, и $\hat{N}/\Gamma$ представляется как $\mathbb{C}^*$ -расслоение над $\mathbb{C}^*$, которое либо само биголоморфно прямому произведению, либо некоторое его $(2:1)$ -накрытие биголоморфно произведению.

Если CR-структура на N/Γ имеет коразмерность 1, то $\hat{I}/\Gamma$ по индукции равно $\mathbb{C}^*$, и если бы база $\hat{N}/\hat{I}$ была одномерным компактным комплексным тором, то мы имели бы $\dim_{\mathbb{C}} \hat{N} = 2$, тогда как $\dim_{\mathbb{R}} N = 3$. Это опять противоречит тому, что $\mathfrak{m}_n \neq (0)$. Таким образом, $\hat{N}/\Gamma$ должно быть равно $\mathbb{C}^*$.

Теперь найдем структуру расслоения в случае, когда слой двумерен. Здесь на уровне глобализаций имеем

$$X = \hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{J}$$

со слоем $\hat{F} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. База Z имеет вид

$$\hat{S}/\hat{Q} = S/I = \hat{K}/\hat{P} = K/L,$$

где K – некоторая максимальная компактная подгруппа в S , которую мы фиксируем на протяжении этого рассуждения.

Наши замечания касаются изучения действий групп $\hat{P}$ и L на слое $\hat{F}$. Поскольку $\hat{F} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, всякая полупростая подгруппа группы L действует тривиально на $\hat{F}$. Следовательно, L действует на $\hat{F}$ как разрешимая группа, т. е. (в силу компактности L) как абелева группа. Здесь имеем два случая, которые сравнительно легко изучить.

В первом случае L действует тривиально на F . Тогда подгруппа неэффективности $\hat{P}$ -действия на $\hat{F}$ есть нормальная подгруппа в $\hat{P}$, содержащая некоторый максимальный тор. Поскольку унипотентный радикал параболической группы $\hat{P}$ является произведением одномерных подгрупп, каждая из которых нормализуется этим максимальным тором, получаем, что эта подгруппа неэффективности должна совпадать со всей группой $\hat{P}$. Иными словами, $\hat{P}$ действует тривиально на $\hat{F}$. Следовательно, $\hat{K}$ -орбиты (которые совпадают с K -орбитами) тривиализуют расслоение. Однако этот случай невозможен, так как в нем форма Леви вырождена вопреки нашему предположению. Далее, если L действует транзитивно на F , то $\hat{P}$ действует транзитивно на $\hat{F}$ как алгебраическая группа. Но тогда $\hat{K}$ действует транзитивно на X , а K действует транзитивно на M . Этим задается главное расслоение

$$X = \hat{K}/\hat{I} \rightarrow \hat{K}/\hat{P},$$

а соответствующее слоение многообразия M есть главное $(S^1 \times S^1)$ -расслоение.

Второй случай возникает когда L -орбиты общего положения одномерны. Мы постоянно будем пользоваться тем, что $\hat{F}$ можно эквивариантно расслоить. Существуют два способа это сделать, в зависимости от того, будет ли полная группа $\hat{J}$ слоя действовать как абелева группа или не будет. В этих случаях имеем промежуточное слоение

$$\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{I} \rightarrow \hat{G}/\hat{J}, \quad (6.2)$$

где оба слоя равны $\mathbb{C}^*$. Этим индуцируется S^1 -расслоение тора F над S^1 . Если L действует транзитивно на базе $\hat{J}/\hat{I}$ этого слоения, то ясно, что всякая L -орбита в F есть экземпляр S^1 и что L действует как S^1 . В противном случае L действует только на слоях этого слоения. Но и в этом случае линеаризация L -изотропии показывает, что L действует транзитивно на всех слоях и действует как S^1 . Поэтому в полной общности можно считать, что L действует свободным S^1 -действием, а $L^{\mathbb{C}}$ – посредством $\mathbb{C}^*$.

Здесь опять возможны два случая:

- 1) группа $\hat{P}$ действует как $\mathbb{C}^*$;
- 2) группа $\hat{P}$ действует транзитивно на $\hat{F}$.

Покажем, что случай 1) возможен, только если M будет CR-изоморфно произведению леви-невырожденной гиперповерхности на S^1 . Рассмотрим $\hat{K}$ -действие на базе $\hat{G}/\hat{I}$ промежуточного слоения (6.2). Если $\hat{K}$ действует транзитивно на $\hat{G}/\hat{I}$, то (с точностью до конечных накрытий) $\hat{K}$ -орбиты на тотальном пространстве $\hat{G}/\hat{H}$ суть сечения расслоения $\hat{G}/\hat{H} \rightarrow \hat{G}/\hat{I}$. Перейдем к нужному накрытию, выберем $p \in M$ и рассмотрим $N = K.p \hookrightarrow \hat{K}.p = Y$. Комплексное касательное пространство $T_p^{\text{CR}} M$ равно $T_p^{\text{CR}} N$ и содержится в касательном пространстве к сечению Y . Напомним, что форма Леви вычисляется взятием скобок $(1, 0)$ -полей с $(0, 1)$ -полями (речь идет о комплексифицированных касательных полях к M). В нашем случае такие поля будут касательными и к N . Поэтому значения формы Леви лежат в касательном пространстве к Y . Поскольку мы предполагаем, что конус Леви открыт, это возможно, только если M является CR-произведением леви-невырожденной гиперповерхности и S^1 . Допустим теперь, что действие $\hat{K}$ на базе нетранзитивно. Тогда база $\hat{G}/\hat{I}$

является произведением $\mathbb{C}^* \times Z$ и мы переходим к ее (канонически определенной) голоморфной редукции. Поскольку $L^{\mathbb{C}}$ действует как $\mathbb{C}^*$, получаем, что $\hat{K}$ действует транзитивно на слоях этой голоморфной редукции. Это дает полное описание ситуации: M снова является произведением леви-невыврожденной CR-гиперповерхности, лежащей в $\hat{K}$ -орбите, и S^1 .

Наконец мы приходим к интересному случаю, когда $L^{\mathbb{C}}$ действует как $\mathbb{C}^*$, а $\hat{P}$ действует транзитивно на слое $\hat{F}$. Рассмотрим $\hat{P}$ -действие на слое слоения $\hat{G}/\hat{I} \rightarrow \hat{G}/\hat{J}$. Получаем $\hat{K}$ -однородное главное $\mathbb{C}^*$ -расслоение, на котором $\hat{P}$ действует как некоторый характер.

Поскольку $L^{\mathbb{C}}$ действует, как $\mathbb{C}^*$ на $\hat{F}$, получаем, что унипотентный радикал $R_u(\hat{P})$ действует с неэффективностью коразмерности 1 на слое $\hat{J}/\hat{H}$. Поскольку эта неэффективность должна также быть нормальной подгруппой в $\hat{P}$, она является корневой группой. Поэтому ее дополнение в $\hat{R}_u(\hat{P})$ является $L^{\mathbb{C}}$ -инвариантной корневой группой. Тем самым мы получаем полное описание $\hat{P}$ -неэффективности на $\hat{F}$, откуда вытекает, что $\hat{P}$ разлагается в полупрямое произведение этой неэффективности и двумерной разрешимой группы A , в свою очередь, равной полупрямому произведению одномерного тора и одномерной простой корневой группы U .

На время перейдем к такому накрытию многообразия X , на котором эта неэффективность равна $\hat{P}$ -изотропии. Тогда мы попадаем в хорошо изученную ситуацию, так как можно отсоединить полную редуктивную часть от $\hat{P}$ и получить такое $\mathbb{C}^*$ -расслоение над $\mathbb{C}$ -расслоением, что наша простая корневая группа будет действовать транзитивно на слое. Такая ситуация с $\mathbb{C}$ -расслоениями, где K имеет орбиты-гиперповерхности, была подробно расклассифицирована в [2]. В частности, имеем дальнейшее слоение $\hat{K}/\hat{P} \rightarrow \hat{K}/\hat{P}_1$, являющееся $\mathbb{P}_1$ -расслоением. Оно задается корневым SL_2 , ассоциированным с простой корневой группой. Таким образом, мы видим, что самый общий пример получается из стандартного 3-мерного примера $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U_{\mathbb{Z}}$, где $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ вложено в параболическую группу $\hat{P}_1$ как один из полупростых множителей. Здесь изотропия в большей группе $\hat{K}$ получается из описанной выше неэффективности расширением посредством некоторого экземпляра $\mathbb{Z}$ в рассматриваемой простой корневой группе. Теорема доказана.

Основной пример, в котором L действует на F с одномерными орбитами, а $\hat{P}$ действует транзитивно на $\hat{F}$, возникает следующим образом:

$$X = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}).$$

Рассмотрим $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*)$ -действие на X , определенное правым U -действием. Тогда вещественная подгруппа, имеющая орбиты коразмерности 2, есть $\mathrm{SU}_2 \times S^1$.

Заметим в виде варианта, что по существу тот же самый пример можно построить с помощью $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/(\pm \mathrm{Id})$. Для этого в качестве $\hat{K}$ берется группа, действующая эффективно на базе (в данном случае равной $\mathbb{P}_1$), так что L действительно имеет одномерные орбиты.

Этот пример можно представить как часть более общей картины, описанной в доказательстве классификации. Для этого достаточно рассмотреть следующий пример.

ПРИМЕР 6.1. Положим $\hat{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, и пусть $X = \hat{G}/\hat{P}$ – грассманиан двумерных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\hat{L} \ltimes R_u(\hat{P})$ – стандартное разложение Леви для $\hat{P}$, где $\hat{L} = Z(\hat{L})(\hat{L}_1 \times \hat{L}_2)$ – стабилизатор разложения

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\} \oplus \mathrm{Span}\{e_3, \dots, e_n\}.$$

Здесь центр $Z(\hat{L})$ действует диагонально. Попробуем построить группу рассмотренного основного примера внутри $\hat{P}$. Поскольку $\hat{L}_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, можно определить $\hat{H} = Z(\hat{L})(U_{\mathbb{Z}}(\hat{L}_1) \times \hat{L}_2)$. Так как $U(\hat{L}_1)$ нормализует $\hat{H}$, то имеем индуцированное правое действие группы $U/U_{\mathbb{Z}}$. Переопределяя нашу группу как большую группу $\hat{G} \times U/U_{\mathbb{Z}}$, получаем требуемый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. В общем случае полупростой множитель $\hat{L}_1$ может быть равен $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$, так что мы должны будем встраивать уже вариант основного примера. Чтобы поместить эти примеры в контекст наших классификационных результатов для случая, когда L действует как S^1 на слое, мы должны выбрать в качестве $\hat{K}$ группу, действующую эффективно на базе Z .

6.2. Кэлеров параллелизуемый случай. Мы видели, что единственная оставшаяся серьезная трудность в проведении тонкой классификации для общего случая коразмерности 2 возникает, когда слой $\mathfrak{g}$ -антиканонического расслоения также имеет коразмерность 2, т. е. когда база является компактным комплексным многообразием. В этом случае основное, что надо понять, – это способ вложения слоя в его глобализацию, и потому достаточно считать, что база является просто точкой. Итак, в этом пункте мы предполагаем, что $M = G/\Gamma$, где Γ – дискретная подгруппа.

Из рассмотрений, проведенных в п. 2.3, известно, что G/Γ допускает комплексификацию (X, σ) . Мы считаем M уже вложенным в X , т. е. отождествляем M с $\sigma(G/\Gamma)$. В этом пункте мы считаем многообразие M кэлеровым в том смысле, что M имеет в X трубчатую окрестность Z , являющуюся кэлеровым многообразием. Напомним также, что алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G можно комплексифицировать до алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$, действующей локально на некоторой открытой окрестности многообразия M в Z (см. п. 2.4). Не теряя общности, можно считать, что эта окрестность есть сама Z (иначе надо сузить ее и переобозначить). Как обычно, обозначим через $\mathfrak{m} := \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g}$ максимальный комплексный идеал в $\mathfrak{g}$. Цель настоящего пункта – установить разрешимость $\mathfrak{m}$ в этом общем кэлеровом случае. Если M , кроме того, имеет CR-структуру коразмерности не выше 2, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть Γ – дискретная кокомпактная подгруппа в G . Допустим, что компактное CR-однородное пространство $M := G/\Gamma$ кэлерово в описанном выше смысле. Тогда максимальный комплексный идеал $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ разрешим. В частности, если CR-структура многообразия M имеет коразмерность не выше 2, то группа G разрешима.

В доказательстве теоремы 6.2 используются некоторые основные результаты теории факторпространств относительно кэлеровой редукции (см. [39]). Здесь мы дадим упрощенное рассуждение, пользуясь сделанными сильными предположениями. Пусть L – комплексная полупростая подгруппа Ли в G ,

ассоциированная с максимальной полупростой подалгеброй $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$. Выберем и фиксируем максимальную компактную подгруппу K группы L . Заметим, что трубчатую область Z можно считать K -инвариантной. Усредняя данную кэлерову форму ω по K , можно считать и ее K -инвариантной. Тогда, поскольку K полупроста, общая теория гарантирует существование единственного (K -эквивариантного) отображения моментов $\mu: Z \rightarrow \mathfrak{k}^*$. Наконец определим $M_0 := \mu^{-1}(0) \cap M$. Поскольку K -действие на Z локально свободно, то μ – открытое отображение постоянного ранга, равного $\dim_{\mathbb{R}} K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Нулевой слой $\mu^{-1}(0)$ является подмногообразием в Z , трансверсальным к $L.x$ в каждой точке $x \in M_0$. В частности, M_0 – непустое гладкое многообразие, а множество $M^{ss} := L.M_0$ открыто в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение моментов, ассоциированное с переносом формы ω назад на орбиту $L.x$ точки $x \in M_0$, есть не что иное, как перенос назад исходного отображения моментов. Поскольку K -действие локально свободно, ранги этих двух отображений равны, откуда немедленно вытекает утверждение о трансверсальности. Остается показать, что M_0 непусто. Но так как отображение $\mu|_{L.x}$ открыто для всех $x \in M$, то мы имеем $x_0 \in M_0$, где x_0 – та точка из M , в которой функция $\|\mu\|^2|_M$ достигает своего минимального значения.

По определению дополнение $M_1 := M \setminus M^{ss}$ является компактным L -инвариантным подмножеством в M . Как и в предыдущем рассуждении, если бы M_1 было непусто и функция $\|\mu\|^2|_{M_1}$ принимала свое минимальное значение в точке x_1 , то эта точка принадлежала бы M_0 вопреки предположению.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Имеем $M^{ss} = L.M_0 = M$.*

Далее, если $x \in M_0$, то орбита $L.x$ стягиваема на K -орбиту $K.x$, которая изотропна в $L.x$. Тогда из того, что $L.x$ – пространство Штейна, вытекает, что $\omega = dd^c \rho$ на $L.x$, где ρ – K -инвариантная строго плюрисубгармоническая функция. Согласно результатам из работы [40] если $m_0 := \rho(x_0)$, то функция $\rho: L.x \rightarrow [m_0, \infty)$ задает собственное исчерпание, не имеющее критических точек, кроме тех, где эта функция достигает своего минимума на $K.x_0$. В частности, $L.x \cap M_0 = K.x$ для всех $x \in M_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Поскольку для каждой точки $x \in M$ орбита $L.x$ кэлерова, а группа изотропии L_x есть пересечение L с образом Γ при некотором сопряжении в G , мы получаем, что L_x – дискретная подгруппа в L . Тогда из кэлеровости $L.x$ вытекает, что группа L_x конечна [41]. Заменяя Γ на надлежащую подгруппу конечного индекса, мы можем считать, что Γ не имеет кручения, тем самым, L -действие на M свободно. Поскольку $L.M_0 = M$, отсюда вытекает, что отображение действия $L \times M_0 \rightarrow M$, заданное формулой $(\ell, x) \rightarrow \ell(x)$, отождествляет M с некомпактным пространством расслоения $L \times_K M_0$. Если L нетривиально, получаем противоречие. Таким образом, идеал $\mathfrak{m}$ разрешим.

Наконец, если CR-структура на M имеет коразмерность не выше 2, то идеал $\mathfrak{m}$ также имеет коразмерность не выше 2 в $\mathfrak{g}$ и, следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ также разрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В случае гиперповерхности получены более тонкие результаты [4]. Пока нам известны только весьма простые примеры с разрешимыми (неабелевыми) группами в случае коразмерности 2 (например, комплексификации компактных двумерных солвмногообразий). В качестве указания для поиска более интересных конструкций упомянем, что было бы любопытно построить примеры таких X , для которых $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$.

Список литературы

1. A. T. Huckleberry, E. Oeljeklaus, *Classification theorems for almost homogeneous spaces*, Inst. Élie Cartan, **9**, Université de Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 1984.
2. H. Azad, A. Huckleberry, W. Richthofer, “Homogeneous CR-manifolds”, *J. Reine Angew. Math.*, **358** (1985), 125–154.
3. A. Huckleberry, W. Richthofer, “Recent developments in homogeneous CR-hypersurfaces”, *Contributions to several complex variables*, Aspects Math., **E9**, Aspects Math., Braunschweig, 1986, 149–177.
4. W. Richthofer, *Homogene CR-Mannigfaltigkeiten*, Ph.D. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1985.
5. А. В. Лобода, “Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии”, *Матем. сб.*, **192**:12 (2001), 3–24; англ. пер.: A. V. Loboda, “Homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with two-dimensional isotropy groups”, *Sb. Math.*, **192**:12 (2001), 1741–1761.
6. A. V. Isaev, N. G. Kruzhilin, “Effective actions of SU_n on complex n -dimensional manifolds”, *Illinois J. Math.*, **48**:1 (2004), 37–57.
7. A. Isaev, *Lectures on the automorphism groups of Kobayashi-hyperbolic manifolds*, **1902**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
8. G. Fels, W. Kaup, “CR-manifolds of dimension 5: a Lie algebra approach”, *J. Reine Angew. Math.*, **604** (2007), 47–71.
9. A. Morimoto, T. Nagano, “On pseudo-conformal transformations of hypersurfaces”, *J. Math. Soc. Japan*, **15** (1963), 289–300.
10. T. Nagano, “Transformation groups with $(n - 1)$ -dimensional orbits on non-compact manifolds”, *Nagoya Math. J.*, **14** (1959), 25–38.
11. H. Rossi, “Homogeneous strongly pseudoconvex hypersurfaces”, *Rice Univ. Studies*, **59**:1 (1973), 131–145.
12. D. V. Alekseevsky, A. F. Spiro, “Compact homogeneous CR manifolds”, *J. Geom. Anal.*, **12**:2 (2002), 183–201.
13. A. Andreotti, G. A. Fredricks, “Embeddability of real analytic Cauchy–Riemann manifolds”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **6**:2 (1979), 285–304.
14. S. J. Greenfield, “Cauchy–Riemann equations in several variables”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **22** (1968), 275–314.
15. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. II, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. II, Intersci. Publ., New York–London–Sydney, 1969.
16. C. Chevalley, “On the topological structure of solvable groups”, *Ann. of Math. (2)*, **42**:3 (1941), 668–675.
17. M. Goto, “Faithful representations of Lie groups. I”, *Math. Japonicae*, **1** (1948), 107–119.
18. W. Kaup, D. Zaitsev, “On local CR-transformation of Levi-degenerate group orbits in compact Hermitian symmetric spaces”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **8**:3 (2006), 465–490.

19. D. Montgomery, "Simply connected homogeneous spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1**:4 (1950), 467–469.
20. A. Borel, R. Remmert, "Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten", *Math. Ann.*, **145**:5 (1962), 429–439.
21. Э. Б. Винберг, Б. Н. Кимельфельд, "Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли", *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 12–19; англ. пер.: É. B. Vinberg, B. N. Kimel'fel'd, "Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups", *Funct. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 168–174.
22. А. Борель, *Линейные алгебраические группы*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: A. Borel, *Linear algebraic groups*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1969.
23. A. T. Huckleberry, T. Wurzbacher, "Multiplicity-free complex manifolds", *Math. Ann.*, **286**:1–3 (1990), 261–280.
24. V. Guillemin, Sh. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
25. Д. Н. Ахиезер, "О действиях с конечным числом орбит", *Функц. анализ и его прил.*, **19**:1 (1985), 1–5; англ. пер.: D. N. Akhiezer, "Actions with a finite number of orbits", *Funct. Anal. Appl.*, **19**:1 (1985), 1–4.
26. D. N. Akhiezer, *Spherical varieties*, Schriftenreihe, Heft Nr. 199, Ruhr-Universität–Bochum, 1993.
27. M. Brion, D. Luna, Th. Vust, "Espaces homogènes sphériques", *Invent. Math.*, **84**:3 (1986), 617–632.
28. M. Brion, "Spherical varieties: an introduction", *Topological methods in algebraic transformation groups* (New Brunswick, NJ, 1988), Progr. Math., **80**, Birkhäuser, Boston, MA, 1989, 11–26.
29. D. Luna, Th. Vust, "Plongements d'espaces homogènes", *Comment. Math. Helv.*, **58**:1 (1983), 186–245.
30. Дж. Хамфрис, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, **21**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1975.
31. M. Krämer, "Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen", *Compositio Math.*, **38**:2 (1979), 129–153.
32. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
33. А. Л. Онищик, "Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований", Тр. ММО, **11**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1962, 199–242; англ. пер.: A. L. Onishchik, "Inclusion relations among transitive compact transformation groups", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **50** (1966), 5–58.
34. А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Наука, Физматлит, М., 1995; англ. пер.: A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*, Barth, Leipzig, 1994.
35. G. Fels, A. Huckleberry, J. A. Wolf, *Cycle spaces of flag domains. A complex geometric viewpoint*, Progr. Math., **245**, Birkhäuser, Boston, MA, 2006.
36. T. Matsuki, "Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups", *Hiroshima Math. J.*, **12**:2 (1982), 307–320.
37. T. Matsuki, "Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions", *J. Algebra*, **197**:1 (1997), 49–91.
38. K. Grove, B. Wilking, W. Ziller, "Positively curved cohomogeneity one manifolds and 3-Sasakian geometry", *J. Differential Geom.*, **78**:1 (2008), 33–111.

- 39. P. Heinzner, A. Huckleberry, *Complex geometry of Hamiltonian actions*, Springer-Verlag, 2009 (to appear).
- 40. H. Azad, J. J. Loeb, “Plurisubharmonic functions and the Kempf–Ness theorem”, *Bull. London Math. Soc.*, **25**:2 (1993), 162–168.
- 41. F. Berteloot, K. Oeljeklaus, “Invariant plurisubharmonic functions and hypersurfaces on semisimple complex Lie groups”, *Math. Ann.*, **281**:3 (1988), 513–530.

Б. ГИЛЛИГАН (B. GILLIGAN)
University of Regina, Canada
E-mail: gilligan@math.uregina.ca

Поступило в редакцию
08.10.2007

А. Т. ХАКЛБЕРРИ (A. T. HUCKLEBERRY)
Ruhr-Universität Bochum, Mathematischer Institut, Germany
E-mail: ahuck@cplx.ruhr-uni-bochum.de