Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, Теоремы тауберова типа для обобщенной мультипликативной свертки, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 1, 37–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/im274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:13:35

УДК 517.5

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Теоремы тауберова типа для обобщенной мультипликативной свертки

Обсуждается следующая задача. Пусть f – обобщенная функция медленного роста с носителем на положительной полуоси, а φ_k – последовательность “пробных” функций такая, что $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ при $k \rightarrow +\infty$ в некотором функциональном пространстве. Пусть существует предел $\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_k(t)) \rightarrow c$, $k \rightarrow +\infty$, где $\rho(k)$ – правильно меняющаяся функция. Требуется найти условия, при которых существует предел $\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi(t)) \rightarrow c_\varphi$, $k \rightarrow +\infty$, для всех основных функций φ . Сформулированы и доказаны теоремы, в которых приведены общие достаточные условия, решающие поставленную выше задачу. В качестве приложения изучается вопрос существования квазиасимптотики решения обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Доказаны абелевы и тауберовы теоремы для широкого класса интегральных преобразований обобщенных функций таких, например, как обобщенное интегральное преобразование Стильтеса.

Библиография: 22 наименования

Введение

Известная тауберова теорема Н. Винера [5], [6] в ее мультипликативном варианте гласит. Пусть $f(t) \in L_\infty(0, +\infty)$, а функция $\varphi_0(t) \in L_1(0, +\infty)$ имеет преобразование Меллина

$$\widehat{\varphi}_0(x) \equiv \int_0^\infty t^{-ix} \varphi_0(t) dt \neq 0 \quad \text{для всех } x \in (-\infty, +\infty). \quad (0.1)$$

Тогда из существования предела мультипликативной свертки $f(t)$ с $\varphi_0(t)$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f(kt) \varphi_0(t) dt = c, \quad (0.2)$$

следует существование аналогичного предела для свертки $f(t)$ с любой $\varphi(t) \in L_1(0, +\infty)$.

Эта теорема играет важную роль в гармоническом анализе и имеет многочисленные применения в различных областях математики (см. [7]–[12], [14]). Вместе с тем, с точки зрения ее применения в современной математической физике, условие принадлежности функций f и φ пространствам L_∞ и L_1 является весьма ограничительным. С другой стороны, весьма часто в приложениях случается ситуация,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 99-01-00080 и № 96-15-96131).

когда вместо "чистой" мультипликативной свертки $(f(kt), \varphi_0(t))$ приходится рассматривать "испорченную" (обобщенную) свертку

$$F(k) = (f(kt), \varphi_k(t)). \quad (0.3)$$

Здесь семейство¹ $\{\varphi_k(t), k > k_0\}$ таково, что $\varphi_k(t) \rightarrow \varphi_0(t), k \rightarrow +\infty$.

В предыдущей статье авторов [1] доказан ряд теорем типа Винера для чистой мультипликативной свертки в классах обобщенных функций медленного роста в наиболее общей асимптотической шкале – шкале автомодельных (правильно меняющихся) функций.

В данной работе мы изучаем обобщенную мультипликативную свертку. Задача состоит в следующем. Пусть $f \in \mathcal{S}'_+$, т.е. является обобщенной функцией медленного роста с носителем на положительной полуоси, а $\varphi_k(t)$ – последовательность "пробных" функций такая, что $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ при $k \rightarrow +\infty$ в некотором функциональном пространстве (в каком именно уточняется далее). Пусть, кроме того, $\rho(k)$ – автомодельная функция и существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_k(t)) \rightarrow c, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (0.4)$$

Требуется найти условия, при которых существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) \rightarrow c_\varphi, \quad k \rightarrow +\infty, \quad (0.5)$$

для всех основных функций $\varphi(t)$. Представляет также интерес случай, когда предел (0.4) существует не на одной последовательности, а на семействе последовательностей $\varphi_k^\beta(t)$, где β принадлежит некоторому абстрактному множеству. Это тем более интересно, что, как будет показано ниже, функции $\varphi_k(t)$ не могут принадлежать классическому основному пространству Шарца $\mathcal{S}$, в то время как второй случай это допускает. Это особенно важно при изучении асимптотических свойств широкого класса интегральных преобразований (см. ниже).

В § 1 вводятся необходимые определения и обозначения и напоминаются некоторые факты из теории обобщенных функций.

В § 2 обсуждаются пространства основных функций $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, где a, M характеризуют поведение и гладкость этих функций на бесконечности, а b, N – в окрестности нуля. Эти пространства введены в работе [1] и являются важным элементом дальнейших рассуждений. Мы приводим основные свойства этих пространств, преобразование Меллина функций из них, лемму о свертке и др. Эти свойства достаточно традиционны и в схожих ситуациях изучались, например, в работах [2], [11], [12].

В § 3 мы изучаем банаховы пространства семейства последовательностей основных функций, вводим обобщенную мультипликативную свертку и изучаем некоторые ее свойства.

В § 4 рассматриваются квазиасимптотические свойства обобщенных функций из введенных пространств и доказываются основные леммы. § 5 центральный.

¹В дальнейшем вместо слова "семейство" нам удобно употреблять слово "последовательность".

Здесь сформулированы и доказаны основные теоремы, в которых приведены общие достаточные условия, решающие поставленные выше задачи.

§ 6 и 7 посвящены некоторым приложениям. В § 6 мы изучаем вопрос существования квазиасимптотики решения обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Найдены достаточные условия на эти коэффициенты, обеспечивающие существование указанной квазиасимптотики, если правая часть обладает ею. Здесь же доказана теорема о некомпенсации особенностей голоморфных функций. В § 7 доказываются абелевы и тауберовы теоремы для интегральных преобразований обобщенных функций таких, как обобщенное интегральное преобразование Стильтьеса, интегральное преобразование с логарифмическим ядром и с ядром арктангенса. Излагаемый здесь метод применим и для широкого класса других интегральных преобразований.

Наконец, в приложении (§ 8) доказывается ряд вспомогательных утверждений, доказательство которых в основном тексте, на наш взгляд, сильно перегрузило бы изложение и затруднило восприятие основных результатов.

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть a, b – нецелые вещественные числа, $a > b$. Обозначим через Π_b^a полосу

$$\Pi_b^a = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : b < y < a, x \in \mathbb{R}\} \quad (1.1)$$

и через $\bar{\Pi}_b^a$ – ее замыкание.

При нецелых $x < -1$ определим функцию $\langle x \rangle$ формулой

$$\langle x \rangle = [-x - 1],$$

где $[\xi]$ – целая часть числа ξ . Выполнено неравенство

$$-2 < \langle x \rangle + x < -1. \quad (1.2)$$

Если функция $\varphi(t)$ имеет в нуле m производных, то ее многочлен Тейлора в нуле порядка m обозначается

$$T_{\varphi(t)}^m \equiv T_{\varphi}^m = \sum_{j=0}^m \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j, \quad \varphi^{(j)}(0) = \left. \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right|_{t=0}.$$

Положительная и непрерывная при достаточно больших k функция $\rho(k)$ называется *автомодельной* (*правильно меняющейся*), если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} = \psi(t),$$

причем сходимость равномерная по t на каждом компакте полуоси $(0, \infty)$. Легко видеть, что $\psi(t) = t^\alpha$ при некотором α . В этом случае функцию $\rho(k)$ называем *автомодельной порядка α* (см. [4]).

В дальнейшем автомодельные функции играют роль асимптотической шкалы, и нам понадобятся некоторые их свойства, которые мы сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует k_0 такое, что:

$$\begin{aligned} t^{\alpha-\varepsilon} &\leq \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq t^{\alpha+\varepsilon} \quad \text{при} \quad k > k_0, \quad t > 1 + \varepsilon, \\ t^{\alpha+\varepsilon} &\leq \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq t^{\alpha-\varepsilon} \quad \text{при} \quad \frac{k_0}{k} < t < 1 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подробнее см. [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , а $\{\rho_\beta(k), \beta \in I\}$ – семейство положительных функций, определенных при $k > k_1$ (здесь I – некоторое множество индексов). Пусть существует постоянная c , не зависящая от β , так что $\frac{\rho_\beta(k)}{\rho(k)} < c$ при $k > k_1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная k_2 , не зависящая от β , такая, что

$$\frac{\rho_\beta(kt)}{\rho(k)} \leq \begin{cases} ct^{\alpha+\varepsilon} & \text{при} \quad k > k_2, \quad t > 1 + \varepsilon, \\ ct^{\alpha-\varepsilon} & \text{при} \quad \frac{k_2}{k} < t < 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Действительно, при данном $\varepsilon > 0$ и k_0 таком, как в лемме, при $k > k_2 = \max\{k_0, k_1\}$ имеем

$$\frac{\rho_\beta(kt)}{\rho(k)} = \frac{\rho_\beta(kt)}{\rho(kt)} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq \begin{cases} ct^{\alpha+\varepsilon} & \text{при} \quad k_1 \leq k_2 < k, \quad t > 1 + \varepsilon, \\ ct^{\alpha-\varepsilon} & \text{при} \quad \frac{k_0}{k} \leq \frac{k_2}{k} < t < 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Стандартное пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций обозначаем, как обычно, через $\mathcal{S}$, так что $\mathcal{S}'$ – стандартное пространство обобщенных функций медленного роста. Пространство обобщенных функций медленного роста с носителями на $[0, +\infty)$ обозначается через $\mathcal{S}'_+$, оно является сопряженным к пространству $\mathcal{S}_+$ бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ функций φ таких, что

$$\max_{|j| \leq m} \sup_{0 \leq t < +\infty} (1 + t^m) |\varphi^{(j)}(t)| < \infty, \quad m = 0, 1, \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ обладает квазиасимптотикой относительно функции $\rho(k)$ на функции $\varphi(t)$, если существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = \text{const.} \quad (1.4)$$

Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi \quad \text{для любой} \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}_+, \quad (1.5)$$

то мы говорим, что $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Если $c_\varphi = 0$ для $\forall \varphi \in \mathcal{S}_+$, то будем говорить, что $f(t)$ обладает тривиальной квазиасимптотикой.

Если

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = O(1) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty \quad \text{для любой } \varphi(t) \in \mathcal{S}_+, \quad (1.6)$$

то говорят, что $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\rho(k)$.

Отметим, что если $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно некоторой $\rho(k)$, то $\rho(k)$ – обязательно автомодельная функция какого-то порядка α , а c_φ в формуле (1.5) равно $\text{const} (f_{\alpha+1}(t), \varphi(t))$, где $f_\beta(t)$ – лиувиллевское ядро дробного интегрирования и дифференцирования:

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \frac{\Theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dt^N} f_{\beta+N}(t) & \text{при } \beta \leq 0, \quad \beta + N > 0. \end{cases}$$

Здесь $\Theta(t)$ – функция Хевисайда: $\Theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\Theta(t) = 1$ при $t > 0$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'_+$. Обобщенная функция $f^{(-\beta)}(t)$, равная (аддитивной) свертке обобщенных функций f и f_β , называется *первообразной* (при $\beta < 0$ – *производной*) *порядка β* .

Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ тогда и только тогда обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, когда существует N такое, что (N -я первообразная $f(t)$) функция $f^{(-N)}(t)$ непрерывна и $f^{(-N)}(t) \sim ct^N \rho(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, где c – некоторая постоянная.

Аналогично определяется квазиасимптотика $f(t)$ в начале координат (подробнее см. [3]).

Преобразование Лапласа

$$L[f] \equiv \tilde{f}(z) = (f(t), e^{izt}), \quad f \in \mathcal{S}'_+, \quad (1.7)$$

осуществляет изоморфизм пространства $\mathcal{S}'_+$ на пространство $H(\mathbb{R}_+)$ голоморфных в верхней полуплоскости функций, удовлетворяющих оценке полиномиального роста:

$$|\tilde{f}(x + iy)| \leq M \frac{(1 + |z|)^c}{y^d}, \quad y > 0, \quad (1.8)$$

при некоторых M, c, d (см. [13]).

Нам понадобятся стандартные обобщенные функции

$$t_+^\lambda \ln^m t_+ \in \mathcal{S}'_+, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(см. [2]). Напомним, что при $\text{Re } \lambda > -1$ они являются регулярными обобщенными функциями, совпадающими с $\Theta(t) (\ln t)^m t^\lambda$. Кроме того, они аналитичны по λ во всей комплексной плоскости, кроме $\lambda = -1, -2, \dots$, в которых они имеют полюса порядка $m + 1$. Обобщенные функции $t_+^{-n} \ln^m t_+$, $n = 1, 2, \dots$, определяются как коэффициенты при $(\lambda + n)^m$ в лорановском разложении функции t_+^λ в точке $\lambda = -n$.

Функции t_+^λ при $\lambda \neq -1, -2, \dots$ – однородные функции степени λ :

$$(kt)_+^\lambda = k^\lambda t_+^\lambda, \quad k > 0. \quad (1.9)$$

Кроме того, при $\lambda \neq -1, -2, \dots$ имеем $\frac{d^m}{d\lambda^m} t_+^\lambda = t_+^\lambda \ln^m t_+$. Уравнение

$$\left(t \frac{d}{dt} - \lambda\right)^m y = 0, \quad y \in \mathcal{S}'_+, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots, \quad (1.10)$$

имеет m линейно независимых решений

$$t_+^\lambda, \quad t_+^\lambda \ln t_+, \quad \dots, \quad t_+^\lambda \ln^{m-1} t_+. \quad (1.11)$$

При $\lambda = -n$, $n = 1, 2, \dots$, уравнение

$$\left(t \frac{d}{dt} + n\right)^m y = 0, \quad y \in \mathcal{S}'_+, \quad (1.12)$$

имеет m линейно независимых решений

$$\delta^{(n-1)}(t), \quad t_+^{-n}, \quad t_+^{-n} \ln t_+, \quad \dots, \quad t_+^{-n} \ln^{m-2} t_+. \quad (1.13)$$

(Подробнее см. [2, § 4].)

§ 2. Пространства $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ основных и $\left(\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}\right)'$ обобщенных функций

Пусть M, N – целые неотрицательные числа, a, b – вещественные нецелые числа и $\delta > 0$. Пусть, далее, $\varphi(t)$ – гладкая функция, определенная на замкнутой полуоси $[0, +\infty)$. Положим

$$Q_{b,N,\delta}[\varphi] = \max_{j \leq N} \int_0^\delta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_\varphi^{(b)}(t) \} \right| dt. \quad (2.1)$$

Здесь, как и в § 1, $\langle b \rangle = [-b - 1]$ при $b < -1$. Если $b > -1$, то тейлоровский многочлен $T_\varphi^{(b)}(t)$ в (2.1) отсутствует. Положим также

$$V^{a,M,\delta}[\varphi] = \max_{j \leq M} \int_\delta^{+\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right| dt.$$

Введем норму

$$\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi] = Q_{b,N,\delta}[\varphi] + V^{a,M,\delta}[\varphi] + \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} |\varphi^{(j)}(0)| \quad (2.2)$$

(если $b > -1$, то последняя сумма в (2.2) отсутствует).

Полношение пространства бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ и быстро убывающих вместе со всеми своими производными функций по этой норме обозначается $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$. Функции $\varphi \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ можно описать следующим образом:

$$\varphi(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!} t + \dots + \frac{c_{\langle b \rangle}}{\langle b \rangle!} t^{\langle b \rangle} + \psi(t), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} t^b |t^j \psi^{(j)}(t)| &\in L_1(0, \delta), & 0 \leq j \leq N, \\ t^a |t^j \varphi^{(j)}(t)| &\in L_1(\delta \pm \varepsilon, +\infty), & 0 \leq j \leq M. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь ε любое, $0 < \varepsilon < \delta$, причем знак плюс во второй формуле (2.4) берется при $M > N$ и знак минус в случае $M \leq N$. В случае $b > -1$ полином в (2.3) отсутствует.

Если $M = N$, то $\mathcal{S}_{b,N,\delta_1}^{a,M} = \mathcal{S}_{b,N,\delta_2}^{a,M}$ для любых δ_1 и δ_2 , больших нуля. В этом случае индекс δ мы, как правило, опускаем.

Числа c_j , $j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$, определяются однозначно и являются естественным расширением производных в нуле функций из $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$. Всюду далее мы их обозначаем как $\varphi^{(j)}(0)$, так что $c_j = \varphi^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$. Соответственно $T_\varphi^{(b)}(t) = \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} \frac{c_j}{j!} t^j$.

Пространство $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ можно также описать следующей эквивалентной нормой:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{*a,M}[\varphi] &= \max_{j \leq N} \int_0^\delta t^b \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \{ \varphi(t) - T_\varphi^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\quad + \max_{j \leq M} \int_\delta^\infty t^a \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \varphi(t) \right| dt + \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} |\varphi^{(j)}(0)|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Проективный предел по M и N пространств $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ обозначается как $\mathcal{S}_b^a$. Проективный предел по a и b этих пространств образует пространство $\mathcal{S}_+$, так что

$$\mathcal{S}_b^a = \mathcal{S}_{b,\infty}^{a,\infty} = \bigcap_{M,N \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \quad \mathcal{S}_+ = \bigcap_{a,b \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_b^a.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие подпространства пространства $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{0,a,M} &= \{ \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} : \varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, \langle a \rangle \}, \\ \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,0,M} &= \{ \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} : \varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, \langle b \rangle \}. \end{aligned}$$

Если $b > -1$, то $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ совпадает с $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, если $a > -1$, то $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{0,a,M}$ совпадает с $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$. В случае $a > b$ имеем $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} \subset \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{0,a,M} \subset \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$. Если $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, то

$$\varphi(t) - T_\varphi^{(a)}(t) \equiv \tilde{\varphi}(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{0,a,M}. \quad (2.6)$$

Аналогично определяются пространства $\mathcal{S}_b^a$ и $\mathcal{S}_b^a$.

Положим еще

$${}_p\mathcal{S}_+ = \{ \varphi(t) \in \mathcal{S}_+ : \varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p \}, \quad (2.7)$$

где p – целое неотрицательное число. Отметим, что $\langle a \rangle \mathcal{S}_+$ плотно в $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M,0}$, а пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $(0, +\infty)$ плотно в $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ при любых a, b ($b \leq a$), M, N и δ .

Сопряженные пространства (пространства линейных непрерывных функционалов) образуют соответствующие пространства обобщенных функций и обозначаются, как обычно, штрихом сверху. Так, например, $f \in (\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M})'$ означает, что f – линейный непрерывный функционал над пространством основных функций $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$.

Мы будем писать $f \in (\mathcal{S}^{a,M})'$, если при некотором $\eta > 0$ функционал f принадлежит $(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ при любых b и N . Аналогично, $f \in (\mathcal{S}_{b,N})'$, если при некотором $\eta > 0$ функционал f принадлежит $(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ при любых a и M .

Заметим, что если $f(t) \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(0, +\infty)$ и выполнены оценки

$$|f(t)| < ct^a \quad \text{при } t > t_0, \quad |f(t)| < ct^b \quad \text{при } 0 < t < t_0 \quad (2.8)$$

с некоторыми c, a, b и $t_0 > 0$, то обобщенная функция $f(t)$, определяемая формулой

$$(f(t), \varphi(t)) = \int_0^\infty f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,0,\delta}^{a,0},$$

принадлежит пространству $(\mathcal{S}_{b,0,\delta}^{a,0})'$ с любым $\delta > 0$.

При $a > b$ преобразование Меллина основных функций $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ определяется формулой

$$\mathcal{M}[\varphi] \equiv \widehat{\varphi}(z) = \int_0^{+\infty} t^{-iz} [\varphi(t) - T_\varphi^{(y)}(t)] dt, \quad z = x + iy \in \overline{\Pi}_b^a \quad (2.9)$$

(см. [2]). Этот интеграл корректно определен при $b \leq y \leq a$, кроме, возможно, целых отрицательных значений y , находящихся между a и b , и определяет в полосе $\overline{\Pi}_b^a$ аналитическую функцию, имеющую, быть может, простые полюсы в точках $z = -ik$, $k = 1, 2, \dots$, попавших в эту полосу. Вне полюсов, скажем в $\overline{\Pi}_b^a \cap \{|x| > 1\}$, функция $|\widehat{\varphi}(z)|$ ограничена. Легко проверяется, что для любого целого $p \leq \min\{N, M\}$ имеем $(t \frac{d}{dt})^p \varphi \in \mathcal{S}_{b,N-p,\delta}^{a,M-p}$ и

$$\mathcal{M} \left[\left(t \frac{d}{dt} \right)^p \varphi(t) \right] = (iz - 1)^p \widehat{\varphi}(z).$$

Отсюда вытекает, что $|\widehat{\varphi}(z)|$ убывает в полосе $\overline{\Pi}_b^a$ при $|z| \rightarrow \infty$ по крайней мере как $|z|^{-p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим функции $\widehat{\varphi}(z)$, аналитические в полосе $\overline{\Pi}_b^a$, за исключением, быть может, целочисленных отрицательных точек чисто мнимой оси $z_k = -ik$, $k = 1, 2, \dots, r$, где они могут иметь простые полюсы. Пусть Q – некоторое вещественное число. Через $H_Q(\overline{\Pi}_b^a)$ будем обозначать банахово пространство таких функций с нормой

$$\|\widehat{\varphi}(z)\|_{H_Q} = \sup_{z \in \overline{\Pi}_b^a} |\widehat{\varphi}(z)(1 + |z|)^{Q-r} \Theta_b^a(z)|, \quad (2.10)$$

где $\Theta_b^a(z) = \prod_{k=1}^r (z - z_k)$, или, что то же самое,

$$\Theta_b^a(z) = \begin{cases} \prod_{\ell=1}^{\langle b \rangle + 1} (z - i\ell), & \text{если } b < -1, \quad a > -1, \\ \prod_{\ell=\langle a \rangle + 2}^{\langle b \rangle + 1} (z - i\ell), & \text{если } b < a < -1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Через $H_\infty(\Pi_b^a)$ обозначаем проективный предел (пересечение) всех пространств $H_Q(\Pi_b^a)$.

Таким образом, преобразование Меллина осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{M}: \mathcal{S}_{b,M}^{a,M} \mapsto H_M(\Pi_b^a). \quad (2.12)$$

Для $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$ преобразование Меллина $\widehat{\varphi}(z)$ есть аналитическая функция в комплексной плоскости, кроме, может быть, точек $-ik$, $k = 1, 2, \dots$, в которых у нее простые полюсы с вычетами $\frac{1}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(0)$, и для любых $a > b$ $\widehat{\varphi}(z) \in H_\infty(\Pi_b^a)$.

Если $\varphi(t) \in \mathcal{S}_0^a$, то $\widehat{\varphi}(z)$ есть аналитическая функция в Π_b^a , убывающая быстрее любой степени $|z|^{-1}$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Если $a < -1$, то преобразование Меллина имеет нетривиальное ядро. Это ядро состоит из всех многочленов степени $\langle a \rangle$.

Если $\widehat{\varphi}(z) \in H_\infty(\Pi_b^a)$, то формула

$$\mathcal{M}^{-1}[\widehat{\varphi}(z)] = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_0} t^{iz-1} \widehat{\varphi}(z) dz, \quad (2.13)$$

где $L_0 = \{z = x + iy_0: |x| < \infty, [a] < y_0 < a, b < y_0\}$, определяет функцию из $\mathcal{S}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$ (для любого сколь угодно малого ε), преобразование Меллина которой совпадает с $\widehat{\varphi}(z)$.

Обратное преобразование Меллина $\mathcal{M}^{-1}$ осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{M}^{-1}: H_{M+2}(\Pi_b^a) \mapsto \mathcal{S}_{b+\varepsilon,M}^{a-\varepsilon,M}, \quad (2.14)$$

где $\varepsilon > 0$ – любое сколь угодно малое число. Преобразование Меллина и обратное к нему осуществляют непрерывные отображения

$$\mathcal{M}: \mathcal{S}_b^a \mapsto H_\infty(\Pi_b^a); \quad \mathcal{M}^{-1}: H_\infty(\Pi_b^a) \mapsto \mathcal{S}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}. \quad (2.15)$$

Если полюсов у $\widehat{\varphi}(z)$ в полосе Π_b^a нет, то $\varphi(t) \in \mathcal{S}_0^{a-\varepsilon}$.

Мультипликативная свертка основных функций φ_1 и φ_2 из $\mathcal{S}_+$ определяется формулой

$$\psi(t) = \int_0^\infty \varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \varphi_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^\infty \varphi_1(\tau) \varphi_2\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.16)$$

Функция $\psi(t)$ определена и бесконечно дифференцируема при $t \in (0, +\infty)$. Если $\varphi_1(t) \in {}_q\mathcal{S}_+$, а $\varphi_2 \in {}_p\mathcal{S}_+$, $p > q$, то $\psi^{(j)}(t)$ непрерывны на $[0, +\infty)$ для $j = 0, 1, \dots, p$, причем $\psi^{(j)}(0) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, q$.

В дальнейшем мультипликативную свертку будем обозначать следующим образом: $\psi = \varphi_1 * \varphi_2$. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Операция свертки (2.16) определяет непрерывное билинейное отображение*

$$\mathcal{S}_{b,M_1}^{a,M_1} \times \mathcal{S}_{b,M_2}^{a,M_2} \longrightarrow \mathcal{S}_{b,M_1+M_2}^{a,M_1+M_2}. \quad (2.17)$$

При этом справедлива формула

$$\widehat{\psi}(z) = \widehat{\varphi}_1(z) \cdot \widehat{\varphi}_2(z), \quad b \leq \operatorname{Im} z \leq a \quad (2.18)$$

(см. далее лемму П2).

§ 3. Семейства основных функций

В этом параграфе мы рассмотрим пространства семейств основных функций и их последовательностей. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство функций ψ с нормой $\mathcal{P}[\psi]$ и I – счетное множество индексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Рассмотрим семейство функций $\varphi(t) = \{\varphi^\beta(t) \in \mathbb{B}, \beta \in I\}$. В линейном пространстве этих семейств введем две нормы:

$${}_I\mathcal{P}[\varphi(t)] = \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}[\varphi^\beta(t)], \quad {}^I\mathcal{P}[\varphi(t)] = \sup_{\beta \in I} \mathcal{P}[\varphi^\beta(t)]. \quad (3.1)$$

Банаховы пространства с этими нормами будем обозначать ${}_I\mathbb{B}$ и ${}^I\mathbb{B}$ соответственно.

Так, например, если $\varphi(t) = \{\varphi^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I\}$, то ${}_I\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ обозначает пространство таких семейств с нормой

$${}_I\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi(t)] = \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi^\beta(t)].$$

Аналогично,

$$\varphi \in {}^I\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \quad \text{если} \quad {}^I\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi] = \sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi^\beta(t)] < \infty. \quad (3.2)$$

В этом случае будем также говорить, что семейство $\varphi(t)$ *ограничено* по $\beta \in I$.

Каждое семейство $\{\varphi^\beta \in \mathcal{S}_{b,M}^{a,M}, \beta \in I\} = \varphi(t) \in {}^I\mathcal{S}_{b,M}^{a,M}$, $b < a$, для любого $d \in (b, a)$ определяет непрерывный оператор

$$B_0: {}_I\mathcal{S}_{d,M_1}^{a,M_1} \mapsto {}_I\mathcal{S}_{d,M+M_1}^{a,M+M_1},$$

действующий по формуле

$$B_0\omega = \sum_{\beta \in I} \omega^\beta * \varphi^\beta = \sum_{\beta \in I} \int_0^\infty \omega^\beta(\varkappa) \varphi^\beta\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa}. \quad (3.3)$$

Действительно, в силу утверждения 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{d,M+M_1}^{a,M+M_1}[B_0\omega] &\leq \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}_{d,M+M_1}^{a,M+M_1}[\omega^\beta * \varphi^\beta] \leq \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1}[\omega^\beta] \mathcal{P}_{b,M}^{a,M}[\varphi^\beta] \\ &\leq \sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,M}^{a,M}[\varphi^\beta] \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1}[\omega^\beta] \\ &\leq {}^I\mathcal{P}_{b,M}^{a,M}[\varphi] \cdot {}_I\mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1}[\omega] \leq \text{const } {}_I\mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1}[\omega]. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если $\frac{d^j}{dt^j}\varphi^\beta(0) = 0$ при всех $\beta \in I$, то мы говорим, что j -я производная семейства $\{\varphi^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I\} = \varphi(t)$ в нуле равна нулю, и пишем $\varphi^{(j)}(0) = 0$.

Пусть задано семейство $\{\widehat{\varphi}^\beta(z) \in H_M(\Pi_b^a), \beta \in I\} = \widehat{\varphi}(z)$. Точка $z_0 \in \Pi_b^a$ называется *нулем семейства $\widehat{\varphi}(z)$ кратности r* , если

$$\forall \beta \in I \quad \widehat{\varphi}^\beta(z_0) = 0, \quad \frac{d}{dz}\widehat{\varphi}^\beta(z_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\widehat{\varphi}^\beta(z_0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d^r}{dz^r}\widehat{\varphi}^\beta(z_0) \neq 0 \quad \text{для некоторого } \beta \in I.$$

Мы будем рассматривать направленные множества семейств основных функций $\varphi_\lambda(t) = \{\varphi_\lambda^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I\}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, и будем называть такие множества *семействами последовательностей основных функций*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\{\varphi_\lambda^\beta \in \mathbb{B}, \beta \in I\}$, $\lambda > 0$, – семейство последовательностей элементов некоторого банахова пространства $\mathbb{B}$. Будем говорить, что семейство последовательностей $\{\varphi_\lambda^\beta\}$ *ограниченно по $\beta \in I$ сходится* к семейству $\{\varphi_0^\beta\}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, если:

- 1) $\varphi_\lambda^\beta \rightarrow \varphi_0^\beta$, $\lambda \rightarrow +\infty$, $\forall \beta \in I$;
- 2) существуют постоянные c и λ_0 , не зависящие от β , такие, что

$$\|\varphi_\lambda^\beta\|_{\mathbb{B}} < c, \quad \lambda > \lambda_0.$$

ПРИМЕР 1. Пусть β пробегает счетное множество I точек интервала $(0, \pi)$, причем концы интервала есть предельные точки I . Рассмотрим множество функций $\varphi^\beta(t) = e^{i(\cos \beta + i \sin \beta)t}$. Очевидно, что $\varphi^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ при любых M и N . Нетрудно проверить, что для достаточно большого Q (например, $Q \geq a + M + 1$)

$$\sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M} \left[(\sin \beta)^Q e^{i(\cos \beta + i \sin \beta)t} \right] \leq \text{const},$$

а потому семейство функций

$$\left\{ (\sin \beta)^Q e^{ite^{i\beta}} \in \mathcal{S}_b^a, \quad \beta \in I \right\} \equiv \varphi(t) \in {}^I \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$$

при любых M, N и δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть q – целое неотрицательное число. Рассмотрим семейства последовательностей $\varphi_\lambda(t) = \{\varphi_\lambda^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \lambda > 0, \beta \in I\}$ со свойствами:

- 1) $\varphi_\lambda^\beta(t)$ – измеримые функции по совокупности переменных t, λ , которые q раз непрерывно дифференцируемы по λ (в смысле Фреше) как отображение $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, $\beta \in I$;
- 2) имеет место

$${}^I \mathcal{P}_{(b,N,\delta)}^{q(a,M)}[\varphi_\lambda^\beta(t)] \equiv \sup_{\beta \in I} \max_{j \leq q} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M} \left[\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} \right)^j \varphi_\lambda^\beta(t) \right] < \infty. \quad (3.5)$$

Линейное пространство семейств последовательностей, введенных в определении 6, с нормой ${}^I \mathcal{P}_{(b,N,\delta)}^{q(a,M)}[\varphi_\lambda^\beta(t)]$ будем обозначать ${}^I F^q \left[\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} \right]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если множество I состоит только из одного элемента, то символ I в обозначениях соответствующих пространств будет опущен. Например, через $F^q \left[\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} \right]$ обозначаем банахово пространство последовательностей функций $\varphi_\lambda(t)$ с нормой

$$\mathcal{P}_{(b,N,\delta)}^{q(a,M)}[\varphi_\lambda(t)] = \max_{j \leq q} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M} \left[\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} \right)^j \varphi_\lambda(t) \right]. \quad (3.6)$$

Для $\omega(t) \in {}_I \mathcal{S}_{b,M}^{a,M}$ и семейства последовательностей $\varphi_\lambda(t) \in {}_I F^M \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right]$ определим функцию

$$\Psi[\omega, \varphi_\lambda](t) = \sum_{\beta \in I} \psi[\omega^\beta, \varphi_\lambda^\beta](t), \quad (3.7)$$

где каждая функция

$$\psi[\omega^\beta, \varphi_\lambda^\beta](t) = \int_0^\infty \omega^\beta(\varkappa) \varphi_\varkappa^\beta \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa}, \quad \beta \in I, \quad (3.8)$$

согласно лемме П2 корректно определена и принадлежит $\mathcal{S}_{b,M+N}^{a,M+N}$. Следующая важная лемма обобщает утверждение 1.

ЛЕММА 2. *Билинейное отображение*

$${}_I \mathcal{S}_{b,M}^{a,M} \times {}_I F^M \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right] \xrightarrow{\Psi} \mathcal{S}_{b,M+N}^{a,M+N} \quad (3.9)$$

корректно определено и непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой П2, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{b,M+N}^{a,M+N} [\Psi[\omega, \varphi_\lambda](t)] &= \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,M+N}^{a,M+N} \left[\int_0^\infty \omega^\beta(\varkappa) \varphi_\varkappa^\beta \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \right] \\ &\leq \sum_{\beta \in I} \text{const } \mathcal{P}_{b,M}^{a,M} [\omega^\beta] \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_\lambda^\beta] \\ &\leq \text{const} \sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_\lambda^\beta] \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,M}^{a,M} [\omega^\beta] \\ &= \text{const } {}_I \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_\lambda^\beta] \cdot {}_I \mathcal{P}_{b,M}^{a,M} [\omega]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Согласно той же лемме

$$\left(\psi[\omega^\beta, \varphi_\lambda^\beta] \right)^{(j)}(0) = 0 \quad \text{для } j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle \quad (3.11)$$

и для всех $\beta \in I$. Поэтому $\Psi[\omega, \varphi_\lambda](t) \in \mathcal{S}_{b,M+N}^{a,M+N}$. Лемма доказана.

Пусть семейство последовательностей

$$\varphi_\lambda(t) = \{\varphi_\lambda^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N}^{a,N}, \beta \in I, \lambda > 0\} \in {}^I F^M[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N}]. \quad (3.12)$$

Определим семейство линейных операторов, связанное с семейством последовательностей $\varphi_\lambda(t)$,

$$B_k^\beta: \mathcal{S}_{b,M}^{a,M} \longrightarrow \mathcal{S}_{b,M+N}^{a,M+N}, \quad \beta \in I, \quad k > 0, \quad (3.13)$$

формулой

$$B_k^\beta \omega \equiv \psi[\omega, \varphi_{k\lambda}^{\beta}](t) = \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_{k\varkappa}^{\beta} \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa}, \quad \beta \in I, \quad (3.14)$$

где $\varphi_\lambda^{\beta}(t) = \varphi_\lambda^\beta(t) - T_{\varphi_\lambda^\beta}^{(a)}(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $k > 0$ и $\beta \in I$ оператор (3.13) корректно определен, причем

$$\mathcal{P}_{b,M+N}^{a,M+N} [B_k^\beta \omega] \leq \text{const} \cdot {}^I \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_\lambda(t)] \cdot \mathcal{P}_{b,M}^{a,M}[\omega], \quad \omega \in \mathcal{S}_{b,M}^{a,M}, \quad (3.15)$$

где const не зависит от β, k и $\varphi_\lambda(t)$.

Действительно, по лемме П2 имеем

$$\mathcal{P}_{b,M+N}^{a,M+N} [B_k^\beta \omega] \leq \text{const} \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_{k\lambda}^{\beta}(t)] \cdot \mathcal{P}_{b,M}^{a,M}[\omega], \quad \beta \in I.$$

Далее, в силу (3.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_{k\lambda}^{\beta}(t)] &= \max_{j \leq M} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathcal{P}_{b,N}^{a,N} \left[\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} \right)^j \varphi_{k\lambda}^{\beta}(t) \right] \\ &\leq \max_{j \leq M} \sup_{k\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathcal{P}_{b,N}^{a,N} \left[\left(k\lambda \frac{d}{dk\lambda} \right)^j \varphi_{k\lambda}^{\beta}(t) \right] \\ &\leq \sup_{\beta \in I} \max_{j \leq M} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathcal{P}_{b,N}^{a,N} \left[\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} \right)^j \varphi_\lambda^\beta(t) \right] = {}^I \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_\lambda(t)]. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Определим оператор $B_k: {}^I \mathcal{S}_{b,M}^{a,M} \mapsto \mathcal{S}_{b,M+N}^{a,M+N}$ формулой

$$B_k \omega \equiv \sum_{\beta \in I} B_k^\beta \omega^\beta. \quad (3.16)$$

Непосредственно из (3.15) получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор B_k , построенный по семейству последовательностей (3.12) и определяемый формулой (3.16), непрерывен, причем

$$\mathcal{P}_{b,M+N}^{a,M+N} [B_k \omega] \leq \text{const} \cdot {}^I \mathcal{P}_{(b,N)}^{M(a,N)} [\varphi_\lambda(t)] \cdot {}^I \mathcal{P}_{b,M}^{a,M}[\omega], \quad (3.17)$$

где const не зависит от k и $\varphi_\lambda(t)$.

§ 4. Квазиасимптотика обобщенных функций

Пусть $f \in \left(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M}\right)'$ и $\varphi \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$. В этом параграфе и всюду далее будем считать $M \leq N$. Тогда при больших k имеет смысл выражение $(f(kt), \varphi(t)) = (1/k)(f(t), \varphi(t/k))$.

Действительно, при $k\delta > \eta$ функция $\varphi(t/k) \in \mathcal{S}_{b,N,k\delta}^{a,M} \subset \mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M}$.

Пусть $\varphi_k(t) = \{\varphi_k^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I, k > 0\}$. Мы говорим, что $f(t)$ обладает квазиасимптотикой на семействе последовательностей $\varphi_k(t)$ относительно автомодельной функции $\rho(k)$, если

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_k^\beta(t)) \longrightarrow c^\beta, \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall \beta \in I. \quad (4.1)$$

Напомним, что наша задача – найти условия, при которых из (1.4) или (4.1) следовало бы существование квазиасимптотики у $f(t)$ относительно автомодельной функции $\rho(k)$, т.е. (1.5).

В этом параграфе мы приведем некоторые предварительные результаты.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in \left(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M}\right)'$ и $\varphi \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, где $M \leq N, b < a$. Тогда существуют постоянные C и k_0 такие, что

$$\left| (f(kt), \varphi(t)) - \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} \frac{1}{k^{j+1}} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (f(t), t^j) \right| \leq C k^a \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi] \quad \text{при } k > k_0. \quad (4.2)$$

Если $a > -1$, то сумма в (4.2) отсутствует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что

$$T_{\varphi(t/k)}^{\langle a \rangle}(t) = T_{\varphi(t)}^{\langle a \rangle}\left(\frac{t}{k}\right),$$

$$T_{T_{\varphi(t/k)}^{\langle a \rangle}(t)}^{\langle b \rangle}(t) = T_{T_{\varphi(t)}^{\langle a \rangle}(t/k)}^{\langle b \rangle}(t) = T_{T_{\varphi}^{\langle a \rangle}}^{\langle b \rangle}\left(\frac{t}{k}\right) = T_{\varphi}^{\langle a \rangle}\left(\frac{t}{k}\right),$$

и обозначая $\psi(t) = \varphi(t) - T_{\varphi(t)}^{\langle a \rangle}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| (f(kt), \varphi(t)) - \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} \frac{1}{k^{j+1}} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (f(t), t^j) \right| \\ &= \left| \frac{1}{k} \left(f(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right) - \frac{1}{k} \left(f(t), T_{\varphi(t/k)}^{\langle a \rangle}(t) \right) \right| \\ &= \frac{1}{k} \left| \left(f(t), \psi\left(\frac{t}{k}\right) \right) \right| \leq \frac{\text{const}}{k} \mathcal{P}_{b,N,\eta}^{a,M} \left[\psi\left(\frac{t}{k}\right) \right] \\ &\leq \frac{\text{const}}{k} \left[\max_{j \leq N} \int_0^\eta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi(t/k)}^{\langle a \rangle}(t) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \left(T_{\varphi(t/k)}^{\langle b \rangle}(t) - T_{T_{\varphi(t/k)}^{\langle a \rangle}(t)}^{\langle b \rangle}(t) \right) \right\} \right| dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{j \leq M} \int_{\eta}^{\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi \left(\frac{t}{k} \right) - T_{\varphi(t/k)}^{(a)}(t) \right\} \right| dt \\
& + \sum_{j=0}^{(b)} \left| \left(\varphi \left(\frac{t}{k} \right) - T_{\varphi(t/k)}^{(a)}(t) \right)^{(j)} \right|_{t=0} \Bigg| \\
& = \frac{\text{const}}{k} \left[\max_{j \leq N} \int_0^{\eta} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi \left(\frac{t}{k} \right) - T_{\varphi}^{(b)} \left(\frac{t}{k} \right) \right\} \right| dt \right. \\
& + \max_{j \leq M} \int_{\eta}^{\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi \left(\frac{t}{k} \right) - T_{\varphi}^{(a)} \left(\frac{t}{k} \right) \right\} \right| dt \\
& + \left. \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{(b)} \left| \left(\varphi \left(\frac{t}{k} \right) \right)^{(j)} \right|_{t=0} \right|.
\end{aligned}$$

Делая замену переменных $t/k = t'$ (опуская штрихи), при $k > \eta/\delta$ имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \left| \left(f(t), \psi \left(\frac{t}{k} \right) \right) \right| \leq \text{const} \cdot k^a \left[\max_{j \leq N} k^{b-a} \int_0^{\eta/k} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t) \} \right| dt \right. \\
& + \max_{j \leq M} \int_{\eta/k}^{\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(a)}(t) \} \right| dt + k^{-a} \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{(b)} \frac{1}{k^{j+1}} \left| \varphi^{(j)}(0) \right| \Bigg] \\
& \leq \text{const} \cdot k^a \left[\max_{j \leq N} \int_0^{\delta} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t) \} \right| dt \right. \\
& + \max_{j \leq M} \int_0^{\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(a)}(t) \} \right| dt + \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{(b)} \frac{1}{k^{a+1+j}} \left| \varphi^{(j)}(0) \right| \Bigg]. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего из неравенств (4.3) непосредственно оценивается нормой $\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi]$, третье слагаемое, в силу неравенства $a+j+1 \geq a+\langle a \rangle+2 > 0$ (см. (1.3)) оценивается той же нормой. Оценим второе слагаемое. Разобьем интеграл на два интеграла: от 0 до δ и от δ до ∞ . Имеем

$$\begin{aligned}
& \max_{j \leq M} \int_0^{\delta} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(a)}(t) \} \right| dt \\
& \leq \max_{j \leq M} \int_0^{\delta} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t) \} \right| dt \\
& + \max_{j \leq M} \int_0^{\delta} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ T_{\varphi}^{(b)}(t) - T_{\varphi}^{(a)}(t) \} \right| dt \\
& \leq c \cdot \max_{j \leq N} \int_0^{\delta} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t) \} \right| dt \\
& + \text{const} \int_0^{\delta} t^{a+\langle a \rangle+1} dt \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{(b)} |\varphi^{(j)}(0)| \leq \text{const} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi]. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $a > b$, $M \leq N$ и $a + \langle a \rangle + 1 > -1$ (см. (1.3)). Далее,

$$\begin{aligned} & \max_{j \leq M} \int_{\delta}^{\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(a)}(t) \} \right| dt \\ & \leq \max_{j \leq M} \int_{\delta}^{\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right| dt + \max_{j \leq M} \int_{\delta}^{\infty} t^{a+j} \left| \frac{d^j}{dt^j} T_{\varphi}^{(a)}(t) \right| dt \\ & \leq \mathcal{D}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi] + \text{const} \int_{\delta}^{\infty} t^{a+\langle a \rangle} dt \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} |\varphi^{(j)}(0)| \leq \text{const} \mathcal{D}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi]. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $a + \langle a \rangle < -1$ (см. (1.3)). Отсюда с учетом (4.4), объединяя все оценки, получаем (4.2). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in \left(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M} \right)'$; тогда

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} c_j \delta^{(j)}(t) + g(t), \quad (4.5)$$

где семейство функционалов

$$\frac{1}{k^a} g(kt), \quad k \geq k_0 > 0, \quad \text{ограничено в } \left(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M} \right)'. \quad (4.6)$$

При этом

$$c_j = \frac{1}{j!} (f(t), t^j), \quad j = 0, \dots, \langle a \rangle. \quad (4.7)$$

Это следствие показывает, что наибольший интерес при изучении квазиасимптотики представляет случай $\alpha \leq a$.

Каждая обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'_+$ принадлежит пространству $(\mathcal{S}_b^a)'$ при некоторых a и b . Оказывается, что пространства $(\mathcal{S}_b^a)'$ можно описать в терминах квазиасимптотического поведения обобщенных функций в нуле и на бесконечности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для того чтобы $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$ ($b < a$), необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) обобщенная функция $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно k^b при $k \rightarrow +0$;
- 2) существуют постоянные c_j , $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$, такие, что

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} c_j \delta^{(j)}(t) + g(t), \quad (4.8)$$

где $g(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно k^a при $k \rightarrow +\infty$ (если $a > -1$, то сумма δ -функций в (4.8) отсутствует).

(Подробнее см. [1].)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\varphi_k(t) = \{\varphi_k^\beta \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I\}$, $k > k_0 \geq 0$, и $\rho(k)$ – автомодельная функция. Будем говорить, что $f \in (\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M})'$ обладает ограниченной по $\beta \in I$ квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на семействе последовательностей $\varphi_k(t)$, если $\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_k^\beta(t))$ ограничено по $\beta \in I$ сходится, т.е.

1) имеет место

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_k^\beta(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c^\beta \quad \forall \beta \in I; \quad (4.9)$$

2) существует постоянная c , не зависящая от β , такая, что

$$\frac{1}{\rho(k)} |(f(kt), \varphi_k^\beta(t))| < c \quad \text{при } k > k_0. \quad (4.10)$$

ЛЕММА 4. Пусть заданы $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$, $b < a$, $M \leq N$ и семейство последовательностей функций

$$\varphi_\lambda(t) \in {}^I F^0 [\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}], \quad \varphi_\lambda(t) = \{\varphi_\lambda^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I, \lambda > 0\}, \quad (4.11)$$

причем

$$\varphi_\lambda^\beta(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi_0^\beta(t) \quad \text{в } \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \quad (4.12)$$

и для любого $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$ существуют $\beta_j \in I$ такие, что

$$(\varphi_0^{\beta_j})^{(j)}(0) \neq 0. \quad (4.13)$$

Пусть $f(t)$ обладает ограниченной по $\beta \in I$ квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , $b < \alpha < a$, на семействе последовательностей $\varphi_k(t)$, т.е. выполнены (4.9), (4.10).

Тогда для любого натурального $Q > \langle b \rangle$ существуют обобщенная функция $f_1(t) \in (\mathcal{S}_{b,N}^{a,M})'$, обращающаяся в нуль в некоторой окрестности нуля, и обобщенная функция $f_2(t) \in (\mathcal{S}_{b,N})'$ с компактным носителем такие, что $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ и

$$(f_1(t), t^j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle. \quad (4.14)$$

$$(f_2(t), t^\ell) = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, Q. \quad (4.15)$$

При этом для любой непрерывной функции $\eta(k)$, равной нулю в некоторой окрестности нуля и единице при достаточно больших k , и для любой $\omega(t) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}$ (ε любое, такое, что $\alpha + \varepsilon < a$) имеет место ограниченная по $\beta \in I$ сходимость:

$$\frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), (B_k^\beta \omega)(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\omega^\beta. \quad (4.16)$$

Здесь семейство операторов $B_k^\beta: \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0} \mapsto \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}$ построено по семейству последовательностей $\eta(\lambda)\varphi_\lambda(t)$ (см. (3.13), (3.14)). При этом существуют постоянные k_0 и A , не зависящие от $\beta \in I$, такие, что

$$\frac{1}{\rho(k)} |(f_1(kt), (B_k^\beta \omega)(t))| \leq A \cdot \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega], \quad k > k_0. \quad (4.17)$$

(Отметим, что если $a > -1$, то условия (4.13) и (4.14) отсутствуют.)

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\varphi_k^\beta(t) \equiv \varphi_0^\beta(t)$, $\beta \in I$, то условие (4.13) можно опустить, все утверждения леммы останутся справедливыми, кроме условия (4.14), которое будет выполнено только для тех $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$, для которых найдутся β_j такие, что выполняется (4.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Положим $g(t) = f(t)\chi(t)$, где $\chi(t) \in C^\infty(0, +\infty)$ такая, что $\chi(t) = 0$ при $t < \eta$ и $\chi(t) = 1$ при $t > \eta + 1$. Пусть, далее, $\gamma(t)$ – бесконечно дифференцируемая финитная функция с носителем в $(0, +\infty)$ такая, чтобы для обобщенной функции $f_2(t) = f(t) - g(t) + \gamma(t)$ выполнялись условия (4.15). Полагая $f_1(t) = f(t) - f_2(t)$. Очевидно, что $f_1 \in (\mathcal{S}^{a,M})'$, а $f_2 \in (\mathcal{S}_{b,N})'$.

Докажем, что обобщенная функция f_1 удовлетворяет соотношениям (4.14). (Это нужно доказать только для случая $a < -1$.) Для этого заметим, что имеет место ограниченная по β сходимост

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_1(kt), \varphi_k^\beta(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c^\beta, \quad \beta \in I. \quad (4.18)$$

Действительно, имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_1(kt), \varphi_k^\beta(t)) = \frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_k^\beta(t)) - \frac{1}{\rho(k)}(f_2(kt), \varphi_k^\beta(t)).$$

Первое слагаемое справа по условию ограничено по $\beta \in I$ сходится. Второе слагаемое ограничено стремится к нулю, ибо при некотором δ_1 и любом $\varepsilon > 0$ обобщенная функция f_2 принадлежит $(\mathcal{S}_{b,N,\delta_1}^{b+\varepsilon,M})'$ и согласно лемме 3, с учетом (4.15), выполнено соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)} \left| (f_2(kt), \varphi_k^\beta(t)) \right| \leq c \frac{k^{b+\varepsilon}}{\rho(k)} \mathcal{D}_{b,N,\delta}^{b+\varepsilon,M}[\varphi_k^\beta] < \text{const} \frac{k^{b+\varepsilon}}{\rho(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Далее, учитывая, что $f_1 \in (\mathcal{S}_{b,N,\delta_2}^{a,M})'$ при некотором $\delta_2 > 0$, по той же лемме 3 имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_1(kt), \varphi_k^\beta(t)) = \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} \frac{1}{\rho(k)k^{j+1}} \frac{(\varphi_k^\beta)^{(j)}(0)}{j!} (f_1(t), t^j) + O(1) \frac{k^a}{\rho(k)}.$$

Отсюда и из (4.12), (4.13) и (4.18) с учетом того, что $\alpha < a$, следует (4.14)².

Осталось доказать (4.16) и (4.17). Заметим сначала, что имеет место ограниченная по $\beta \in I$ сходимост

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_1(kt), \varphi_k^0(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c^\beta, \quad \beta \in I, \quad (4.19)$$

где $\varphi_k^0(t) = \varphi_k^\beta(t) - T_{\varphi_k^\beta(t)}^{\langle a \rangle}(t)$. Действительно, в силу уже доказанного соотношения (4.14) левая часть (4.19) совпадает с левой частью (4.18).

²Если $\varphi_k^\beta(t) \equiv \varphi_0^\beta(t)$, $\beta \in I$, то отсюда же следует справедливость замечания.

Пусть $\eta(k)$ – произвольная непрерывная функция такая, что $\eta(k) = 0$ при $k < k_1$ и $\eta(k) = 1$ при $k > k_2 > k_1$. Введем семейство функций $\Phi_\beta(k) = (f_1(kt), \eta(k)\varphi_k^0(t))$, $\beta \in I$. В силу (4.19) имеем

$$\Phi_\beta(k) = 0 \text{ при } k < k_1, \quad \frac{1}{\rho(k)} \Phi_\beta(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c^\beta, \quad \frac{1}{\rho(k)} |\Phi_\beta(k)| < \text{const}, \quad (4.20)$$

где const не зависит от β и k .

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Докажем, что для любого $\omega \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}$ существует k_0 такое, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \int_0^\infty \Phi_\beta(k\mathcal{x})\omega(\mathcal{x}) d\mathcal{x} &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} c_\omega^\beta, \\ \frac{1}{\rho(k)} \left| \int_0^\infty \Phi_\beta(k\mathcal{x})\omega(\mathcal{x}) d\mathcal{x} \right| &\leq \text{const } \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega], \quad k > k_0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где const не зависит от $\beta \in I$ и $k > k_0$.

Действительно, по лемме 1 для любого $\varepsilon_1 < \varepsilon$ существует k_0 такое, что выполнено (1.3) (где ε надо заменить на ε_1). (Увеличивая, если нужно, k_0 , можно считать, что $k_1 < k_0$.) Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \int_0^\infty \Phi_\beta(k\mathcal{x})\omega(\mathcal{x}) d\mathcal{x} \\ = \frac{1}{\rho(k)} \left\{ \int_{k_1/k}^{k_0/k} + \int_{k_0/k}^{1-\varepsilon_1} + \int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_1} + \int_{1+\varepsilon_1}^\infty \right\} \Phi_\beta(k\mathcal{x})\omega(\mathcal{x}) d\mathcal{x}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Мы учли, что $\eta(k) = 0$ при $k < k_1$.

Рассмотрим отдельно четыре случая, считая $k < k_0$.

1. $k_1/k < \mathcal{x} < k_0/k$. Пользуясь (4.20), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \int_{k_1/k}^{k_0/k} \Phi_\beta(k\mathcal{x})\omega(\mathcal{x}) d\mathcal{x} \\ \leq \frac{\text{const}}{\rho(k)} \int_{k_1/k}^{k_0/k} |\omega(\mathcal{x})| d\mathcal{x} \leq \frac{\text{const}}{\rho(k)} \int_{k_1/k}^{k_0/k} |\mathcal{x}^{\alpha-\varepsilon} \mathcal{x}^{\varepsilon-\alpha} \omega(\mathcal{x})| d\mathcal{x} \\ \leq \frac{\text{const}}{\rho(k)} \left(\frac{k_3}{k} \right)^{\varepsilon-\alpha} \int_0^\delta |\mathcal{x}^{\alpha-\varepsilon} \omega(\mathcal{x})| d\mathcal{x} \leq \frac{\text{const}}{k^{\varepsilon-\varepsilon_1}} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $k_3 = k_0$, если $\varepsilon - \alpha > 0$, и $k_3 = k_1$, если $\varepsilon - \alpha < 0$. Здесь учтено также то, что $\rho(k) > \text{const } k^{\alpha-\varepsilon_1}$ при $k > k_0$.

2. $k_0/k < \mathcal{x} < 1 - \varepsilon_1$. Имеем

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} \Phi_\beta(k\mathcal{x})\omega(\mathcal{x}) \right| \leq \text{const } \frac{\rho(k\mathcal{x})}{\rho(k)} |\omega(\mathcal{x})| \leq \text{const } \mathcal{x}^{\alpha-\varepsilon_1} |\omega(\mathcal{x})|.$$

А так как $\int_0^\infty \mathcal{x}^{\alpha-\varepsilon_1} |\omega(\mathcal{x})| d\mathcal{x} \leq \text{const } \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega]$, то по теореме Лебега второй интеграл справа в сумме (4.22) имеет предел при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\frac{1}{\rho(k)} \left| \int_{k_0/k}^{1-\varepsilon_1} \Phi_\beta(k\mathcal{x})\omega(\mathcal{x}) d\mathcal{x} \right| \leq \text{const } \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega]. \quad (4.24)$$

3. $1 - \varepsilon_1 < \varkappa < 1 + \varepsilon_1$. Имеем

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} \Phi_\beta(k\varkappa) \omega(\varkappa) \right| \leq \text{const} \frac{\rho(k\varkappa)}{\rho(k)} |\omega(\varkappa)| \leq \text{const} |\omega(\varkappa)|.$$

А так как $\int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_1} |\omega(\varkappa)| d\varkappa \leq \text{const} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega]$, то по теореме Лебега третий интеграл справа в сумме (4.22) имеет предел при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\frac{1}{\rho(k)} \left| \int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_1} \Phi_\beta(k\varkappa) \omega(\varkappa) d\varkappa \right| \leq \text{const} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega]. \quad (4.25)$$

4. $1 + \varepsilon_1 < \varkappa < \infty$. Имеем

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} \Phi_\beta(k\varkappa) \omega(\varkappa) \right| \leq \text{const} \frac{\rho(k\varkappa)}{\rho(k)} |\omega(\varkappa)| \leq \text{const} \varkappa^{\alpha+\varepsilon_1} |\omega(\varkappa)|.$$

А так как

$$\int_{1+\varepsilon_1}^{\infty} \varkappa^{\alpha+\varepsilon_1} |\omega(\varkappa)| d\varkappa \leq \int_{1+\varepsilon_1}^{\infty} \varkappa^{\alpha+\varepsilon} |\omega(\varkappa)| d\varkappa \leq \text{const} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega],$$

то по теореме Лебега последний интеграл справа в сумме (4.22) имеет предел при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\frac{1}{\rho(k)} \left| \int_{1+\varepsilon_1}^{\infty} \Phi_\beta(k\varkappa) \omega(\varkappa) d\varkappa \right| \leq \text{const} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega]. \quad (4.26)$$

Из вышесказанного вытекает, что интеграл (4.22) имеет предел при $k \rightarrow +\infty$, а из оценок (4.23)–(4.26) вытекает оценка (4.21).

Теперь нам осталось показать, что для любого $\omega \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}$, любого фиксированного k и $\beta \in I$

$$\int_0^{\infty} \Phi_\beta(k\varkappa) \omega(\varkappa) d\varkappa = (f_1(kt), (B_k^\beta \omega)(t)). \quad (4.27)$$

Легко видеть, что это достаточно сделать только в случае, когда ω – бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в $(0, +\infty)$. Действительно, с одной стороны, множество таких функций плотно в $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}$, а с другой стороны,

оператор B_k^β непрерывен из $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}$ в $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}$ (следствие 1 леммы 2 и $f_1 \in (\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M})'$). В этом случае отображение $\varkappa \mapsto \psi_\varkappa = \eta(k\varkappa) \omega(\varkappa) (1/\varkappa) \varphi_{k\varkappa}^{0,\beta}(t/\varkappa)$ есть непрерывное отображение отрезка (носителя функции $\omega(\varkappa)$) в $\mathcal{S}_{b,M}^{a,M} \subset \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}$.

Воспользуемся теперь следующим общим фактом: если отображение $\varkappa \mapsto \psi_\varkappa$ есть непрерывное отображение отрезка $[c, d]$ в банахово пространство $\mathbb{B}$, а $f_1 \in \mathbb{B}'$, то $(f_1, \int_c^d \psi_\varkappa d\varkappa) = \int_c^d (f_1, \psi_\varkappa) d\varkappa$, где интеграл (слева) понимается как интеграл Фреше. Имеем

$$\begin{aligned} (f_1(kt), (B_k^\beta \omega)(t)) &= \left(f_1(kt), \int_0^{\infty} \varphi_{k\varkappa}^{0,\beta} \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \eta(k\varkappa) \omega(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \right) \\ &= \int_0^{\infty} \left(f_1(kt), \varphi_{k\varkappa}^{0,\beta} \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \eta(k\varkappa) \omega(\varkappa) \frac{1}{\varkappa} \right) d\varkappa \\ &= \int_0^{\infty} (f_1(kt\varkappa), \eta(k\varkappa) \varphi_{k\varkappa}^{0,\beta}(t)) \omega(\varkappa) d\varkappa = \int_0^{\infty} \Phi_\beta(k\varkappa) \omega(\varkappa) d\varkappa. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть семейство $\{\omega^\beta(t) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}, \beta \in I\} = \omega(t)$ принадлежит ${}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}$. В условиях леммы 4 имеет место ограниченная сходимость:

$$\frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), B_k \omega(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\omega, \quad (4.29)$$

где оператор B_k определен формулой (3.16), при этом

$$\frac{1}{\rho(k)} |(f_1(kt), B_k \omega(t))| \leq A \cdot {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega], \quad (4.30)$$

где A не зависит от $k > k_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что семейство последовательностей $\{\eta(k)\varphi_k^\beta(t), \beta \in I\}$ принадлежит ${}_IF^0[\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}]$. Поэтому в силу следствия 2 леммы 2 оператор $B_k: {}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}$ корректно определен; в частности, ряд $\sum_{\beta \in I} B_k^\beta \omega_\beta(t)$ сходится в $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}$. Так как $f_1 \in (\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M})'$, то при $k > k_0$, пользуясь (4.17), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} |(f_1(kt), B_k \omega(t))| &\leq \frac{1}{\rho(k)} \left| \left(f_1(kt), \sum_{\beta \in I} B_k^\beta \omega^\beta(t) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\rho(k)} \sum_{\beta \in I} \left| \left(f_1(kt), B_k^\beta \omega^\beta(t) \right) \right| \leq A \sum_{\beta \in I} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega^\beta] = A \cdot {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{\alpha+\varepsilon,0}[\omega], \end{aligned}$$

что доказывает (4.30).

Из (4.16) и того факта, что ряд $\frac{1}{\rho(k)} \sum_{\beta \in I} (f_1(kt), B_k^\beta \omega^\beta(t))$ мажорируется сходящимся рядом с членами, не зависящими от k , следует (4.29). Следствие доказано.

ЛЕММА 5. Пусть для $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ и семейства последовательностей функций $\{\varphi_\lambda^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I, \lambda > 0\}$ выполнены условия леммы 4. Пусть также для некоторой функции $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ существуют $k^* > 0$, $\varepsilon > 0$ и семейство последовательностей

$$\omega_k(t) \in {}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}, \quad \omega_k(t) = \{\omega_k^\beta(t) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}, \beta \in I\}, \quad k > k^*,$$

такие, что

$$\omega_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \omega(t) \quad \text{в } {}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{P}_{a,M}^{a,M}[\varphi - B_k \omega_k] \leq \frac{C}{k^{a-\alpha+\varepsilon}}, \quad k > k^*, \quad (4.32)$$

с некоторой постоянной C , где $\varphi(t) = \varphi(t) - T_\varphi^{(a)}(t)$. Здесь семейство операторов B_k построено по семейству последовательностей $\eta(\lambda)\varphi_\lambda(t)$, как в лемме 4.

Тогда $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на φ , т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) \longrightarrow \text{const} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty. \quad (4.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 для любого $Q > \langle b \rangle$ функционал $f(t)$ представляется в виде $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, причем $f_1 \in (\mathcal{S}^{a,M})'$ и $(f_1(t), t^j) = 0$ для $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$, а $f_2 \in (\mathcal{S}_{b,N})'$ и $(f_2(t), t^\ell) = 0$ для $\ell = 0, 1, \dots, Q$. Так как $f_2 \in (\mathcal{S}_{b,N,\delta_1}^{b+\varepsilon,M})'$ с некоторым $\delta_1 > 0$ и все ее моменты до порядка $\langle b \rangle$ обращаются в нуль, то по лемме 3 имеем

$$\frac{1}{\rho(k)} |(f_2(kt), \varphi(t))| \leq \text{const} \frac{k^{b+\varepsilon}}{\rho(k)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow +\infty,$$

ибо порядок автомодельности $\rho(k)$ равен $\alpha > b + \varepsilon$. А потому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) &= \frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), \varphi(t)) + \frac{1}{\rho(k)} (f_2(kt), \varphi(t)) \\ &= \frac{1}{\rho(k)} \left(f_1(kt), \overset{0}{\varphi}(t) \right) + o(1) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

и (4.33) будет выполнено, если мы покажем, что $\frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), \overset{0}{\varphi}(t)) \rightarrow \text{const}$ при $k \rightarrow +\infty$.

Согласно следствию к лемме 4 существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), B_k \omega)$. Обозначая $B_k \omega - \overset{0}{\varphi}$ через $\gamma_k(t) \in \mathcal{S}_{b,M}^{a,M}$, учитывая условие (4.32) и тот факт, что $\mathcal{P}_{a,M}^{a,M}[\gamma_k(t/k)] = k^{a+1} \mathcal{P}_{a,M}^{a,M}[\gamma_k(t)]$, при достаточно больших k имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left| (f_1(kt), B_k \omega - \overset{0}{\varphi}) \right| &= \frac{1}{k\rho(k)} \left| \left(f_1(t), \gamma_k\left(\frac{t}{k}\right) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{k\rho(k)} \text{const} \mathcal{P}_{a,M}^{a,M} \left[\gamma_k\left(\frac{t}{k}\right) \right] \leq \text{const} \frac{k^a}{\rho(k)} \mathcal{P}_{a,M}^{a,M}[\gamma_k(t)] \\ &\leq \text{const} \frac{k^a}{\rho(k)} \frac{1}{k^{a-\alpha+\varepsilon}} \leq \text{const} \frac{k^{\alpha-\varepsilon}}{\rho(k)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), \overset{0}{\varphi}(t)) = \frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), B_k \omega_k) - \frac{1}{\rho(k)} (f_1(kt), B_k \omega_k - \overset{0}{\varphi}).$$

Выше мы показали, что оба слагаемых в правой части имеют предел. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $\varphi_k^\beta(t) \equiv \varphi_0^\beta(t)$, $\beta \in I$, условие (4.13) можно заменить на следующее условие: если $(\varphi_0^\beta)^{(j)}(0) = 0$ для некоторого j из $\{0, 1, \dots, \langle a \rangle\}$ и всех $\beta \in I$, то $(\varphi)^{(j)}(0) = 0$ для этого j .

Условия (4.31) и (4.32) можно интерпретировать в некотором смысле как почти обратимость справа семейства линейных операторов B_k при $k \rightarrow +\infty$. Оператор B_0 , введенный в предыдущем параграфе (см. (3.3)), является в некотором смысле предельным оператором для этого семейства. Для дальнейшего важно иметь достаточные условия существования правого обратного оператора B_0^{-1} . Следующая лемма в какой-то степени решает эту задачу.

ЛЕММА 6. Пусть I – счетное множество и семейство функций

$$\{\varphi_0^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I\} = \varphi_0(t), \quad b < a, \quad M \leq N, \quad (4.34)$$

удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} 1) \varphi_0(t) &\in {}^I\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \text{ т.е. } \sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi_0^\beta(t)] < \infty; \\ 2) &\text{ существуют } A \text{ и } m \text{ такие, что} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\sup_{\beta \in I} |\widehat{\varphi}_0^\beta(z)| \geq \frac{A}{1 + |z|^m}, \quad z \in \Pi_b^a, \quad (4.36)$$

где $\widehat{\varphi}_0^\beta(z) = M[\varphi_0^\beta(t)]$ – преобразование Меллина, определяемое формулой (2.9);

3) для любого $j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$ существуют $\beta_j \in I$ такие, что

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j \varphi_0^{\beta_j}(0) \neq 0, \quad j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle. \quad (4.37)$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ ($a - \varepsilon > b + \varepsilon$) и $M_1 \geq 0$ найдется число Q такое, что для любого $n \geq Q$ существует непрерывный правый обратный оператор

$$B_0^{-1}: \mathcal{S}_{b+\varepsilon, n+M_1}^{a-\varepsilon, n+M_1} \mapsto {}^I\mathcal{S}_{b+\varepsilon, M_1}^{a-\varepsilon, M_1}, \quad \text{так что } B_0 B_0^{-1} = I \text{ на } \mathcal{S}_{b+\varepsilon, n+M_1}^{a-\varepsilon, n+M_1}. \quad (4.38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и $M_1 \geq 0$. Согласно лемме П0 и замечаниям 1 и 2 к ней существуют числа $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta < \infty$, такие, что для некоторых постоянных A_1 и m_1

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\widehat{\varphi}_0^\beta|^2 \geq \frac{A_1}{(1 + |z|)^{m_1}}, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon/4}^{a-\varepsilon/4}.$$

А тогда согласно лемме П1 существуют число Q_1 и семейство аналитических в $\Pi_{b+\varepsilon/2}^{a-\varepsilon/2}$ функций $\{g_\beta(z) \in H_{Q_1}(\Pi_{b+\varepsilon/2}^{a-\varepsilon/2}), \beta \in I\}$ такие, что

$$\sup_{\beta \in I} \|g_\beta(z)\|_{H_{Q_1}} < \infty, \quad \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \widehat{\varphi}_0^\beta(z) = 1, \quad (4.39)$$

$$g_\beta(z_\ell) = 0 \quad \forall \beta \in I, \quad z_\ell = -i\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, \quad z_\ell \in \Pi_b^a. \quad (4.40)$$

Определим (пока формально) оператор B_0^{-1} формулой

$$(B_0^{-1}\varphi)^\beta(t) = M^{-1}[\lambda_\beta \widehat{\varphi}(z) g_\beta(z)], \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b+\varepsilon, n+M_1}^{a-\varepsilon, n+M_1}, \quad (4.41)$$

где M^{-1} – обратное преобразование Меллина (см. (2.13)).

Докажем, что если $n \geq -Q_1 + 2$, то B_0^{-1} корректно определен как непрерывный оператор из $\mathcal{S}_{b+\varepsilon, n+M_1}^{a-\varepsilon, n+M_1}$ в ${}^I\mathcal{S}_{b+\varepsilon, M_1}^{a-\varepsilon, M_1}$. Действительно, пусть $P(-iz)$ – полином степени $-Q_1 + 2$, не имеющий корней в полосе Π_b^a (если $Q_1 \geq 2$, то считаем $P(-iz) \equiv 1$). Обозначим $\widehat{G}_\beta(z) = \frac{g_\beta(z)}{P(-iz)}$. Так как $|\widehat{G}_\beta(z)| < \frac{\text{const}}{1+|z|^2}$, $z \in \Pi_{b+\varepsilon/2}^{a-\varepsilon/2}$

(заметим, что const не зависит от $\beta \in I$), то в силу (2.14) $G_\beta(t) = M^{-1}[\widehat{G}_\beta(z)] \in \mathcal{S}_{b+\varepsilon,0}^{a-\varepsilon,0}$. (Мы поставили здесь 0 снизу в силу того, что $\widehat{G}_\beta(z)$ не имеет полюсов в $\Pi_{b+\varepsilon/2}^{a-\varepsilon/2}$.) Более того, семейство $\{G_\beta(t), \beta \in I\}$ принадлежит ${}^I\mathcal{S}_{b+\varepsilon,0}^{a-\varepsilon,0}$. Имеем (считая $-Q_1 + 2 \geq 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{b+\varepsilon,M_1}^{a-\varepsilon,M_1} \left[(B_0^{-1}\varphi)^\beta \right] &= \lambda_\beta \mathcal{P}_{b+\varepsilon,M_1}^{a-\varepsilon,M_1} \left[M^{-1} \left[\frac{g_\beta(z)}{P(-iz)} \cdot P(-iz) \widehat{\varphi}(z) \right] \right] \\ &= \lambda_\beta \mathcal{P}_{b+\varepsilon,M_1}^{a-\varepsilon,M_1} \left[P \left(t \frac{d}{dt} \right) \varphi(t) * G_\beta(t) \right] \\ &\leq \text{const} \lambda_\beta \mathcal{P}_{b+\varepsilon,M_1}^{a-\varepsilon,M_1} \left[P \left(t \frac{d}{dt} \right) \varphi \right] \cdot \mathcal{P}_{b+\varepsilon,0}^{a-\varepsilon,0} [G_\beta(t)] \\ &\leq \text{const} \lambda_\beta \mathcal{P}_{b+\varepsilon,0}^{a-\varepsilon,0} [G_\beta(t)] \cdot \mathcal{P}_{b+\varepsilon,-Q_1+2+M_1}^{a-\varepsilon,-Q_1+2+M_1} [\varphi]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Мы воспользовались утверждением 1 (см. § 2, а также лемму П2). Суммируя теперь (4.42) по $\beta \in I$, получим

$${}^I\mathcal{P}_{b+\varepsilon,M_1}^{a-\varepsilon,M_1} [B_0^{-1}\varphi] \leq \text{const} \cdot {}^I\mathcal{P}_{b+\varepsilon,0}^{a-\varepsilon,0} [G_\beta(t)] \cdot \mathcal{P}_{b+\varepsilon,-Q_1+2+M_1}^{a-\varepsilon,-Q_1+2+M_1} [\varphi],$$

что и требовалось проверить.

Из (4.40) следует, что $\widehat{\varphi}(z)g_\beta(z)$ не имеют полюсов в $\Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$, поэтому $B_0^{-1}\varphi \in {}^I\mathcal{S}_{b+\varepsilon,M_1}^{a-\varepsilon,M_1}$. Осталось проверить, что $B_0B_0^{-1} = I$. Для $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b+\varepsilon,n+M_1}^{a-\varepsilon,n+M_1}$, взяв преобразование Меллина от $B_0B_0^{-1}\varphi$ и учитывая (4.39), получим

$$\begin{aligned} M[B_0B_0^{-1}\varphi] &= M \left[\sum_{\beta \in I} (B_0^{-1}\varphi)^\beta * \varphi_0^\beta \right] = M \left[\sum_{\beta \in I} M^{-1} [\lambda_\beta \widehat{\varphi}(z)g_\beta(z)] * \varphi_0^\beta \right] \\ &= \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \widehat{\varphi}(z) \widehat{\varphi}_0^\beta(z) = \widehat{\varphi}(z) \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \widehat{\varphi}_0^\beta(z) = \widehat{\varphi}(z). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b+\varepsilon,n+M_1}^{a-\varepsilon,n+M_1}$, выводим, что $\varphi(t) = (B_0B_0^{-1}\varphi)(t)$. Лемма доказана.

§ 5. Основные теоремы

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(t) \in \left(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M} \right)'$, $b < a$, $M \leq N$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $b < \alpha < a$, и задано семейство последовательностей функций

$$\{\varphi_\lambda^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M}, \quad \beta \in I, \quad \lambda > \lambda_0\} \equiv \varphi_\lambda(t) \quad (5.1)$$

для некоторых $\lambda_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ со свойствами:

1) $\varphi_\lambda^\beta(t)$ непрерывна по λ в $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M}$, при этом

$$\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M} [\varphi_\lambda^\beta(t)] < \text{const}, \quad (5.2)$$

где const не зависит от $\beta \in I$ и $\lambda > \lambda_0$;

$$2) \forall \beta \in I \quad \varphi_\lambda^\beta(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi_0^\beta(t) \text{ в } \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M}; \quad (5.3)$$

3) $\varphi_\lambda^\beta(t)$ бесконечно дифференцируема по λ (в смысле Фреше) в $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ ($\alpha - \varepsilon > b$), причем существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M} \left[\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} \right)^p \left(\varphi_\lambda^\beta(t) - \varphi_0^\beta(t) \right) \right] \leq \frac{c_p}{\lambda^\sigma}, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (5.4)$$

где c_p не зависит от $\lambda > \lambda_0$ и $\beta \in I$. Здесь $\varphi_\lambda^\beta(t)$ и $\varphi_0^\beta(t)$ определяются согласно (2.6).

Пусть еще семейство $\varphi_0(t) = \{\varphi_0^\beta(t), \beta \in I\}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) существуют $A > 0$ и $m \geq 0$ такие, что

$$\sup_{\beta \in I} \left| \widehat{\varphi}_0^\beta(z) \right| \geq \frac{A}{1 + |z|^m} \quad \text{при } z \in \Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon_0} \quad (5.5)$$

(здесь $\widehat{\varphi}_0^\beta(z)$ – преобразование Меллина $\varphi_0^\beta(t)$ (см. (2.9));

б) для любого $j = 0, 1, \dots, \langle \alpha - \varepsilon \rangle$ найдутся $\beta_j \in I$ такие, что

$$\frac{d^j}{dt^j} \varphi_0^{\beta_j}(0) \neq 0 \quad \text{для } j = 0, 1, \dots, \langle \alpha - \varepsilon \rangle. \quad (5.6)$$

Тогда если обобщенная функция $f(t)$ обладает ограниченной по $\beta \in I$ квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на семействе последовательностей $\varphi_\lambda(t)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \varphi_k^\beta(t) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c^\beta \quad \forall \beta \in I, \quad (5.7)$$

причем существует постоянная c , не зависящая от $\beta \in I$, такая, что

$$\frac{1}{\rho(k)} \left| \left(f(kt), \varphi_k^\beta(t) \right) \right| \leq c, \quad (5.8)$$

то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \varphi(t) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\varphi \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}_+. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать теорему, мы воспользуемся леммой 5. Однако для этого необходимо сделать несколько предварительных построений. Пусть $\eta(\lambda)$ – C^∞ -функция такая, что $\eta(\lambda) = 0$ при $\lambda < \lambda_0$ и $\eta(\lambda) \equiv 1$ при $\lambda > \lambda_1 > \lambda_0$. Тогда в силу (5.1) и (5.2)

$$\eta(\lambda) \varphi_\lambda(t) \in {}^I F^0 \left[\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M} \right]. \quad (5.10)$$

Аналогично, в силу (5.4)

$$\lambda^\sigma \eta(\lambda) \left(\varphi_\lambda(t) - \varphi_0(t) \right) \in {}^I F^\infty \left[\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M} \right]. \quad (5.11)$$

Из (5.2) и (5.3) следует, что

$$\{\varphi_0^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M}, \beta \in I\} = \varphi_0(t) \in {}^I\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0,M}. \quad (5.12)$$

Поэтому для любого $M_1 \geq 0$ определен линейный непрерывный оператор

$$B_0: {}^I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M+M_1}^{a,M+M_1}, \quad (5.13)$$

действующий по формуле (3.3). Из (5.12), (5.5) и (5.6) следует, что выполнены все условия леммы 6 об обратном операторе. А потому существует такое n , что для любого $M_1 \geq 0$ определен непрерывный правый обратный оператор

$$B_0^{-1}: \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,n+M_1}^{a,n+M_1} \longrightarrow {}^I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1} \quad (5.14)$$

(где, быть может, следует немного уменьшить ε) такой, что $B_0 B_0^{-1} = I$.

В силу (5.10) (см. следствие 1 к лемме 2) последовательность $\eta(\lambda)\varphi_\lambda(t)$ определяет семейство линейных непрерывных операторов

$$B_k: {}^I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}, \quad k > 0, \quad (5.15)$$

действующих по формулам (3.16), (3.14). Учитывая (5.11), нетрудно проверить, что

$$\varphi_0(t) - \eta(\lambda)\varphi_\lambda(t) \equiv v_\lambda(t) \in {}^IF^\infty \left[\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M} \right]. \quad (5.16)$$

Поэтому для любого $M_1 \geq 0$ семейство последовательностей $v_\lambda(t) = \{v_\lambda^\beta(t), \beta \in I, \lambda > 0\}$ определяет семейство линейных непрерывных операторов (см. (3.16), (3.14))

$$R_k: {}^I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M+M_1}^{a,M+M_1}. \quad (5.17)$$

Очевидно, что $R_k = B_0 - B_k$. По лемме П4 для любого $d \in (b, a)$ такого, что $d - \sigma > \alpha - \varepsilon$, имеем

$$\mathcal{P}_{d,M+M_1}^{a,M+M_1} [R_k \omega] \leq \frac{\text{const}}{k^\sigma} \cdot {}^I\mathcal{P}_{(d,M)}^{M_1(a,M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \cdot {}^I\mathcal{P}_{d-\sigma,M_1}^{a,M_1} [\omega]. \quad (5.18)$$

Теперь все готово, чтобы воспользоваться леммой 5. Пусть фиксирована функция $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,Q}^{a,Q}$, где Q достаточно велико и будет выбрано позднее. Подберем семейство последовательностей функций $\omega_k \in {}^I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}$ такое, чтобы выполнялись условия (4.31) и (4.32) леммы 5. Для этого положим

$$\omega_k = B_0^{-1} \sum_{j=0}^L (R_k B_0^{-1})^j \varphi, \quad (5.19)$$

где ${}^0\varphi(t) = \varphi(t) - T_\varphi^{(a)}(t) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q}^{a, Q}$, а L подберем позднее. Из (5.14) и (5.17), считая $M_1 = Q - n$, имеем

$$\begin{aligned} B_0^{-1} {}^0\varphi &\in {}^I \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q-n}^{a, Q-n}, \quad R_k B_0^{-1} {}^0\varphi \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q-n+M}^{a, Q-n+M}, \quad \dots \\ \dots, \quad (R_k B_0^{-1})^j {}^0\varphi &\in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q-j(n-M)}^{a, Q-j(n-M)}, \quad \dots \\ \dots, \quad (R_k B_0^{-1})^L {}^0\varphi &\in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q-L(n-M)}^{a, Q-L(n-M)}, \\ \omega_k &\in {}^I \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q-(L+1)(n-M)-M}^{a, Q-(L+1)(n-M)-M}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Если Q достаточно велико, то ω_k – хорошо определенное семейство последовательностей функций. Пользуясь тем, что B_0^{-1} – правый обратный к B_0 оператор, имеем

$${}^0\varphi - B_k \omega_k = {}^0\varphi - (B_0 - R_k) B_0^{-1} \sum_{j=0}^L (R_k B_0^{-1})^j {}^0\varphi = (R_k B_0^{-1})^{L+1} {}^0\varphi. \quad (5.21)$$

Учитывая (5.14), (5.18) и (5.21) и обозначая $n - M$ через Δ , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{a, M}^{a, M} [{}^0\varphi - B_k \omega_k] &= \mathcal{P}_{a, M}^{a, M} \left[\underbrace{(R_k B_0^{-1}) \dots (R_k B_0^{-1})}_{L+1} {}^0\varphi \right] \\ &\leq \frac{\text{const}}{k^\sigma} {}^I \mathcal{P}_{(a, M)}^{0(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] {}^I \mathcal{P}_{a-\sigma, 0}^{a, 0} \left[B_0^{-1} \underbrace{(R_k B_0^{-1}) \dots (R_k B_0^{-1})}_L {}^0\varphi \right] \\ &\leq \frac{\text{const}}{k^\sigma} {}^I \mathcal{P}_{(a, M)}^{0(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \cdot \mathcal{P}_{a-\sigma, n}^{a, n} \left[\underbrace{(R_k B_0^{-1}) \dots (R_k B_0^{-1})}_L {}^0\varphi \right] \\ &\leq \frac{\text{const}}{k^{2\sigma}} {}^I \mathcal{P}_{(a, M)}^{0(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] {}^I \mathcal{P}_{(a-\sigma, M)}^{\Delta(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \\ &\quad \times {}^I \mathcal{P}_{a-2\sigma, \Delta}^{a, \Delta} \left[\underbrace{B_0^{-1} (R_k B_0^{-1}) \dots (R_k B_0^{-1})}_{L-1} {}^0\varphi \right] \\ &\leq \frac{\text{const}}{k^{2\sigma}} \left\{ {}^I \mathcal{P}_{(a, M)}^{0(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] {}^I \mathcal{P}_{(a-\sigma, M)}^{\Delta(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \right\} \\ &\quad \times \mathcal{P}_{a-2\sigma, 2\Delta+M}^{a, 2\Delta+M} \left[\underbrace{(R_k B_0^{-1}) \dots (R_k B_0^{-1})}_{L-1} {}^0\varphi \right] \leq \dots \\ &\dots \leq \frac{\text{const}}{k^{(L+1)\sigma}} \left\{ {}^I \mathcal{P}_{(a, M)}^{0(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] {}^I \mathcal{P}_{(a-\sigma, M)}^{\Delta(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \dots {}^I \mathcal{P}_{(a-L\sigma, M)}^{L\Delta(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \right\} \\ &\quad \times \mathcal{P}_{a-(L+1)\sigma, (L+1)\Delta+M}^{a, (L+1)\Delta+M} [{}^0\varphi]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Учитывая то, что

$${}^I \mathcal{P}_{(a-j\sigma, M)}^{j\Delta(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \leq \text{const} {}^I \mathcal{P}_{(a-L\sigma, M)}^{L\Delta(a, M)} [\lambda^\sigma v_\lambda],$$

из (5.22) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{a,M}^{a,M} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi - B_k \omega_k \end{smallmatrix} \right] &\leq \frac{\text{const}}{k^{(L+1)\sigma}} \left[{}^I \mathcal{P}_{(a-L\sigma,M)}^{L\Delta(a,M)} [\lambda^\sigma v_\lambda] \right]^{L+1} \\ &\times \mathcal{P}_{a-(L+1)\sigma, (L+1)\Delta+M}^{a, (L+1)\Delta+M} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi \end{smallmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\sigma < \varepsilon$ (ибо условие (5.4) выполняется с любым $\sigma_1 < \sigma$). Полагаем $L = \left\lceil \frac{a-\alpha}{\sigma} \right\rceil$. Очевидно, что $(L+1)\sigma > a - \alpha + \varepsilon_1$ для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ и $a - (L+1)\sigma > \alpha - \varepsilon$. Полагая теперь $Q = (L+1)\Delta + M$, из (5.23) получаем

$$\mathcal{P}_{a,M}^{a,M} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi - B_k \omega_k \end{smallmatrix} \right] \leq \frac{\text{const}}{k^{a-\alpha+\varepsilon_1}} \mathcal{P}_{a-\varepsilon, Q}^{a, Q} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi \end{smallmatrix} \right],$$

что и доказывает условие (4.32).

Теперь докажем, что выполнено условие (4.31) леммы 5. Оценим типичное слагаемое суммы (5.19). Для достаточно малых ε_1 и σ_1 так же, как и в оценках (5.22), получим

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon_1, 0}^{a, 0} [B_0^{-1} (R_k B_0^{-1})^j \begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi \end{smallmatrix}] &\leq \text{const } \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon_1, n}^{a, n} [(R_k B_0^{-1})^j \begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi \end{smallmatrix}] \leq \dots \\ &\dots \leq \frac{\text{const}}{k^{j\sigma_1}} [{}^I \mathcal{P}_{(\alpha-\varepsilon_1-j\sigma_1, M)}^{j\Delta(a, M)} [\lambda^{\sigma_1} v_\lambda]]^j \cdot \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon_1-j\sigma_1, M+(j+1)\Delta}^{a, M+(j+1)\Delta} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi \end{smallmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Считая $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ и $0 < \sigma_1 < \frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{L}$, получим

$$\alpha - \varepsilon_1 - j\sigma_1 \geq \alpha - \varepsilon_1 - L\sigma_1 \geq \alpha - \varepsilon, \quad j = 1, \dots, L.$$

Отсюда и из (5.24) имеем

$${}^I \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon_1, 0}^{a, 0} [B_0^{-1} (R_k B_0^{-1})^j \begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi \end{smallmatrix}] \leq \frac{\text{const}}{k^{j\sigma_1}} [{}^I \mathcal{P}_{(\alpha-\varepsilon, M)}^{j\Delta(a, M)} [\lambda^{\sigma_1} v_\lambda]]^j \cdot \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, Q}^{a, Q} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi \end{smallmatrix} \right].$$

Мы видим, что каждое слагаемое суммы (5.19), кроме первого, стремится к нулю при $k \rightarrow +\infty$ в пространстве $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon_1, 0}^{a, 0}$, что и доказывает условие (4.31) леммы 5, а вместе с ним и всю теорему. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условии теоремы вместо (5.4) можно считать, что

$$\lambda^\sigma \eta(\lambda) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \varphi_\lambda(t) - \varphi_0(t) \end{smallmatrix} \right) \in {}^I F^q \left[\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M}^{a, M} \right], \quad (5.25)$$

где $q \geq \left\lceil \frac{a-\alpha}{\sigma} \right\rceil (n - M)$, а n берется из леммы 6 об обратном операторе.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условиях теоремы отказаться от условия (5.7), то можно только утверждать, что $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)} |(f(kt), \varphi(t))| \leq c_\varphi, \quad k > k_0, \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}_+.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме п. 3) (см. формулу (5.4)). Вместо него потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

3') для любого $M_1 \geq 0$

$$\varphi_0(t) - \varphi_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{в} \quad {}^I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^{a, M_1}. \quad (5.26)$$

Тогда заключение теоремы 1 остается справедливым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем пользоваться леммой 5. Для этого проведем необходимые предварительные построения. Пусть так же, как и в доказательстве теоремы 1,

$$\eta(\lambda) \in C^\infty(0, +\infty), \quad \eta(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda < \lambda_0, \quad \eta(\lambda) = 1 \quad \text{при} \quad \lambda > \lambda_1 > \lambda_0.$$

Тогда имеют место включения (5.10) и (5.12), а потому существует такое n , что для любого $M_1 \geq 0$ определены линейные непрерывные операторы B_0 (см. (5.13)) и B_0^{-1} (см. (5.14)), причем B_0^{-1} является правым обратным к B_0 , и семейство непрерывных операторов B_k (см. (5.15)).

Рассмотрим семейство последовательностей

$$v_\lambda(t) = \{v_\lambda^\beta(t), \beta \in I\} = \{\varphi_0^\beta(t) - \varphi_\lambda^\beta(t)\eta(\lambda), \beta \in I, \lambda > 0\} \in {}^IF^0 \left[\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M}^{a+\varepsilon_0, M} \right]. \quad (5.27)$$

Это семейство порождает последовательность линейных непрерывных операторов

$$R_k: {}^IF_0^{\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a+\varepsilon_0, 0}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M}^{a+\varepsilon_0, M} \quad (5.28)$$

(см. (3.16), (3.14)). Пусть $\xi(\lambda) \in C^\infty(0, +\infty)$, причем $\xi(\lambda) = 0$ при $\lambda > 1$ и $\xi(\lambda) = 1$ при $\lambda < 1/2$. Для $s > 0$ рассмотрим семейства последовательностей функций:

$$q_{\lambda, s}(t) = \xi(\gamma_s \lambda) v_\lambda(t) \quad \text{и} \quad p_{\lambda, s}(t) = (1 - \xi(\gamma_s \lambda)) v_\lambda(t), \quad (5.29)$$

где функция γ_s стремится к нулю при $s \rightarrow +\infty$ и будет выбрана позднее. Семейства последовательностей $p_{\lambda, s}(t), q_{\lambda, s}(t) \in {}^IF^0 \left[\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M}^{a+\varepsilon_0, M} \right]$ порождают соответственно последовательности операторов

$$\begin{aligned} P_k \omega &= \sum_{\beta \in I} \int_0^\infty \omega^\beta(\mathcal{x}) p_{k\mathcal{x}, k}^\beta \left(\frac{t}{\mathcal{x}} \right) \frac{d\mathcal{x}}{\mathcal{x}}, \\ Q_k \omega &= \sum_{\beta \in I} \int_0^\infty \omega^\beta(\mathcal{x}) q_{k\mathcal{x}, k}^\beta \left(\frac{t}{\mathcal{x}} \right) \frac{d\mathcal{x}}{\mathcal{x}}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

линейно и непрерывно отображающих ${}_I\mathcal{J}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a+\varepsilon_0,0}$ в ${}_I\mathcal{J}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a+\varepsilon_0,M}$ (см. следствие 1 к лемме 2). Очевидно, что $P_k + Q_k = R_k$. Согласно лемме П4 для любого $d \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon_0)$ и $\sigma > 0$ такого, что $d - \sigma > \alpha - \varepsilon$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{d,M}^{a,M}[Q_k\omega] &\leq \frac{\text{const}}{k^\sigma} \cdot {}_I\mathcal{P}_{(d,M)}^{0(a,M)}[\lambda^\sigma q_{\lambda,k}] \cdot {}_I\mathcal{P}_{d-\sigma,0}^{a,0}[\omega] \\ &\leq \frac{\text{const}}{k^\sigma} \frac{1}{\gamma_k^\sigma} \cdot {}_I\mathcal{P}_{(d,M)}^{0(a,M)}[v_\lambda] \cdot {}_I\mathcal{P}_{d-\sigma,0}^{a,0}[\omega]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Здесь в последнем неравенстве использована оценка

$$\begin{aligned} {}_I\mathcal{P}_{(d,M)}^{0(a,M)}[\lambda^\sigma q_{\lambda,k}] &= \sup_{\beta \in I} \sup_{\lambda > 0} \mathcal{P}_{d,M}^{a,M}[\lambda^\sigma \xi(\gamma_k \lambda) v_\lambda^\beta(t)] \\ &= \sup_{\beta \in I} \sup_{\lambda > 0} \lambda^\sigma \xi(\gamma_k \lambda) \mathcal{P}_{d,M}^{a,M}[v_\lambda^\beta(t)] \leq \frac{1}{\gamma_k^\sigma} \sup_{\beta \in I} \sup_{\lambda > 0} \mathcal{P}_{d,M}^{a,M}[v_\lambda] \\ &= \frac{1}{\gamma_k^\sigma} \cdot {}_I\mathcal{P}_{d,M}^{0(a,M)}[v_\lambda], \end{aligned}$$

в которой мы учли, что $\xi(\gamma_k \lambda) = 0$ при $\lambda \geq 1/\gamma_k$.

Далее, в силу условия (5.26), считая s достаточно большим, так что $\frac{1}{2\gamma_s} > \lambda_1$, и замечая, что $p_{\lambda,s}(t) = 0$ при $\lambda < 1/2\gamma_s$ и $\eta(\lambda) \equiv 1$ при $\lambda > \lambda_1$, имеем

$$\{p_{\lambda,s}(t)\} = (1 - \xi(\gamma_s \lambda)) \left({}_0\varphi_0(t) - {}_0\varphi_\lambda(t) \right) \in {}_IF^0 \left[{}_0\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1} \right]. \quad (5.32)$$

Поэтому, еще раз пользуясь (5.26), получим

$$\begin{aligned} {}_I\mathcal{P}_{(\alpha-\varepsilon,M_1)}^{0(a,M_1)}[p_{\lambda,s}(t)] &= \sup_{\beta \in I} \sup_{\lambda \geq \frac{1}{2\gamma_s}} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1} \left[(1 - \xi(\gamma_s \lambda)) \left({}_0\varphi_0^\beta(t) - {}_0\varphi_\lambda^\beta(t) \right) \right] \\ &\leq \sup_{\beta \in I} \sup_{\lambda \geq \frac{1}{2\gamma_s}} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1} \left[{}_0\varphi_0^\beta(t) - {}_0\varphi_\lambda^\beta(t) \right] \leq \delta_s \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

ибо $1/2\gamma_s \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow +\infty$. В силу (5.32) при достаточно больших k для любого $M_1 \geq 0$ имеем семейство линейных непрерывных отображений

$$P_k: {}_I\mathcal{J}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0} \longrightarrow {}_I\mathcal{J}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1}. \quad (5.34)$$

Согласно следствию 2 к лемме 2

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1}[P_k\omega] &\leq \text{const} \cdot {}_I\mathcal{P}_{(\alpha-\varepsilon,M_1)}^{0(a,M_1)}[p_{\lambda,k}] \cdot {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}[\omega] \\ &\leq \text{const} \cdot \delta_k \cdot {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}[\omega]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Воспользуемся теперь леммой 5. Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{J}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1}$, где M_1 достаточно велико ($M_1 \geq n$, $M_1 \geq N$). Подберем ω_k так, чтобы удовлетворялись условия (4.31) и (4.32). Для этого положим

$$\omega_k = \sum_{j=0}^{\infty} B_0^{-1} (P_k B_0^{-1})^j {}_0\varphi. \quad (5.36)$$

Из определения (5.14), в котором следует M_1 положить равным нулю, а вместо n подставить M_1 , вытекает, что отображение

$$B_0^{-1} : \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^0 \longrightarrow {}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0} \quad (5.37)$$

линейно и непрерывно. Поэтому в силу (5.34) имеем

$$\begin{aligned} B_0^{-1} \varphi &\in {}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0}, \quad P_k B_0^{-1} \varphi \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^0, \quad B_0^{-1} (P_k B_0^{-1})^j \varphi \in {}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0}, \\ (P_k B_0^{-1})^2 \varphi &\in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^0, \quad \dots, \quad (P_k B_0^{-1})^j \varphi \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^0, \\ B_0^{-1} (P_k B_0^{-1})^j \varphi &\in {}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0}. \end{aligned}$$

Оценим, пользуясь (5.35) и (5.37), произвольное слагаемое суммы (5.36). Имеем

$$\begin{aligned} {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0} \left[B_0^{-1} (P_k B_0^{-1})^j \varphi \right] &\leq \text{const } \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^{a, M_1} \left[(P_k B_0^{-1})^j \varphi \right] \\ &\leq \text{const } \delta_k \cdot {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0} \left[B_0^{-1} (P_k B_0^{-1})^{j-1} \varphi \right] \leq \dots \\ &\dots \leq (\text{const } \delta_k)^j \cdot {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0} \left[B_0^{-1} \varphi \right] \leq \text{const} \cdot (\delta_k \text{const})^j \cdot \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^{a, M_1} [\varphi]. \end{aligned}$$

Так как $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то при достаточно большом k $\text{const } \delta_k < 1$, что обеспечивает сходимость ряда (5.36) в пространстве ${}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0}$. Кроме того, очевидно, что $\omega_k \rightarrow B_0^{-1} \varphi \equiv \omega$ при $k \rightarrow +\infty$ в ${}_I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, 0}^{a, 0}$. Итак, условие (4.31) леммы 5 выполнено.

Проверим теперь условие (4.32). Учитывая, что $B_k = B_0 - P_k - Q_k$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi - B_k \omega_k &= \varphi - (B_0 - P_k - Q_k) \sum_{j=0}^{\infty} B_0^{-1} (P_k B_0^{-1})^j \varphi \\ &= \varphi - (B_0 - P_k) B_0^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (P_k B_0^{-1})^j \varphi + Q_k \omega_k = Q_k \omega_k. \end{aligned}$$

Пользуясь (5.31), имеем

$$\mathcal{P}_{a, M}^{a, M} [Q_k \omega] \leq \frac{\text{const}}{k^\sigma} \frac{1}{\gamma_k^\sigma} \cdot {}_I\mathcal{P}_{(a, M)}^{0(a, M)} [v_\lambda] \cdot {}_I\mathcal{P}_{a-\sigma, 0}^{a, 0} [\omega].$$

Полагая $\sigma = a - \alpha + \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 < \varepsilon$, получаем

$$\mathcal{P}_{a, M}^{a, M} \left[\varphi - B_k \omega_k \right] \leq \frac{\text{const}}{k^{a-\alpha+\varepsilon_1}} \frac{1}{\gamma_k^{a-\alpha+\varepsilon_1}} \cdot {}_I\mathcal{P}_{(a, M)}^{0(a, M)} [v_\lambda] \cdot {}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon_1, 0}^{a, 0} [\omega_k].$$

Учитывая, что ${}_I\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon_1, 0}^{a, 0} [\omega_k] < \text{const}$, где const не зависит от k , и считая, например, что $\gamma_s = 1/\ln s$, убеждаемся в справедливости условия (4.32) леммы 5. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формулировке теоремы можно считать, что (5.26) выполнено только для $M_1 = n$, которое фигурирует в лемме 6 об обратном операторе.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условиях теоремы 2 отказаться от условия (5.7), то можно только утверждать, что $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\rho(k)$.

§ 6. Некоторые применения

В этом параграфе рассматриваются некоторые применения вышеизложенных результатов. Первое из них относится к квазиасимптотическим свойствам решений обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Мы изложим его в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(t)$ принадлежит $(\mathcal{S}_b^a)'$ и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\ell=0}^n A_\ell(t) \frac{d^\ell}{dt^\ell} f(t) = g(t), \quad t \geq t_0 > 0, \quad (6.1)$$

где $g(t) \in \mathcal{S}'_+$, а коэффициенты $A_\ell(t)$ бесконечно дифференцируемы, причем $A_\ell(t) = a_\ell t^\ell (1 + \gamma_\ell(t))$ и существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \gamma_\ell(t) \right| \leq \frac{c_j}{t^\sigma}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad \ell = 0, 1, \dots, n, \quad (6.2)$$

для некоторых постоянных c_j . Пусть еще $g(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , $-1 < \alpha < a$, а для полинома $P(t \frac{d}{dt}) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell t^\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell}$ выполнено условие

$$P(-iz) \neq 0, \quad z \in \bar{\Pi}_\alpha^a. \quad (6.3)$$

Тогда $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы $\alpha < -1$, но

$$\alpha \neq -1, -2, \dots, \quad (6.4)$$

то существуют постоянные $b_0, b_1, \dots, b_{\langle \alpha \rangle}$ такие, что $f(t) - \sum_{j=0}^{\langle \alpha \rangle} b_j \delta^{(j)}(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу конечности порядка f существует $Q \geq 0$ такое, что $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,Q}^{a,Q})'$. Не нарушая общности, можно считать, что $\text{supp } f \subset (t_0, +\infty)$. В противном случае положим $f = f_1 + f_2$, где $f_1 = f$ при $t > t_0 + 1$, а f_2 имеет компактный носитель. Так как $\alpha > -1$ и $g_1 = \sum_{\ell=0}^n A_\ell(t) \frac{d^\ell}{dt^\ell} f_2(t)$ имеет компактный носитель, то g_1 обладает тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Нам остается выяснить, обладает ли f_1 квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Итак, пусть $\text{supp } f \subset (t_0, +\infty)$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ $f(t) \in (\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,Q}^{a,Q})'$. Фиксируем ε настолько малым, чтобы $\alpha - \varepsilon > -1$. Поскольку $g(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, то существует N_0 такое, что при $N \geq N_0$ первообразная порядка N от $g(t)$ является непрерывной функцией и обладает асимптотикой относительно $k^N \rho(k)$ (см. [3]), т.е.

$$\frac{1}{k^N \rho(k)} (g(t), f_N(k-t)) = \frac{1}{\rho(k)} (g(kt), f_N(1-t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const}. \quad (6.5)$$

Пусть теперь $N \geq \max\{N_0, Q + n\}$; имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho(k)}(g(kt), f_N(1-t)) &= \frac{1}{\rho(k)} \left(\sum_{\ell=0}^n A_\ell(kt) f^{(\ell)}(kt), f_N(1-t) \right) \\
&= \frac{1}{\rho(k)} \left(\sum_{\ell=0}^n A_\ell(kt) \frac{1}{k^\ell} \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell f(kt), f_N(1-t) \right) \\
&= \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{k^\ell} \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell A_\ell(kt) f_N(1-t) \right) \\
&= \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \sum_{\ell=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^\ell a_\ell t^\ell f_N(1-t) + \sum_{\ell=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^\ell a_\ell t^\ell \gamma_\ell(kt) f_N(1-t) \right) \\
&= \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_k(t)). \tag{6.6}
\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы положили

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + \sum_{\ell=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^\ell a_\ell t^\ell \gamma_\ell(kt) f_N(1-t), \tag{6.7}$$

где

$$\varphi_0(t) = \sum_{\ell=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^\ell a_\ell t^\ell f_N(1-t). \tag{6.8}$$

Воспользуемся теоремой 1, при этом учтем, что множество I состоит из одного элемента, а в нормах, определяющих пространства $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q}^{a, Q}$, и преобразовании Меллина отсутствуют тейлоровские многочлены, ибо $\alpha > -1$. Нам нужно показать, что выполнены условия (5.2)–(5.5), которые в нашем случае выглядят так:

$$\varphi_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \varphi_0(t) \quad \text{в } \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, Q}^{a+\varepsilon_0, Q}; \tag{6.9}$$

найдется σ_1 такое, что

$$\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, Q}^{a, Q} \left[\left(k \frac{d}{dk} \right)^s (\varphi_k - \varphi_0) \right] \leq \frac{c_s}{k^{\sigma_1}}, \quad k > k_0, \quad s = 0, 1, \dots; \tag{6.10}$$

найдутся постоянные A и m такие, что

$$|\widehat{\varphi}_0(z)| \geq \frac{A}{1 + |z|^m} \quad \text{при } z \in \Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon_0}. \tag{6.11}$$

Условие (5.6) в нашем случае отсутствует, а условие (5.7) вытекает из (6.5) и (6.6).

Проверим сначала условие (6.10). Обозначая $\gamma_\ell^{*(s)}(kt) = (k \frac{d}{dk})^s \gamma_\ell(kt)$, имеем

$$\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, Q}^{a+\varepsilon_0, Q} \left[\left(k \frac{d}{dk} \right)^s (\varphi_k - \varphi_0) \right] = \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, Q}^{a+\varepsilon_0, Q} \left[\sum_{\ell=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^\ell a_\ell t^\ell \gamma_\ell^{*(s)}(kt) f_N(1-t) \right].$$

Эта норма оценивается конечной суммой слагаемых вида

$$\text{const} \int_0^1 t^{\alpha-\varepsilon} \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^p f_N(1-t) \cdot \left(t \frac{d}{dt} \right)^q \gamma_\ell^{*(s)}(kt) \right| dt, \quad (6.12)$$

где $0 \leq p, q \leq n+Q$, $0 \leq \ell \leq n$. При этом мы учли, что $\text{supp } f_N(1-t) \subset [0, 1]$. Далее, учитывая, что $\left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^p f_N(1-t) \right| < \text{const}$ при $p < N$, а также то, что $\left(t \frac{d}{dt} \right)^q \gamma_\ell^{*(s)}(kt) = \gamma_\ell^{*(s+q)}(kt)$, получим, что (6.12) оценивается выражением

$$\begin{aligned} \text{const} \int_0^1 t^{\alpha-\varepsilon} \left| \gamma_\ell^{*(q+s)}(kt) \right| dt &= \frac{\text{const}}{k^{\alpha-\varepsilon+1}} \int_0^k t^{\alpha-\varepsilon} \left| \gamma_\ell^{*(q+s)}(t) \right| dt \\ &\leq \frac{\text{const}}{k^{\alpha-\varepsilon+1}} \left[\int_0^1 t^{\alpha-\varepsilon} \left| \gamma_\ell^{*(q+s)}(t) \right| dt + \int_1^k t^{\alpha-\varepsilon} \left| \gamma_\ell^{*(q+s)}(t) \right| dt \right] \\ &\leq \frac{\text{const}}{k^{\alpha-\varepsilon+1}} + \frac{\text{const}}{k^{\alpha-\varepsilon+1}} \int_1^k t^{\alpha-\varepsilon-\sigma} dt \leq \frac{\text{const}}{k^{\alpha-\varepsilon+1}} + \frac{\text{const}}{k^\sigma}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Полагая $\sigma_1 = \min\{\sigma, \alpha - \varepsilon + 1\}$, получим (6.10).

Условие (6.9) следует из (6.10) при $s = 0$. Проверим условие (6.11).

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\varphi_0(t)] &= \mathcal{M} \left[\sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell a_\ell \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell t^\ell f_N(1-t) \right] \\ &= \int_0^\infty t^{-iz} \sum_{\ell=0}^n a_\ell \left(-\frac{d}{dt} \right)^\ell t^\ell f_N(1-t) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{\ell=0}^n a_\ell t^\ell \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell t^{-iz} \right) f_N(1-t) dt \\ &= \int_0^\infty \left(P \left(t \frac{d}{dt} \right) t^{-iz} \right) f_N(1-t) dt = P(-iz) \int_0^\infty t^{-iz} f_N(1-t) dt \\ &= P(-iz) \frac{\Gamma(1-iz)}{\Gamma(N+1-iz)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Учитывая (6.3) и тот факт, что

$$\frac{\Gamma(1-iz)}{\Gamma(N+1-iz)} = z^{-N}(1+o(1)), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \text{при } z \in \Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon_0}$$

и что функция $\Gamma(N+1-iz)$ не имеет полюсов в этой полосе, получим (6.11). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Пусть $\alpha < -1$. Умножим уравнение (6.1) на t . Перегруппировывая производные и перестраивая коэффициенты, имеем

$$tg(t) = \sum_{\ell=0}^n tA_\ell(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell f(t) = \sum_{\ell=0}^n A_\ell^1(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell (tf(t)),$$

где $A_n^1(t) = A_n(t)$, $A_\ell^1(t) = A_\ell(t) - \frac{\ell+1}{t} A_{\ell+1}^1(t)$, $\ell = n-1, n-2, \dots, 1, 0$. Откуда видно, что новые коэффициенты A_ℓ^1 удовлетворяют условию (6.2). Прodelывая эту процедуру N раз, $N \geq -\alpha$, получим уравнение

$$\sum_{\ell=0}^n A_\ell^N(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell (t^N f(t)) = t^N g(t),$$

в котором коэффициенты удовлетворяют условию (6.2), а правая часть обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $k^N \rho(k)$ порядка $\alpha + N > 0$.

При такой перестройке главная часть уравнения также перестроится следующим образом:

$$t^N \sum_{\ell=0}^n a_\ell t^\ell \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell f = t^N P \left(t \frac{d}{dt} \right) f = t^N P \left(t \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{1}{t^N} t^N f \right) = P_N \left(t \frac{d}{dt} \right) (t^N f).$$

Нетрудно проверить, что новая главная часть $P_N(t \frac{d}{dt}) = t^N P(t \frac{d}{dt}) \frac{1}{t^N}$ удовлетворяет условию

$$P_N(-iz) = P(-i(z - iN)) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \overline{\Pi}_{\alpha+N}^{a+N}.$$

Так как $\alpha + N > 0$, то по теореме 3 $t^N f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^N \rho(k)$. По теореме о делении (см. [3, лемма 2]) существуют постоянные $b_0, b_1, \dots, b_p$ такие, что

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt) - \sum_{j=0}^p b_j \delta^{(j)}(kt), \varphi(t) \right) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} c_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (6.15)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(\sum_{j=\langle \alpha+1 \rangle}^p b_j \delta^{(j)}(kt), \varphi(t) \right) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

из (6.15) завершаем доказательство.

Второе применение относится к вопросам о некомпенсации особенностей голоморфных функций.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\tilde{f}(z) \in H(\mathbb{R}_+)$, функция $\rho(k)$ автомодельна порядка α , а $\gamma(z)$ и $g(z)$ – комплекснозначные непрерывные при $\text{Im } z > 0$ функции такие, что

$$\gamma(z) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow 0, \quad \text{Im } z > 0, \quad (6.16)$$

$$\{z : z = g(\zeta), \zeta \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\} \subset \mathcal{K} \Subset T^{\mathbb{R}_+}, \quad (6.17)$$

где $\mathcal{K}$ – некоторый компакт в верхней полуплоскости.

Если существуют постоянные c, r_0 и m такие, что

$$|\tilde{f}(z) + \gamma(z) \tilde{f}(|z|g(z))| \leq \frac{c\rho(1/|z|)}{(\sin \arg z)^m}, \quad |z| < r_0, \quad (6.18)$$

то существуют постоянные c_1 и r_1 такие, что

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{c_1 \rho(1/|z|)}{(\sin \arg z)^m}, \quad |z| < r_1. \quad (6.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\tilde{f}(z) \in H(\mathbb{R}_+)$, то существует обобщенная функция $f(t) \in \left(\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}\right)'$ такая, что $L[f] = \tilde{f}$ (см. (1.7)). Не нарушая общности, считаем, что $a > -1$ и $a > \alpha$. Полагая $|z| = 1/k$ и $\arg z = \beta$, $\beta \in I = \{(0, \pi)\}$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) + \gamma(z)\tilde{f}(|z|g(z)) &= (f(t), e^{izt} + \gamma(z)e^{ig(z)|z|t}) \\ &= \left(f(kt), e^{ite^{i\beta}} + \gamma\left(\frac{1}{k}e^{i\beta}\right)e^{ig((1/k)e^{i\beta})t}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену переменных $t' = |z|t$ и, как обычно, опустили штрихи. Обозначая

$$\varphi_k^\beta(t) = (\sin \beta)^Q \left(e^{ie^{i\beta}t} + \gamma\left(\frac{1}{k}e^{i\beta}\right)e^{ig((1/k)e^{i\beta})t} \right), \quad (6.20)$$

где Q достаточно велико, например $Q \geq [a] + 2$, имеем

$$\frac{\sin^Q \arg z}{\rho(1/|z|)} (\tilde{f}(z) + \gamma(z)\tilde{f}(|z|g(z))) = \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_k^\beta(t)).$$

Воспользуемся теоремой 2. Проверим, что все условия этой теоремы для семейства последовательностей (6.20) выполнены. Как и в примере 1, нетрудно убедиться в том, что $\sup_{\beta \in I} \sup_{k > k_0} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0, M} [\varphi_k^\beta(t)] < \infty$, где ε_0 достаточно мало, так что

$$\{\varphi_k^\beta(t), \beta \in I, k > k_0\} \equiv \varphi_k(t) \in {}^I F^0 \left[\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0, M} \right],$$

причем

$$\forall \beta \in I \quad \varphi_k^\beta(t) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \varphi_0^\beta(t) = (\sin \beta)^Q e^{ie^{i\beta}t} \quad \text{в } \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon_0, M}.$$

Проверим условие (5.26). Для любого M_1 в силу (6.16) имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^{a, M_1} \left[\varphi_k^\beta(t) - \varphi_0^\beta(t) \right] \\ = \sup_{\beta \in I} \mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon, M_1}^{a, M_1} \left[(\sin \beta)^Q \gamma \left(\frac{1}{k}e^{i\beta} \right) e^{ig((1/k)e^{i\beta})t} \right] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $a > -1$, а потому $\varphi_0^\beta(t) = \varphi(t)$. Покажем, что выполнено и условие (5.5). Имеем

$$\widehat{\varphi}_0^\beta(z) = \mathcal{M} \left[(\sin \beta)^Q e^{ie^{i\beta}t} \right] = (\sin \beta)^Q (-ie^{i\beta})^{(iz-1)} \Gamma(1-iz)$$

(см., например, [16]), так что для $z = x + iy$

$$|\widehat{\varphi}_0^\beta(z)| = (\sin \beta)^Q |e^{-(\beta-\pi/2)z} \Gamma(1+y-ix)|.$$

В полосе $z \in \Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon_0}$ при $x < -N$, где N достаточно велико, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in I} \left| \widehat{\varphi}_0^\beta(z) \right| &\geq \left| \widehat{\varphi}_0^{\pi+1/x}(x+iy) \right| \geq \text{const } e^{-(\pi/2)x} e^{-(\pi/2)|x|} |x|^{y+1/2} \left| \sin\left(\pi + \frac{1}{x}\right) \right|^Q \\ &\geq \text{const } |x|^{b+1/2-Q}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\sin(\pi + 1/x) \sim 1/|x|$ при больших $|x|$, а также то, что

$$\begin{aligned} \Gamma(1+y-ix) &= \sqrt{2\pi} e^{-(\pi/2)|x|} |x|^{1/2+y} (1+o(1)), \\ \Gamma(s-1-y+ix) &= \sqrt{2\pi} e^{-(\pi/2)|x|} |x|^{-3/2+s+y} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Аналогичную оценку при $x \rightarrow +\infty$ получим, выбирая $\beta = 1/x$. Теперь нетрудно усмотреть, что условие (5.5) выполнено. Согласно теореме 2 (см. замечание 2) обобщенная функция $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\rho(k)$. По общей тауберовой теореме [3] существуют постоянные B, c_2 и r_1 такие, что $|f(z)| \leq \frac{c_2 \rho(1/|z|)}{(\sin \arg z)^B}$ при $|z| < r_1$. Откуда с учетом (6.16)–(6.18) имеем

$$\frac{1}{\rho(1/|z|)} \left| \gamma(z) \tilde{f}(|z|g(z)) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow 0. \quad (6.22)$$

Из (6.18) и (6.22) следует (6.19). Теорема доказана.

§ 7. Абелевы и тауберовы теоремы для интегральных преобразований типа Стильеса

Как другое применение полученных выше результатов мы докажем абелевы и тауберовы теоремы для интегральных преобразований обобщенных функций таких, как обобщенное интегральное преобразование Стильеса, интегральные преобразования с логарифмическим ядром и с ядром арктангенса. Для этого нам понадобится некоторый вариант теоремы 1, рассмотренной в § 5, который представляет и самостоятельный интерес (отметим, что результаты этого параграфа в несколько другой формулировке анонсированы без доказательства в [21]). В этом варианте мы будем рассматривать семейства последовательностей, фактически не зависящие от λ , что, конечно, упрощает ситуацию. Однако при этом мы хотим отказаться от условий а) и б) (см. (5.5) и (5.6)). В частности, некоторые из производных $\frac{d^j}{dt^j} \varphi_0^\beta(0)$ могут обращаться в нуль при всех $\beta \in J$. Что касается условия а), то будем предполагать, что оно выполняется вне некоторого компакта, а на этом компакте $\widehat{\varphi}_0^\beta(z)$ могут иметь общие нули. В этой ситуации заключение теоремы 1 для обобщенной функции f перестает быть верным. Тем не менее, оно останется справедливым, если предварительно из f вычесть конечное число контрчленов определенного вида. Множество этих контрчленов образует конечномерное линейное пространство $\mathcal{H}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$, которое мы далее опишем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть заданы числа: не целые a, b , $b < a$, целые неотрицательные M, N , а также $\delta > 0$ и α , $b < \alpha < a$. Назовем семейство функций

$$\varphi_0(t) = \{\varphi_0^\beta(t), \beta \in J\}, \quad (7.1)$$

допустимым, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi_0^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon,M}$ для любого $\beta \in J$, и если выполнены условия:

$$\sup_{\beta \in J} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon,M} [\varphi_0^\beta(t)] < \infty; \quad (7.2)$$

существуют постоянные A, m и R_0 такие, что

$$\sup_{\beta \in J} |\widehat{\varphi}_0^\beta(z)| \geq \frac{A}{1 + |z|^m}, \quad z \in \Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon}, \quad |z| > R_0. \quad (7.3)$$

Кроме того, преобразование Меллина этого семейства $\widehat{\varphi}_0(z)$ не имеет общих нулей при $\operatorname{Im} z = \alpha$, а если $\alpha = -1, -2, \dots$, то в точке $z = i\alpha$ хотя бы одна из функций семейства имеет полюс с вычетом, отличным от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть заданы числа a, b, M, N, δ и $b < \alpha < a$, а также допустимое семейство (7.1). Опишем базис соответствующего этому семейству пространства контрчленов $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$. Рассмотрим следующие три случая:

- 1) пусть для некоторого j , $0 \leq j \leq \langle a \rangle$, имеем $\frac{d^j}{dt^j} \varphi_0^\beta(0) = 0$ для всех $\beta \in J$; тогда $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ содержит $\delta^{(j)}(t)$ (если $a > -1$, то этот случай отсутствует);
- 2) пусть в точке $-in$, $n = 1, 2, \dots$, $\alpha < -n < a$, семейство $\{(z + in)\widehat{\varphi}_0^\beta(z), \beta \in J\}$ имеет нуль кратности h ; тогда $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ содержит обобщенные функции

$$\delta^{(n-1)}(t), \quad t_+^{-n}, \quad t_+^{-n} \ln t_+, \quad \dots, \quad t_+^{-n} \ln^{h-2} t_+$$

(если $h = 1$, то $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ содержит только $\delta^{(n-1)}(t)$);

- 3) пусть в точке ζ , $\zeta \neq -i, -2i, \dots$, $\alpha < \operatorname{Im} \zeta \leq a$, семейство $\widehat{\varphi}_0(z)$ имеет нуль кратности r ; тогда $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ содержит обобщенные функции

$$t_+^{-i\zeta}, \quad t_+^{-i\zeta} \ln t_+, \quad \dots, \quad t_+^{-i\zeta} \ln^{r-1} t_+.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть

$$j_1, \dots, j_p, \quad 0 \leq j_s \leq \langle a \rangle \quad \text{для } s = 1, \dots, p, \quad (7.4)$$

— те самые j , которые фигурируют в 1), и пусть семейство $\widehat{\varphi}_0(z)$ имеет нули в точках

$$\zeta_q \in \overline{\Pi}_\alpha^a, \quad q = 1, \dots, \ell, \quad \zeta_q \neq -i, -2i, \dots, \quad (7.5)$$

кратности r_q соответственно. Кроме того, пусть в точках

$$z_\tau \in \overline{\Pi}_\alpha^a, \quad z_\tau = -in_\tau, \quad n_\tau \in \mathbb{N}_+, \quad \tau = 1, 2, \dots, w, \quad (7.6)$$

семейства $(z - z_\tau)\widehat{\varphi}_0(z) = \{(z - z_\tau)\widehat{\varphi}_0^\beta(z), \beta \in J\}$, имеют нули кратности h_τ соответственно. Тогда любое $f_0 \in \mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ представляется в виде

$$\begin{aligned} f_0 = & \sum_{q=1}^{\ell} \sum_{\gamma=0}^{r_q-1} c_{q\gamma} t_+^{-i\zeta_q} \ln^\gamma t_+ + \sum_{\tau=1}^w \sum_{\xi=1}^{h_\tau-1} a_{\xi\tau} t_+^{-n_\tau} \ln^{\xi-1} t_+ \\ & + \sum_{\tau=1}^w d_\tau \delta^{(n_\tau-1)}(t) + \sum_{s=1}^p b_s \delta^{(j_s)}(t), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $d_\tau, b_s, c_{q\gamma}, a_{\xi\tau}$ — некоторые постоянные.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in \left(\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}\right)'$, $a > b$, $N \geq M$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $b < \alpha < a$, и семейство функций

$$\varphi_0(t) = \{\varphi_0^\beta(t), \beta \in J\} \quad (7.8)$$

допустимо относительно чисел $a, b, M, N, \delta, \alpha$ (см. определение 8).

Если f обладает ограниченной квазиасимптотикой по $\beta \in J$ относительно $\rho(k)$ на семействе $\varphi_0(t)$, т.е. для любого $\beta \in J$

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \varphi_0^\beta(t) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c^\beta, \quad \frac{1}{\rho(k)} \left| \left(f(kt), \varphi_0^\beta(t) \right) \right| < C, \quad k > k_0, \quad (7.9)$$

для некоторой постоянной C , то найдется обобщенная функция $f_0 \in \mathcal{H}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ такая, что $F = f - f_0$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)} (F(kt), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\varphi \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}_+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что f обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на основных функциях $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$, имеющих те же нули производных в нуле и те же нули и полюсы преобразования Меллина, что и у семейства $\varphi_0(t)$. Другими словами, рассматривая $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$ как семейство, состоящее из одной функции, имеем включение $\mathcal{H}_\alpha^a[\varphi(t)] \supset \mathcal{H}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$. Воспользуемся леммой 5 с учетом замечания к ней. Для этого введем полином

$$W(z) = \prod_{s=1}^p (z + i(j_s + 1)) \prod_{q=1}^\ell (z - \zeta_q)^{r_q} \prod_{\tau=1}^w (z + in_\tau)^{h_\tau}, \quad (7.10)$$

где $j_s, p, \zeta_q, \ell, r_q, n_\tau, w$ и h_τ – те самые, что фигурируют при описании $\mathcal{H}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ для семейства (7.8) аналогично формулам (7.4)–(7.6), и семейство функций $\{\widehat{\varphi}_1^\beta(z) = \frac{1}{W(z)} \widehat{\varphi}_0^\beta, \beta \in J\} = \widehat{\varphi}_1(z)$. Из леммы П0, замечания к ней и леммы П1 вытекает, что существуют счетное множество $I \subset J$, $\lambda_\beta > 0$, $\beta \in I$, и семейство $g_\beta(z)$ аналитических в полосе $\Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$ функций (полиномиально ограниченных там полиномом, не зависящим от β) такие, что

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta < \infty, \quad \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \widehat{\varphi}_1^\beta(z) = 1 \quad \text{при } z \in \Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon}.$$

Рассмотрим оператор B_0 , определяемый формулой (3.3) по семейству (7.8). Покажем, что существует семейство функций $\omega \in {}_I \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,0}^{a,0}$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, такое, что $B_0 \omega = \overset{0}{\varphi}$. Для этого положим

$$\widehat{\omega}^\beta(z) = \lambda_\beta g_\beta(z) \frac{\widehat{\varphi}(z)}{W(z)}, \quad \text{тогда } \widehat{\varphi}(z) = \sum_{\beta \in I} \widehat{\omega}^\beta(z) \widehat{\varphi}_0^\beta(z). \quad (7.11)$$

Отметим, что $\hat{\omega}^\beta(z)$ аналитичны в $\Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$ и убывают на бесконечности быстрее любой степени $|z|^{-1}$, а потому, переходя к обратному преобразованию Меллина в (7.11) и уменьшая, если необходимо, ε , получим

$$\varphi_0(t) = B_0\omega, \quad \{\omega^\beta(t) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, \infty}^{a, \infty}, \beta \in I\} = \omega(t) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon, \infty}^{a, \infty}.$$

Теперь положим $\omega_k = \omega$; видим, что условие (4.31) леммы 5 выполняется автоматически. Учитывая, что

$$B_k\omega_k = B_k\omega = \sum_{\beta \in I} \int_0^\infty \omega^\beta(\varkappa) \varphi_0^\beta \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} = B_0\omega,$$

видим, что условие (4.32) также тривиально выполнено. Таким образом, f обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на таких φ .

Пусть $\psi(t)$ – произвольная функция из $\mathcal{S}_+$. Тогда функция $\varphi(t) = W(-i \frac{d}{dt} t) \psi(t)$ является функцией уже рассмотренного вида. По уже доказанному

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) &= \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), W \left(-i \frac{d}{dt} t \right) \psi(t) \right) \\ &= \frac{1}{\rho(k)} \left(W \left(it \frac{d}{dt} \right) f(kt), \psi(t) \right) = \frac{1}{\rho(k)} (g(t), \psi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\psi, \end{aligned} \quad (7.12)$$

где

$$W \left(it \frac{d}{dt} \right) f = g, \quad (7.13)$$

при этом обобщенная функция g (согласно (7.12)) обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α . Так как мнимая часть всех корней полинома $W(z)$ отлична от α (см. определение 8), то по лемме П6 найдется решение F уравнения (7.13), обладающее квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Но наше решение f отличается от F на некоторое решение f_0 однородного уравнения

$$W \left(it \frac{d}{dt} \right) f_0 = 0, \quad f_0 \in \mathcal{S}'_+,$$

любое решение которого согласно (1.10)–(1.13) принадлежит $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0]$. Теорема доказана.

Обобщенное интегральное преобразование Стильеса задается формулой

$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty). \quad (7.14)$$

Здесь $n = 0, 1, \dots$, $-\infty < s < +\infty$, $c > 0$, а логарифм задается своей главной ветвью: $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $|\arg z| < \pi$. Ядра этих интегральных преобразований

$$\psi \left(\frac{t}{z} \right) = \frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \in \mathcal{S}_b^a, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \quad (7.15)$$

для любого $a < s - 1$ и любого $b < a$. Формула (7.14) для $f \in (\mathcal{S}_b^a)'$ определяет аналитическую функцию $F(z)$ во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по положительной части вещественной оси.

Справедлива следующая абелева

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, $a < s - 1$, $b < a$, обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , $b < \alpha < a$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi(t)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} c_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (7.16)$$

Тогда имеет место:

1) существует предел

$$\frac{1}{r\rho(r)}F(re^{i\beta}) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} c^\beta \quad \forall \beta \in (0, 2\pi); \quad (7.17)$$

2) существуют A, m и r_0 такие, что

$$\frac{1}{r\rho(r)}|F(re^{i\beta})| \leq \frac{A}{\sin^m \frac{\beta}{2}}, \quad r > r_0, \quad \beta \in (0, 2\pi). \quad (7.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7.16) и теоремы о равномерной ограниченности (см. [22]) последовательность обобщенных функций $\frac{1}{\rho(k)}f(kt)$ сходится на всех функциях $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,Q}^{a,Q}$ при некотором $Q \geq 0$. Учитывая, что

$$\psi^\beta(t) = \frac{\ln^n(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s} \in \mathcal{S}_{b,Q}^{a,Q} \quad \text{при любом } Q \geq 0 \text{ и } 0 < \beta < 2\pi,$$

полагая $z = re^{i\beta}$ и делая замену переменных $t = rt'$, опуская, как обычно, штрихи, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r\rho(r)}F(re^{i\beta}) &= \frac{1}{r\rho(r)}\left(f(t), \frac{\ln^n(c - \frac{t}{r}e^{-i\beta})}{(c - \frac{t}{r}e^{-i\beta})^s}\right) \\ &= \frac{1}{\rho(r)}\left(f(rt), \frac{\ln^n(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s}\right) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} c^\beta, \end{aligned}$$

что и доказывает (7.17). Из легко проверяемой оценки

$$\mathcal{P}_{b,Q}^{a,Q}[\psi^\beta(t)] \leq \frac{\text{const}}{\sin^{Q+s+1} \frac{\beta}{2}}$$

и сходимости последовательности функционалов $\frac{1}{\rho(k)}f(kt)$ вытекает, что

$$\frac{1}{r\rho(r)}|F(re^{i\beta})| = \frac{1}{\rho(r)}|(f(rt), \psi^\beta(t))| \leq \text{const } \mathcal{P}_{b,Q}^{a,Q}[\psi^\beta(t)] \leq \frac{\text{const}}{\sin^{Q+s+1} \frac{\beta}{2}}.$$

Откуда и следует (7.18) при $m \geq Q + s + 1$. Теорема доказана.

Обратную (тауберову) теорему мы докажем для случая $n = 1$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $F(z)$ – аналитическая в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ функция, определяемая формулой

$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \quad (7.19)$$

где $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, $b < a < s - 1$, $s > 0$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $b < \alpha < a$, и выполнены условия (7.17) и (7.18). Обозначим через y_0 единственный на интервале $(-\infty, s - 1)$ корень уравнения

$$\ln c + \psi(s) = \psi(s - 1 - y), \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z). \quad (7.20)$$

(Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.) Тогда:

- 1) если $y_0 < \alpha$, то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$;
- 2) если $y_0 > \alpha$, то возможны следующие подслучаи:
 - 2а) если $y_0 = -1, -2, \dots$, то существует c_1 такое, что $f(t) - c_1 \delta^{(-y_0-1)}(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$;
 - 2б) если $y_0 \neq -1, -2, \dots$, то, в свою очередь, возможны подслучаи:
 - 2б₁) если $y_0 > a$, то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$;
 - 2б₂) если $\alpha < y_0 < a$, то $f(t) - c_2 t_+^{y_0}$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ с некоторой постоянной c_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 5. Сперва заметим, что в силу конечности порядка $f(t)$ существует $Q \geq 0$ такое, что $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,Q}^{a,Q})'$. Фиксируя $q = \max\{m, Q + s + 1\}$ и полагая $z = re^{i\beta}$, из (7.19) имеем

$$\begin{aligned} \sin^q \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{1}{r\rho(r)} F(re^{i\beta}) &= \sin^q \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{1}{r\rho(r)} \left(f(t), \frac{\ln(c - \frac{t}{r} e^{-i\beta})}{(c - \frac{t}{r} e^{-i\beta})^s} \right) \\ &= \frac{1}{\rho(r)} \left(f(rt), \sin^q \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{\ln(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s} \right) = \frac{1}{\rho(r)} \left(f(rt), \varphi_0^\beta(t) \right), \end{aligned} \quad (7.21)$$

где $\sin^q(\beta/2) \frac{\ln(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s} = \varphi_0^\beta(t)$, $0 < \beta < (0, 2\pi)$.

Покажем, что для чисел b, a , $M = N = Q$ и α семейство функций

$$\varphi_0(t) = \left\{ \varphi_0^\beta(t) = \sin^q \left(\frac{\beta}{2} \right) \cdot \frac{\ln(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s}, \beta \in J \right\}, \quad J = (0, 2\pi), \quad (7.22)$$

допустимо (см. определение 8).

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ такого, что $a + \varepsilon < s - 1$, и оценки

$$\mathcal{P}_{b,Q}^{a+\varepsilon,Q} [\varphi_0^\beta(t)] \leq \frac{\text{const}}{\sin^{Q+s+1} \frac{\beta}{2}},$$

где $0 < \beta < 2\pi$, следует, что выполнено условие (7.2). Чтобы проверить оставшееся условие (7.3), вычислим преобразование Меллина функций семейства (7.22),

заметив предварительно, что они аналитичны в комплексной плоскости $\mathbb{C}_t$ вне разреза, лежащего на луче, выходящем из начала координат и проходящем через точку $t_0 = ce^{i\beta}$. Полагая $\operatorname{Im} z > -1$, пользуясь (2.9) и поворачивая луч интегрирования на угол $\beta - \pi$ так, чтобы при этом не задевать разреза, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\varphi_0^\beta(t)] &= \widehat{\varphi}_0^\beta(z) = \sin^q\left(\frac{\beta}{2}\right) \int_0^\infty t^{-iz} \frac{\ln(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s} dt \\ &= \sin^q\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{(\beta-\pi)(z+i)} \int_0^\infty t^{-iz} \frac{\ln(c+t)}{(c+t)^s} dt \\ &= \frac{\sin^q(\beta/2)c^{1-s-iz}}{e^{(\pi-\beta)z}e^{i(\pi-\beta)}} [\ln c + \psi(s) - \psi(s-1+iz)] \frac{\Gamma(1-iz)\Gamma(s-1+iz)}{\Gamma(s)}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$. Для последнего интеграла мы использовали табличное значение из [16]. Учитывая, что в полосе $\Pi_b^{a+\varepsilon}$ при $|x| \rightarrow +\infty$ выполняется соотношение (6.21), получим, что существуют постоянные C и N такие, что при больших $|x|$

$$|\Gamma(1-iz)\Gamma(s-1+iz)| > Ce^{-\pi|x|} \frac{1}{1+|x|^N}, \quad z \in \Pi_b^{a+\varepsilon}. \quad (7.24)$$

Известно, что $\psi(z) = \ln z + O(1/z)$, $|z| \rightarrow +\infty$, $|\arg z| < \pi - \varepsilon$. Отсюда и из (7.24) при $z \in \Pi_b^{a+\varepsilon}$ вытекает, что существует $R_0 > 0$ такое, что при $|x| > R_0$

$$\left| \frac{\Gamma(1-iz)\Gamma(s-1+iz)}{\Gamma(s)} [\ln c + \psi(s) - \psi(s-1+iz)] c^{1-s-iz} \right| \geq \frac{\text{const}}{1+|x|^N} e^{-\pi|x|}.$$

Полагая теперь $\beta = 1/|x|$ при $x < -R_0$, с учетом (7.24) имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in (0, 2\pi)} |\widehat{\varphi}_0^\beta(z)| &\geq |\widehat{\varphi}_0^{1/|x|}(z)| > \text{const} \frac{\sin^q(1/2|x|)}{1+|x|^N} e^{-\pi|x|} |e^{(1/|x|-\pi)z}| \\ &\geq \frac{\text{const}}{1+|x|^{q+N}} e^{-\pi|x|} e^{x/|x|-\pi x} \geq \frac{\text{const}}{1+|x|^{q+N}}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Аналогичная оценка имеет место и при $x > R_0$, следует только положить $\beta = 2\pi - 1/|x|$. Таким образом выполнено условие (7.3).

Далее мы изучим общие при всех $\beta \in (0, 2\pi)$ нули семейства $\widehat{\varphi}_0(z)$. Из (7.23) вытекает, что нули семейства возможны только при тех z , которые удовлетворяют уравнению $\ln c + \psi(s) = \psi(s-1+iz)$. Логарифмируя и дифференцируя известное представление гамма-функции $1/\Gamma(z) = ze^{z\gamma} \prod_{n=1}^\infty (1-z/n)e^{-z/n}$, получим $-\psi(z) = 1/z + \gamma + \sum_{n=1}^\infty (1/(z+n) - 1/n)$. Откуда³

$$\operatorname{Im} \psi(z) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{y}{(x+n)^2 + y^2} \neq 0, \quad \text{если } y \neq 0.$$

Следовательно, все корни этого уравнения лежат на чисто мнимой оси. Учитывая монотонность $\psi(\xi)$ при $\xi > 0$, выводим, что уравнение (7.20) при $y < s-1$ обладает

³Это рассуждение нам любезно сообщил А. А. Карацуба.

только единственным корнем y_0 . Таким образом, если $\alpha \neq y_0$, то семейство (7.22) допустимо.

Из (7.17) и (7.18) выводим, что выполнено условие (7.9) теоремы 5 для семейства $\varphi_0(t)$, а потому согласно этой теореме $f(t)$, быть может после вычета контрчлена из пространства $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$, определяемого семейством (7.22), обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Условие $\left(\frac{d^j}{dt^j}\varphi_0^\beta\right)^{(j)}(0) = 0$ для $\beta \in (0, 2\pi)$ и какого-то $j \leq \langle a \rangle$ эквивалентно условию $(z + i(j+1))\widehat{\varphi}_0^\beta(z) = 0$ при $z = -i(j+1)$ для всех $\beta \in (0, 2\pi)$. А это согласно (7.23) возможно только в случае 2а). В этом случае пространство $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ состоит из функций $\text{const } \delta^{(j)}(t)$.

Нам осталось только описать пространство $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ в зависимости от расположения нуля y_0 преобразования Меллина (7.23) на чисто мнимой оси. Если $y_0 < \alpha$ или $y_0 > \alpha$ и $y_0 \neq -1, -2, \dots$, то $\mathcal{K}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$ отсутствует. Случай $\alpha < y_0 < \alpha$ и $y_0 = -1, -2, \dots$ соответствует п. 2) замечания 1 к определению 8. Случай 2б₂) соответствует п. 3) того же замечания. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условиях теоремы 7 вместо $s > 0$ считать $s < 0$, но $s \neq 0, -1, -2, \dots$, то уравнение (7.20), кроме нуля y_0 , имеет и другие нули $y_1, y_2, \dots$, которые монотонно возрастают. Если ни один из них не равен $-1, -2, \dots$, то теорема 7 остается верной. Если же один из них совпадает с $-1, -2, \dots$ (а это может случиться только с одним из корней), скажем $y_j = -\ell$, где ℓ целое положительное, то кроме контрчленов, которые требуют различные случаи теоремы 7, нужно вычесть еще один контрчлен $c_3\delta^{(\ell-1)}(t)$ с некоторой постоянной c_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условиях теоремы 7 $s = 0, -1, -2, \dots$, то вместо (7.23) справедлива формула

$$\widehat{\varphi}_0^\beta(z) = \text{const} \sin^q \left(\frac{\beta}{2} \right) e^{i\beta + (\beta - \pi)z} c^{1-s+iz} \Gamma(1-iz) \Gamma(s-1+iz). \quad (7.26)$$

Вместо исследования корней уравнения (7.20) нужно исследовать производные в нуле у функции $(c+t)^{-s} \ln(c+t)$, и если

$$\left. \frac{d^{j_\ell}}{dt^{j_\ell}} ((c+t)^{-s} \ln(c+t)) \right|_{t=0} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, \quad (7.27)$$

то существуют постоянные c_ℓ такие, что $f(t) - \sum_\ell c_\ell \delta^{(j_\ell)}(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Интегральное преобразование с логарифмическим ядром соответствует случаю $s = 0$ и $\alpha < a < -1$. Таким образом,

$$F(z) = \left(f(t), \ln \left(c - \frac{t}{z} \right) \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty). \quad (7.28)$$

Пусть выполнены условия (7.17) и (7.18). Тогда:

- 1) если $c \neq 1$, то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$;
- 2) если $c = 1$, то существует постоянная c_1 такая, что $f(t) - c_1 \delta(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Интегральное преобразование с ядром арктангенса задается формулой

$$F(z) = \left(f(t), \operatorname{arctg} \frac{t}{z} \right), \quad z = x + iy, \quad x > 0. \quad (7.29)$$

Функция $\operatorname{arctg}(t/z) \in \mathcal{S}_b^a$ с любыми $-\infty < b < a < -1$ является аналитической функцией параметра $z = x + iy$ в правой полуплоскости $x > 0$, а потому для $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$ формула (7.29) определяет там аналитическую функцию.

Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Соотношение

$$\frac{1}{r\rho(r)} F(re^{i\beta}) = \frac{1}{r\rho(r)} \left(f(t), \operatorname{arctg} \frac{t}{r} e^{-i\beta} \right) = \frac{1}{\rho(r)} (f(rt), \operatorname{arctg}(te^{-i\beta})) \quad (7.30)$$

и оценка

$$\mathcal{P}_{b,Q}^{a+\varepsilon,Q}[\operatorname{arctg}(te^{-i\beta})] \leq \frac{\operatorname{const}}{\cos^Q \beta}, \quad |\beta| < \frac{1}{2}\pi, \quad (7.31)$$

с $\varepsilon > 0$ таким, что $a + \varepsilon < -1$, показывают, что этому интегральному преобразованию соответствует семейство

$$\varphi_0(t) = \{\cos^Q \beta \cdot \operatorname{arctg}(te^{-i\beta}) = \varphi_0^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,Q}^{a+\varepsilon,Q}, \quad \beta \in J\}, \quad (7.32)$$

где $J = (-\pi/2, \pi/2)$ и $Q \geq 0$ – любое целое, $-\infty < b < a < -1$.

Покажем, что для $\alpha < a$ и $\alpha \neq -3, -5, -7, \dots$ это семейство допустимо.

Действительно, условие (7.2) непосредственно следует из оценки (7.31). Учтывая, что преобразование Меллина

$$\mathcal{M}[\varphi_0^\beta(t)] \equiv \widehat{\varphi}_0^\beta(z) = \frac{\pi}{2} (\cos^Q \beta) e^{i\beta(1-iz)} \frac{1}{(iz-1) \sin(\frac{\pi}{2} iz)} \quad (7.33)$$

(см., например, [16]) в полосе $\overline{\Pi}_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$ при достаточно больших $x > 0$ имеет оценку

$$\begin{aligned} \sup_{|\beta| < \frac{\pi}{2}} |\widehat{\varphi}_0^\beta(z)| &\geq |\widehat{\varphi}_0^{\pi/2-1/x}(z)| \geq \frac{\operatorname{const}}{1+|x|} \cos^Q \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \right) e^{(\pi/2-1/x)x} e^{-(\pi/2)|x|} \\ &\geq \frac{\operatorname{const}}{1+|x|^{Q+1}} \end{aligned}$$

(в этой оценке мы учли, что $\cos(\pi/2 - 1/x) \sim 1/x$ при $x \rightarrow +\infty$) и что аналогичная оценка имеет место и при $x \rightarrow -\infty$, видим, что выполнено и условие (7.3).

Опишем пространство контрчленов $\mathcal{H}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$. Заметим, что при всех $|\beta| < \pi/2$ сами функции $\varphi_0^\beta(t)$ и все их производные четного порядка в нуле равны нулю. Кроме того, точки $z_\tau = -i(2\tau + 1)$ при $\tau = [\langle a \rangle/2] + 1, \dots, [\langle \alpha \rangle/2]$ попадают в полосу $\overline{\Pi}_\alpha^a$, и согласно (7.33) в них семейства $\{(z - z_\tau) \widehat{\varphi}_0^\beta(z), \quad |\beta| < \pi/2\}$ имеют нули кратности 1. Поэтому

$$\mathcal{H}_\alpha^a[\varphi_0(t)] = \sum_{j=0}^{[\langle \alpha \rangle/2]} c_j \delta^{(2j)}(t), \quad (7.34)$$

где c_j – произвольные постоянные.

ТЕОРЕМА 8. Если обобщенная функция $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, $b < a < -1$, обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , $b < \alpha < a$, то:

1) существует предел

$$\frac{1}{r\rho(r)} F(re^{i\beta}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} c^\beta \quad \forall \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad (7.35)$$

2) существуют A, m и r_0 такие, что

$$\frac{1}{r\rho(r)} |F(re^{i\beta})| \leq \frac{A}{\cos^m \beta}, \quad r > r_0, \quad \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.36)$$

Обратно, пусть выполнены условия (7.35) и (7.36). Тогда существует обобщенная функция $f_0(t)$, принадлежащая пространству $\mathcal{H}_\alpha^a[\varphi_0(t)]$, определяемому формулой (7.34), такая, что функция $f(t) - f_0(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу конечности порядка обобщенная функция f принадлежит пространству $(\mathcal{S}_{b,Q}^a)'$ с некоторым $Q \geq 0$. Необходимость доказывается точно так же, как и в теореме 6, с использованием соотношений (7.30) и (7.31). Для доказательства же достаточности следует воспользоваться теоремой 5, учитывая, что семейство (7.32) допустимо и что из условий (7.35) и (7.36) очевидным образом следует выполнимость условия (7.9) теоремы 5.

§ 8. Приложение

В этом приложении мы докажем ряд вспомогательных утверждений, которые были использованы в основном тексте.

ЛЕММА ПО. Пусть J – произвольное множество индексов и задано семейство функций

$$\{\widehat{\varphi}^\beta(z) \in H_Q(\Pi_b^a), \beta \in I\}, \quad \sup_{\beta \in J} \|\widehat{\varphi}^\beta(z)\|_{H_Q} < \infty \quad (\text{П.1})$$

(см. определение 2), причем найдутся A и m такие, что

$$\sup_{\beta \in J} |\widehat{\varphi}^\beta(z)| \geq \frac{A}{(1+|z|)^m} \quad \text{при } b < \operatorname{Im} z < a. \quad (\text{П.2})$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют счетное множество $I \subset J$, числа A_1 , m_1 и $\lambda_\beta > 0$ ($\beta \in I$) такие, что

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta < \infty, \quad \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\widehat{\varphi}^\beta(z)| \geq \frac{A_1}{(1+|z|)^{m_1}} \quad \text{при } b + \varepsilon < \operatorname{Im} z < a - \varepsilon. \quad (\text{П.3})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если J – конечное множество, то лемма тривиальна. Пусть J – бесконечное множество и задано $\varepsilon > 0$. Отметим, что в условиях леммы $m \geq Q$. Кроме того, заметим, что (П.3) достаточно доказать для $|\operatorname{Re} z| \geq 1$, ибо эту оценку во всем $\overline{\Pi}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$ можно обеспечить, добавляя, если нужно, к множеству I конечное число элементов множества J .

Существует постоянная $d > 0$, не зависящая от $\beta \in J$, такая, что для любого $z \in \overline{\Pi}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \cap \{|\operatorname{Re} z| \geq 1\}$

$$|\widehat{\varphi}^\beta(\zeta)| \geq \frac{1}{2} |\widehat{\varphi}^\beta(z)| \quad \text{при} \quad |\zeta - z| < r_{z,\beta} = \min\{\varepsilon, d(1 + |z|)^Q |\widehat{\varphi}^\beta(z)|\}.$$

Действительно, $\widehat{\varphi}^\beta(\zeta) = \widehat{\varphi}^\beta(z) + \int_z^\zeta (\widehat{\varphi}^\beta)'(\tau) d\tau$. Учитывая, что

$$|(\widehat{\varphi}^\beta)'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{\widehat{\varphi}^\beta(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq c_\varepsilon^1 \sup_{|\zeta - z| = \varepsilon} \sup_{\beta \in J} |\widehat{\varphi}^\beta(\zeta)| \leq \frac{c_\varepsilon}{(1 + |z|)^Q},$$

где c_ε не зависит от $\beta \in J$ (мы учли (П.1)), получаем

$$|\widehat{\varphi}^\beta(\zeta)| \geq |\widehat{\varphi}^\beta(z)| - |\zeta - z| \frac{c_\varepsilon}{(1 + |z|)^Q} \geq \frac{1}{2} |\widehat{\varphi}^\beta(z)|,$$

если $|\zeta - z| \leq (1/2c_\varepsilon)(1 + |z|)^Q |\widehat{\varphi}^\beta(z)|$.

Разобьем множество $\overline{\Pi}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \cap \{|\operatorname{Re} z| \geq 1\}$ на прямоугольники W_ℓ ,

$$W_\ell = \begin{cases} \overline{\Pi}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \cap \{\ell \leq \operatorname{Re} z \leq \ell + 1\} & \text{при } \ell = 1, 2, \dots, \\ \overline{\Pi}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \cap \{\ell - 1 \leq \operatorname{Re} z \leq \ell\} & \text{при } \ell = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Пусть z – произвольная точка из W_ℓ . По условию (П.2) существует $\beta_z \in J$ такое, что $|\widehat{\varphi}^{\beta_z}(z)| \geq \frac{A}{2(1 + |z|)^m}$. А потому согласно предыдущему

$$|\widehat{\varphi}^{\beta_z}(\zeta)| \geq \frac{1}{2} \frac{A}{2(1 + |z|)^m} \geq \frac{A_2}{(1 + |\zeta|)^m} \quad \text{при} \quad |\zeta - z| < r_{z,\beta}.$$

Здесь A_2 зависит только от A и m . Отметим, что

$$\begin{aligned} r_{z,\beta} &\geq \min\{\varepsilon, d(1 + |z|)^Q |\widehat{\varphi}^{\beta_z}(z)|\} \geq \min\{\varepsilon, dA_2(1 + |z|)^{Q-m}\} \\ &\geq \min\{\varepsilon, \operatorname{const} \ell^{Q-m}\} \geq \operatorname{const} \ell^{Q-m}. \end{aligned}$$

Теперь всё W_ℓ оказалось покрытым кругами, радиусы которых $r_z \geq \operatorname{const} \ell^{Q-m}$. По теореме о конечной кратности покрытий (см. [15, с. 33]) из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие с числом элементов, не превосходящим $n_\ell = \operatorname{const} \ell^{2(m-Q)}$.

Выбираем такие покрытия в каждом W_ℓ и соответствующие им индексы β_z нумеруем следующим естественным образом. Сначала нумеруем все элементы из W_1 , затем W_{-1} , потом W_2 , W_{-2} и так далее. Мы получим счетную систему β_j , $j = 1, 2, \dots$

Полагая теперь $\lambda_j = 1/j^2$, покажем, что выполнено (П.3). Фиксируем любое $z \in \overline{\Pi}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \cap \{| \operatorname{Re} z | \geq 1\}$. Найдется ℓ такое, что $z \in W_\ell$. Существует j_0 такое, что z попадает в круг, соответствующий β_{j_0} . Мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\widehat{\varphi}^{\beta_j}(z)| &\geq \lambda_{j_0} |\widehat{\varphi}^{\beta_{j_0}}(z)| \geq \frac{A_2}{j_0^2(1+|z|)^m} \geq \frac{\operatorname{const}}{(1+|z|)^m} \frac{1}{\ell^{2(2m-2Q+1)}} \\ &\geq \frac{\operatorname{const}}{(1+|z|)^m(1+|z|)^{2(2m-2Q+1)}} \geq \frac{\operatorname{const}}{(1+|z|)^{m_1}}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $j_0 \leq \operatorname{const}(1 + 2^{2(m-Q)} + \dots + \ell^{2(m-Q)}) \leq \operatorname{const} \ell^{2(m-Q)+1}$ и $|z| \sim |\ell|$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях леммы П0 существуют постоянные A_2 и m_2 такие, что

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\widehat{\varphi}^\beta(z)|^2 \geq \frac{A_2}{(1+|z|)^{m_2}}, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}. \quad (\text{П.4})$$

Действительно, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\frac{A_2}{(1+|z|)^{m_2}} \leq \left(\frac{A_1}{(1+|z|)^{m_1}} \right)^2 \leq \left(\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\widehat{\varphi}^\beta(z)| \right)^2 \leq \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta \sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\widehat{\varphi}^\beta(z)|^2.$$

Отсюда и из (П.3) вытекает (П.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если J – несчетное множество, то из леммы следует, что оценка (П.2), быть может с другим m , выполняется для счетного множества индексов $I \subset J$. Это непосредственно вытекает из оценки (П.3). Очевидно также, что если J – счетное множество, то в качестве I можно брать само множество J .

Следующая лемма является некоторым вариантом классической теоремы Карлесона о короне. Мы приводим ее в том виде, который нам был нужен в основном тексте. Идеи доказательства достаточно традиционны и содержатся, например, в [20] (см. также цитируемую там литературу).

ЛЕММА П1. Пусть I – счетное множество и задано семейство функций

$$\{\varphi^\beta(z) \in H_L(\Pi_b^a), \beta \in I\}; \quad \sup_{\beta \in I} \|\varphi^\beta(z)\|_{H_L} < \infty. \quad (\text{П.5})$$

(Как обычно, $a > b$ – нецелые вещественные числа.) Пусть заданы $\lambda_\beta > 0$, $\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta < \infty$, такие, что выполнена оценка

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta |\varphi^\beta(z)|^2 \geq \frac{A}{(1+|z|)^m}, \quad z \in \Pi_b^a, \quad (\text{П.6})$$

для некоторых постоянных A и m , причем для любой попавшей в полосу Π_b^a точки $z_\ell = -i\ell$ (ℓ – целое положительное, $-a < \ell < -b$) существует $\beta_\ell \in I$ такое, что

$$\operatorname{Res}_{z=z_\ell} \varphi^{\beta_\ell}(z) \neq 0. \quad (\text{П.7})$$

Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует число Q и семейство аналитических в $\Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$ функций $\{g_\beta(z) \in H_Q(\Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}), \beta \in I\}$ таких, что

$$\sup_{\beta \in I} \|g_\beta(z)\|_{H_Q} < \infty, \quad (\text{П.8})$$

$$\sum_{\beta \in I} \lambda_\beta g_\beta(z) \varphi^\beta(z) = 1, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}, \quad (\text{П.9})$$

$$g_\beta(z_\ell) = 0 \quad \forall \beta \in I, \quad z_\ell = -i\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, \quad z_\ell \in \Pi_b^a. \quad (\text{П.10})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $a - \varepsilon > b + \varepsilon$,

$$\{z_\ell = -i\ell, \ell = 1, 2, \dots, z_\ell \in \Pi_b^a\} = \{z_\ell = -i\ell, \ell = 1, 2, \dots, z_\ell \in \Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\},$$

и полагаем $f_\beta(z) = \Theta_b^a(z) \varphi^\beta(z)$, $\beta \in I$ (см. определение 2).

Семейство $\{f_\beta(z) \in H_{L-r}(\Pi_b^a), \beta \in I\}$ принадлежит ${}^I H_{L-r}(\Pi_b^a)$, т.е. ограничено по $\beta \in I$ и состоит из аналитических в Π_b^a функций. Рассмотрим семейство функций

$$\psi_\beta(z, \bar{z}) = \frac{\bar{f}_\beta(z)}{\sum_{\beta \in I} |f_\beta(z)|^2 \lambda_\beta}, \quad \beta \in I. \quad (\text{П.11})$$

Очевидно,

$$\sum_{\beta \in I} f_\beta(z) \psi_\beta(z, \bar{z}) \lambda_\beta \equiv 1. \quad (\text{П.12})$$

Заметим, что

$$\sup_{\beta \in I} \sup_{z \in \Pi_{b+\varepsilon/2}^{a-\varepsilon/2}} \left| (1 + |z|)^{q_j} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^j \psi_\beta(z, \bar{z}) \right| < \infty, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (\text{П.13})$$

для некоторых q_j .

Рассмотрим множество функций $G_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) = \psi_\alpha(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z})$, $\alpha, \beta \in I$. В силу (П.13) существуют постоянные c и Q_1 , не зависящие от $\beta \in I$ и такие, что

$$|G_{\alpha\beta}(z, \bar{z})| \leq c(1 + |z|)^{Q_1}, \quad \alpha, \beta \in I, \quad z \in \Pi_{b+1/2\varepsilon}^{a-1/2\varepsilon}. \quad (\text{П.14})$$

Пусть $N > Q_1 + 1$ и c настолько велико, что $c + z^{2N}$ не обращается в нуль в полосе Π_b^a . Положим

$$b_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) = \frac{c + z^{2N}}{2\pi i} \int_{\Pi_{b+\varepsilon/2}^{a-\varepsilon/2}} \frac{G_{\alpha\beta}(\zeta, \bar{\zeta})}{c + \zeta^{2N}} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (\text{П.15})$$

Очевидно, что $b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})$ являются решениями $\bar{\partial}$ -задачи

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} b_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) = G_{\alpha\beta}(z, \bar{z}), \quad \alpha, \beta \in I, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon/2}^{a-\varepsilon/2}. \quad (\text{П.16})$$

В силу (П.14) и (П.15) существуют M_1, M_2, n_1, n_2 , не зависящие от $\alpha, \beta \in I$ и такие, что

$$|b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})| \leq M_1(1 + |z|)^{n_1}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} b_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) \right| \leq M_2(1 + |z|)^{n_2}, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}. \quad (\text{П.17})$$

Полагаем теперь

$$g_\beta^1(z) = \psi_\beta(z, \bar{z}) + \sum_{\alpha \in I} [b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] f_\alpha(z) \lambda_\alpha, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}. \quad (\text{П.18})$$

В силу (П.6), (П.14), (П.17) существуют M_3, n_3 , не зависящие от $\beta \in I$, такие, что

$$|g_\beta^1(z)| \leq M_3(1 + |z|)^{n_3}, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}. \quad (\text{П.19})$$

Из (П.18) с учетом (П.12) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in I} g_\beta^1(z) f_\beta(z) \lambda_\beta &= \sum_{\beta \in I} \psi_\beta(z, \bar{z}) f_\beta(z) \lambda_\beta \\ &\quad + \sum_{\beta \in I} \sum_{\alpha \in I} [b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] f_\alpha(z) f_\beta(z) \lambda_\alpha \lambda_\beta \\ &= \sum_{\beta \in I} \psi_\beta(z, \bar{z}) f_\beta(z) \lambda_\beta \equiv 1, \quad z \in \Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Проверим, что $g_\beta^1(z)$ аналитичны в полосе $\Pi_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$. Учитывая (П.16) и тот факт, что производную по $\bar{z}$ в силу оценок (П.14) и (П.17) можно вынести за знак суммы, дифференцируя (П.18), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_\beta^1(z) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{\alpha \in I} [b_{\beta\alpha}(z, \bar{z}) - b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})] f_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \sum_{\alpha \in I} \frac{\partial b_{\beta\alpha}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} f_\alpha(z) \lambda_\alpha - \sum_{\alpha \in I} \frac{\partial b_{\alpha\beta}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} f_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \sum_{\alpha \in I} \varphi_\beta(z, \bar{z}) \frac{\partial \psi_\alpha(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} f_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &\quad - \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(z, \bar{z}) \frac{\partial \varphi_\beta(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} f_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) + \psi_\beta(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(z, \bar{z}) f_\alpha(z) \lambda_\alpha \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_\beta(z, \bar{z}) \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(z, \bar{z}) f_\alpha(z) \lambda_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Мы учли (П.12) и аналитичность функций $f_\alpha(z)$.

Семейство $\{g_\beta(z) = g_\beta^1(z) \Theta_b^a(z), \beta \in I\}$ в силу (П.17) и (П.19) будет искомым семейством функций. Лемма доказана.

Пусть теперь $\omega(t) \in \mathcal{S}_{b,M}^{a,M}$, а $\varphi_\lambda(t) \in F^M \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right]$. Рассмотрим функцию

$$\psi[\omega, \varphi_\lambda](t) = \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_\varkappa \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa}. \quad (\text{П.20})$$

ЛЕММА П2. *Билинейное отображение*

$$\mathcal{S}_{b,M}^{a,M} \times F^M \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right] \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}_{b,M+N}^{a,M+N} \quad (\text{П.21})$$

корректно определено и непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем лемму для случая $M = N = 0$. При каждом $\lambda > 0$, так как $\varphi_\lambda(t) \in \mathcal{S}_{b,0}^{a,0}$, имеем

$$\varphi_\lambda(t) = \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} c_j(\lambda) t^j + \chi_\lambda(t), \quad t^b \chi_\lambda(t) \in L_1(0,1), \quad t^a \varphi_\lambda(t) \in L_1(1,\infty). \quad (\text{П.22})$$

Отсюда и из (П.20) имеем (пока формально)

$$\begin{aligned} \psi[\omega, \varphi_\lambda](t) &= \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_\lambda\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \\ &= \int_0^\infty \omega(\varkappa) \chi_\lambda\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} + \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} \int_0^\infty c_j(\varkappa) \omega(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa^{j+1}} t^j \\ &= \psi[\omega, \chi_\lambda](t) + \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} c_j t^j, \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

где $c_j = \int_0^\infty c_j(\varkappa) \omega(\varkappa) \frac{d\varkappa}{\varkappa^{j+1}}$. Для строгого доказательства (П.23) достаточно показать, что все интегралы, фигурирующие там, корректно определены. Оценим сначала интегралы, определяющие постоянные c_j , $j = \langle a \rangle + 1, \dots, \langle b \rangle$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |c_j(\varkappa) \omega(\varkappa)| \frac{d\varkappa}{\varkappa} &\leq \sup_{\varkappa > 0} |c_j(\varkappa)| \int |\omega(\varkappa)| \frac{d\varkappa}{\varkappa^{j+1}} \\ &\leq \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)] \left\{ \int_0^1 \frac{|\omega(\varkappa)|}{\varkappa^{\langle b \rangle+1}} d\varkappa + \int_1^\infty \frac{|\omega(\varkappa)|}{\varkappa^{\langle a \rangle+2}} d\varkappa \right\} \\ &\leq \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)] \left\{ \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa + \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \right\} \\ &\leq \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)] \cdot \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega]. \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Здесь учтены соотношения (1.2).

Рассмотрим теперь первое слагаемое в правой части формулы (П.23). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^b |\psi[\omega, \chi_\lambda](t)| dt &= \int_0^1 t^b \left| \int_0^\infty \omega(\varkappa) \chi_\lambda\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \right| dt \\ &\leq \int_0^\infty |\omega(\varkappa)| \int_0^1 t^b \left| \chi_\lambda\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \right| dt \frac{d\varkappa}{\varkappa} = \int_0^\infty \varkappa^{b+1} |\omega(\varkappa)| \frac{d\varkappa}{\varkappa} \int_0^{1/\varkappa} t^b |\chi_\lambda(t)| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \left\{ \int_0^1 + \int_1^{1/\varkappa} \right\} t^b |\chi_\varkappa(t)| dt \\
&\quad + \int_1^\infty \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_0^{1/\varkappa} t^b |\chi_\varkappa(t)| dt \\
&\leq \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \cdot \sup_{\varkappa > 0} \int_0^1 t^b |\chi_\varkappa(t)| dt + \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_1^{1/\varkappa} t^b |\chi_\varkappa(t)| dt \\
&\quad + \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \cdot \sup_{\varkappa > 0} \int_0^1 t^b |\chi_\varkappa(t)| dt. \tag{П.25}
\end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части неравенства (П.25) оцениваются произведением норм $\mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)]$. Оценим среднее слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_1^{1/\varkappa} t^b |\chi_\varkappa(t)| dt \leq \\
&\leq \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_1^{1/\varkappa} t^b \left| \varphi_\varkappa(t) - \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} c_j(\varkappa) t^j \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_1^{1/\varkappa} t^b |\varphi_\varkappa(t)| dt \\
&\quad + \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_1^{1/\varkappa} \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} |c_j(\varkappa)| t^{b+j} dt \\
&\leq \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \cdot \sup_{\varkappa > 0} \int_1^\infty t^a |\varphi_\varkappa(t)| dt \\
&\quad + \sup_{\varkappa > 0} \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} |c_j(\varkappa)| \cdot \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_1^{1/\varkappa} t^{b+\langle b \rangle} dt \\
&\leq \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)] \\
&\quad + \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)] \frac{1}{|b + \langle b \rangle + 1|} \int_0^1 \varkappa^b |\omega(\varkappa)| \frac{d\varkappa}{\varkappa^{b+\langle b \rangle+1}} \\
&\leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)]. \tag{П.26}
\end{aligned}$$

Из оценок слагаемых (П.25) с учетом (П.26) вытекает оценка

$$\int_0^1 t^b |\psi[\omega, \chi_\lambda](t)| dt \leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)]. \tag{П.27}$$

Точно так же можно показать, что справедлива аналогичная оценка для $\int_0^B t^b |\psi[\omega, \chi_\lambda](t)| dt$ с любым $B > 1$ и постоянной, зависящей от B . Следовательно, по теореме Фубини $\int_0^\infty \omega(\varkappa) \chi_\varkappa(t/\varkappa) d\varkappa/\varkappa$ сходится при почти всех t .

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty t^a |\psi[\omega, \varphi_\lambda](t)| dt &= \int_1^\infty t^a \left| \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_\varkappa \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \right| dt \\
&\leq \int_0^\infty \varkappa^{a+1} |\omega(\varkappa)| \frac{d\varkappa}{\varkappa} \int_{1/\varkappa}^\infty t^a |\varphi_\varkappa(t)| dt \\
&= \int_0^1 \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_{1/\varkappa}^\infty t^a |\varphi_\varkappa(t)| dt + \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_{1/\varkappa}^1 t^a |\varphi_\varkappa(t)| dt \\
&\quad + \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_1^\infty t^a |\varphi_\varkappa(t)| dt.
\end{aligned} \tag{П.28}$$

Первое и последнее слагаемые справа в (П.28) непосредственно оцениваются произведением норм $\mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)]$. Оценим среднее слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_{1/\varkappa}^1 t^a \left| \chi_\varkappa(t) + \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} c_j(\varkappa) t^j \right| dt \\
&\leq \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_{1/\varkappa}^1 t^a |\chi_\varkappa(t)| dt \\
&\quad + \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} |c_j(\varkappa)| \int_{1/\varkappa}^1 t^{a+j} dt \\
&\leq \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \cdot \sup_{\varkappa > 0} \int_0^1 t^b |\chi_\varkappa(t)| dt \\
&\quad + \sup_{\varkappa > 0} \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} |c_j(\varkappa)| \cdot \int_1^\infty \varkappa^a |\omega(\varkappa)| d\varkappa \int_{1/\varkappa}^1 t^{a+j} dt \\
&\leq \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)] \\
&\quad + \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)] \frac{1}{|a + \langle a \rangle + 2|} \int_1^\infty |\omega(\varkappa)| \frac{d\varkappa}{\varkappa^{\langle a \rangle+2}} \\
&\leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)].
\end{aligned} \tag{П.29}$$

Из (П.28) с учетом оценок (П.29) получаем

$$\int_1^\infty t^a |\psi[\omega, \varphi_\lambda](t)| dt \leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega(t)] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda(t)]. \tag{П.30}$$

Мы доказали, что интеграл в (П.20) абсолютно сходится и функция ψ принадлежит $L_1^{\text{loc}}(0, +\infty)$. Теперь из (П.23), (П.24), (П.27) и (П.30) следует

$$\mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\psi[\omega, \varphi_\lambda](t)] \leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,0}^{a,0}[\omega] \cdot \mathcal{P}_{(b,0)}^{0(a,0)}[\varphi_\lambda], \tag{П.31}$$

т.е. следует утверждение леммы для $M = N = 0$.

Доказательство леммы (по индукции) вытекает из следующих легко проверяемых замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ П1. Пусть $\varphi_\lambda(t) \in F^0 \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right]$, $N \geq 1$; тогда при $t > 0$ функция $\psi(t)$, определяемая формулой (П.20), имеет обобщенную производную, причем

$$t \frac{d}{dt} \psi(t) = \int_0^\infty \omega(\varkappa) \frac{t}{\varkappa} \varphi'_\varkappa \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa}. \quad (\text{П.32})$$

Операция

$$t \frac{d}{dt} : F^q \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right] \longrightarrow F^q \left[\mathcal{S}_{b,N-1}^{a,N-1} \right] \quad (\text{П.33})$$

корректно определена и непрерывна.

ЗАМЕЧАНИЕ П2. Пусть $\varphi_\lambda(t) \in F^M \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right]$ и $\omega(t) \in \mathcal{S}_{0,b,M}^{a,M}$, $M \geq 1$. Тогда при $t > 0$ функция $\psi(t)$, определяемая формулой (П.20), имеет обобщенную производную, причем

$$t \frac{d}{dt} \psi(t) = \int_0^\infty \lambda \frac{d}{d\lambda} \varphi_\lambda(\varkappa) \Big|_{\lambda=t/\varkappa} \omega \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} + \int_0^\infty \varphi_{t/\varkappa}(\varkappa) \frac{t}{\varkappa} \omega' \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa}. \quad (\text{П.34})$$

Операции

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} : F^M \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right] \longrightarrow F^{M-1} \left[\mathcal{S}_{b,N}^{a,N} \right] \quad \text{и} \quad t \frac{d}{dt} : \mathcal{S}_{0,b,M}^{a,M} \longrightarrow \mathcal{S}_{0,b,M-1}^{a,M-1} \quad (\text{П.35})$$

корректно определены и непрерывны.

Лемма доказана.

ЛЕММА П3. Пусть I – счетное множество и семейство функций $\{\omega^\beta(t) \in \mathcal{S}_{0,b,M_1}^{a,M_1}, \beta \in I\} \equiv \omega(t)$ принадлежит ${}_I \mathcal{S}_{0,b,M_1}^{a,M_1}$. Тогда для любого $d \in (b, a)$ и $\sigma > 0$ таких, что $d - \sigma \geq b$, справедлива оценка

$${}_I \mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1} \left[\frac{1}{t^\sigma} \omega(t) \right] \leq \text{const} \cdot {}_I \mathcal{P}_{d-\sigma,M_1}^{a-\sigma,M_1} [\omega(t)] \leq \text{const} \cdot {}_I \mathcal{P}_{d-\sigma,M_1}^{a,M_1} [\omega(t)]. \quad (\text{П.36})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \frac{1}{t^\sigma} \omega^\beta(t) \right| \leq \frac{1}{t^\sigma} \sum_{\ell=0}^j c_\ell \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^\ell \omega^\beta(t) \right|,$$

где c_ℓ не зависят от β , и так как при $\omega^\beta(t) \in \mathcal{S}_{0,b,M_1}^{a,M_1}$ и $d - \sigma > b$ функции $t^{d-\sigma} |t^j (\omega^\beta)^{(j)}|$ принадлежат $L_1(0, \delta)$ для $j = 0, 1, \dots, M_1$, то согласно (2.3)

$T_{(1/t^\sigma)\omega^\beta}^{(d-\sigma)}(t) \equiv 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1} \left[\frac{1}{t^\sigma} \omega^\beta(t) \right] &= \max_{j \leq M_1} \int_0^1 t^d \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \frac{1}{t^\sigma} \omega^\beta(t) \right| dt \\ &\quad + \max_{j \leq M_1} \int_1^\infty t^a \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \frac{1}{t^\sigma} \omega^\beta(t) \right| dt \\ &\leq \max_{j \leq M_1} \sum_{\ell=0}^j c_\ell \left\{ \int_0^1 t^{d-\sigma} \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^\ell \frac{1}{t^\sigma} \omega^\beta(t) \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty t^{a-\sigma} \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^\ell \frac{1}{t^\sigma} \omega^\beta(t) \right| dt \right\} \\ &\leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{d-\sigma,M_1}^{a-\sigma,M_1} [\omega^\beta(t)]. \end{aligned}$$

Откуда и следует оценка (П.36). Лемма доказана.

ЛЕММА П4. Пусть семейство последовательностей функций

$$\{\varphi_\lambda^\beta(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \beta \in I, \lambda > 0\} \equiv \varphi_\lambda(t) \in {}^I F^q[\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}], \quad (\text{П.37})$$

где $b < a$, $M \leq N$ и $q \geq 0$. Пусть, кроме того,

$$\lambda^\sigma \varphi_\lambda(t) \in {}^I F^q[\mathcal{S}_{d,M}^{a,M}] \quad (\text{П.38})$$

для некоторых $\sigma > 0$ и $d \in (b, a)$ таких, что $d - \sigma > b$. Тогда существует постоянная c такая, что для любого $M_1 \leq q$ и любого семейства $\omega \in {}^I \mathcal{S}_{d-\sigma,M_1}^{a,M_1}$

$$\mathcal{P}_{d,M_1+M}^{a,M_1+M} [B_k \omega] \leq \frac{c}{k^\sigma} \cdot {}^I \mathcal{P}_{(d,M)}^{M_1(a,M)} [\lambda^\sigma \varphi_\lambda(t)] \cdot {}^I \mathcal{P}_{d-\sigma,M_1}^{a,M_1} [\omega]. \quad (\text{П.39})$$

Здесь семейство операторов B_k построено по семейству последовательностей $\varphi_\lambda(t)$ (см. (3.16)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega(t) = \{\omega^\beta(t) \in \mathcal{S}_{d-\sigma,M_1}^{a,M_1}, \beta \in I\} \in {}^I \mathcal{S}_{d-\sigma,M_1}^{a,M_1}$. Имеем

$$\begin{aligned} B_k \omega &= \sum_{\beta \in I} \int_0^\infty \omega^\beta(\varkappa) \varphi_{k\varkappa}^{\beta} \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \\ &= \frac{1}{k^\sigma} \sum_{\beta \in I} \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa^\sigma} \omega^\beta(\varkappa) (k\varkappa)^\sigma \varphi_{k\varkappa}^{\beta} \left(\frac{t}{\varkappa} \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} = \frac{1}{k^\sigma} B_k' \left[\frac{1}{t^\sigma} \omega(t) \right], \end{aligned}$$

где семейство операторов B_k' связано с семейством последовательностей $\lambda^\sigma \varphi_\lambda(t)$ (см. (3.16)). По следствию 2 к лемме 2 получаем

$$\mathcal{P}_{d,M_1+M}^{a,M_1+M} [B_k \omega] \leq \frac{\text{const}}{k^\sigma} \cdot {}^I \mathcal{P}_{(d,M)}^{M_1(a,M)} [\lambda^\sigma \varphi_\lambda] \cdot {}^I \mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1} \left[\frac{1}{t^\sigma} \omega(t) \right].$$

Осталось заметить, что по лемме П3

$${}^I \mathcal{P}_{d,M_1}^{a,M_1} \left[\left(\frac{1}{t^\sigma} \right) \omega(t) \right] \leq \text{const} \cdot {}^I \mathcal{P}_{d-\sigma,M_1}^{a,M_1} [\omega(t)].$$

Лемма доказана.

ЛЕММА П5. Пусть $g \in (\mathcal{S}_b^a)'$, $b < a$ (не целые); тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует мера $d\mu(z)$ медленного роста,

$$\text{supp } d\mu(z) \subset \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| < \infty, y = a + \varepsilon\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |x| < \infty, y = b - \varepsilon\},$$

и числа c_j , $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$, такие, что для любой $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$ справедливо представление

$$(g(t), \varphi(t)) = \int \widehat{\varphi}(z) d\mu(z) + \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} c_j \varphi^{(j)}(0). \quad (\text{П.40})$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если обобщенная функция $g(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно k^γ , где $\gamma < -\langle a \rangle - 1$, то все c_j равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{S}_b^a = \mathcal{S}_b^a \oplus \{1, t, \dots, t^{\langle a \rangle}\}$, то $g(t) = \overset{0}{g}(t) + \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} c_j \delta^{(j)}(t)$, где $\overset{0}{g}(t)$ – сужение g на $\mathcal{S}_b^a$. Учитывая (2.15), нетрудно убедиться в том, что имеют место следующие непрерывные отображения:

$$\overset{0}{\mathcal{S}}_b^a \supset \overset{0}{\mathcal{S}}_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \supset \overset{0}{\mathcal{S}}_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \xrightarrow{\mathcal{M}} H(\Pi_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon}) \xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} \overset{0}{\mathcal{S}}_b^a \subset \overset{0}{\mathcal{S}}_b^a \xrightarrow{\overset{0}{g}} \mathbb{C}.$$

Поэтому определен функционал $\widehat{g}: H(\Pi_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon}) \mapsto \mathbb{C}$ такой, что справедлива формула

$$(\overset{0}{g}, \varphi) = (\widehat{g}, \mathcal{M}\varphi) = (\widehat{g}, \widehat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \overset{0}{\mathcal{S}}_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon}.$$

Функционал $\widehat{g}$ определен на функциях, аналитических в полосе $\Pi_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$, непрерывных вплоть до границы и убывающих быстрее любой степени на бесконечности. Он может быть продолжен (пользуясь формулой Коши, а затем по теореме Банаха) до функционала над функциями, непрерывными на двух прямых $\{z \in \mathbb{C} : |x| < \infty, y = b - \varepsilon\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |x| < \infty, y = a + \varepsilon\}$ и убывающими на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$. По теореме Рисса он представляется мерой медленного роста, сосредоточенной на этих двух прямых. Лемма доказана.

ЛЕММА П6. Рассмотрим в классе обобщенных функций $\mathcal{S}'_+$ уравнение

$$P\left(t \frac{d}{dt}\right) f = g, \quad g \in \mathcal{S}'_+, \quad (\text{П.41})$$

где $P(-iz)$ – многочлен степени n и z_q , $q = 1, 2, \dots, n$, – его корни. Если g обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α и

$$\text{Im } z_q \neq \alpha \quad \text{для } q = 1, \dots, n, \quad (\text{П.42})$$

то найдется $f \in \mathcal{S}'_+$ – решение уравнения (П.41), обладающее квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку g обладает квазиасимптотикой (а значит, и квазиасимптотически ограничена) относительно $\rho(k)$ порядка автомодельности α , то согласно утверждению 2 $g \in (\mathcal{S}_b^{\alpha+\varepsilon})'$ с любым $\varepsilon > 0$ и некоторым b . Выберем ε настолько малым, чтобы в полосе $\overline{\Pi}_{\alpha-2\varepsilon}^{\alpha+2\varepsilon}$ не было нулей полинома $P(-iz)$, что возможно в силу (П.42).

Теперь по лемме П5 и замечанию к ней существует мера $d\mu(z)$, сосредоточенная на двух прямых $\{z \in \mathbb{C}: |x| < \infty, y = \alpha + 2\varepsilon\}$ и $\{z \in \mathbb{C}: |x| < \infty, y = b - \varepsilon\}$, такая, что $(g, \varphi) = \int \widehat{\varphi}(z) d\mu(z)$. Определим $f(t)$ формулой

$$(f(t), \varphi(t)) = \int \frac{\widehat{\varphi}(z)}{P(-iz)} d\mu(z), \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b-\varepsilon}^{\alpha+2\varepsilon}. \quad (\text{П.43})$$

Ясно, что $f(t) \in (\mathcal{S}_{b-\varepsilon}^{\alpha+2\varepsilon})'$. Покажем, что $f(t)$ является решением уравнения (П.41).

Действительно,

$$\begin{aligned} \left(P \left(t \frac{d}{dt} \right) f, \varphi \right) &= \left(f, P \left(-\frac{d}{dt} t \right) \varphi \right) = \int \frac{P(-iz) \widehat{\varphi}(z)}{P(-iz)} d\mu(z) \\ &= \int \widehat{\varphi}(z) d\mu(z) = (g, \varphi). \end{aligned}$$

Поскольку в полосе $\overline{\Pi}_{\alpha-2\varepsilon}^{\alpha+2\varepsilon}$ нет нулей полинома $P(-iz)$, то по теореме 3 работы [1] это решение обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Лемма доказана.

Список литературы

1. Дрожджинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Тауберова теорема типа Винера для обобщенных функций медленного роста // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 91–130.
2. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматгиз, 1959.
3. Владимиров В. С., Дрожджинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.
4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
5. Wiener N. Tauberian theorems // Ann. of Math. 1932. V. 33. № 1. P. 1–100.
6. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его применения. М.: Физматгиз, 1963.
7. Karamata J. Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjesche Transformation betreffen // Journ. Reine und Angew. Math. 1931. V. 164. № 1. P. 27–29.
8. Beurling A. Sur les intégrales de Tourier absolument convergentes // Helsinki Comp. Rend. Gie'me Congr. Math. Scand. 1938.
9. Ganelius T. Tauberian remainder theorems. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1971.
10. Коренблюм Б. И. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций // Тр. Моск. матем. об-ва. 1958. Т. 7. С. 121–148.
11. Комеч А. И. Уравнения с однородными ядрами и преобразование Меллина обобщенных функций // ТМФ. 1976. Т. 27. № 2. С. 149–162.
12. Земляны А. Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974.
13. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
14. Pilipović S., Stanković B. Wiener Tauberian Theorems for Distribution // J. London Math. Soc. 1993. V. 47. № 2. P. 507–515.
15. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

16. *Брычков Ю. А.* Преобразования Меллина. I. М.: ВЦ РАН, 1997.
17. *Tröger G.* A Tauberian Theorem for the Generalized S_2 -Transform // Math. Nachr. 1989. V. 143. P. 55–67.
18. *Boas R. P., Widder D. V.* The Iterated Stieltjes Transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1939. V. 45. P. 1–72.
19. *Pilipovič S., Stankovič B., Takači A.* Asymptotic Behaviour and Stieltjes Transformation of Distributions. B. 116. Leipzig: Teubner Verlag, 1990.
20. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
21. *Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Теоремы типа Винера для обобщенных функций и интегральное преобразование Стильеса // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 2. С. 156–159.
22. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
E-mail: drozzin@genesis.mi.ras.ru

Поступило в редакцию
24.VI.1999