Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Саркисян, Рациональность ряда Пуанкаре в локальных задачах анализа по Арнольду, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 2, 195–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:12:40

УДК 512.628.2

Р. А. Саркисян

Рациональность ряда Пуанкаре в локальных задачах анализа по Арнольду

Для произвольного гладкого действия псевдогруппы Ли в соответствующем пространстве бесконечных струй построена область, состоящая из конечного числа открытых множеств (атомов) таких, что все точки одного атома имеют один и тот же рациональный ряд Пуанкаре. Также доказано, что эти ряды могут быть вычислены алгоритмически.

Библиография: 31 наименование.

Ключевые слова: орбиты действия группы диффеоморфизмов в пространстве струй, размерности орбит, ряд Пуанкаре размерностей орбит, рациональность ряда.

Введение

В работах В. И. Арнольда [1, задача 1994-24] и [2] была сформулирована гипотеза о рациональности рядов Пуанкаре в так называемых *локальных классификационных задачах анализа*. Оказывается, что для произвольного гладкого действия псевдогруппы Ли можно построить в соответствующем пространстве бесконечных струй $\mathcal{J}^\infty$ открытое всюду плотное множество X , состоящее из конечного числа открытых непересекающихся множеств (атомов) таких, что все точки одного атома имеют один и тот же рациональный ряд Пуанкаре. Назовем множество X *максимальным стратом*. Все точки в X регулярны (см. определение 1.4). Если псевдогруппа задана аналитическими уравнениями, максимальный страт всегда состоит из единственного атома и дополнение к нему содержится в аналитической гиперповерхности. Каждой локальной задаче анализа соответствует действие группы диффеоморфизмов, т. е. подходящей псевдогруппы Ли. Это позволяет для таких задач получить существование максимального страта из приведенных выше общих результатов. Гипотеза Арнольда [1], [2] утверждает, что для подходящего множества бесконечной коразмерности B в $\mathcal{J}^\infty$ ряд Пуанкаре любой точки из $\mathcal{J}^\infty \setminus B$ рационален.

Результат, полученный в настоящей работе, гарантирует только то, что для псевдогруппы, заданной аналитическими уравнениями, коразмерность B не меньше 1 (нужно взять $B = \mathcal{J}^\infty \setminus X$). Отметим, что хотя определение ряда Пуанкаре в настоящей работе отличается от определения, данного в [1] и [2], наши результаты показывают, что на максимальном страте X наше определение совпадает с определением из работ [1] и [2]. В настоящей работе также доказано, что:

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-01-01015-а).

1) условия, задающие каждый атом максимального страта, можно получить из уравнений псевдогруппы с помощью конечного числа алгебраических операций и дифференцирования;

2) для каждого атома алгоритмически находится отвечающий ему ряд Пуанкаре.

В следующей работе автора будут содержаться приложения доказанных результатов к теореме Трессе.

В заключение отметим, что для векторных полей на многообразии (см. [1, пример 2]) можно показать, что вне максимального страта (образованного струями неособых полей) ситуация усложняется. Этот пример автор надеется рассмотреть в отдельной работе.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Арнольду, помощь которого была очень полезна, участникам семинара Арнольда, где докладывалась настоящая работа, особенно А. Г. Хованскому, а также Г. И. Архипову за ценные консультации.

§ 1. Формулировки результатов

1.1. Все рассуждения проводятся в гладкой (т.е. бесконечно дифференцируемой) категории, все многообразия, функции, отображения вещественны. Через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ обозначаются поля вещественных, комплексных, рациональных чисел соответственно. Пусть P – произвольное многообразие размерности $n+m$. Все рассуждения в настоящей работе проводятся локально по P , поэтому локальное сечение расслоения F над P мы называем просто *сечением* и т.д. Пространство k -струй отображений из многообразия Q в многообразие W обозначается через $J^k(Q, W)$. Через $\mathcal{J}^\infty$ обозначается пространство бесконечных струй подмногообразий размерности n в P , через J^k – пространство k -струй (струй порядка k) этих же подмногообразий. Мы полагаем $J^0 = P$.

Для расслоения $E \rightarrow Q$ через $J^\infty(E)$ и $J^k(E)$ обозначаются пространства соответственно бесконечных струй и k -струй сечений $Q \rightarrow E$. Для любых k и s с условием $0 \leq k \leq s$ имеются естественные проекции $\pi(s, k): J^s \rightarrow J^k$ и $\pi(\infty, k): J^\infty \rightarrow J^k$. Для точки $z \in \mathcal{J}^\infty$ будем обозначать $\pi(\infty, k)(z) = z_k \in J^k$; для точки $w \in J^s$ также будем обозначать $\pi(s, k)(w) = w_k \in J^k$. Кольцо (гладких) функций, определенных в области V (*областью* называется открытое множество) многообразия J^k , обозначается через $O(V)$. На $\mathcal{J}^\infty$ имеется обычная слабая топология проективного предела.

Область $\mathcal{V}$ пространства $\mathcal{J}^\infty$ называется *базовой областью*, если найдутся k и область $V \subset J^k$ такие, что $\mathcal{V} = \pi^{-1}(\infty, k)[V]$. Минимально возможное значение k в приведенном равенстве называется *степенью* $\mathcal{V}$ и обозначается $\text{st}(\mathcal{V})$. Кольцо функций на $\mathcal{V}$ определяется как индуктивный предел $O(\mathcal{V}) = \limind O(\pi(\infty, k)(\mathcal{V}))$, и мы рассматриваем $O(\pi(\infty, s)(\mathcal{V}))$ как подкольцо в $O(\mathcal{V})$ и $O(\pi(\infty, r)(\mathcal{V}))$ при $s \leq r$. *Степенью* $\text{st}(f)$ элемента $f \in O(\mathcal{V})$ называется минимально возможное значение k , для которого $f \in O(\pi(\infty, k)(\mathcal{V}))$. *Мультииндексом типа r* называется мультииндекс $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_r)$; мы обозначаем $\Pi + 1_c = (\Pi_1, \dots, \Pi_c + 1, \dots, \Pi_r)$ и называем $|\Pi| = \sum_s \Pi_s$ *весом* мультииндекса Π . Через δ_j^i обозначается индекс Кронекера, через C_n^k – число сочетаний из n элементов по k . Для расслоения $F \rightarrow Q$ над пространством Q

через $F(z)$ или F_z обозначается слой F над точкой $z \in Q$, через $f(z)$ – значение в точке z сечения f расслоения F , через $F(V)$ – множество сечений расслоения F над областью V в Q . Через TQ мы обозначаем касательное расслоение к многообразию Q . Отображение $\nu: W \rightarrow Q$ многообразий индуцирует подъем $\nu^*(F)$ расслоения F на W , а также отображение касательных расслоений $T\nu: TW \rightarrow TQ$. Если $x \in W$ и $\nu(x) = y \in Q$, то $T\nu$ переводит TW_x в TQ_y . Через $\overline{W}$ обозначается замыкание множества W .

1.2. Пусть имеется произвольная псевдогруппа Ли PG, действующая на многообразии P размерности $n + m$. Предположим, что порядок псевдогруппы PG равен q , т. е. PG задается системой дифференциальных уравнений SG_q в пространстве q -струй $J^q(P, P)$ отображений $P \rightarrow P$. По псевдогруппе Ли PG стандартным образом определяется ее алгебра Ли PL векторных полей на P . Алгебра PL задается системой линейных дифференциальных уравнений SL_q порядка q на P (система SL_q получается из системы SG_q известным процессом линеаризации).

Пусть $J^k(TP) \rightarrow P$ – расслоение k -струй векторных полей на P . Обозначим через $J^k(TP)^* \rightarrow P$ двойственное к нему расслоение. Уравнения системы SL_q представляют собой сечения расслоения $J^q(TP)^*$. Расслоения $J^k(TP)^*$ естественным образом вложены друг в друга, и поэтому определено их объединение, которое мы будем обозначать $J^\infty(TP)^*$. Определим модуль сечений $J^\infty(TP)^*$ над открытым множеством $V \subseteq P$ как $J^\infty(TP)^*(V) = \text{limind } J^k(TP)^*$. Пусть $Z = (z^1, \dots, z^{n+m})$ – какая-нибудь (локальная) система координат на P ; тогда в $J^\infty(TP)^*(P)$ определены сечения Λ_Φ^d , а именно $\Lambda_\Phi^d(z)$ для точки $z \in P$ есть отображение, которое струе $(\Lambda_\Pi^c(z), |\Pi| \leq k, 1 \leq c \leq n+m) \in J^k(TP)(z)$ сопоставляет число $\Lambda_\Phi^d(z)$. Здесь Π и Φ – мультииндексы типа $n+m$. Определим действие на $J^\infty(TP)^*(P)$ кольца $\mathbf{B} = O(\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{n+m}})$ дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами на P . Сечение $f \in J^\infty(TP)^*(P)$ канонически записывается в виде $f = \sum_{\Phi, d} a_\Phi^d \Lambda_\Phi^d$, где a_Φ^d – функции от z^c , $1 \leq c \leq n+m$. По определению $\frac{\partial}{\partial z^c} \Lambda_\Phi^d = \Lambda_{\Phi+1_c}^d$, $\frac{\partial}{\partial z^c} a_\Phi^d$ – обычная частная производная, а $\frac{\partial}{\partial z^c} f$ определяется по правилу Лейбница. Каждое уравнение $f = 0$, входящее в какое-либо продолжение SL_k системы SL_q , следующим образом определяет сечение $\rho(f)$ расслоения $J^\infty(TP)^* \rightarrow P$. Неизвестными функциями в уравнениях системы SL_k являются координаты векторного поля $\Lambda = \Lambda^1 \frac{\partial}{\partial z^1} + \dots + \Lambda^{n+m} \frac{\partial}{\partial z^{n+m}}$; тогда для получения $\rho(f)$ следует в выражении для f заменить каждую частную производную $\frac{\partial^{|\Phi|}}{\partial z^\Phi} \Lambda^d$ на Λ_Φ^d .

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial z^c} \rho(f) = \rho(\frac{\partial}{\partial z^c} f)$, т. е. операция продолжения уравнений коммутирует с ρ . Полученное из уравнений системы SL_k с помощью отображения ρ конечное множество сечений обозначим через $\rho(SL_k)$. Обозначим через $\bar{R}$ подмодуль в $J^\infty(TP)^*(P)$, порожденный действием кольца $\mathbf{B}$ на элементы $\rho(SL_q)$, и положим $\bar{R}_k = J^k(TP)^*(P) \cap \bar{R}$. Тогда значение $f(z)$ элемента $f \in \bar{R}_k$ в точке $z \in P$ есть линейный функционал на слое $J^k(TP)(z)$ расслоения $J^k(TP)$ в z . Определим в $J^k(TP)(z)$ подпространство $R_k(z)$ как аннулятор функционалов $f(z)$ для всех элементов $f \in \bar{R}_k$.

Как известно, любой диффеоморфизм $P \rightarrow P$ индуцирует для любого натурального k диффеоморфизм $J^k \rightarrow J^k$, и любое векторное поле $\mathfrak{T}$ на P определяет на J^k векторное поле, обозначаемое через $\mathfrak{T}^k$. Отображение $\mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}^k$

продолжается до отображения расслоений над J^k :

$$\alpha_k: \pi(k, 0)^*(J^k(TP)) \rightarrow TJ^k, \quad (1.1)$$

где TJ^k – касательное расслоение к J^k , а $\pi(k, 0)^*(J^k(TP))$ – подъем на J^k расслоения $J^k(TP)$ относительно проекции $\pi(k, 0): J^k \rightarrow P$. Формулы, задающие α_k , приведены в п. 2.4. Для точки $w \in J^k$ слой $\pi(k, 0)^*(J^k(TP))(w)$ расслоения $\pi(k, 0)^*(J^k(TP))$ естественно изоморфен $J^k(TP)(w_0)$, и мы обозначим через $R'_k(w)$ подпространство в этом слое, соответствующее $R_k(w_0)$ при данном изоморфизме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $z \in \mathcal{J}^\infty$. Обозначим $\Delta_k(z) = \alpha_k[R'_k(z_k)] \subseteq TJ^k(z_k)$. Мы называем $\Delta_k(z)$ *касательным пространством к формальной орбите* действия псевдогруппы PG на многообразии J^k в точке z_k . При $k \leq s$ и $z \in J^s$ или $z \in \mathcal{J}^\infty$ мы будем обозначать $\Delta_k(z_k) = \Delta_k(z)$, $TJ^k(z_k) = TJ^k(z)$.

1.3. Пусть $\mathcal{U}$ – базовая область в $\mathcal{J}^\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Назовем *функцией Гильберта точки* $z \in \mathcal{J}^\infty$ функцию $k \rightarrow \text{Hilb}_z(k) = \dim \Delta_k(z)$ натурального аргумента k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Разбиением $\mathbf{V}$ области $\mathcal{U} \subset \mathcal{J}^\infty$ называется конечный набор $\mathbf{V} = (\mathcal{V}_s, 1 \leq s \leq t)$ непересекающихся базовых подобластей $\mathcal{V}_s$ в $\mathcal{P}^\infty$ такой, что объединение $\mathcal{V} = \bigcup_{s=1}^t \mathcal{V}_s$ содержится в $\mathcal{U}$ в качестве всюду плотного подмножества. Область $\mathcal{V}$ называется *оболочкой разбиения* $\mathbf{V}$, а каждое $\mathcal{V}_s$ – *атомом*. Количество t областей $\mathcal{V}_s$ называется *длиной* $l(\mathbf{V})$, максимум ступеней $\text{st}(\mathcal{V}_s)$ – *ступенью* $\text{st}(\mathbf{V})$ разбиения $\mathbf{V}$.

Разбиение $\mathbf{W} = (\mathcal{W}_v, 1 \leq v \leq r)$ той же области $\mathcal{U}$ вписано (является подразбиением) в $\mathbf{V}$, если каждое $\mathcal{W}_v$ содержится в каком-нибудь $\mathcal{V}_s$. Разбиение $\mathbf{V}$ области $\mathcal{U}$ называется *тривиальным*, если оно состоит из единственного атома $\mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Разбиение $\mathbf{V} = (\mathcal{V}_s, 1 \leq s \leq t)$ пространства $\mathcal{J}^\infty$ называется *регулярным*, если для каждого натурального k размерность $\dim \Delta_k(z)$ постоянна на каждом атоме разбиения $\mathbf{V}$. *Функцией Гильберта атома* $\mathcal{V}_s$ называется функция $k \rightarrow \text{Hilb}_{\mathcal{V}_s}(k) = \text{Hilb}_z(k)$, где z – любая точка $\mathcal{V}_s$, определенная для натуральных чисел k .

Пусть имеется произвольная псевдогруппа Ли PG порядка q , действующая на многообразии P размерности $n + m$.

ТЕОРЕМА 1.1 (о регулярности). *Найдется натуральное $K(1) = K_1(n, m, q)$, зависящее только от n, m и q (и не зависящее от PG), для которого в $\mathcal{J}^\infty$ существует регулярное разбиение $\mathbf{V}$ ступени, не превосходящей $K(1)$. При этом существует универсальный (не зависящий от псевдогруппы PG) конечный список функций УН $\{H_1, \dots, H_{S(n, m, q)}\}$, содержащий функцию Гильберта каждого атома разбиения $\mathbf{V}$. Каждая функция H_i списка УН – полином от k при $k \geq K(2)$. Список УН и значение $K(2) = K_2(n, m, q)$ зависят только от n, m и q .*

ТЕОРЕМА 1.2 (о рациональности). Пусть $\mathbf{V} = (\mathcal{V}_s, 1 \leq s \leq t)$ – регулярное разбиение $\mathcal{J}^\infty$. Ряд Пуанкаре $\text{Po}_s(t) = \sum_{k=0}^\infty \text{codim } \Delta_k(z) t^k$ любой точки $z \in \mathcal{V}_s$ является рациональной функцией от t , вид которой зависит только от номера атома s .

ТЕОРЕМА 1.3 (о вычислимости). Существует алгоритм, вычисляющий (какое-то) регулярное разбиение $\mathbf{V}$ пространства $\mathcal{J}^\infty$, функции Гильберта $H_s(k)$ и функции Пуанкаре $\text{Po}_s(t)$ его атомов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Назовем псевдогруппу диффеоморфизмов аналитически заданной, если она задается системой SG_q с аналитическими коэффициентами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Для аналитически заданной псевдогруппы диффеоморфизмов регулярное разбиение состоит из единственного атома.

Явная формула для ряда Пуанкаре (из которой следует его рациональность) в некоторых конкретных локальных задачах анализа, в том числе для ростков римановых, келеровых и гиперкелеровых метрик в точке, была получена в работе [3] (см. также [4]–[6]). Вопросы о явной вычислимости в формальной теории общих систем УРЧП рассматриваются в [7] (помимо классических работ [8] и [9], см. также [10]–[24]). Для случая геометрических структур результаты настоящей работы были получены в совместной работе автора и И. Г. Шандры [25].

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Пусть $Z = (z^1, \dots, z^{n+m})$ – какая-нибудь система координат на P (напомним, все рассуждения настоящей работы локальны по P). Рассмотрим для $k \geq 1$ область P^k в J^k , состоящую из струй подмногообразий, параметризуемых координатами $z^1, \dots, z^n$. Хорошо известно, что тогда на каждой области P^k определена (зависящая от выбора исходной карты Z) система координат Z_k : $x^1 = z^1, \dots, x^n = z^n, y^{n+1} = z^{n+1}, \dots, y^{n+m} = z^{n+m}, y_\mu^a$, где $n+1 \leq a \leq n+m$, μ – мультииндекс типа n , $1 \leq |\mu| \leq k$. (Обычно полагают $1 \leq a \leq m$, но нам в дальнейшем удобно будет считать, что $n+1 \leq a \leq n+m$; переменные $z^1, \dots, z^n$ называют независимыми, а переменные $z^{n+1}, \dots, z^{n+m}$ – зависимыми.) Положим $\mathcal{P}^\infty = \pi(\infty, k)^{-1}(P^k)$. Имеются разложения в прямые произведения:

$$X \times Y \approx P^0 = P, \quad P^k \approx X \times Y^k, \quad \mathcal{P}^\infty \approx X \times Y^\infty. \quad (2.1)$$

Положим $P^{-1} = X$ и обозначим проекцию $P = P^0 \rightarrow X$ через $\pi(0, -1)$, а сквозную проекцию $P^k \rightarrow P \rightarrow X$ – через $\pi(k, -1)$. При этом (x^j) , $1 \leq j \leq n$, являются координатами на X , (y_μ^a) , $n+1 \leq a \leq n+m$, $0 \leq |\mu| \leq k$, – координатами на Y^k , где $y_0^a = y^a$. Если точка $a \in J^k$ отвечает при тривиализации (2.1) паре (b, d) , где $b \in X$, $d \in Y^k$, то $b = \pi(k, -1)(a)$. Отображения $\pi(s, k)$ при $-1 \leq k \leq s \leq \infty$ обладают обычными функториальными свойствами (совместимость с разложением (2.1), выполнение при $k \geq r$ соотношений $\pi(k, r)\pi(s, k) = \pi(s, r)$ и т. д.). Для единообразия мы также полагаем $Y^0 = Y$. Координаты на X и Y^k порождают тривиализации касательных расслоений

$$TX \approx X \times T, \quad TY^k \approx Y^k \times L_k. \quad (2.2)$$

Здесь T – линейное пространство с базисом $(\bar{\xi}^j)$ и координатами (ξ^j) , порожденными координатами (x^j) на X ; аналогично, L_k – линейное пространство с базисом $(\bar{\theta}_\mu^a)$ и координатами (θ_μ^a) , порожденными координатами (y_μ^a) на Y^k . Пусть $N = L_0$. Весом координаты θ_μ^a или y_μ^a называется вес $|\mu|$ мультииндекса μ . Тривиализация (2.2) дает отождествление

$$TP^k \approx (X \times Y^k) \times (T + L_k). \quad (2.3)$$

Обозначим через $\mathcal{P}^\infty(i_1, \dots, i_n)$ область пространства $\mathcal{J}^\infty$, которая получится, если в качестве системы независимых переменных на P мы выберем переменные $z^{i_1}, \dots, z^{i_n}$. В этих обозначениях $\mathcal{P}^\infty = \mathcal{P}^\infty(1, \dots, n)$. По определению 1-струя любой бесконечной струи j из $\mathcal{J}^\infty$ есть 1-струя в точке $z \in P$ неособого подмногообразия W размерности n в P (для подходящих z и W). Среди координат $z^1, \dots, z^{n+m}$ на P можно выбрать n координат $z^{i_1}, \dots, z^{i_n}$, образующих локальную систему координат на W . Тогда $j \in \mathcal{P}^\infty(i_1, \dots, i_n)$. Поэтому области $\mathcal{P}^\infty(i_1, \dots, i_n)$ для всевозможных n -элементных подмножеств $(i_1, \dots, i_n)$ множества $(1, \dots, n+m)$ образуют конечное покрытие пространства $\mathcal{J}^\infty$; будем называть эти области *стандартными*. Пересечение $\mathcal{P}^\infty \cap \mathcal{P}^\infty(i_1, \dots, i_n)$ есть дополнение в $\mathcal{P}^\infty$ к множеству нулей функции $f = \det(z_j^r)$, где $1 \leq j, r \leq n$, а $z_j^r = \delta_j^{i_r}$, если $1 \leq i_r \leq n$, и $z_j^r = y_j^{i_r}$, если $n < i_r$. Аналогично задается и пересечение любых двух стандартных областей. Отсюда легко следует, что для нахождения какого-нибудь разбиения $\mathcal{J}^\infty$ достаточно найти какие-нибудь разбиения всех стандартных областей. Для любой стандартной области эта задача решается аналогично, поэтому дальше мы ограничимся построением разбиения для $\mathcal{P}^\infty$.

2.2. Под линейным пространством будем понимать, возможно, бесконечномерное линейное пространство над $\mathbb{R}$. Пусть A – конечномерное линейное пространство. Через A^* обозначается двойственное пространство к A . Через $S(A)$ обозначается симметрическая алгебра над линейным пространством A , а через $S^i(A)$ – i -я симметрическая степень A , и мы полагаем $S^0(A) = \mathbb{R}$. Обозначаем $S_k(A) = \sum_{i=0}^k S^i(A)$. Все $S^i(A)$ естественным образом вложены в $S(A)$, и имеется прямое разложение: $S(A) = \sum_{i=0}^\infty S^i(A)$.

Пусть V – другое линейное пространство. На $S(A)$, а также на тензорном произведении $D = S(A) \otimes V$ стандартным образом определены градуировка и степень. Для элемента $m \in D$ однородная компонента степени t обозначается через m^t , степень – через $\deg(m)$. Если $m = \sum_{i=1}^k m^i$ и $m^k \neq 0$, то $\deg(m) = k$. Обозначим $D_k = S_k(A) \otimes V$, $D^k = S^k(A) \otimes V$, $D^* = S(A^*) \otimes [V^*]$. Имеются естественные проекции $D_{k+1} \rightarrow D_k$, $S_{k+1}(A) \rightarrow S_k(A)$.

Выше были выбраны системы координат Z_k в P^k и построены базисы $(\bar{\xi}^i)$, $(\bar{\theta}^a)$ в пространствах T , N и двойственные базисы (ξ^i) , (θ^a) в пространствах T^* , N^* . Пусть $z \in \mathcal{P}^\infty$. Легко видеть, что при введенных отождествлениях слой $[\pi(k, 0)^*(J^k(TP))](z_k)$ расслоения $\pi(k, 0)^*(J^k(TP))$ над точкой $z_k \in J^k$ отождествляется с $S_k(T+N)^* \otimes (T+N)$. Обозначим $M_k = S_k(T+N)^* \otimes (T+N)$, через M_k^* и L_k^* обозначим двойственные пространства к M_k и L_k соответственно. Когда пространства $(T+N)^*$ и $(T+N)$ рассматриваются как сомножители тензорных произведений M_k^* и M_k , векторы $\bar{\xi}^i$, $\bar{\theta}^a$, ξ^i , θ^a обозначаются соответственно через $\bar{\Lambda}^i$, $\bar{\Lambda}^a$, Λ^i , Λ^a .

В настоящем параграфе и § 3, если явно не оговорено противное, индексы c и d удовлетворяют неравенствам $1 \leq c, d \leq n + m$; индексы i и j – неравенствам $1 \leq i, j \leq n$; индексы a и b – неравенствам $n + 1 \leq a, b \leq n + m$; Π и Φ – мультииндексы типа $n + m$; μ и σ – мультииндексы типа n ; ν и η – мультииндексы типа m , причем $\nu = (\nu_{n+1}, \dots, \nu_{n+m})$, $\eta = (\eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+m})$. Элемент $\bar{\Lambda}^{\Pi_1} \otimes \dots \otimes \bar{\Lambda}^{\Pi_{m+n}} \otimes \Lambda^c$ пространства M_k^* обозначается через Λ_{Π}^c , где $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_{n+m})$ – мультииндекс типа $n + m$. Элементы Λ_{Π}^c при $|\Pi| \leq k$ образуют базис в M_k^* и отождествляются с координатами в M_k . Через Λ_{Π} обозначим элемент $\bar{\Lambda}^{\Pi_1} \otimes \dots \otimes \bar{\Lambda}^{\Pi_{m+n}}$ симметрической алгебры $S_k(T + N)$. Хорошо известно, что $L_k = S_k(T)^* \otimes N$; для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ элемент $\bar{\xi}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \bar{\xi}^{\mu_n} \otimes \theta^a$ пространства $L_k^* = S_k(T) \otimes N^*$ будет обозначаться через θ_{μ}^a , а элемент $\bar{\xi}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \bar{\xi}^{\mu_n} \in S_k(T)$ – через θ_{μ} . Понятно, что (θ_{μ}^a) при $|\mu| \leq k$ образуют базис в L_k^* и являются координатами в L_k . Положим $M^* = S(T + N) \otimes (T^* + N^*)$, $L^* = S(T) \otimes (N^*)$.

Рассмотрим на $\mathcal{J}^{\infty}$ расслоения $\pi(\infty, 0)^*(J^{\infty}(TP)^*)$, $\pi(\infty, 0)^*(J^k(TP))$, $\pi(\infty, 0)^*(J^k(TP)^*)$, $\pi(\infty, k)^*(T^*P^k)$ и $\pi(\infty, k)^*(TP^k)$ (через T^*P^k обозначается расслоение 1-форм над P^k). При $s \geq k$ имеются естественные вложения расслоений $\pi(\infty, k)^*(T^*P^k) \rightarrow \pi(\infty, s)^*(T^*P^k)$, и мы определяем расслоение $\limind[\pi(\infty, s)^*(T^*P^s)]$ на $\mathcal{P}^{\infty}$ как индуктивный предел этих расслоений, а расслоения $\pi(\infty, k)^*(T^*P^k)$ считаем подрасслоениями в $\limind[\pi(\infty, s)^*(T^*P^s)]$. В дальнейшем мы предполагаем, что расслоение $\pi(\infty, s)^*(T^*P^s)$ вложено в $\limind[\pi(\infty, s)^*(T^*P^s)]$, а расслоение $\pi(\infty, 0)^*(J^k(TP)^*)$ – в $\pi(\infty, 0)^*(J^{\infty}(TP)^*)$.

Обозначим через $VP^k \rightarrow P^k$ вертикальное подрасслоение касательного расслоения к P^k относительно отображения $\pi(k, -1): P^k \rightarrow X$, через $V^*P^k \rightarrow P^k$ – двойственное к VP^k расслоение, через $\pi(k, -1)^*(TX) \rightarrow P^k$ и $\pi(k, -1)^*(T^*X) \rightarrow P^k$ – подъем на P^k соответственно касательного TX и кокасательного T^*X расслоений на X .

Рассмотрим на $\mathcal{P}^{\infty}$ следующие расслоения: $\pi(\infty, k)^*(VP^k)$, $\pi(\infty, k)^*(V^*P^k)$, $\pi(\infty, -1)^*(T)$, $\pi(\infty, -1)^*(T^*)$. При $s \geq k$ имеются естественные вложения расслоений $\pi(\infty, k)^*(V^*P^k) \rightarrow \pi(\infty, s)^*(V^*P^s)$, и мы обозначим индуктивный предел этих расслоений (на $\mathcal{P}^{\infty}$) через $\limind[\pi(\infty, k)^*(V^*P^k)]$. Для краткости обозначим

$$\begin{aligned} \pi(\infty, 0)^*(J^{\infty}(TP)^*) &= \mathcal{M}^*, \quad \pi(\infty, 0)^*(J^k(TP)) = \mathcal{M}_k^*, \quad \pi(\infty, 0)^*(J^k(TP)^*) = \mathcal{M}_k, \\ \pi(\infty, k)^*(V^*P^k) &= \mathcal{L}_k^*, \quad \pi(\infty, k)^*(VP^k) = \mathcal{L}_k, \quad \limind[\mathcal{L}_k^*] = \mathcal{L}^*. \end{aligned}$$

В дальнейшем из введенных расслоений нам в основном понадобятся только эти шесть. Наши отождествления допускают согласованные (неканонические, т. е. зависящие от выбора системы координат $(z^1, \dots, z^{n+m})$ на P) тривиализации $\mathcal{M}^* \approx \mathcal{P}^{\infty} \times M^*$, $\mathcal{M}_k^* \approx \mathcal{P}^{\infty} \times M_k^*$, $\mathcal{M}_k \approx \mathcal{P}^{\infty} \times M_k$, $\pi(\infty, k)^*(T^*P^k) \approx \mathcal{P}^{\infty} \times (L_k^* + T^*)$, $\pi(\infty, k)^*(TP^k) \approx \mathcal{P}^{\infty} \times (L_k + T)$, $\mathcal{L}_k \approx \mathcal{P}^{\infty} \times L_k$, $\mathcal{L}_k^* \approx \mathcal{P}^{\infty} \times L_k^*$, $\mathcal{L}^* \approx \mathcal{P}^{\infty} \times L^*$, $\pi(\infty, -1)^*(TX) \approx \mathcal{P}^{\infty} \times T$, $\pi(\infty, -1)^*(T^*X) \approx \mathcal{P}^{\infty} \times T^*$, $V^*P^k \approx P^k \times L_k^*$, $VP^k \approx P^k \times L_k$, $\pi(k, -1)^*(TX) \approx P^k \times T$, $\pi(k, -1)^*(T^*X) \approx P^k \times T^*$ и разложения в прямые суммы, в частности

$$\begin{aligned} \limind[\pi(\infty, s)^*(T^*P^s)] &= \mathcal{L}^* + \pi(\infty, -1)^*(T^*X), \\ \pi(\infty, k)^*(T^*P^k) &= \mathcal{L}_k^* + \pi(\infty, -1)^*(T^*X). \end{aligned}$$

Для базовой области $\mathcal{U}$ в $\mathcal{J}^\infty$ мы определяем $O(\mathcal{U})$ -модуль сечений $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ над $\mathcal{U}$ для расслоения $\mathcal{M}^*$ по формуле

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{U}) = \mathcal{M}^* \otimes O(\mathcal{U}), \quad (2.4)$$

где тензорное произведение берется над $\mathbb{R}$, аналогично определяем модули сечений над $\mathcal{U}$ для остальных расслоений $\text{limind}[\pi(\infty, s)^*(T^*P^s)]$, $\mathcal{M}_k^*$, $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}_k^*$, $\mathcal{L}^*$, $\pi(\infty, k)^*(T^*P^k)$, $\pi(\infty, k)^*(TP^k)$, $\pi(\infty, -1)^*(TX)$, $\pi(\infty, -1)^*(T^*X)$ над $\mathcal{P}^\infty$.

2.3. Определим несколько колец дифференциальных операторов.

Пусть V – область в P , $\mathcal{U}$ – базовая область в $\mathcal{P}^\infty$.

Обозначим через $B(V)$ кольцо, порожденное дифференциальными операторами $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial z^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial y^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial z^{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n+m}} = \frac{\partial}{\partial z^{n+m}}$ с коэффициентами в $O(V)$, действующими на функции из $O(V)$. Через $B(\mathcal{U})$ обозначим кольцо, порожденное дифференциальными операторами $\frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n+m}}$ с коэффициентами в $O(\mathcal{U})$, действующими на функции из $O(\mathcal{U})$; при этом будем считать, что функции y_ν^b при $|\nu| \geq 1$ являются константами относительно $\frac{\partial}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial}{\partial y^a}$. Мы обозначаем результат действия $\frac{\partial}{\partial z^c}$ на элемент $g \in O(\mathcal{U})$ через $\frac{\partial g}{\partial z^c}$; понятно также обозначение $\frac{\partial^2 g}{\partial z^c \partial z^d}$ и т. д. Если $\mathcal{U} = \pi(\infty, 0)^{-1}(V)$, то имеется естественный гомоморфизм $b: B(V) \rightarrow B(\mathcal{U})$ колец и действие оператора $D \in B(V)$ на функцию $h \in O(V)$ согласовано с действием $b(D)$ на h (напомним, что $O(V)$ вложено в $O(\mathcal{U})$). В кольцах $B(\mathcal{U})$ и $B(V)$ имеется подкольцо B , порожденное операторами $\frac{\partial}{\partial z^d}$ с постоянными коэффициентами.

Обозначим через ∂_i полное дифференцирование по переменной x^i . По определению оператор ∂_i действует на кольцо $O(\mathcal{U})$, переводя функцию $h \in O(\mathcal{U})$ в $\partial_i(h) = \frac{\partial h}{\partial x^i} + \frac{\partial h}{\partial y^a} y_i^a + \dots + \frac{\partial h}{\partial y_\mu^a} y_{\mu+1_i}^a$. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Обозначим через $C(\mathcal{U})$ кольцо, порожденное дифференциальными операторами $\partial_1, \dots, \partial_n$ с коэффициентами из $O(\mathcal{U})$, действующими на функции из $O(\mathcal{U})$.

Обозначим через $D(\mathcal{U})$ кольцо, порожденное дифференциальными операторами $\partial_1, \dots, \partial_n$ и $\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n+m}}$ с коэффициентами из $O(\mathcal{U})$, действующими на функции из $O(\mathcal{U})$. Проверим, что каждый оператор ∂_i коммутирует с каждым оператором $\frac{\partial}{\partial y^a}$ при действии на кольцо $O(\mathcal{U})$. Действительно, пусть $h \in O(\mathcal{U})$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y^a}(\partial_i(h)) = \partial_i\left(\frac{\partial h}{\partial y^a}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial y^a} + \sum_{b=1+n}^{m+n} \sum_{\nu} y_{\nu+1_i}^b \frac{\partial^2 h}{\partial y^a \partial y_\nu^b},$$

что и утверждалось. Ясно, что $C(\mathcal{U})$ естественно отождествляется с подкольцом в $D(\mathcal{U})$. В кольце $D(\mathcal{U})$ имеется подкольцо D , порожденное операторами $\frac{\partial}{\partial y^a}$ и ∂_i с постоянными коэффициентами.

Зададим действие кольца $C(\mathcal{U})$ на модуль $\mathcal{L}^*(\mathcal{U})$ по формуле

$$\partial_i(h\theta_\mu^b) = h\theta_{\mu+1_i}^b + \partial_i(h)\theta_\mu^b, \quad (2.5)$$

где $h \in O(\mathcal{U})$. Проверим, что $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$. Действительно,

$$\begin{aligned}\partial_j(\partial_i(h\theta_\mu^b)) &= \partial_j(h\theta_{\mu+1_i}^b + \partial_i(h)\theta_\mu^b) \\ &= \partial_j(h)\theta_{\mu+1_i}^b + h\theta_{\mu+1_i+1_j}^b + \partial_j\partial_i(h)\theta_\mu^b + \partial_i(h)\theta_{\mu+1_j}^b;\end{aligned}$$

аналогично,

$$\partial_i(\partial_j(h\theta_\mu^b)) = \partial_i(h)\theta_{\mu+1_j}^b + h\theta_{\mu+1_i+1_j}^b + \partial_i\partial_j(h)\theta_\mu^b + \partial_j(h)\theta_{\mu+1_i}^b.$$

Поскольку выполнено равенство $\partial_j\partial_i(h) = \partial_i\partial_j(h)$, равенство $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ при действии $C(\mathcal{U})$ на $\mathcal{L}^*(\mathcal{U})$ доказано. Модуль $\mathcal{L}^*(\mathcal{U})$ является конечнопорожденным свободным $C(\mathcal{U})$ -модулем со свободными образующими $\theta^{n+1}, \dots, \theta^{n+m}$.

Зададим действие кольца $C(\mathcal{U})$ на модуль $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ формулами

$$\partial_i(h\Lambda_\Pi^d) = h\Lambda_{\Pi+1_i}^d + \sum_{a=1+n}^{m+n} hy_i^a \Lambda_{\Pi+1_a}^d + \partial_i(h)\Lambda_\Pi^d, \quad (2.6)$$

где $h \in O(\mathcal{U})$. Проверим, что $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$. Поскольку $\partial_j(y_i^a) = y_{ij}^a$, имеем

$$\begin{aligned}\partial_j(\partial_i(h\Lambda_\Pi^d)) &= \partial_j\left(h\Lambda_{\Pi+1_i}^d + \sum_{a=1+n}^{m+n} hy_i^a \Lambda_{\Pi+1_a}^d + \partial_i(h)\Lambda_\Pi^d\right) \\ &= h\Lambda_{\Pi+1_i+1_j}^d + \sum_{b=1+n}^{m+n} hy_j^b \Lambda_{\Pi+1_i+1_b}^d + \partial_j(h)\Lambda_{\Pi+1_i}^d + \sum_{a=1+n}^{m+n} hy_i^a \Lambda_{\Pi+1_a+1_j}^d \\ &\quad + \sum_{a=1+n}^{m+n} \sum_{b=1+n}^{m+n} hy_i^a y_j^b \Lambda_{\Pi+1_a+1_b}^d + \sum_{a=1+n}^{m+n} y_i^a \partial_j(h)\Lambda_{\Pi+1_a}^d + \sum_{a=1+n}^{m+n} y_{ij}^a h\Lambda_{\Pi+1_a}^d \\ &\quad + \partial_j\partial_i(h)\Lambda_\Pi^d + \partial_i(h)\Lambda_{\Pi+1_j}^d + \sum_{b=1+n}^{m+n} \partial_i(h)y_j^b \Lambda_{\Pi+1_b}^d.\end{aligned}$$

Аналогично вычисляем $\partial_i[\partial_j(h\Lambda_\Pi^d)]$ и получаем $\partial_j[\partial_i(h\Lambda_\Pi^d)] = \partial_i[\partial_j(h\Lambda_\Pi^d)]$.

Зададим действие кольца $B(\mathcal{U})$ на модуль $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ по формуле

$$\frac{\partial}{\partial z^c}(h\Lambda_\Pi^d) = h\Lambda_{\Pi+1_c}^d + \frac{\partial h}{\partial z^c}\Lambda_\Pi^d,$$

где $h \in O(\mathcal{U})$. Проверим, что $\frac{\partial}{\partial z^c} \frac{\partial}{\partial z^e} = \frac{\partial}{\partial z^e} \frac{\partial}{\partial z^c}$, $1 \leq c, e \leq n+m$. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^e} \frac{\partial}{\partial z^c}(h\Lambda_\Pi^d) &= \frac{\partial}{\partial z^e} \left(h\Lambda_{\Pi+1_c}^d + \frac{\partial h}{\partial z^c}\Lambda_\Pi^d \right) \\ &= h\Lambda_{\Pi+1_c+1_e}^d + \frac{\partial h}{\partial z^e}\Lambda_{\Pi+1_c}^d + \frac{\partial h}{\partial z^c}\Lambda_{\Pi+1_e}^d + \frac{\partial^2 h}{\partial z^c \partial z^e}\Lambda_\Pi^d.\end{aligned}$$

Ясно, что отсюда следует равенство $\frac{\partial}{\partial z^c} \frac{\partial}{\partial z^e} = \frac{\partial}{\partial z^e} \frac{\partial}{\partial z^c}$. Модуль $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ является конечнопорожденным свободным $B(\mathcal{U})$ -модулем со свободными образующими $\Lambda^1, \dots, \Lambda^{n+m}$.

Покажем теперь, что корректно определено действие кольца $D(\mathcal{U})$ на модуль $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$. Для этого докажем, что каждый оператор ∂_i коммутирует с каждым оператором $\frac{\partial}{\partial y^a}$ при этом действии. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\frac{\partial(h\Lambda_{\Pi}^d)}{\partial y^a} \right) &= \partial_i \left(h\Lambda_{\Pi+1_a}^d + \frac{\partial h}{\partial y^a} \Lambda_{\Pi}^d \right) = h\Lambda_{\Pi+1_a+1_i}^d + h \sum_{b=1+n}^{m+n} y_i^b \Lambda_{\Pi+1_a+1_b}^d \\ &\quad + \partial_i(h)\Lambda_{\Pi+1_a}^d + \partial_i \left(\frac{\partial h}{\partial y^a} \right) \Lambda_{\Pi}^d + \frac{\partial h}{\partial y^a} \left(\Lambda_{\Pi+1_i}^d + \sum_{b=1+n}^{m+n} y_i^b \Lambda_{\Pi+1_b}^d \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^a} (\partial_i(h\Lambda_{\Pi}^d)) &= \frac{\partial}{\partial y^a} \left(h\Lambda_{\Pi+1_i}^d + h \sum_{b=1+n}^{m+n} y_i^b \Lambda_{\Pi+1_b}^d + \partial_i(h)\Lambda_{\Pi}^d \right) \\ &= h\Lambda_{\Pi+1_a+1_i}^d + \frac{\partial h}{\partial y^a} \Lambda_{\Pi+1_i}^d + h \sum_{b=1+n}^{m+n} y_i^b \Lambda_{\Pi+1_a+1_b}^d \\ &\quad + \frac{\partial h}{\partial y^a} \sum_{b=1+n}^{m+n} y_i^b \Lambda_{\Pi+1_b}^d + \frac{\partial[\partial_i(h)]}{\partial y^a} \Lambda_{\Pi}^d + \partial_i(h)\Lambda_{\Pi+1_a}^d. \end{aligned}$$

Выше проверено, что $\frac{\partial[\partial_i(h)]}{\partial y^a} = \partial_i \left(\frac{\partial h}{\partial y^a} \right)$. Этим коммутативность операторов $\frac{\partial}{\partial y^a}$ и ∂_i проверена. Модуль $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ является конечнопорожденным свободным $D(\mathcal{U})$ -модулем со свободными образующими $\Lambda^1, \dots, \Lambda^{n+m}$.

Понятно, что для любого мультииндекса μ корректно определяется действие оператора $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}$ на $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ и $\mathcal{L}^*(\mathcal{U})$. Аналогично определяются операторы $\frac{\partial^{|\Phi|}}{\partial z^\Phi}$ на $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$.

2.4. Обозначим через $\alpha_k: \mathcal{M}_k \rightarrow \pi(\infty, k)^*(TP^k)$ отображение, индуцированное отображением α_k (см. (1.1)), и приведем координатное описание α_k . Пусть $z \in \mathcal{P}^\infty$. В п. 2.2 отмечалось, что при введенных отождествлениях слой $\mathcal{M}_k(z)$ расслоения $\mathcal{M}_k$ над точкой z отождествляется с M_k , а слой $\pi(\infty, k)^*(TP^k)(z)$ расслоения $\pi(\infty, k)^*(TP^k)$ — с $L_k + T$. Поэтому отображение $\alpha_k(z)$ определяется своими компонентами $\phi_k(z): M_k \rightarrow T$ и $\gamma_k(z): M_k \rightarrow L_k$. Легко видеть, что

$$\gamma_k^*(\theta_\mu^a) = \Lambda_{\Pi}^d b_d^{\Pi}(\mu, a; z) \quad \forall k \geq 1, \quad k \geq |\mu| \geq 1, \quad (2.7)$$

$$\phi_k^*(\xi^i) = \Lambda^i \quad \forall k \geq 0, \quad (2.8)$$

$$\gamma_0^*(\theta^a) = \Lambda^a, \quad (2.9)$$

причем для $l \in L_k^*$, $t \in T^*$ имеем $\alpha_k^*(z)[l+t] = \gamma_k^*(z)[l] + \phi_k^*(z)[t]$. Напомним, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, при этом в первой формуле суммирование ведется по всем Π с условием $|\Pi| \leq |\mu|$ (и всем d с условием $1 \leq d \leq n+m$). Следующее предложение показывает, что $\gamma_k^*(\theta_\mu^a)$ является линейной функцией от Λ_{Π}^d , коэффициенты $b_d^{\Pi}(\mu, a; z)$ которой являются функциями степени не более $|\mu|$ от координат $x^i, y^c, \dots, y_\chi^c$ точки z с условием $|\chi| \leq |\mu|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедлива формула*

$$\gamma_k^*(\theta_\mu^a) = \partial^\mu(\Lambda^a - y_i^a \Lambda^i) + \sum_{i=1}^n y_{\mu+1_i}^a \Lambda^i. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [26] или [27, с. 165].

Определим отображение $\beta_k^*(z): L_k^* \rightarrow M_k^*$ слоев расслоений $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{M}_k$ над точкой z формулой

$$\beta_k^*(z, \theta_\mu^a) = \gamma_k^*(\theta_\mu^a) - \sum_{i=1}^n y_{\mu+1_i}^a \Lambda^i = \partial^\mu(\Lambda^a - y_i^a \Lambda^i). \quad (2.11)$$

Пусть $\mathcal{U}$ – базовая область в $\mathcal{P}^\infty$. Отображение $\beta_k^*(z)$ естественным образом определяет отображение расслоений $\beta_k^*: \mathcal{L}_k^* \rightarrow \mathcal{M}_k^*$ и соответствующее отображение модулей сечений $\beta_k^*: \mathcal{L}_k^*(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})$, а также двойственные отображения $\beta_k: \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{L}_k$, $\beta_k: \mathcal{M}_k(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{L}_k(\mathcal{U})$. Отображения β_k^* согласованы, т. е. при $r \leq k$ ограничение β_k^* на $\mathcal{L}_r^*$ относительно естественного вложения $\mathcal{L}_r^* \rightarrow \mathcal{L}_k^*$ равно β_r^* . Поэтому корректно определено отображение расслоений $\beta^*: \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{M}^*$ и соответствующее отображение модулей сечений

$$\beta^*: \mathcal{L}^*(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{M}^*(\mathcal{U}). \quad (2.12)$$

Аналогично определяются отображения $\alpha_k^*: \mathcal{L}_k^* + \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{M}_k^*$, $\alpha^*: \mathcal{L}^* + \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{M}^*$ и $\alpha_k: \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{L}_k + \mathcal{T}$.

Отображение β^* вместе с $B(\mathcal{P}^\infty)$ -подмодулем $\mathfrak{R}$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{P}^\infty)$, вводимым ниже в п. 3.2, являются основными объектами дальнейшего изучения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из формул (2.10), (2.11), (2.5) и (2.6) непосредственно следует, что β^* является гомоморфизмом $C(\mathcal{U})$ -модулей.

Пусть $\mathcal{V}$ – базовая подобласть базовой области $\mathcal{U}$. Для элемента g (или подмножества K) в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ или в $O(\mathcal{U})$ образ при отображении ограничения $\mathcal{M}^*(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ или $O(\mathcal{U}) \rightarrow O(\mathcal{V})$ называется *ограничением на подобласть $\mathcal{V}$* и обозначается $g \mid \mathcal{V}$ (соответственно, $K \mid \mathcal{V}$). Если $\mathfrak{B}$ – $O(\mathcal{U})$ -подмодуль в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$, то $\mathfrak{B} \mid \mathcal{V}$ является $(O(\mathcal{U}) \mid \mathcal{V})$ -модулем и определен $O(\mathcal{V})$ -модуль $(\mathfrak{B} \mid \mathcal{V}) \otimes O(\mathcal{V})$, обозначаемый $\mathfrak{B}_\mathcal{V}$ (тензорное произведение берется здесь над $O(\mathcal{U})$); для подрасслоения $\mathfrak{B}$ расслоения $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ имеем $\mathfrak{B}(\mathcal{U})_\mathcal{V} = \mathfrak{B}(\mathcal{V})$. Если подмодуль в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ обозначен через $\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{B}(\mathcal{U})$, то $\mathfrak{B}_k = \mathcal{M}_k^*(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{B}_k(\mathcal{U}) = \mathcal{M}_k^*(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{B}(\mathcal{U})$, аналогичные обозначения вводим для подмодулей в $\mathcal{L}^*(\mathcal{U})$. Для подмодуля B в $\mathcal{M}^*$ или L^* мы обозначаем $B_k = \mathcal{M}_k^* \cap B$ или $B_k = L_k^* \cap B$. Если $\mathcal{F}$ – свободный $O(\mathcal{U})$ -подмодуль конечного ранга, то через $\text{rang } \mathcal{F}$ мы обозначаем его ранг.

§ 3. Доказательства основных результатов

3.1. Далее, до п. 3.3 включительно, $\mathcal{U}$ – произвольная базовая область в $\mathcal{P}^\infty$.

Множество элементов Λ_Φ^d для всевозможных d и Φ с условиями $|\Phi| \geq 0$, $1 \leq d \leq n + t$ образует аддитивный базис в линейном пространстве $\mathcal{M}^*$. Введем среди мультииндексов произвольного типа r полное упорядочение: скажем,

что мультииндекс $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ больше мультииндекса $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$, если $|\varepsilon| > |\rho|$, а в случае $|\varepsilon| = |\rho|$ найдется индекс s такой, что $\rho_j = \varepsilon_j$ при $j < s$ и $\rho_s > \varepsilon_s$. Определим также $\max(\varepsilon, \rho) = \delta = (\delta_1, \dots, \delta_r)$, где $\delta_s = \max(\varepsilon_s, \rho_s)$. Кроме того, обозначим через $\varepsilon + \rho = [(\varepsilon + \rho)_1, \dots, (\varepsilon + \rho)_r]$ мультииндекс, определенный условием $(\varepsilon + \rho)_s = \varepsilon_s + \rho_s$. Элементы Λ_Π из пространства $S(T + N)$, Λ_Π^d из M^* , θ_μ из $S(T)$ и θ_μ^a из L^* будем называть *мономами*. Введем среди мономов из $S(T + N)$ и $S(T)$ полное упорядочение: $\Lambda_\Pi > \Lambda_\Phi$, если $\Pi > \Phi$, и, аналогично, $\theta_\mu > \theta_\sigma$, если $\mu > \sigma$. Среди мономов из M^* и L^* также введем полное упорядочение: положим $\Lambda_\Pi^d > \Lambda_\Phi^c$ при $\Pi > \Phi$, а если $\Pi = \Phi$, то $c > d$; аналогично, $\theta_\mu^a > \theta_\sigma^b$, если $\mu > \sigma$, а если $\mu = \sigma$, то $b > a$. Введенный порядок на мультииндексах и мономах из $S(T + N)$, M^* , $S(T)$ и L^* обозначается grlex и называется *градуированно-лексикографическим*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Каждый элемент $h \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ допускает однозначную запись вида

$$h = \sum_{\Phi, d} a_d^\Phi \Lambda_\Phi^d, \quad (3.1)$$

в которой $a_d^\Phi \in O(\mathcal{U})$ и мономы Λ_Φ^d расположены в порядке убывания относительно порядка grlex . Такая запись называется *стандартной*, и a_d^Φ называются *коэффициентами* элемента h . Первое ненулевое слагаемое стандартной записи называется *старшим членом* элемента h и обозначается через $\text{lt}(h)$. Если $\text{lt}(h) = a_c^\Pi \Lambda_\Pi^c$ (здесь суммирования нет), то моном Λ_Π^c лежит в M^* , называется *старшим мономом* элемента h и обозначается $\text{lm}(h)$, a_c^Π — *старшим коэффициентом* h и обозначается $\text{lc}(h)$, $|\Pi|$ — *степенью* h и обозначается $\deg(h)$. Отметим, что a_c^Π должно быть отлично от нуля на каком-нибудь непустом подмножестве области $\mathcal{U}$. Для любой точки $z \in \mathcal{U}$ через $e_z: \mathcal{M}^*(\mathcal{U}) \rightarrow M^*$ обозначим отображение, переводящее элемент $h \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ в элемент $h(z) \in M^*$, который получается, если в формуле (3.1) все a_d^Φ заменить их значениями в точке z . Если $O(\mathcal{U})$ -подмодуль в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ обозначается через $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ или $\mathcal{A}$, то $e_z(\mathcal{A}(\mathcal{U}))$ и $e_z(\mathcal{A})$ обозначаются также через $\mathcal{A}(z)$. Таким образом, $\mathcal{A}_k(z) = e_z(\mathcal{A}_k(\mathcal{U}))$ отличается, вообще говоря, от $\mathcal{A}(z)_k = M_k \cap \mathcal{A}(z)$. Если $\mathcal{V}$ — базовая подобласть в $\mathcal{U}$ и $z \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, то для $O(\mathcal{U})$ -подмодуля $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ имеем $\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}_\mathcal{V}(z)$. *Степенью* $\text{st}(h)$ элемента $h \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ называется максимум степеней коэффициентов a_d^Φ .

Нам понадобится другой аддитивный базис в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ и другой полный порядок на этом базисе. Для их определения обозначим через Ψ^d элемент модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$, определенный по следующему правилу: $\Psi^i = \Lambda^i$ для $1 \leq i \leq n$ и $\Psi^a = \Lambda^a - y_i^a \Lambda^i$ для $n+1 \leq a \leq n+m$. Элемент $\partial^\mu \left(\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial y^\nu} \right)$ кольца $D(\mathcal{U})$ будем обозначать через Ψ_Φ , где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — мультииндекс типа n , $\nu = (\nu_{n+1}, \dots, \nu_{n+m})$ — мультииндекс типа m , а $\Phi = (\mu \mid \nu) = (\Phi_1, \dots, \Phi_{n+m})$ — составной мультииндекс типа $n+m$, определяемый следующим образом: $\Phi_j = \mu_j$ при $1 \leq j \leq n$ и $\Phi_a = \nu_a$ при $n+1 \leq a \leq n+m$. Положим еще $\Psi_\Phi^d = \partial^\mu \left(\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial y^\nu} \right) [\Psi^d] \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$. Далее под $O(\mathcal{U})$ -модулем будем понимать $O(\mathcal{U})$ -модуль не обязательно конечного ранга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Элементы Ψ_Φ^d при $|\Phi| \leq k$ образуют свободный базис $O(\mathcal{U})$ -модуля конечного ранга $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})$. Элементы $\Psi_\Phi^d(z)$ при $|\Phi| \leq k$ образуют базис конечномерного линейного пространства M_k^* для любой точки $z \in \mathcal{U}$.

Элементы Ψ_{Φ}^d образуют свободный базис $O(\mathcal{U})$ -модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$. Элементы Ψ^d образуют свободный базис $D(\mathcal{U})$ -модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по k покажем, что $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U}) = \{D_k(\mathcal{U})\mathcal{M}_0^*(\mathcal{U})\}$, где $\{AB\}$ здесь и далее обозначает $O(\mathcal{U})$ -модуль, порожденный всеми элементами вида ab для $a \in A$, $b \in B$. При $k = 0$ это равенство, очевидно, выполнено. Пусть оно справедливо при k . Из формулы

$$\partial_j(\Lambda_{\Phi}^d) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Lambda_{\Phi}^d + y_{\nu}^b \frac{\partial}{\partial y^b} \Lambda_{\Phi}^d$$

следует, что элементы $\frac{\partial}{\partial y^1} \Lambda_{\Phi}^d, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \Lambda_{\Phi}^d, \partial_1(\Lambda_{\Phi}^d), \dots, \partial_n(\Lambda_{\Phi}^d)$ могут быть получены из элементов $\frac{\partial}{\partial y^1} \Lambda_{\Phi}^d, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \Lambda_{\Phi}^d, \frac{\partial}{\partial x^1} \Lambda_{\Phi}^d, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Lambda_{\Phi}^d$ при помощи невырожденного линейного преобразования. Поскольку Λ_{Φ}^d при $|\Phi| \leq k$ порождают модуль $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})$, мы выводим, что

$$\{D_1(\mathcal{U})\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})\} = \{B_1(\mathcal{U})\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})\} = \mathcal{M}_{k+1}^*(\mathcal{U}).$$

По предположению индукции имеем $\{D_1(\mathcal{U})\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})\} = \{D_1(\mathcal{U})D_k(\mathcal{U})\mathcal{M}_0^*(\mathcal{U})\}$. Однако $\{D_1(\mathcal{U})D_k(\mathcal{U})\mathcal{M}_0^*(\mathcal{U})\} = \{D_{k+1}(\mathcal{U})\mathcal{M}_0^*(\mathcal{U})\}$, значит, имеем $\mathcal{M}_{k+1}^*(\mathcal{U}) = \{D_{k+1}(\mathcal{U})\mathcal{M}_0^*(\mathcal{U})\}$. Поэтому элементы Ψ_{Φ}^d при $|\Phi| \leq k$ порождают $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})$ для любого k . Количества элементов Λ_{Φ}^d и Ψ_{Φ}^d при $|\Phi| \leq k$ одинаковы, Λ_{Φ}^d образуют свободный базис $O(\mathcal{U})$ -модуля $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})$, и Ψ_{Φ}^d образуют базис $O(\mathcal{U})$ -модуля $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})$. Отсюда вытекает, что элементы Ψ_{Φ}^d при $|\Phi| \leq k$ образуют свободный базис $O(\mathcal{U})$ -модуля $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{U})$. Элементы $\Lambda_{\Phi}^d = \Lambda_{\Phi}^d(z)$ образуют базис линейного пространства $\mathcal{M}_k^*(z) = \mathcal{M}_k^*$ для любой точки $z \in \mathcal{U}$, поэтому элементы $\Psi_{\Phi}^d(z)$ при $|\Phi| \leq k$ образуют базис линейного пространства $\mathcal{M}_k^*(z)$ для любой точки $z \in \mathcal{U}$. Отсюда следуют все остальные утверждения предложения.

Элементы Ψ_{Φ}^d , Ψ_{Φ} будем называть *квазимономами*. Заметим, что элементы Ψ_{Φ}^d порождают над $\mathbb{R}$ (бесконечномерное в общем случае) линейное подпространство в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$, которое будем обозначать через Γ . Из предложения 3.1 и определения D (см. п. 2.3) вытекает, что Γ является свободным D -модулем. Теперь введем новое полное упорядочение на квазимономах. Положим $\Psi_{\Pi}^c > \Psi_{\Phi}^d$, если $\Pi = (\sigma \mid \eta)$, $\Phi = (\mu \mid \nu)$ и η больше ν относительно порядка grlex . Пусть $\eta = \nu$. Положим $\Psi_{\Pi}^c > \Psi_{\Phi}^d$ при $c \leq n < d$. При $c, d \leq n$ положим $\Psi_{\Pi}^c > \Psi_{\Phi}^d$, если σ больше μ относительно порядка grlex ; $\Psi_{\Pi}^c > \Psi_{\Phi}^d$, если $c < d$ и $\sigma = \mu$. При $c, d > n$ положим $\Psi_{\Pi}^c > \Psi_{\Phi}^d$, если σ больше μ относительно порядка grlex ; $\Psi_{\Pi}^c > \Psi_{\Phi}^d$, если $c < d$ и $\sigma = \mu$. Введенный таким образом порядок на квазимономах и составных мультииндексах называется *квазилексикографическим* и обозначается qllex . Так же, как и выше, для каждого элемента $h \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ определяем (однозначную) квазистандартную запись

$$h = \sum_{\Phi, d} a_{\Phi}^d \Psi_{\Phi}^d, \quad (3.2)$$

в которой квазимономы расположены по убыванию относительно порядка qllex , а также квазистарший член $\text{qlt}(h)$, квазистарший моном $\text{qlm}(h)$ (принадлежащий D -модулю Γ) и т. д. Это же верно и для элемента $h \in D(\mathcal{U})$. Мы не определяем понятие квазиступени и квазистепени элементов $h \in D(\mathcal{U})$ и $h \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$.

3.2. Уточним сказанное в п. 1.2. Предположим, что на многообразии P имеется линейная система SL_q , решения которой

$$\Lambda(p) = \Lambda^1(p) \frac{\partial}{\partial z^1} + \dots + \Lambda^{n+m}(p) \frac{\partial}{\partial z^{n+m}}$$

являются векторными полями, образующими алгебру Ли PL псевдогруппы Ли PG. Пусть $F_1 = 0, \dots, F_g = 0$ – система уравнений SL_q . Каждое уравнение этой системы имеет вид

$$\sum_{|\Phi| \leq q} \sum_{c=1}^{n+m} a_{c,\Phi}^r(p) \frac{\partial^{|\Phi|}}{\partial z^\Phi} \Lambda^c(p) = 0,$$

где $p \in P$, а r – номер уравнения. Уравнение F_r системы уравнений SL_q определяет элемент $\rho(F_r)$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{P}^\infty)$ по формуле

$$\rho(F_r) = \sum_{|\Phi| \leq q} \sum_{c=1}^{n+m} a_{c,\Phi}^r(p) \Lambda_\Phi^c(p).$$

Элементы $\rho(F_1), \dots, \rho(F_g)$ порождают $B(\mathcal{P}^\infty)$ -подмодуль модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{P}^\infty)$, обозначаемый через $\mathfrak{R}$. Пусть z – точка $\mathcal{P}^\infty$. Обозначим $\mathfrak{R}_k = \mathcal{M}_k^*(\mathcal{P}^\infty) \cap \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}(z) = e_z(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{R}_k(z) = e_z[\mathfrak{R}_k]$, $\mathfrak{R}(z)_k = \mathfrak{R}(z) \cap M_k^*$. Тогда $\mathfrak{R}(z)$ – линейное пространство в $\mathcal{M}^*(z) = M^*$, а $\mathfrak{R}_k(z)$ и $\mathfrak{R}(z)_k$ являются линейными подпространствами в M_k^* , причем $\mathfrak{R}_k(z) \subseteq \mathfrak{R}(z)_k$. Обозначим через $\mathcal{R}_k(z)$ аннулятор $\mathfrak{R}_k(z)$ в $\mathcal{M}_k(z) = M_k$. Тогда по определению

$$\Delta_k(z) = \alpha_k(z)[\mathcal{R}_k(z)] \subseteq \pi(\infty, k)^*(TP^k)(z) = L_k + T.$$

Конечно, при отождествлении слоев $\mathcal{M}_k(z)$ и $[\pi(k, 0)^*(J^k(TP))](z_k)$ расслоений $\mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{P}^\infty$ и $\pi(k, 0)^*(J^k(TP)) \rightarrow P^k$ пространства $\mathcal{R}_k(z)$ и $R'_k(z)$ отождествляются. Также при отождествлении слоев $\pi(\infty, k)^*(TP^k)(z)$ и $(TP^k)(z)$ расслоений $\pi(\infty, k)^*(TP^k) \rightarrow \mathcal{P}^\infty$ и $TP^k \rightarrow P^k$ пространства $\Delta_k(z)$ и $\Delta_k(z)$ отождествляются. Поэтому очевидно, что $\dim \Delta_k(z) = \dim \Delta_k(z)$ (и $\dim \mathcal{R}_k(z) = \dim R'_k(z)$). Обозначим $\beta^*[\mathcal{L}^*(\mathcal{P}^\infty)] = \mathcal{E}(\mathcal{P}^\infty)$, $\alpha^*[\mathcal{L}^*(\mathcal{P}^\infty) + T^*(\mathcal{P}^\infty)] = \mathcal{A}(\mathcal{P}^\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Обозначения $\mathcal{E}(\mathcal{P}^\infty)$ и $\mathcal{A}(\mathcal{P}^\infty)$ объясняются тем, что, как мы увидим ниже, на $\mathcal{P}^\infty$ имеются расслоения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{A}$ такие, что $\mathcal{E}(\mathcal{P}^\infty)$ и $\mathcal{A}(\mathcal{P}^\infty)$ совпадают с введенными выше одноименными объектами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Элемент $f \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ называется *простым*, если его квазистарший моном $\Psi_\Phi^b(f) = \text{qlm}(f)$ удовлетворяет условиям $n+1 \leq b \leq n+m$, $\Phi = (\mu \mid 0)$, *строго полупростым*, если его квазистарший моном совпадает с одним из мономов $\Lambda^1, \dots, \Lambda^n$, и *полупростым*, если он либо прост, либо строго полупрост.

Ясно, что степень простого элемента f равна степени его квазистаршего члена $\text{qlm}(f)$.

Логично было бы называть простые, (строго) полупростые мономы квазипростыми, (строго) квазиполупростыми, но мы не будем усложнять и без того сложную терминологию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть Ψ_{Π}^c и Ψ_{Φ}^d – квазимономы и $\Psi_{\Pi}^c > \Psi_{\Phi}^d$. Если Ψ_{Π}^c прост, то Ψ_{Φ}^d также прост. Если Ψ_{Π}^c полупрост, то Ψ_{Φ}^d также полупрост. Если $\Psi(1) > \Psi(2) > \dots > \Psi(s)$ – убывающая цепочка квазимономов и $\Psi(1)$ строго полупрост, то найдется такой номер s_0 , не превосходящий n , что для всех $v > s_0$ элементы $\Psi(v)$ просты, а все $\Psi(v)$ при $v \leq s_0$ строго полупросты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из определения порядка qllex .

Обозначим через $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{A}'$ подрасслоения в $\mathcal{M}^*$, порожденные простыми и соответственно полупростыми мономы (рассматриваемыми как сечения расслоения $\mathcal{M}^*$). То, что $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{A}'$ действительно являются подрасслоениями, вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Множество всех простых мономов образует свободную базу $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ -модуля $\mathcal{E}'(\mathcal{U})$, а множество всех полупростых мономов – свободную базу $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ -модуля $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$. Модули $\mathcal{E}'_k(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'_k(\mathcal{U})$ являются свободными $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ -модулями конечного ранга для любого k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из предложения 3.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Следующие условия эквивалентны:

- 1) элемент $f \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ является простым;
- 2) все квазимономы квазистандартной записи (3.2) элемента $f \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ просты;

- 3) выполнено включение $f \in \mathcal{E}'(\mathcal{U})$.

Следующие условия также эквивалентны:

- 4) элемент $f \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ является полупростым;
- 5) все квазимономы квазистандартной записи (3.2) элемента $f \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ полупросты;
- 6) выполнено включение $f \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения порядка qllex .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Имеют место равенства $\mathcal{E}(\mathcal{P}^\infty) = \mathcal{E}'(\mathcal{P}^\infty)$ и $\mathcal{A}(\mathcal{P}^\infty) = \mathcal{A}'(\mathcal{P}^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (2.11) следует, что $\beta_k^*(\theta_\mu^b) = \Psi_\Phi^b$, где $\Phi = (\mu \mid 0)$, откуда вытекает первое равенство. Из формул (2.8), (2.10) следует, что $\mathcal{A}'_k(\mathcal{U}) = \mathcal{E}_k(\mathcal{U}) + \alpha_k^*(T)$, откуда получаем второе равенство.

Предложение 3.5 показывает справедливость замечания 3.1. Далее вместо $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{A}'$ мы будем записывать $\mathcal{E}$ и $\mathcal{A}$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Имеют место равенства $\mathcal{A}_k(\mathcal{U}) = \mathcal{E}_k(\mathcal{U}) + T^*(\mathcal{U})$, $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \mathcal{E}(\mathcal{U}) + T^*(\mathcal{U})$, $\dim \mathcal{A}_k(\mathcal{U}) = \dim \mathcal{E}_k(\mathcal{U}) + n$.

Пусть K – некоторое подмножество элементов нулевой ступени модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$. Напомним, что так называются элементы f , все коэффициенты стандартной записи которых являются функциями на P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. $B(\mathcal{U})$ -подмодуль $K^{(B)}$ в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$, порожденный множеством K , совпадает с $D(\mathcal{U})$ -подмодулем $K^{(D)}$ в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$, порожденным множеством K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 3.1. Пусть $K_{(k)}^{(B)} = \{B_k(\mathcal{U})K\}$, $K_{(k)}^{(D)} = \{D_k(\mathcal{U})K\}$. Индукцией по k покажем, что $K_{(k)}^{(B)} = K_{(k)}^{(D)}$. При $k = 0$ это равенство, очевидно, выполнено. Пусть оно справедливо при некотором значении k . Тогда каждый элемент r из $K_{(k)}^{(B)}$ имеет вид $r = \sum_s h^s r_s$, где $h^s \in O(\mathcal{U})$, а $r_s = \frac{\partial^{|\Phi|}}{\partial z^{\Phi}}(k_s)$, причем $|\Phi| \leq k$ и $k_s \in K$, поэтому все r_s имеют ступень 0 и принадлежат $K_{(k)}^{(B)}$. Очевидно, $\partial_j(r) = h^s \partial_j(r_s) + \partial_j(h^s) r_s$, $\frac{\partial r}{\partial x^j} = h^s \frac{\partial r_s}{\partial x^j} + \frac{\partial h_s}{\partial x^j} r_s$. Поэтому предложение будет доказано, если мы покажем, что $\partial_j(r_s) \in K_{(k+1)}^{(B)}$ и $\frac{\partial r}{\partial x^j} \in K_{(k+1)}^{(D)}$. Очевидно, $\partial_j(r_s) = \frac{\partial r_s}{\partial x^j} + y_j^b \frac{\partial r_s}{\partial y^b}$. Это завершает доказательство предложения.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Подмодуль $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}}$ является $B(\mathcal{U})$ - и $D(\mathcal{U})$ -подмодулем модуля $M^*(\mathcal{U})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}}$ является $B(\mathcal{U})$ -подмодулем модуля $M^*(\mathcal{U})$; тогда он является также и $D(\mathcal{U})$ -подмодулем этого модуля, так как $\mathfrak{R}$ (значит, и $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}}$) обладает системой образующих $\rho(F_1), \dots, \rho(F_g)$ степени 0.

3.3. Здесь проведем подготовку к построению базиса Грёбнера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $\mathbf{V} = (\mathcal{V}_s, 1 \leq s \leq t)$ – разбиение базовой области $\mathcal{U}$. Обозначим $M^*(\mathbf{V}) = \bigcup_{s=1}^t \mathcal{M}^*(\mathcal{V}_s)$. Список H над разбиением $\mathbf{V}$ есть по определению объединение по s , $1 \leq s \leq t$, конечных списков $H(\mathcal{V}_s) = [h_s^v, 1 \leq v \leq v(s)]$ элементов из $\mathcal{M}^*(\mathcal{V}_s)$, и мы обозначаем $H = [H(\mathcal{V}_s), 1 \leq s \leq t]$. Также будем обозначать $H(\mathcal{V}_s) = H(s)$. Если $\mathbf{W} = (\mathcal{W}_p, 1 \leq p \leq r)$ – подразбиение разбиения $\mathbf{V}$, то естественно определяется ограничение $H^1 = H \mid \mathbf{W}$ списка H на $\mathbf{W}$, являющееся списком над $\mathbf{W}$: $H^1 = [H^1(p), 1 \leq p \leq r]$, где для каждого p индекс s определяется условием $\mathcal{W}_p \subset \mathcal{V}_s$ и $H^1(p)$ состоит из элементов $g_p^u = h_s^u \mid \mathcal{W}_p$, $1 \leq u \leq u(p) = v(s)$, модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{W}_p)$. Количество элементов списка H называется длиной списка H и обозначается $l(H)$, максимальная ступень и степень элементов списка H называются соответственно *ступенью* и *степенью* H и обозначаются $\text{st}(H)$ и $\deg(H)$. Ясно, что $\text{st}(H) = \text{st}(H^1)$, $\deg(H) = \deg(H^1)$. Для любой базовой области $\mathcal{U}$ любой конечный список H элементов из $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ можно рассматривать как список элементов над тривиальным разбиением области $\mathcal{U}$, поэтому также определены длина, степень, ступень и ограничение $H \mid \mathbf{V}$ списка H на любое разбиение $\mathbf{V}$ области $\mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть $\mathbf{V} = (\mathcal{V}_s, 1 \leq s \leq t)$ – разбиение базовой области $\mathcal{U}$, $H = [H(s), 1 \leq s \leq t]$ – список над $\mathbf{V}$. Мы скажем, что $\mathbf{V}$ *нормально* (квазинормально) относительно H , если для любого s , любого ненулевого элемента h_s^v списка $H(s)$ и любой точки $z \in \mathcal{V}_s$ значение старшего коэффициента $a(z) = \text{lc}(h_s^v)$ (соответственно, значение квазистаршего коэффициента $a(z) = \text{qlc}(h_s^v)$) элемента h_s^v отлично от нуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть $\mathbf{V} = (\mathcal{V}_s, 1 \leq s \leq t)$ – разбиение базовой области $\mathcal{U}$, $H = [H(s), 1 \leq s \leq t]$ – список над $\mathbf{V}$. Тогда существует подразбиение $\mathbf{W}$ разбиения $\mathbf{V}$, нормальное относительно ограничения $H \mid \mathbf{W}$ списка H на $\mathbf{W}$, причем $\text{st}(\mathbf{W}) \leq \max[\text{st}(\mathbf{V}), \text{st}(H)]$, а длина разбиения $l(\mathbf{W})$ ограничена константой, зависящей только от n , t , $e = \deg(H)$, $l(\mathbf{V})$, $l(H)$. Также

существует подразбиение $\mathbf{W}_1$ разбиения $\mathbf{V}$, квазинормальное относительно ограничения $H \mid \mathbf{W}_1$ списка H на $\mathbf{W}_1$, причем $\text{st}(\mathbf{W}_1) \leq \max[\text{st}(\mathbf{V}), \text{st}(H)]$, а длина разбиения $l(\mathbf{W}_1)$ ограничена константой, зависящей только от $n, m, e = \deg(H), l(\mathbf{V}), l(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, предложение достаточно доказать для случая, когда $\mathbf{V}$ – тривиальное разбиение области $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и H – конечный список элементов из $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Сначала докажем существование разбиения $\mathbf{W}$. Рассмотрим случай, когда H состоит из единственного элемента h . Пусть в этом случае $g = \text{lt}(h) = b\Lambda_{\Pi}^d$ – старший член элемента h . Пусть $\mathcal{W}_1$ – область в $\mathcal{V}$, состоящая из точек z , удовлетворяющих условию $b(z) \neq 0$. Положим $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} - \overline{\mathcal{W}_1}$ и обозначим $h_1 = (h - g) \mid \mathcal{W}_1$. Элемент h_1 принадлежит $\mathcal{M}^*(\mathcal{W}_1)$. Повторим для элемента h_1 те же построения, что и для h . Пусть $\text{lt}(h_1) = g_1 = p\Lambda_{\Phi}^c$; рассмотрим в $\mathcal{V}_1$ область $\mathcal{W}_2$, состоящую из точек z , удовлетворяющих условию $p(z) \neq 0$. Положим $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 - \overline{\mathcal{W}_2}$, обозначим $h_2 = (h_1 - g_1) \mid \mathcal{W}_2$ и т. д. Так будем продолжать до тех пор, пока не получим открытое множество $\mathcal{V}_t$, состоящее из точек z , для которых все коэффициенты стандартной записи элемента h равны нулю. Положим $\mathcal{V}_t = \mathcal{W}_t$; тогда разбиение $\mathbf{W} = (\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_t)$ области $\mathcal{V}$ будет искомым для случая $H = [h]$. Ясно, что длина $l(\mathbf{W})$ в этом случае не превосходит увеличенного на единицу числа мономов степени не более $e = \deg(h)$ в M^* , т. е. $(m + n)C_{n+m+e}^{n+m} + 1$.

В случае $H = [h_1, \dots, h_{r-1}, h_r]$ предположим, что для $H^{(r-1)} = [h_1, \dots, h_{r-1}]$ построено нормальное разбиение $\mathbf{W}^{(r-1)} = (\mathcal{W}_v, 1 \leq v \leq t)$. Тогда для каждого v рассмотрим $g_v = h_r \mid \mathcal{W}_v$ и согласно предыдущему построим нормальное разбиение $\mathbf{W}_v$ области $\mathcal{W}_v$ для списка, содержащего единственный элемент $g_v \in \mathcal{M}^*(\mathcal{W}_v)$. Пусть $\mathbf{W}_v = (\mathcal{W}_{vi}, 1 \leq i \leq i(v))$ – построенное разбиение. Тогда набор областей $\mathcal{W}_{vi}$ при $1 \leq v \leq t, 1 \leq i \leq i(v)$ определяет разбиение $\mathbf{W}$ области $\mathcal{V}$. Ясно, что в этом случае $l(\mathbf{W})$ не превосходит $l(\mathbf{V})[(m + n)C_{n+m+e}^{n+m} + 1]^r$. Оценка $\text{st}(\mathbf{W})$ тривиальна. Существование $\mathbf{W}$, нормального относительно $H \mid \mathbf{W}$, доказано.

Существование $\mathbf{W}_1$ доказывается аналогично, если мы вместо $g = \text{lt}(h)$ будем рассматривать $g' = \text{qlt}(h)$ и т. д.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Выше мы определили отображения $\text{lm}: \mathcal{M}^*(\mathcal{U}) \rightarrow M^*$ и $\text{qlm}: \mathcal{M}^*(\mathcal{U}) \rightarrow \Gamma$. Легко видеть, что образ $\text{lm}(\mathcal{K})$ любого $B(\mathcal{U})$ -подмодуля $\mathcal{K}$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ при отображении lm является мономиальным (т. е. порожденным мономами) подмодулем в B -модуле M^* . Аналогично, для любого $D(\mathcal{U})$ -подмодуля $\mathcal{K}$ образ $\text{qlm}(\mathcal{K})$ является мономиальным подмодулем в D -модуле Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть $\mathcal{U}$ – базовая область в $\mathcal{P}^\infty$. Если (квази)старший коэффициент p элемента $f \in \mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ отличен от нуля в каждой точке $z \in \mathcal{U}$, то f называется (квази)отмеченным. Мы можем (квази)нормировать (квази)отмеченный элемент f , т. е. заменить f на $p^{-1}f$. Элемент f (квази)нормирован, если $p = 1$.

Если $\mathbf{W}$ – разбиение базовой области $\mathcal{U}$, (квази)нормальное относительно списка H над $\mathbf{W}$, то мы можем определить список NH над $\mathbf{W}$, состоящий из всех ненулевых (квази)нормированных элементов списка H . Мы скажем, что NH получается (квази)нормированием списка H . Список H называется (квази)нормированным, если $NH = H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если $\mathcal{U}$ – базовая область в $\mathcal{P}^\infty$, H – список элементов из $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$, то (квази)нормированные элементы списка H порождают в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ тот же $B(\mathcal{U})$ - или $D(\mathcal{U})$ -подмодуль, что и элементы списка H .

3.4. Здесь проведем построение базиса Грёбнера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть $\mathbf{W} = (\mathcal{W}_s, 1 \leq s \leq t)$ – разбиение базовой области $\mathcal{U}$, а $\mathcal{K}$ – $B(\mathcal{U})$ -подмодуль в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$. Мы говорим, что в $\mathcal{K}$ задан *базис Грёбнера* над разбиением $\mathbf{W}$, если задан список $G = [G(s), 1 \leq s \leq t]$ над $\mathbf{W}$ такой, что:

- 1) все элементы g_s^u , $1 \leq u \leq u(s)$, каждого списка $G(s)$ нормированы и порождают $B(\mathcal{W}_s)$ -подмодуль $\mathcal{K}_{\mathcal{W}_s}$;
- 2) разбиение $\mathbf{W}$ нормально относительно списка G ;
- 3) элементы $\text{lm}(g_s^u)$ каждого списка $G(s)$ порождают подмодуль $\text{lm}(\mathcal{K}_{\mathcal{W}_s})$ в B -модуле $\mathcal{M}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Пусть $\mathbf{W} = (\mathcal{W}_s, 1 \leq s \leq t)$ – разбиение базовой области $\mathcal{U}$, а $\mathcal{K}$ – $D(\mathcal{U})$ -подмодуль в $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$. Мы говорим, что в $\mathcal{K}$ задан *квазибазис Грёбнера* над разбиением $\mathbf{W}$, если задан список $G = [G(s), 1 \leq s \leq t]$ над $\mathbf{W}$ такой, что:

- 1) все элементы g_s^u , $1 \leq u \leq u(s)$, каждого списка $G(s)$ квазинормированы и порождают $D(\mathcal{W}_s)$ -подмодуль $\mathcal{K}_{\mathcal{W}_s}$;
- 2) разбиение $\mathbf{W}$ квазинормально относительно списка G ;
- 3) элементы $\text{qlm}(g_s^u)$ каждого списка $G(s)$ порождают подмодуль $\text{qlm}(\mathcal{K}_{\mathcal{W}_s})$ в D -модуле Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если в определении 3.5 разбиение $\mathbf{W}$ тривиально, то мы будем говорить, что (квази)базис Грёбнера задан над $\mathcal{U}$. Если $\mathbf{V}$ – подразбиение разбиения $\mathbf{W}$, то ограничение G на $\mathbf{V}$ определяет (квази)базис Грёбнера подмодуля $\mathcal{K}$ над подразбиением $\mathbf{V}$. Для любого атома $\mathcal{V}_s$ разбиения $\mathbf{V}$ элементы $g_s^1, \dots, g_s^{u(s)}$ образуют базис Грёбнера в подмодуле $\mathcal{K}_{\mathcal{V}_s}$ в обычном смысле относительно рассматриваемого порядка grlex или qllex ; в последнем случае мы будем называть их (квази)базисом Грёбнера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть $H = [h_s, 1 \leq s \leq r]$ – конечный список элементов модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$. Пусть элементы h_s в модуле $\mathcal{M}^*(\mathcal{U})$ порождают $B(\mathcal{U})$ -подмодуль $\mathcal{K}$, а также $D(\mathcal{U})$ -подмодуль $\mathcal{S}$. Тогда:

- 1) существуют разбиение $\mathbf{W}$ области $\mathcal{U}$ и список G над $\mathbf{W}$, задающий базис Грёбнера подмодуля $\mathcal{K}$ над разбиением $\mathbf{W}$, а также разбиение $\mathbf{W}_1$ области $\mathcal{U}$ и список G_1 над $\mathbf{W}_1$, задающий квазибазис Грёбнера подмодуля $\mathcal{S}$;
- 2) длины $l(\mathbf{W})$ и $l(\mathbf{W}_1)$ разбиений $\mathbf{W}$ и $\mathbf{W}_1$ ограничены константой, зависящей только от $n, m, r = l(H)$ и $e = \deg(H)$;
- 3) ступени $\text{st}(\mathbf{W})$ и $\text{st}(\mathbf{W}_1)$ этих разбиений ограничены константой, зависящей только от n, m, e и $\text{st}(H)$;
- 4) длины $l(G)$ и $l(G_1)$ списков G и G_1 ограничены константой, зависящей только от n, m, r, e ;
- 5) степени $\deg(G)$ и $\deg(G_1)$ этих списков ограничены зависящей только от n, m и e константой $\text{Deg}(n, m, e)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Доказательство существования (квази)базисов Грёбнера, изложенное ниже, фактически повторяет алгоритм Бухбергера (см. [28], [29] для случая модулей над кольцом полиномов и [30] для случая модулей над кольцом дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами). Для порядка grlex оно также изложено в работе [25].

Следующие определения аналогичны определениям, данным в работе [28].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Пусть $\mathcal{V}$ – базовая подобласть в $\mathcal{U}$, а f и g – два отмеченных элемента модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Рассмотрим их старшие члены $\text{lt}(f) = p\Lambda_{\Pi}^d$, $\text{lt}(g) = b\Lambda_{\Phi}^c$. Будем говорить, что g и f не сравнимы, если $c \neq d$, и будем считать, что в этом случае $S(f, g)$ не определено; если $c = d$, найдем $\max(\Pi, \Phi) = \Delta$, положим $\Delta = \Omega + \Pi = K + \Phi$ и определим $S(f, g)$ формулой

$$S(f, g) = p^{-1} \frac{\partial^{|\Omega|}(f)}{\partial z^{\Omega}} - b^{-1} \frac{\partial^{|K|}(g)}{\partial z^K} \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Пусть $\mathcal{V}$ – базовая подобласть в $\mathcal{U}$, а f и g – два квазиотмеченных элемента модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Рассмотрим их квазистаршие члены $\text{qlt}(f) = p\Psi_{\Pi}^d$, $\text{qlt}(g) = b\Psi_{\Phi}^c$. Будем говорить, что g и f не сравнимы, если $c \neq d$, и будем считать, что в этом случае $qS(f, g)$ не определено; если $c = d$, найдем $\max(\Pi, \Phi) = \Delta$, положим $\Delta = \Omega + \Pi = K + \Phi$, $\Omega = (\mu \mid \nu)$, $K = (\sigma \mid \eta)$ и определим $qS(f, g)$ формулой

$$qS(f, g) = p^{-1} \partial^{\mu} \left(\frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial y^{\nu}} \right) - b^{-1} \partial^{\sigma} \left(\frac{\partial^{|\eta|} g}{\partial y^{\eta}} \right) \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V}).$$

Заметим, что

$$\deg(S(f, g)) \leq \deg(f) + \deg(g), \quad \deg(qS(f, g)) \leq \deg(f) + \deg(g), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{st}(S(f, g)) &\leq \max(\text{st}(f), \text{st}(g)) + \max(\deg(f), \deg(g)), \\ \text{st}(qS(f, g)) &\leq \max(\text{st}(f), \text{st}(g)) + \max(\deg(f), \deg(g)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Пусть $\mathcal{V}$ – базовая подобласть в $\mathcal{U}$, $H = [h_1, \dots, h_r]$ – список над $\mathcal{V}$, состоящий из отмеченных элементов модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Для любого элемента h_s этого списка, любого мультииндекса Φ (типа $n + m$) и любого элемента $b \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ элемент вида $b \frac{\partial^{|\Phi|}}{\partial z^{\Phi}}(h_s)$ будем называть *примитивным*. Для любого элемента $g \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ можно определить элемент $R_H(g) \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$, называемый *редукцией g по модулю H* . Для этого рассмотрим старший член $\text{lt}(g) = b\Lambda_{\Pi}^d$. Могут представиться два случая.

1. В списке H найдется элемент h_s , для которого $\text{lt}(h_s) = p\Lambda_{\Phi}^d$ и, кроме того, $\Pi = \Phi + \Omega$. В этом случае для элемента h_s с наименьшим возможным номером s положим $g = t_1 + g_1$, где $t_1 = bp^{-1} \frac{\partial^{|\Omega|}}{\partial z^{\Omega}}(h_s)$, $g_1 = g - t_1$, и положим $R_H(g) = R_H(g_1)$.

2. Элемент h_s с требуемым свойством в списке H отсутствует. Тогда мы полагаем $g = t_1 + g_1$, где $t_1 = \text{lt}(g)$, $g_1 = g - t_1$, и $R_H(g) = t_1 + R_H(g_1)$.

В любом из этих двух случаев $\text{lm}(g_1) < \text{lm}(g)$ (относительно порядка grlex), поэтому, применяя указанную выше процедуру к g_1 , мы запишем $g_1 = t_2 + g_2$ и

т. д. В итоге получим однозначно определенную запись (называемую *канонической*)

$$g = t_1 + t_2 + \dots + t_p, \quad (3.5)$$

в которой $\text{lm}(g) = \text{lm}(t_1) > \text{lm}(t_2) > \dots > \text{lm}(t_p)$. Полагая $R_H(0) = 0$, мы с помощью данного процесса однозначно определяем $R_H(g)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Пусть $\mathcal{V}$ – базовая подобласть в $\mathcal{U}$, $H = [h_1, \dots, h_r]$ – список над $\mathcal{V}$, состоящий из квазиотмеченных элементов модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Для любого элемента h_s этого списка, любого составного мультииндекса $\Omega = (\mu \mid \nu)$ и любого элемента $b \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ элемент вида $b\partial^\mu \left(\frac{\partial^{|\nu|}(h_s)}{\partial y^\nu} \right)$ будем называть *квазипрimitivesм*. Для любого элемента $g \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ можно определить элемент $qR_H(g) \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$, называемый *квазиредукцией g по модулю H* . Для этого рассмотрим квазистарший член $\text{qlt}(g) = b\Psi_\Pi^d$. Могут представиться два случая.

1. В списке H найдется элемент h_s , для которого $\text{qlt}(h_s) = p\Psi_\Phi^d$ и, кроме того, $\Pi = \Phi + \Omega$. В этом случае для элемента h_s с наименьшим возможным номером s мы положим $g = t_1 + g_1$, где $t_1 = bp^{-1}\partial^\mu \left(\frac{\partial^{|\nu|}(h_s)}{\partial y^\nu} \right)$, $\Omega = (\mu \mid \nu)$, $g_1 = g - t_1$, и положим $qR_H(g) = qR_H(g_1)$.

2. Элемент h_s с требуемым свойством в списке H отсутствует. Тогда мы полагаем $g = t_1 + g_1$, где $t_1 = \text{qlt}(g)$, $g_1 = g - t_1$, и $qR_H(g) = t_1 + qR_H(g_1)$.

В любом из этих двух случаев $\text{qlm}(g_1) < \text{qlm}(g)$ (относительно порядка qllex), поэтому, применяя указанную выше процедуру к g_1 , мы запишем $g_1 = t_2 + g_2$ и т. д. В итоге получим однозначно определенную запись (называемую *квазиканонической*)

$$g = t_1 + t_2 + \dots + t_p, \quad (3.6)$$

в которой $\text{qlm}(g) = \text{qlm}(t_1) > \text{qlm}(t_2) > \dots > \text{qlm}(t_p)$. Полагая $qR_H(0) = 0$, мы с помощью данного процесса однозначно определяем $qR_H(g)$.

Заметим, что

$$\deg(R_H(g)) \leq \deg(g), \quad \deg(qR_H(g)) \leq \deg(g), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{st}(R_H(g)) &\leq \max(\deg(g) + \text{st}(H), \text{st}(g)), \\ \text{st}(qR_H(g)) &\leq \max(\deg(g) + \text{st}(H), \text{st}(g)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Пусть $\mathcal{V}$ – базовая подобласть в $\mathcal{U}$, $H = [h_1, \dots, h_r]$ – список над $\mathcal{V}$, задающий базис (соответственно, квазибазис) Грёбнера над $\mathcal{V}$ подмодуля $\mathcal{K}$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Хорошо известно, что в этом случае элемент $R_H(g)$ (соответственно, $qR_H(g)$) определен независимо от порядка элементов списка H и условия $g \in \mathcal{K}$ и $R_H(g) = 0$ (соответственно, $g \in \mathcal{K}$ и $qR_H(g) = 0$) эквивалентны. Легко видеть, что для элемента $g \in \mathcal{K}$ все слагаемые t_s его (квази)канонической записи также лежат в $\mathcal{K}$ и (квази)прimitivesны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.8. Согласно предложению 3.7 существует разбиение $\mathbf{U}^0$ области $\mathcal{U}$, нормальное относительно ограничения $G^0 = H \mid \mathbf{U}^0$ списка H на $\mathbf{U}^0$. Обозначим через H^0 список, полученный нормированием списка G^0 . На f -м шаге алгоритма построения базиса Грёбнера (коротко – алгоритма БГ) по разбиению $\mathbf{U}^f = (\mathcal{U}_t, 1 \leq t \leq t(f))$ области $\mathcal{U}$ и списку $H^f = [H(t), 1 \leq t \leq t(f)]$ над $\mathbf{U}^f$ строится подходящее подразбиение $\mathbf{U}^{f+1}$

области $\mathcal{U}$ и список H^{f+1} над $\mathbf{U}^{f+1}$. Если $H(t) = [h_t^s, 1 \leq s \leq s(t)]$, то на f -м шаге алгоритма БГ сначала список $H(t)$ расширяется до списка $H^1(t)$ добавлением элементов $S(h_t^s, h_t^v)$ для всех пар $s < v$, для которых этот элемент определен. После этого каждый новый элемент g списка $H^1(t)$ заменяется элементом $R_{H(t)}(g)$ и полученный список обозначается через $H^2(t)$. Объединение списков $H^2(t)$ при $1 \leq t \leq t(f)$ определяет список V^f над $\mathbf{U}^f$. Затем по предложению 3.7 берем подразбиение $\mathbf{U}^{f+1}$ подразбиения $\mathbf{U}^f$, нормальное относительно ограничения $G^{f+1} = V^f \mid \mathbf{U}^{f+1}$ списка V^f на $\mathbf{U}^{f+1}$. Нормируем список G^{f+1} и обозначаем полученный список над $\mathbf{U}^{f+1}$ через H^{f+1} . Разбиение $\mathbf{U}^{f+1}$ и список H^{f+1} являются результатом, полученным на $(f+1)$ -м шаге алгоритма БГ. Известно (см. ниже), что через конечное число I шагов результат стабилизируется, т. е. $\mathbf{U}^{I+1} = \mathbf{U}^I$, $H^{I+1} = H^I$. Тогда алгоритм завершает работу, и мы обозначаем $\mathbf{W} = \mathbf{U}^I = (\mathcal{W}_t, 1 \leq t \leq p)$, $G = H^I = [G(t), 1 \leq t \leq p]$. По замечанию 3.3 для любого t элементы, образующие список $G(t)$, порождают $\mathcal{K}_{\mathcal{W}_t}$. По выбору I для любых двух элементов g_t^v и g_t^s списка $G(t)$ либо $S(g_t^s, g_t^v)$ не определено, либо $S(g_t^s, g_t^v) = 0$. Отсюда выводится, что для каждого t элементы $\text{lm}(g_t^s)$ порождают $\text{lm}(\mathcal{K}_{\mathcal{W}_t})$. Доказательство дословно повторяет вывод соответствующего утверждения при построении базисов Грёбнера для модулей над кольцами полиномов в [28] и [29].

Осталось доказать утверждения 2)–5). Для этого докажем, что число I шагов алгоритма БГ ограничено константой, зависящей от n, m, e и r .

Если алгоритм БГ не остановился до Z -го шага, то найдется один из атомов разбиения $\mathbf{U}^0$, скажем $\mathcal{U}^0$, затем один из атомов разбиения $\mathbf{U}^1$, скажем $\mathcal{U}^1$, и так далее такие, что выполнена цепочка включений

$$\mathcal{U}^0 \supset \mathcal{U}^1 \supset \dots \supset \mathcal{U}^Z. \quad (3.9)$$

Пусть $H_f = [h_f^s, 1 \leq s \leq s(f)]$ – список, отвечающий страту U^f . Обозначим через $M(h_f^s)$ мономиальный подмодуль в M^* , порожденный элементом $\text{lm}(h_f^s)$. Можно выбрать цепочку (3.9), обладающую следующим свойством: для каждого f найдется значение $s = S(f) \leq s(f)$ такое, что, обозначая $h_f = \text{lm}(h_f^{S(f)})$, $M^f = M(h_f^{S(f)})$, мы получим последовательность $h_1, h_2, \dots, h_Z$ элементов модуля M^* , каждый элемент h_{f+1} которой не содержится в объединении модулей $M^1, \dots, M^f$.

Действительно, построение базисов Грёбнера в [28], [29] показывает: если f таково, что любой элемент h_{f+1}^s содержится в объединении модулей $M^1, \dots, M^f$, то на этом шаге алгоритм БГ останавливается. Поэтому для получения нужных оценок следует лишь оценить длину цепочки $h_1, h_2, \dots, h_Z$. Это сделано в работе [31], и хотя в данной работе предполагается, что эта цепочка является антицепью (это означает, что для любых двух разных номеров f и t этой последовательности справедливы соотношения $h_f \notin M^t$ и $h_t \notin M^f$), метод доказательства сохраняется и в нашем случае. Кроме того, требуемая оценка длины цепочки $h_1, h_2, \dots, h_Z$ имеется в работе [25]. Это доказывает существование разбиения $\mathbf{W}$ области $\mathcal{U}$ и списка G над $\mathbf{W}$. Существование квазибазиса Грёбнера, т. е. разбиения $\mathbf{W}_1$ области $\mathcal{U}$ и списка G_1 над $\mathbf{W}_1$, доказывается так же, как и выше, с той лишь разницей, что вместо порядка grlex теперь следует рассмотреть порядок qllex , вместо нормальных разбиений – квазинормальные,

вместо элементов $S(f, g)$ – элементы $qS(f, g)$, вместо элементов $R_H(g)$ – элементы $qR_H(g)$ и т. д. Доказательство оценок также сохраняется. Предложение доказано.

3.5. Применим предложение 3.8 к списку $H^{\mathfrak{R}} = (\rho(F_1), \dots, \rho(F_g))$, порождающему $B(\mathcal{P}^\infty)$ -подмодуль $\mathfrak{R}$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{P}^\infty)$, и получим разбиение $\mathbf{V}$ области $\mathcal{P}^\infty$ и список H над $\mathbf{V}$, задающий базис Грёбнера в $\mathfrak{R}$ над $\mathbf{V}$. Следующее предложение не используется далее и приводится лишь для полноты изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. *Для любого атома $\mathcal{V}_s$ разбиения $\mathbf{V}$ и любого натурального k размерность $\dim \mathcal{R}_k(z)$ для любой точки z из $\mathcal{V}$ зависит только от s и не зависит от z , а отображение проекции $\omega_k: M_k \rightarrow M_{k-1}$ эпиморфно отображает $\mathcal{R}_k(z)$ на $\mathcal{R}_{k-1}(z)$ при $k > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем какой-нибудь атом $\mathcal{V}$ разбиения $\mathbf{V}$. Для натурального k перенумеруем все мономы из M_k^* по возрастанию относительно порядка grlex . Моном с номером r будем обозначать через $\Lambda_{\Phi(r)}^{d(r)}$, или просто p_r . Мономы $p_1, p_2, \dots, p_{r(k)}$ задают базис линейного пространства M_k^* , а также свободный базис $O(\mathcal{V})$ -модуля $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{V})$. Здесь $r(k) = \dim M_k^* (= mC_{n+k}^k)$. Определим в $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{V})$ другой базис $p'_1, p'_2, \dots, p'_{r(k)}$ следующим образом: если $p_r \notin \text{lm}([\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}})$, то положим $p'_r = p_r$; если $p_r \in \text{lm}([\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}})$, то обозначим через p'_r любой нормированный элемент из $[\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}}$ со свойством $\text{lm}(p'_r) = p_r$. (Такой элемент существует. Действительно, из определения базиса Грёбнера вытекает, что найдется элемент g списка $H(\mathcal{V})$, для которого $p_r = b \text{lm}(g)$, где $b \in B(\mathcal{V})$; тогда $p'_r = bg$.) Каждый элемент p'_r допускает однозначную запись

$$p'_r = v_r^s p_s,$$

где $v_r^s \in O(\mathcal{V})$. Пусть V^k – квадратная матрица порядка $r(k)$, r -я строка которой состоит из элементов $v_r^1, \dots, v_r^{r(k)}$. Ясно, что V^k есть треугольная матрица с единичной главной диагональю. Отсюда следует, что элементы p'_r также образуют свободный базис $O(\mathcal{V})$ -модуля $\mathcal{M}_k^*(\mathcal{V})$, а матрица V^k есть матрица перехода от базиса p_r к базису p'_r . Далее, элементы p'_r со свойством $p'_r \in [\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}}$ образуют базис $O(\mathcal{V})$ -модуля $[\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}}$. (Пусть $g \in [\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}}$. Возьмем такой элемент p'_r , что $\text{lm}(g) = \text{lm}(p'_r)$. Тогда существует элемент $a \in O(\mathcal{V})$, для которого $\text{lt}(g) = a \text{lt}(p'_r)$. Обозначим $g_1 = g - ap'_r$. Ясно, что $p'_r \in [\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}}$, $\text{lt}(g_1) < \text{lt}(g)$ и $g_1 \in [\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}}$. Повторяя приведенное рассуждение для g_1 и продолжая этот процесс аналогичным образом, получаем требуемое.) Через $\mathcal{Q}_k(\mathcal{V})$ обозначим $O(\mathcal{V})$ -подмодуль, порожденный элементами p'_r со свойством $p'_r \notin [\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}}$. Тогда имеет место прямое разложение

$$\mathcal{M}_k^*(\mathcal{V}) = [\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}} + \mathcal{Q}_k(\mathcal{V}), \quad (3.10)$$

в котором все слагаемые – свободные $O(\mathcal{V})$ -модули конечного ранга. Из равенства (3.10) вытекает разложение

$$\mathcal{M}_k^*(z) = M_k^* = \mathfrak{R}_k(z) + \mathcal{Q}_k(z) \quad (3.11)$$

линейного пространства M_k^* в сумму подпространств $\mathfrak{R}_k(z)$ и $\mathcal{Q}_k(z)$, откуда сразу следует, что сумма (3.10) прямая, а размерность $\dim \mathfrak{R}_k(z)$ (и размерность $\dim \mathcal{Q}_k(z)$) для всех точек $z \in \mathcal{V}$ постоянна. Тогда и размерность аннулятора $\mathcal{R}_k(z)$ пространства $\mathfrak{R}_k(z)$ для любой точки $z \in \mathcal{V}$ постоянна.

Для доказательства второго утверждения предложения обозначим через $V^k(z)$ матрицу, каждый элемент которой получен применением отображения e_z к соответствующему элементу матрицы V^k . Пусть вектор $b \in M_{k-1}$ задан координатами (b_r) , $1 \leq r \leq r(k-1)$, а вектор $c \in M_k$ — координатами (c_r) , $1 \leq r \leq r(k)$. Пусть для заданного вектора b нам нужно найти вектор c , удовлетворяющий равенству $b = \omega_k(c)$. Заметим, что это равенство равносильно соотношениям $b_r = c_r$ для всех r с условием $1 \leq r \leq r(k-1)$. Будем теперь находить координаты c_r последовательно для $r = r(k-1)+1, r(k-1)+2, \dots, r(k)$. Для нахождения c_r рассмотрим элемент p'_r , отвечающий r -й строке матрицы V^k . Если $p_r \notin \text{lm}([\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}})$, то значение $c_r \in \mathbb{R}$ выбирается произвольно. Если $p_r \in \text{lm}([\mathfrak{R}_k]_{\mathcal{V}})$, то r -я строка матрицы $V^k(z)$ имеет вид $(a_r^1, \dots, a_r^r, 0, \dots, 0)$, причем $a_r^r = 1$. В этом случае возьмем в качестве c_r единственное решение уравнения

$$\sum_{s=1}^r c_s a_r^s = 0.$$

Если $b \in \mathcal{R}_{k-1}(z)$, то построенный вектор c лежит в $\mathcal{R}_k(z)$. Предложение доказано.

Поскольку элементы списка $H^{\mathfrak{R}} = (\rho(F_1), \dots, \rho(F_g))$ имеют нулевую степень, они согласно предложению 3.6 порождают $\mathfrak{R}$ также и в том случае, когда $\mathfrak{R}$ рассматривается как $D(\mathcal{P}^\infty)$ -подмодуль. Применяя предложение 3.8 к $D(\mathcal{P}^\infty)$ -подмодулю $\mathfrak{R}$ модуля $M^*(\mathcal{P}^\infty)$, порожденному списком $H^{\mathfrak{R}}$, получим разбиение $\mathbf{V}_1$ области $\mathcal{P}^\infty$ и список H_1 над $\mathbf{V}_1$, задающий базис Грёбнера в $\mathfrak{R}$ над $\mathbf{V}_1$.

Далее, вплоть до окончания доказательства предложения 3.15, зафиксируем какой-нибудь атом $\mathcal{V}$ разбиения $\mathbf{V}_1$, и пусть $w_1, \dots, w_s$ — элементы списка $H = H_1(\mathcal{V})$ (напомним, что они порождают $\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}$). Пусть $f_1, \dots, f_u$ — все простые, а $q_1, \dots, q_v$ — все строго полупростые элементы среди элементов $w_1, \dots, w_s$. Обозначим $\mathcal{F} = \mathcal{E}(\mathcal{V}) \cap \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{I} = \mathcal{A}(\mathcal{V}) \cap \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. *Элементы $f_1, \dots, f_u$ порождают $\mathcal{F}$ как $C(\mathcal{V})$ -модуль, а $\mathcal{F}$ и элементы $q_1, \dots, q_v$ порождают $\mathcal{I}$ как $O(\mathcal{V})$ -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 3.4, 3.5 следует, что $f_1, \dots, f_u$ лежат в $\mathcal{E}(\mathcal{V})$, а значит, в $\mathcal{F}$. Возьмем произвольный элемент $g \in \mathcal{I}$ и рассмотрим его квазиканоническую (относительно списка H) запись (3.6). Элемент g полупрост, и условие $\text{qlt}(g) > \text{qlt}(t_s)$ в силу определения порядка qlx означает, что любое слагаемое t_s записи (3.6) также полупросто. В силу замечания 3.6 элемент t_s квазипрimitивен, т. е. найдутся (зависящие от s) элемент w_f списка H , мультииндексы μ и ν , функция $a \in O(\mathcal{V})$ такие, что $t_s = a \partial^\mu \left(\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial y^\nu} (w_f) \right)$. Отсюда следует, что $\nu = 0$, и если элемент t_s прост, то w_f также прост, а если t_s полупрост, то $t_s = a w_f$. С учетом предложений 3.4, 3.5 предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Если для элементов q_r и q_t из списка $q_1, \dots, q_v$ выполнено равенство $\text{qlt}(q_t) = \text{qlt}(q_r)$, то один из них можно исключить из списка, так как вместо q_t можно взять $q'_t = q_r - q_t$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что все элементы $\text{qlm}(q_1), \dots, \text{qlm}(q_v)$ различны.

Определим несколько подмодулей $O(\mathcal{V})$ -модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Перенумеруем каким-нибудь способом все квазимономы из Γ . Квазимоном с номером r будем обозначать через m_r . Квазимономы $m_1, m_2, \dots$ задают свободный базис $O(\mathcal{V})$ -модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Определим в $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ другой базис $m'_1, m'_2, \dots$ следующим образом: если $m_r \notin \text{qlm}[\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}]$, то положим $m'_r = m_r$; если $m_r \in \text{qlm}[\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}]$, то обозначим через m'_r любой квазинормированный элемент из $\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}$ со свойством $\text{qlt}(m'_r) = m_r$ (существование m'_r проверяется так же, как существование элементов p'_r при доказательстве предложения 3.9).

Через $\mathcal{M}_{(1)}$ обозначим $O(\mathcal{V})$ -подмодуль, порожденный мономами $m'_r (= m_r)$ со свойством $m'_r \notin \text{qlm}[\mathfrak{R}_{\mathcal{V}} \cup \mathcal{A}(\mathcal{V})]$. Через $\mathcal{M}_{(2)}$ обозначим $O(\mathcal{V})$ -подмодуль, порожденный квазимономами $m'_r (= m_r)$ со свойством $m'_r \in \text{qlm}[\mathcal{A}(\mathcal{V})]$, $m'_r \notin \text{qlm}[\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}]$; согласно предложениям 3.4, 3.5 имеем $\mathcal{M}_{(2)} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{V})$. Через $\mathcal{M}_{(3)}$ обозначим $O(\mathcal{V})$ -подмодуль, порожденный элементами m'_r со свойством $m'_r = \text{qlm}(m'_r) \in \text{qlm}[\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}]$, $m'_r \notin \text{qlm}[\mathcal{A}(\mathcal{V})]$; ясно, что $\mathcal{M}_{(3)} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}$. Через $\mathcal{M}_{(4)}$ обозначим $O(\mathcal{V})$ -подмодуль, порожденный элементами m'_r со свойством $m'_r = \text{qlm}(m'_r) \in \text{qlm}[\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}] \cap \text{qlm}[\mathcal{A}(\mathcal{V})]$. Заметим, что в силу предложений 3.4, 3.5 имеем $m'_r \in \mathcal{A}(\mathcal{V})$, и поэтому $\mathcal{M}_{(4)} = \mathcal{I}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. *Имеют место соотношения*

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{V}) = \mathcal{M}_{(1)} + \mathcal{M}_{(2)} + \mathcal{M}_{(3)} + \mathcal{I}, \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{V}} = \mathcal{M}_{(3)} + \mathcal{I}, \quad \mathcal{A}(\mathcal{V}) = \mathcal{M}_{(2)} + \mathcal{I}, \quad (3.12)$$

в которых все слагаемые – свободные $O(\mathcal{V})$ -модули, а все разложения прямые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Ясно, что можно записать $g = am_r + h$, где $a \in O(\mathcal{V})$, $m_r = \text{qlm}(g)$ и $\text{qlm}(h) < m_r$. Мы можем также записать $m'_r = m_r + h_1$, где $\text{qlm}(h_1) < m_r$. Отсюда получаем

$$g = am'_r + g_1,$$

где $g_1 = h + ah_1$ и $\text{qlm}(g_1) < \text{qlm}(g)$. Применяя указанный прием к g_1 и продолжая этот процесс, мы увидим, что элемент g лежит в $O(\mathcal{V})$ -модуле, порожденном $\mathcal{M}_{(1)}$, $\mathcal{M}_{(2)}$, $\mathcal{M}_{(3)}$ и $\mathcal{M}_{(4)}$ (так как любая убывающая относительно порядка qlm цепочка квазимономов обрывается). Если $g \in \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}$ или $g \in \mathcal{A}(\mathcal{V})$, то приведенное рассуждение доказывает, что g лежит в $O(\mathcal{V})$ -модуле, порожденном соответственно $\mathcal{M}_{(3)}$ и $\mathcal{M}_{(4)}$ или $\mathcal{M}_{(2)}$ и $\mathcal{M}_{(4)}$. Поскольку квазиведущие мономы всех элементов m'_r попарно различны и эти элементы квазинормированы, то все m'_r линейно независимы над кольцом $O(\mathcal{V})$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Если $m_r = \text{qlt}(q_t)$ для элемента q_t из списка $q_1, \dots, q_v$, то в приведенном выше построении модулей $\mathcal{M}_{(i)}$ можно положить $m'_r = q_t$, и это будет предполагаться далее.

Обозначим через Deg_0 константу, которая согласно предложению 3.8 ограничивает степени элементов $w_1, \dots, w_s$ и, в том числе, элементов $q_1, \dots, q_v$. Согласно предложению 3.8 она зависит только от n , m и $\deg(H^{\mathfrak{R}}) = q$ (степени псевдогруппы PG).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12. Назовем (возможно, бесконечную) систему квазинормированных элементов $g_1, g_2, \dots$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ *специальной*, если отображение qlt осуществляет инъективное отображение этой системы в множество M^* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Пусть специальная система $(g_1, g_2, \dots)$ элементов модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$ порождает $O(\mathcal{V})$ -модуль $\mathfrak{A}$ и z – любая точка из $\mathcal{V}$. Тогда $\mathfrak{A}$ является свободным $O(\mathcal{V})$ -подмодулем в $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$, элементы $g_1(z), g_2(z), \dots$ образуют базис линейного подпространства $\mathfrak{A}(z)$ пространства M^* и $\text{rang } \mathfrak{A}(z) = \dim[\mathfrak{A}(z)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Выше были построены системы образующих в модулях $\mathcal{M}_{(1)} - \mathcal{M}_{(4)}$. Обозначим эти системы образующих через $G_{(1)} - G_{(4)}$ соответственно. Легко видеть, что объединение $G_{(1)} \cup G_{(2)} \cup G_{(3)} \cup G_{(4)}$ есть специальная система элементов (даже образующих) модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Из предложения 3.10 легко следует, что введенное выше множество $G_{(4)}$ есть дизъюнктивное объединение:

$$G_{(4)} = G_F \cup G_D, \quad (3.13)$$

где $G_D = \{q_1, \dots, q_v\}$ состоит из всех строго полупростых элементов множества $G_{(4)}$, а G_F – из всех простых элементов этого множества. Также легко видеть, что элементы G_F образуют (специальную) систему образующих $C(\mathcal{V})$ -подмодуля $\mathcal{F}$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$. Поэтому отображение lm , которое совпадает с отображением qlm на подмодуле $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ (содержащем $\mathcal{F}$), отображает G_F биективно на множество мономов $\text{lm}(\mathcal{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. Для любой точки $z \in \mathcal{V}$ выполнено равенство

$$\mathcal{I}(z) = \mathfrak{A}(z) \cap \mathcal{A}(z). \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является очевидным следствием формул (3.12) и предложения 3.12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. Для любого натурального $k \geq \text{Deg}_0$ выполняется равенство $\mathcal{A}_k(z) \cap \mathcal{R}_k(z) = \mathcal{I}_k(z) = \mathcal{I}(z)_k$ и размерность $\dim \mathcal{I}_k(z)$ не зависит от точки $z \in \mathcal{V}$.

(Напомним, что использованные обозначения введены в пп. 2.4, 3.1.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{A}(z) \cap \mathfrak{A}(z) = \mathcal{I}(z)$ по предложению 3.13, то

$$\mathcal{I}_k(z) \subseteq \mathcal{A}_k(z) \cap \mathcal{R}_k(z) \subseteq \mathcal{I}(z) \cap M_k^* = \mathcal{I}(z)_k.$$

Пусть $k \geq \text{Deg}_0$. Покажем, что $\mathcal{I}_k(z) = \mathcal{I}(z)_k$. Пусть $G_{(4)} = \{f_1, f_2, \dots\}$. Тогда по предложению 3.12 векторы $f_1(z), f_2(z), \dots$ образуют базис в $\mathcal{I}(z)$, и если вектор f принадлежит $\mathcal{I}(z)_k$, то в его запись через этот базис входят с ненулевыми коэффициентами только те векторы $f_h(z)$, для которых $\deg[\text{qlm}(f_h)]$ не превосходит k . Однако все элементы f_h с условием $\deg[\text{qlm}(f_h)] \leq k$ содержатся в $\mathcal{I}_k$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Для любого натурального $k \geq \text{Deg}_0$ имеем $\dim \mathcal{I}(z)_k = \dim F_k(z) + v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. замечание 3.10). Обозначим через $(G_{(4)})_k$ (соответственно, $(G_F)_k$) подмножество $G_{(4)}$ (соответственно, G_F), состоящее из элементов f_h с условием $\deg(f_h) \leq k$. По предложению 3.12 размерность $\dim \mathcal{I}_k(z)$ равна количеству элементов множества $(G_{(4)})_k$, а размерность $\dim F_k(z)$ равна количеству элементов множества $(G_F)_k$. Поскольку $k \geq \text{Deg}_0$, то $(G_{(4)})_k = (G_F)_k \cup G_D$. Следствие доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. Существует разбиение $\mathbf{W}(\mathcal{V})$ базовой области $\mathcal{V}$ такое, что для любого атома $\mathcal{W}$ этого разбиения и любого натурального k выполняются равенства $\mathcal{A}_k(z) \cap \mathcal{R}_k(z) = \mathcal{I}_k(z) = \mathcal{I}(z)_k$ и размерность $\dim \mathcal{I}_k(z)$ не зависит от точки $z \in \mathcal{W}$ (а зависит только от выбранного атома $\mathcal{W}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ множество $(G_{(4)})_k$ для значения $k = \text{Deg}_0$. Пусть B – количество элементов в этом множестве (величина B не превосходит $n + tA$, где A – размерность пространства многочленов степени Deg_0 от n переменных). Рассмотрим ведущие мономы $\text{lm}(m'_r)$ всех элементов m'_r из множества $\mathfrak{Z}$, и пусть Λ_{Π}^c – наибольший из этих мономов относительно порядка grlex . Элементы из множества $\mathfrak{Z}$ порождают свободный $O(\mathcal{V})$ -модуль $\mathcal{D}$, являющийся прямым слагаемым $O(\mathcal{V})$ -модуля $\mathcal{I}$. Мы построим такое разбиение $\mathbf{W}$, для любого атома $\mathcal{W}$ которого $O(\mathcal{W})$ -модуль $\mathcal{D}_{\mathcal{W}}$ обладает треугольным базисом q_h , $1 \leq h \leq B$ (назовем такое разбиение *треугольным*). Это по определению означает, что ведущие мономы $\text{lm}(q_h)$ строго упорядочены относительно порядка grlex и старшие коэффициенты элементов q_h отличны от нуля всюду в $\mathcal{W}$. Ясно, что это докажет предложение. Для построения $\mathbf{W}$ удобно обозначить $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^1$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1$. Возьмем из множества $\mathfrak{Z}^1$ элемент m'_r с условием $\text{lm}(m'_r) = \Lambda_{\Pi}^c$; если таких элементов несколько, выбираем из них любой. Обозначим выбранный элемент через g_1 , и пусть $\text{lt}(g_1) = a_1 \Lambda_{\Pi}^c$. Пусть $t_h = b_h \Lambda_{\Pi}^c + f_h$, $2 \leq h \leq B$, – остальные элементы множества $\mathfrak{Z}^1$.

Определим подобласть $\mathcal{W}_1$ области $\mathcal{V}^1$ условием $\{z \in \mathcal{W}_1 \Leftrightarrow a_1(z) \neq 0 \text{ и } z \in \mathcal{V}^1\}$, а в модуле $\mathcal{D}_{\mathcal{W}_1}$ выберем систему образующих, которая состоит из $q_1 = g_1 \mid \mathcal{W}_1$ и $\bar{t}_h = [t_h - (\frac{b_h}{a_1})g_1] \mid \mathcal{W}_1$. Обозначим $O(\mathcal{W}_1)$ -подмодуль, порожденный всеми элементами $\bar{t}_h$, через $\mathfrak{F}$. Заметим, что ведущие мономы $\text{lm}(\bar{t}_h)$ всех элементов $\bar{t}_h$ строго меньше Λ_{Π}^c относительно порядка grlex . Поэтому, проводя индукцию по этому порядку, можно считать по индуктивному предположению, что существует разбиение $\mathbf{W}_1$ области $\mathcal{W}_1$, для любого атома $\mathcal{U}$ которого существует треугольный базис q_t , $2 \leq t \leq B$, модуля $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}}$. Тогда ясно, что $q_1 \mid \mathcal{U}$ и q_t , $2 \leq t \leq B$, образуют треугольный базис модуля $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$. Считая, что $\mathcal{V}^{d-1}$ и $\mathcal{W}_{d-1}$ уже построены, определяем $\mathcal{V}^d = \mathcal{V}^{d-1} - \overline{\mathcal{W}_{d-1}}$ и множество $\mathfrak{Z}^d = \mathfrak{Z}^1 \mid \mathcal{V}^d$. Если в множестве $\mathfrak{Z}^d$ найдется элемент g_d со свойством $\text{lt}(g_d) = a_d \Lambda_{\Pi}^c$, проводим для $\mathfrak{Z}^d$, $\mathcal{V}^d$ такое же построение, как для $\mathfrak{Z}^1$, $\mathcal{V}^1$. В результате получаем $\mathcal{W}_d$ и треугольное разбиение $\mathbf{W}_d$ этой области. Если в множестве $\mathfrak{Z}^d$ не найдется элемент g со свойством $\text{lt}(g) = a_d \Lambda_{\Pi}^c$, мы полагаем $\mathcal{W}_d = \mathcal{V}^d$. В этом случае старшие члены всех элементов множества $\mathfrak{Z}^d$ строго меньше Λ_{Π}^c , поэтому по индуктивному предположению $\mathcal{W}_d$ обладает треугольным разбиением $\mathbf{W}_d$. В этом случае к следующему значению $d + 1$ мы уже не переходим.

Поскольку для любого d элементы $g_1, g_2, \dots, g_{d-1}, g_d$ отвечают различным элементам множества $\mathfrak{Z}$, процесс построения разбиения $\mathbf{W}_d$ обрывается на конечном значении d_0 .

В качестве $\mathbf{W}(\mathcal{V})$ мы берем разбиение, состоящее из всех атомов всех разбиений $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{d_0}$. Предложение доказано.

Возьмем разбиения $\mathbf{W}(\mathcal{V})$ каждого атома $\mathcal{V}$ разбиения $\mathbf{V}_1$, построенного перед предложением 3.10, и обозначим через $\mathbf{V}_2$ разбиение области $\mathcal{P}^\infty$, состоящее из всех атомов всех этих разбиений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.16. *Для любого натурального k размерности $\dim \mathcal{A}_k(z)$ и $\dim \mathcal{E}_k(z)$ не зависят от точки $z \in \mathcal{P}^\infty$, $\dim \mathcal{A}_k(z) = \dim \mathcal{E}_k(z) + n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\mathcal{E}_k(z)$ порождается векторами $\Psi_\Phi^b(z)$, отвечающими простым квазимономам, с дополнительным условием $|\Phi| \leq k$, пространство $\mathcal{A}_k(z)$ получается добавлением к $\mathcal{E}_k(z)$ векторов $\Lambda^1, \dots, \Lambda^n$. Из предложения 3.1 следует, что все эти векторы для любой точки $z \in \mathcal{P}^\infty$ линейно независимы, поэтому размерности $\dim \mathcal{E}_k(z)$ и $\dim \mathcal{A}_k(z)$ определяются только количеством соответствующих векторов $\Psi_\Phi^d(z)$ и не зависят от точки $z \in \mathcal{P}^\infty$. Доказательство завершено.

3.6. Определим подпространство в M^* формулой $L_T = \text{qlt}(\mathcal{E}(\mathcal{P}^\infty))$. Пусть $\mathcal{V}$ – какой-нибудь атом разбиения $\mathbf{V}_2$, z – любая точка в $\mathcal{V}$. Снова положим $\mathcal{F} = \mathcal{E}(\mathcal{V}) \cap \mathfrak{R}_\mathcal{V}$, $\mathcal{I} = \mathcal{A}(\mathcal{V}) \cap \mathfrak{R}_\mathcal{V}$.

ЛЕММА 3.1. 1) *Множество элементов $\Lambda_\Phi^b = \text{qlt}(\Psi_\Phi^b) = \text{lt}(\Psi_\Phi^b)$ для всех простых квазимономов (т.е. для $n+1 \leq b \leq n+m$, $\Phi = (\mu \mid 0)$) образует базис пространства L_T над $\mathbb{R}$.*

2) *Кольцо многочленов $C = \mathbb{R}(\partial_1, \dots, \partial_n)$ от n переменных стандартным образом действует на L_T (если $\Phi = (\nu \mid 0)$, то элемент ∂^μ переводит Λ_Φ^b в Λ_Ψ^b с $\Psi = (\nu + \mu \mid 0)$), превращая L_T в свободный модуль со свободными образующими $\Lambda^{n+1}, \dots, \Lambda^{n+m}$ над кольцом C .*

3) *Множество $\text{qlm}(\mathcal{F}) = \text{lm}(\mathcal{F})$ является мономиальным C -подмодулем L_T .*

4) *Для любого натурального k выполнены равенства $\dim[(L_T)_k] = \dim[\mathcal{E}_k(z)]$, $\dim[\mathcal{F}_k] = \dim\{\text{lm}(\mathcal{F})_k\}$, $\dim \mathcal{A}_k(z) = \dim\{(L_T)_k\} + n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы тривиально и поэтому не приводится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.17. *Разбиение $\mathbf{V}_2$ регулярно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $z \in \mathcal{V}$ пространство $\mathcal{A}_k(z)$ естественно отождествляется с пространством $[TJ^k(z_k)]^*$, двойственным к касательному пространству в точке $\pi(\infty, k)(z) = z_k \in J^k$, при этом пространство $[\mathcal{I}(z)]_k$ является аннулятором подпространства $\Delta_k(z)$ пространства $TJ^k(z_k)$ в $\mathcal{A}_k(z)$. Поэтому пространство $[\Delta_k(z)]^*$ естественным образом отождествляется с факторпространством $\mathcal{A}_k(z)/[\mathcal{I}(z)]_k$, следовательно,

$$\dim \Delta_k(z) = \dim \mathcal{A}_k(z) - \dim\{[\mathcal{I}(z)]_k\}.$$

Ввиду предложения 3.15 предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.18. *Существует константа $K_2(n, m, q)$, зависящая только от n , m и порядка q псевдогруппы PG и такая, что функция Гильберта каждого атома разбиения $\mathbf{V}_2$ является многочленом при $K_2(n, m, q) \leq k$. Список функций УН из условия теоремы 1.1 о регулярности конечен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \geq \text{Deg}_0$. Для атома $\mathcal{V} = \mathcal{V}_s$ разбиения $\mathbf{V}_2$ в силу предложения 3.16 и леммы 3.1 очевидно, что

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A}_k(z) - \dim [\mathcal{I}(z)]_k(z) &= (\dim \mathcal{E}_k(z) + n) - (\dim \mathcal{F}_k(z) + v) \\ &= (L_T)_k - \dim \mathcal{F}_k(z) + n - v. \end{aligned}$$

Итак, при $k \geq \text{Deg}_0$ функция Гильберта H_s атома $\mathcal{V}_s$ отличается только константой $c = n - v$ (которая удовлетворяет неравенству $0 \leq c \leq n$) от функции Гильберта C -подмодуля $\text{lm } F$ модуля L_T . Степени образующих $\text{lm}(f_1), \dots, \text{lm}(f_u)$ модуля $\text{lm } F$ ограничены константой $\text{Deg}_0(n, m, q)$, не зависящей от s . Хорошо известно, что таких подмодулей конечное число. Также хорошо известно, что существует константа K_2 , зависящая только от n , m и Deg_0 , т. е. в конечном счете только от n , m и q , и что $H_s(k)$ при $K_2(n, m, q) \leq k$ является многочленом от k . Для любого значения k имеем $\dim \Delta_k(z) \leq \dim L_{k+1} = n C_{n+k}^k$, поэтому $H_s(k)$ при $k \leq \text{Deg}_0$ может принимать только ограниченное число значений. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Доказательство предложения 3.18 показывает, что при $\text{Deg}_0(n, m, q) \leq k$ каждая функция $\text{Hilb}_s(k)$ из списка УН совпадает с функцией Гильберта подходящего подмодуля F_s (равного $\text{lm}(E(\mathcal{V}_s) \cap \mathfrak{R}_{\mathcal{V}_s})$) модуля L_T .

Наконец, из предложения 3.18 следует теорема 1.1 о регулярности (существование константы $K(1) = K_1(n, m, q)$ следует из предложения 3.8). Искомым разбиением $\mathbf{V}$ является построенное выше разбиение $\mathbf{V}_2$.

Теорема 1.2 о рациональности непосредственно следует из теоремы 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Заметим, что каждый атом $\mathcal{V}$ разбиения $\mathbf{V}_2$ состоит из внутренних точек множества $\mathfrak{P}$, определенного условиями: $x \in \mathfrak{P} \Leftrightarrow \{f_1(x) = 0, \dots, f_r(x) = 0, g(x) \neq 0\}$ для подходящих функций $f_1, \dots, f_r, g$, называемых *определяющими функциями атома*. Необходимо убедиться в том, что на каждом шаге построения каждого атома разбиения $\mathbf{V}_2$ возникают области только указанного вида. Данное построение проведено в работе [25] для аналогичной ситуации, и поэтому здесь мы его не приводим. При этом по заданным уравнениям псевдогруппы PG можно найти образующие подмодуля $\mathcal{F}$ модуля $\mathcal{M}^*(\mathcal{V})$, отвечающего атому $\mathcal{V}$ согласно лемме 3.1. При нахождении этих образующих мы только продолжаем определяющие уравнения псевдогруппы PG , берем их линейные комбинации, вычисляем ранги определителей, состоящих из коэффициентов этих уравнений. Это также подробно проведено в аналогичной ситуации в работе [25]. После этого явно находятся коэффициенты полинома $\text{Hilb}_{\mathcal{V}}$, задающего функцию Гильберта страта $\mathcal{V}$ при $k \geq K_2(n, m, q)$. Построение разбиения $\mathbf{W}(V)$ из предложения 3.15 и нахождение значения функции $\text{Hilb}_{\mathcal{V}}(k)$ при каждом значении $k \leq K_2(n, m, q)$ также можно провести явно с помощью аналогичных рассуждений. Этим мы завершаем доказательство теоремы.

Для аналитически заданной псевдогруппы PG доказательство теоремы 1.1 показывает, что определяющие функции любого атома разбиения V_2 аналитичны. Поэтому разбиение V_2 состоит только из единственного атома V , заданного условием $g(x) \neq 0$, для подходящей аналитической функции $g(x)$. Это доказывает утверждение 1.1. Заметим также, что V можно заменить минимальным инвариантным относительно псевдогруппы PG множеством V' , содержащим V . Ясно, что V' является дополнением к замкнутому множеству, заданному системой уравнений $\{g(d(x)) = 0, d \in PG\}$.

Список литературы

1. V. I. Arnol'd, "Mathematical problems in classical physics", *Trends and perspectives in applied mathematics*, Appl. Math. Sci., **100**, Springer-Verlag, New York, 1994, 1–20.
2. В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000; англ. пер.: V. I. Arnold, *Arnold's problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
3. А. С. Шмелев, "О дифференциальных инвариантах некоторых дифференциально-геометрических структур", *Особенности гладких отображений с дополнительными структурами*, Тр. МИАН, **209**, Наука, М., 1995, 234–267; англ. пер.: A. S. Shmelev, "On differential invariants of some differential geometric structures", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **209** (1995), 203–234.
4. А. С. Шмелев, "Функциональные модули ростков римановых метрик", *Функц. анализ и его прил.*, **31**:2 (1997), 58–66; англ. пер.: A. S. Shmelev, "Functional moduli of jets of Riemannian metrics", *Funct. Anal. Appl.*, **31**:2 (1997), 119–125.
5. А. С. Шмелев, "Некоторые свойства симплектических и гиперкелеровых структур", *Докл. РАН*, **336**:3 (1994), 304–306; англ. пер.: A. S. Shmelev, "Some properties of symplectic and hyper-Kählerian structures", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **49**:3 (1994), 511–514.
6. T. Y. Thomas, *The differential invariants of generalized spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
7. Ж. Поммаре, *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. F. Pommaret, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, Math. Appl., **14**, Gordon & Breach, New York–London–Paris, 1978.
8. S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig, Teubner, 1922.
9. E. Cartan, *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
10. Ch. Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1909.
11. Ch. Riquier, *La méthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Memorial Sci. Math. fasc. XXXII, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
12. M. Janet, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Memorial Sci. Math. fasc. XXI, Gauthier-Villars, Paris, 1927.
13. M. Janet, *Équations aux dérivées partielles*, Formulaire de Math., C.N.R.S., fasc. VII, 1956.
14. J. M. Thomas, *Systems and roots*, Byrd Press, Richmond, 1962.
15. J. F. Ritt, *Differential algebra*, Dover, New York, 1966.
16. D. C. Spencer, "Overdetermined systems of linear partial differential equations", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 179–239.
17. M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publ. Soc. Mat., Sao Paulo, 1967.
18. E. Kahler, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Teubner, Leipzig, 1934.

19. R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, P. A. Griffiths, *Exterior differential systems*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **18**, Springer-Verlag, New York, 1991.
20. Ph. A. Griffiths, *Exterior differential systems and the calculus of variations*, Progr. Math., **25**, Boston, MA, Birkhäuser, 1983.
21. R. Bryant, Ph. Griffiths, L. Hsu, "Hyperbolic exterior differential systems and their conservation laws. Part I", *Selecta Math. (N.S.)*, **1**:1 (1995), 21–112.
22. R. Bryant, Ph. Griffiths, L. Hsu, "Hyperbolic exterior differential systems and their conservation laws. Part II", *Selecta Math. (N.S.)*, **1**:2 (1995), 265–323.
23. R. B. Gardner, *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **58**, SIAM, Philadelphia, PA, 1989.
24. P. J. Olver, *Equivalence, invariants, and symmetry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
25. Р. А. Саркисян, И. Г. Шандра, "О регулярности и теореме Трессе для геометрических структур", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:2 (2008), 151–192; англ. пер.: R. A. Sarkisyan, I. G. Shandra, "Regularity and Tresse's theorem for geometric structures", *Izv. Math.*, **72**:2 (2008), 345–382.
26. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978; англ. пер.: L. V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York, 1982.
27. Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983; англ. пер.: N. Kh. Ibragimov, *Transformation groups applied to mathematical physics*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Reidel Publ., Dordrecht–Boston–Lancaster, 1985.
28. D. Bayer, D. Mumford, "What can be computed in algebraic geometry?", *Computational algebraic geometry and commutative algebra* (Cortona, Italy, 1991), Sympos. Math., **34**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, 1–48.
29. D. Eisenbud, *Commutative algebra*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
30. А. Г. Хованский, С. П. Чулков, *Геометрия полугруппы $Z_{\leq 0}^n$* , Изд-во МЦНМО, М., 2006.
31. V. N. Latyshev, "A combinatorial complexity of Gröbner bases", *J. Math. Sci. (New York)*, **102**:3 (2000), 4134–4138.

Р. А. САРКИСЯН (R. A. SARKISYAN)

Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва

E-mail: rafael.sarkisyan@mail.ru

Поступило в редакцию

11.10.2007

09.06.2008