Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов, Теоремы вложения анизотропных пространств Бесова $B_{\text{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 4, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:08:44

УДК 517.51

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов

Теоремы вложения анизотропных пространств Бесова $B_{\text{pr}}^{\alpha q}([0, 2\pi)^n)$

Исследуются анизотропные пространства Бесова $B_{\text{pr}}^{\alpha q}([0, 2\pi)^n)$. Для них получены предельные теоремы вложения.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: пространства Лоренца, пространства Бесова, теоремы вложения, теоремы о следах.

Введение

Теория вложения пространств дифференцируемых функций берет начало с работы С. Л. Соболева [1]. Эта теория изучает важные связи и соотношения дифференциальных (гладкостных) свойств функций в различных метриках. Дальнейшее развитие данной теории связано с новыми классами функциональных пространств С. М. Никольского [2], О. В. Бесова [3], П. И. Лизоркина [4], Х. Трибеля [5] и других, оно определялось как собственной внутренней проблематикой, так и приложениями в теории краевых задач математической физики [6]–[8].

Настоящая работа посвящена исследованию анизотропных пространств Бесова $B_{\text{pr}}^{\alpha q}([0, 2\pi)^n)$, которые имеют характер пространств со “смешанной гладкостью”. Пространства такого вида впервые были введены и изучены в работе [2].

Перейдем к постановке задачи. Для удобства формулировки приведем результаты, полученные для изотропных пространств.

ТЕОРЕМА [1]. Пусть $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, p_1 \leq \infty$. Тогда при $\alpha_1 \leq \alpha$ и $\alpha - n/p = \alpha_1 - n/p_1$ справедливо вложение

$$W_p^\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{p_1}^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n).$$

Данная теорема отражает связь метрических и гладкостных свойств функций из пространства Соболева и является уточнением естественного вложения

$$W_p^\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_p^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n) \quad (1)$$

при $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1 \leq \alpha$, т. е., расширив пространство за счет требования меньшей гладкости функций, мы до некоторой величины можем сузить пространство, стоящее в правой части (1), по метрической характеристике с сохранением вложения, а именно до $p_1 = \frac{np}{(\alpha_1 - \alpha)p + n}$.

Аналогично формулируется и результат О. В. Бесова [3]:

$$B_p^{\alpha q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_1}^{\alpha_1 q}(\mathbb{R}^n),$$

где параметры α, α_1 и p, p_1 связаны так же, как в теореме Соболева.

В определении пространства Бесова, в отличие от пространства Соболева, имеется третий параметр q , который является поправкой к гладкости α , или “слабым” гладкостным параметром.

При рассмотрении естественного вложения

$$B_p^{\alpha q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha q_1}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q \leq q_1 \leq \infty,$$

возникает аналогичный вопрос: как связан “слабый” гладкостный параметр q с метрическими параметрами в предельных теоремах вложения?

Ответу на этот вопрос посвящена настоящая работа.

В § 1 описаны анизотропные пространства Лоренца $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$ и анизотропный интерполяционный метод [9], доказаны неравенства в случаях разных метрик и измерений для тригонометрических полиномов со спектрами из прямоугольников.

В § 2 вводятся анизотропные пространства Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha q}([0, 2\pi)^n)$, взятые по метрике анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$, изучаются их элементарные вложения и интерполяционные свойства.

В § 3 для анизотропных пространств Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha q}([0, 2\pi)^n)$ доказаны предельные теоремы вложения разных метрик и измерений.

§ 1. Анизотропные пространства Лоренца $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$, неравенства разных метрик и измерений

Введем некоторые обозначения, которые в дальнейшем понадобятся нам для краткости и лаконичности формулировок результатов и оформления их доказательств. Для мультииндекса $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ положим $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (1/p_1, \dots, 1/p_n)$. Выражение $\mathbf{p} + \mathbf{p}_1$ понимается как покоординатное сложение компонент мультииндекса, отношения $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p} \geq \mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p} > \mathbf{p}_1$ означают соответственно выполнение отношений $p_i = p_i^1$, $p_i \geq p_i^1$ и $p_i > p_i^1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Для мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ выражение $\mathbf{k}^{\mathbf{p}}$ означает $k_1^{p_1} \dots k_n^{p_n}$.

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ – измеримая в $[0, 2\pi)^n$ функция. Через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ последовательно по переменным $x_1, \dots, x_n$ при фиксированных остальных переменных.

Числовую функцию $a(k_1, \dots, k_n) \equiv a_{k_1, \dots, k_n}$ натуральных аргументов $k_1, \dots, k_n$ назовем *n-кратной последовательностью*, или просто *кратной последовательностью*.

Для кратной последовательности $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} = \{a_{k_1, \dots, k_n}\}_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty}$ обозначим через $\{a_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} \equiv \{a_{k_1, \dots, k_n}^{*1, \dots, *n}\}_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty}$ кратную последовательность, полученную применением к первой невозрастающей перестановки последовательно по индексам $k_1, \dots, k_n$ при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ такие, что если $1 \leq p_i < \infty$, то $1 \leq r_i \leq \infty$, если же $p_i = \infty$, то и $r_i = \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Анизотропным пространством Лоренца $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$ [9] назовем множество функций, для которых конечна величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} = \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^{2\pi} (t_1^{1/p_1} \times f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n))^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n}.$$

Дискретным анизотропным пространством Лоренца $l_{\mathbf{pr}}$ назовем множество кратных последовательностей, для которых конечна величина

$$\|a\|_{l_{\mathbf{pr}}} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \left(k_n^{1/p_n} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (k_1^{1/p_1} a_{k_1, \dots, k_n}^{*1, \dots, *n})^{r_1} \frac{1}{k_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{1}{k_n} \right)^{1/r_n}.$$

При $r = \infty$ выражения $(\int_0^{2\pi} |f(t)|^r \frac{dt}{t})^{1/r}$ и $(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r)^{1/r}$ понимаются соответственно как $\sup_{0 \leq t < 2\pi} |f(t)|$ и $\sup_{k \geq 1} |a_k|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для неотрицательной монотонно убывающей по каждой переменной функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ и неотрицательной кратной последовательности $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} = \{a_{k_1, \dots, k_n}\}_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty}$, монотонно убывающей по каждому индексу, при $1 \leq \mathbf{p}, \mathbf{q} \leq \infty$ справедливы равенства

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}}([0, 2\pi)^n)} = \|t^{1/\mathbf{p}} f\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})([0, 2\pi)^n)}, \quad \|a\|_{l_{\mathbf{pq}}} = \|k^{1/\mathbf{p}} a\|_{l_{\mathbf{q}}(\frac{1}{k})},$$

где

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})([0, 2\pi)^n)} &= \left(\int_0^{2\pi} \left(\dots \left(\int_0^{2\pi} (f(t_1, \dots, t_n))^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \right)^{q_n/q_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q_n}, \\ \|\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}\|_{l_{\mathbf{q}}(\frac{1}{k})} &= \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (a_{k_1, \dots, k_n})^{q_1} \frac{1}{k_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \right)^{q_n/q_{n-1}} \frac{1}{k_n} \right)^{1/q_n}. \end{aligned}$$

Кроме того, в случае $1 \leq \mathbf{p} = \mathbf{q} \leq \infty$ верны равенства

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pp}}([0, 2\pi)^n)} = \|f\|_{L_{\mathbf{p}}([0, 2\pi)^n)}, \quad \|a\|_{l_{\mathbf{pp}}} = \|a\|_{l_{\mathbf{p}}},$$

где

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}([0, 2\pi)^n)} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\dots \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}$$

– норма пространства Лебега со смешанной метрикой в $L_{\mathbf{p}}([0, 2\pi)^n)$,

$$\|\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}\|_{l_{\mathbf{p}}} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} |a_{k_1, \dots, k_n}|^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} \right)^{1/p_n}$$

– норма дискретного пространства Лебега со смешанной метрикой в $l_{\mathbf{p}}$.

ЛЕММА 1 [9]. а) Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{p}_1 \leq \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} \leq \infty$; тогда

$$L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}([0, 2\pi)^n) \hookrightarrow L_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}}([0, 2\pi)^n), \quad l_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}} \hookrightarrow l_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}.$$

б) Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_0 \leq \mathbf{r}_1 \leq \infty$; тогда

$$L_{\mathbf{p} \mathbf{r}_0}([0, 2\pi)^n) \hookrightarrow L_{\mathbf{p} \mathbf{r}_1}([0, 2\pi)^n), \quad l_{\mathbf{p} \mathbf{r}_0} \hookrightarrow l_{\mathbf{p} \mathbf{r}_1}.$$

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$ – вершины n -мерного единичного куба в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – семейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства, которое называется *совместимым семейством банаховых пространств* [10]. Для элемента a пространства $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ определим функционал

$$K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon}.$$

Пусть $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Через $\mathbf{A}_{\theta \mathbf{r}} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{r}}$ обозначим линейное подмножество множества $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta \mathbf{r}}} = \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{-\theta_n} \dots \left(\int_0^{2\pi} (t_1^{-\theta_1} K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}))^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty.$$

ЛЕММА 2 [9]. Пусть $\mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} \leq \infty$, $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $\mathbf{B} = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $\mathbf{M}_0 = (M_1^0, \dots, M_n^0)$, $\mathbf{M}_1 = (M_1^1, \dots, M_n^1)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T: A_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon$ с оценкой нормы, равной $C_\varepsilon \prod_{i=1}^n M_i^{\varepsilon_i}$ для любого $\varepsilon \in E$, то $T: \mathbf{A}_{\theta \mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta \mathbf{r}}$ с нормой

$$\|T\|_{\mathbf{A}_{\theta \mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta \mathbf{r}}} \leq \max_{\varepsilon \in E} C_\varepsilon \prod_{i=1}^n (M_i^0)^{1-\theta_i} (M_i^1)^{\theta_i}.$$

ЛЕММА 3 [9]. Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon \in E$, $\mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} \leq \infty$. Тогда для пространств Лебега $\{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}([0, 2\pi)^n)\}_{\varepsilon \in E}$ со смешанной метрикой и дискретных пространств Лебега $\{l_{\mathbf{p}_\varepsilon}\}_{\varepsilon \in E}$ со смешанной метрикой справедливы равенства

$$(L_{\mathbf{p}_\varepsilon}([0, 2\pi)^n); \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{r}} = L_{\mathbf{p} \mathbf{r}}([0, 2\pi)^n), \quad (l_{\mathbf{p}_\varepsilon}; \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{r}} = l_{\mathbf{p} \mathbf{r}},$$

где $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (\mathbf{1} - \theta)/\mathbf{p}_0 + \theta/\mathbf{p}_1$.

ЛЕММА 4 (неравенство разных метрик [11]). Пусть $T_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ – тригонометрический полином порядка не выше $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ по переменной $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда:

а) при $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \mathbf{p}_2 = (p_1^2, \dots, p_n^2) \leq \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{r}}([0, 2\pi)^n)} \leq C_1 \prod_{\{i: p_i^1 < p_i^2\}} s_i^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}([0, 2\pi)^n)}, \quad (2)$$

где C_1 – положительная постоянная, не зависящая от $\mathbf{s}$;

б) при $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \mathbf{r}_2 = (r_1^2, \dots, r_n^2) \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{pr}_1}([0, 2\pi)^n)} \leq C_2 \prod_{\{i: r_i^1 < r_i^2\}} (\ln(s_i + 1))^{1/r_i^1 - 1/r_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{pr}_2}([0, 2\pi)^n)}, \quad (3)$$

где C_2 – положительная постоянная, не зависящая от $\mathbf{s}$.

При этом полученные неравенства точны в смысле порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) следует из неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в пространствах Лебега со смешанной метрикой [2] и лемм 2, 3.

Докажем утверждение б). Пусть параметр $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ такой, что $\tau_i > p_i$ при $r_i^1 < r_i^2$ и $\tau_i = p_i$ при $r_i^1 = r_i^2$. Для произвольной функции $f \in L_{\tau\mathbf{r}_2}$ имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{pr}_1}([0, 2\pi)^n)} &= \left(\int_0^{2\pi} (\mathbf{t}^{1/\mathbf{p}} f^*(\mathbf{t}))^{\mathbf{r}_1} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/\mathbf{r}_1} = \left(\int_0^{2\pi} (\mathbf{t}^{1/\mathbf{p} - 1/\tau} \mathbf{t}^{1/\tau} f^*(\mathbf{t}))^{\mathbf{r}_1} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/\mathbf{r}_1} \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} (\mathbf{t}^{1/\tau} f^*(\mathbf{t}))^{\mathbf{r}_2} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/\mathbf{r}_2} \prod_{\{i: r_i^1 < r_i^2\}} \left(\int_0^{2\pi} t_i^{(1/p_i - 1/\tau_i)\nu_i} \frac{dt_i}{t_i} \right)^{1/\nu_i}. \end{aligned}$$

Здесь применено неравенство Гёльдера по тем переменным t_i , для которых $r_i^1 < r_i^2$, и $1/\nu_i = 1/r_i^1 - 1/r_i^2$. Вычислив интеграл, получим

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pr}_1}([0, 2\pi)^n)} \leq \prod_{\{i: r_i^1 < r_i^2\}} \left(\frac{1}{(1/p_i - 1/\tau_i)(1/r_i^1 - 1/r_i^2)} \right)^{1/r_i^1 - 1/r_i^2} \|f\|_{L_{\tau\mathbf{r}_2}([0, 2\pi)^n)}. \quad (4)$$

Пусть $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^n$, $s_i > e^{p_i}$. Для тех индексов i , для которых $r_i^1 < r_i^2$, положим $1/\tau_i = 1/p_i - 1/\ln s_i$. Тогда из неравенств (2) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{pr}_1}([0, 2\pi)^n)} &\leq \prod_{\{i: r_i^1 < r_i^2\}} \left(\frac{1}{1/p_i - 1/\tau_i} \right)^{1/r_i^1 - 1/r_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\tau\mathbf{r}_2}([0, 2\pi)^n)} \\ &\leq C_1 \prod_{\{i: r_i^1 < r_i^2\}} \left(\frac{1}{1/p_i - 1/\tau_i} \right)^{1/r_i^1 - 1/r_i^2} s_i^{1/p_i - 1/\tau_i} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{pr}_2}} \\ &\leq C_2 \prod_{\{i: r_i^1 < r_i^2\}} (\ln(s_i + 1))^{1/r_i^1 - 1/r_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{pr}_2}}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение б).

Для доказательства точности в смысле порядка неравенств (2) и (3) достаточно рассмотреть полиномы $T_{\mathbf{s}}^{(\beta)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i)$, где $T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i) = \sum_{k_i=1}^{s_i} \frac{\cos(k_i x_i)}{k_i^{\beta_i}}$, так как согласно теореме Харди–Литтлвуда в пространствах

Лоренца $L_{pr}([0, 2\pi))$ [12] имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{s}}^{(\beta)}\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} &= \prod_{i=1}^n \|T_{s_i}^{(\beta_i)}\|_{L_{p_i r_i}([0, 2\pi))} \sim \prod_{i=1}^n \left(\sum_{l_i=1}^{s_i} l_i^{(1/p'_i - \beta_i)r_i - 1} \right)^{1/r_i} \\ &\sim \begin{cases} \prod_{i=1}^n s_i^{1/p'_i - \beta_i} & \text{при } \beta_i \neq \frac{1}{p'_i}, \\ \prod_{i=1}^n \ln^{1/r_i}(s_i + 1) & \text{при } \beta_i = \frac{1}{p'_i}. \end{cases} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В одномерном случае неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца $L_{pr}([0, 2\pi))$ получены Л. А. Шерстневой в [13].

Для произвольного вектора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ положим $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_m)$, где $1 \leq m \leq n-1$.

ЛЕММА 5 (неравенство разных измерений). Пусть $T_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ – тригонометрический полином порядка не выше $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$ по переменнй $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) \leq \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда для произвольной фиксированной точки $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in [0, 2\pi)^{n-m}$ имеет место неравенство

$$\|T_{\mathbf{s}}(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^m)} \leq C_1 \prod_{i=m+1}^n s_i^{1/p_i} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)},$$

где C_1 – положительная постоянная, не зависящая от $\mathbf{s}$. При этом полученное неравенство точно в смысле порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из неравенства (2) при $p_{m+1} = \dots = p_n = \infty$.

§ 2. Анизотропные пространства Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$

Пусть $\mathbf{0} \leq \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Для функций $f \in L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$ обозначим

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f) e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle},$$

где $\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n}$ – коэффициенты Фурье функции f по кратной тригонометрической системе, $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i$, $\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : [2^{s_i-1}] \leq |k_i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$.

По аналогии с [9], [14] анизотропным пространством Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ назовем множество функций f из $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)} = \left\| \{2^{\langle \alpha, \mathbf{s} \rangle} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}},$$

где $\|\cdot\|_{l_{\mathbf{q}}}$ – норма дискретного пространства Лебега $l_{\mathbf{q}}$.

Определим также пространство $\widehat{B}_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ как множество функций $f \in L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\widehat{B}_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)} = \|f\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} + \|\{2^{\langle\alpha, \mathbf{s}\rangle} E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\}\|_{l_{\mathbf{q}}},$$

где $E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} = \inf_{T_{2^{\mathbf{s}}-1}} \|f - T_{2^{\mathbf{s}}-1}\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами $T_{2^{\mathbf{s}}-1}$ порядка не выше $2^{\mathbf{s}} - 1$ в пространстве $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$.

ЛЕММА 6. При $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ и $1 \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n) = \widehat{B}_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограниченности оператора частичной суммы $S_{\mathbf{m}}(f)$ в пространствах Лебега со смешанной метрикой $L_{\mathbf{p}}([0, 2\pi)^n)$ при $1 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ [15] и лемм 1, 2 следует его ограниченность в анизотропных пространствах Лоренца $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$ при $1 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$. Отсюда получаем, что

$$E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \sim \|f - S_{2^{\mathbf{s}}-1}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)},$$

где $S_{2^{\mathbf{s}}-1}(f)$ – частичная сумма функции f порядка $2^{\mathbf{s}} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} &= \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f) e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \right\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \\ &= \|(f - S_{2^{\mathbf{s}-1}-1}(f)) - (f - S_{2^{\mathbf{s}}-1}(f))\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \\ &\leq \|f - S_{2^{\mathbf{s}-1}-1}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} + \|f - S_{2^{\mathbf{s}}-1}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \\ &\leq C_3 (E_{2^{\mathbf{s}-1}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} + E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}) \\ &\leq 2C_3 E_{2^{\mathbf{s}-1}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}. \end{aligned}$$

Из этих оценок получаем, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)} &= \|\{2^{\langle\alpha, \mathbf{s}\rangle} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\}\|_{l_{\mathbf{q}}} \\ &\leq 2C_3 (\|f\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} + \|\{2^{\langle\alpha, \mathbf{s}\rangle} \|E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\}\|_{l_{\mathbf{q}}}) \\ &= 2C_3 \|f\|_{\widehat{B}_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)}, \end{aligned}$$

что означает выполнение вложения $\widehat{B}_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$.

Для доказательства обратного вложения оценим каждое слагаемое, входящее в норму пространства $\widehat{B}_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$, по отдельности.

Для $\|f\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}$ согласно неравенствам Минковского и Гёльдера получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} &= \left\| \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \Delta_{\mathbf{k}}(f) \right\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \\ &\leq \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} 2^{-\langle\alpha, \mathbf{s}\rangle} 2^{\langle\alpha, \mathbf{s}\rangle} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \\ &\leq \|\{2^{-\langle\alpha, \mathbf{s}\rangle}\}\|_{l_{\mathbf{q}'}} \|\{2^{\langle\alpha, \mathbf{s}\rangle} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\}\|_{l_{\mathbf{q}}} = C_4 \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для оценки второго слагаемого положим $\mathbf{0} < \varepsilon < \alpha$; тогда

$$\begin{aligned}
 & \left\| \{2^{\langle \alpha, \mathbf{s} \rangle} E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n})\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \leq \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, \mathbf{s} \rangle} \left\| \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{s}}^{\infty} \Delta_{\mathbf{k}}(f) \right\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \right\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \\
 & \leq \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, \mathbf{s} \rangle} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{s}}^{\infty} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \right\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \\
 & = \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, \mathbf{s} \rangle} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{s}}^{\infty} 2^{-\langle \mathbf{k}, \alpha - \varepsilon \rangle} 2^{\langle \mathbf{k}, \alpha - \varepsilon \rangle} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \right\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \\
 & \leq \left\| \left\{ 2^{\langle \varepsilon, \mathbf{s} \rangle} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{s}}^{\infty} 2^{\langle \mathbf{k}, \alpha - \varepsilon \rangle} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \right\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \\
 & \leq \left\| \left\{ 2^{\langle \mathbf{s}, \alpha - \varepsilon \rangle} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{k}=\mathbf{s}} 2^{\langle \varepsilon, \mathbf{s} \rangle} \right\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \\
 & \leq \left\| \{2^{\langle \mathbf{s}, \alpha \rangle} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} = \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Объединяя оценки (5) и (6), получаем неравенство, доказывающее вложение $\widehat{B}_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathbf{0} \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q}_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq \mathbf{q}_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0) \leq \mathbf{r}_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \infty$. Тогда

$$B_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}_0}^{\alpha_0 \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1}^{\alpha_1 \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из свойств пространств $l_{\mathbf{q}}$ и $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)$.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathbf{0} \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$, $\alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q}_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$, $\mathbf{q}_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$, $\mathbf{r}_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \infty$. Тогда для любого числа θ , $0 < \theta < 1$, справедливо

$$(B_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}_0}^{\alpha_0 \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n), B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1}^{\alpha_1 \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n))_{[\theta]} = B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n),$$

где $(\cdot, \cdot)_{[\theta]}$ – комплексная интерполяция пары пространств и $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\mathbf{1}/\mathbf{q} = (1 - \theta)/\mathbf{q}_0 + \theta/\mathbf{q}_1$, $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (1 - \theta)/\mathbf{p}_0 + \theta/\mathbf{p}_1$, $\mathbf{1}/\mathbf{r} = (1 - \theta)/\mathbf{r}_0 + \theta/\mathbf{r}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из интерполяционных свойств классов $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}})$ (см. [10]), так как

$$\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)} \sim \left\| \{2^{\langle \alpha, \mathbf{s} \rangle} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} = \left\| \{\|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)}\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}}.$$

§ 3. Теоремы вложения и продолжения

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{0} \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha_0 - \mathbf{1}/\mathbf{p}_0 = \alpha_1 - \mathbf{1}/\mathbf{p}_1$ справедливо вложение

$$B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}^{\alpha_1 \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}}^{\alpha_0 \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$; тогда согласно неравенству разных метрик (лемма 1, а)) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)} &= \left\| \{2^{\langle \alpha_0, \mathbf{s} \rangle} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}}}\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \\ &\leq C_1 \left\| \{2^{\langle \alpha_0 + 1/\mathbf{p}_1 - 1/\mathbf{p}_0, \mathbf{s} \rangle} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}}\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} \\ &= C_1 \left\| \{2^{\langle \alpha_1, \mathbf{s} \rangle} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}}\} \right\|_{l_{\mathbf{q}}} = C_1 \|f\|_{B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)}, \end{aligned}$$

которая доказывает искомое вложение. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q}_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq \mathbf{q}_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$, $\mathbf{r}_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \infty$. Тогда при $\mathbf{1}/\mathbf{q}_0 + \mathbf{1}/\mathbf{r}_0 = \mathbf{1}/\mathbf{q}_1 + \mathbf{1}/\mathbf{r}_1$ справедливо вложение

$$B_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{p}_1}^{\alpha \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in B_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n)$; тогда при $\alpha = \mathbf{0}$ согласно неравенству разных метрик (лемма 4, б)), лемме 1, б) при $\mathbf{1} \leq \mathbf{q}_0 \leq \mathbf{q}_1 \leq \infty$ и замечанию 1 (последовательность наилучших приближений $E_{\mathbf{k}}(f)_{L_{\mathbf{p}_0}([0, 2\pi)^n)}$ функции f неотрицательна и монотонно убывает по каждому индексу) имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\mathbf{p}_1}^{\alpha \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n)} &= \left\| \{ \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}_1}} \} \right\|_{l_{\mathbf{q}_1}} \\ &\leq C_2 \left\| \{ \mathbf{s}^{1/\mathbf{r}_1 - 1/\mathbf{r}_0} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_{\mathbf{p}_0}} \} \right\|_{l_{\mathbf{q}_1}} \\ &\leq C_5 \left\| \{ \mathbf{s}^{1/\mathbf{r}_1 - 1/\mathbf{r}_0 + 1/\mathbf{q}_1} E_{2^{\mathbf{s}}} \mathbf{1}(f)_{L_{\mathbf{p}_0}} \} \right\|_{l_{\mathbf{q}_1}(\frac{1}{\mathbf{s}})} \\ &= C_5 \left\| \{ \mathbf{s}^{1/\mathbf{q}_0} E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{p}_0}} \} \right\|_{l_{\mathbf{q}_1}(\frac{1}{\mathbf{s}})} \\ &= C_5 \left\| \{ E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{p}_0}} \} \right\|_{l_{\mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1}} \\ &= C_5 \left\| \{ E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_{L_{\mathbf{p}_0}} \} \right\|_{l_{\mathbf{q}_0}} \leq C_5 \|f\|_{\hat{B}_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n)}, \end{aligned}$$

т. е. для оператора вложения I при $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \mathbf{r}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0) \leq \infty$ и $\mathbf{1}/\mathbf{q}_0 + \mathbf{1}/\mathbf{r}_0 = \mathbf{1}/\mathbf{q}_1 + \mathbf{1}/\mathbf{r}_1$ верно

$$I: \hat{B}_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n) \rightarrow B_{\mathbf{p}_1}^{\alpha \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n).$$

При $\alpha > \mathbf{0}$ имеем

$$I: \hat{B}_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n) = B_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n) \rightarrow B_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n).$$

Тогда согласно леммам 6 и 8 имеем

$$I: (\hat{B}_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n), \hat{B}_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n))_{[\theta]} \rightarrow (B_{\mathbf{p}_1}^{\alpha \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n), B_{\mathbf{p}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n))_{[\theta]},$$

т. е.

$$I: \hat{B}_{\mathbf{p}_0}^{\tilde{\alpha} \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n) = B_{\mathbf{p}_0}^{\tilde{\alpha} \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n) \rightarrow B_{\mathbf{p}_1}^{\tilde{\alpha} \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n), \quad (7)$$

где $\tilde{\alpha} = \theta \alpha$, $\mathbf{1}/\tilde{\mathbf{q}}_1 = (\mathbf{1} - \theta)/\mathbf{q}_1 + \theta/\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{1}/\tilde{\mathbf{r}}_1 = (\mathbf{1} - \theta)/\mathbf{r}_1 + \theta/\mathbf{r}_0$ (здесь интерполяция пространств $\hat{B}_{\mathbf{p}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ сводится к интерполяции пространств $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}$).

Рассмотрим соотношение, связывающее между собой параметры $\mathbf{q}_0$, $\tilde{\mathbf{q}}_1$, $\mathbf{r}_0$ и $\tilde{\mathbf{r}}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}_1} + \frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}_1} &= \frac{1-\theta}{\mathbf{q}_1} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{1-\theta}{\mathbf{r}_1} + \frac{\theta}{\mathbf{r}_0} \\ &= \frac{1}{\mathbf{q}_1} + \frac{1}{\mathbf{r}_1} + \theta \left(\left(\frac{1}{\mathbf{q}_0} + \frac{1}{\mathbf{r}_0} \right) - \left(\frac{1}{\mathbf{q}_1} + \frac{1}{\mathbf{r}_1} \right) \right) = \frac{1}{\mathbf{q}_0} + \frac{1}{\mathbf{r}_0}, \quad \mathbf{q}_0 \leq \tilde{\mathbf{q}}_1. \end{aligned}$$

Неравенство, вытекающее из (7), является искомым оценкой вложения. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. а) В одномерном случае аналог теоремы 2 был ранее получен авторами в [16].

б) Условия, при которых справедливы вложения из теорем 1 и 2, неулучшаемы, а именно справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{0} \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ и $\alpha_0 - \mathbf{1}/\mathbf{p}_0 = \alpha_1 - \mathbf{1}/\mathbf{p}_1$. Тогда для произвольных $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > \mathbf{0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > \mathbf{0}$ найдется функция $f_\beta \in B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}^{\alpha_1 \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ такая, что $f_\beta \notin B_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}}^{(\alpha_0 + \varepsilon) \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n) \cup B_{(\mathbf{p}_0 + \delta) \mathbf{r}}^{\alpha_0 \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $f_\beta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{\beta_i}(x_i)$, где

$$f_{\beta_i}(x_i) = \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{\cos(k_i x_i)}{k_i^{\beta_i}},$$

согласно теореме Харди–Литтлвуда в пространствах Лоренца $L_{pr}([0, 2\pi))$ [12] имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f_\beta)\|_{L_{\mathbf{p} \mathbf{r}}([0, 2\pi)^n)} &= \prod_{i=1}^n \|\Delta_{k_i}(f_{\beta_i})\|_{L_{p_i r_i}([0, 2\pi))} \sim \prod_{i=1}^n \left(\sum_{l_i=2^{k_i-1}}^{2^{k_i}-1} l_i^{(1/p'_i - \beta_i)r_i - 1} \right)^{1/r_i} \\ &\sim \prod_{i=1}^n 2^{(1/p'_i - \beta_i)k_i} = 2^{(\mathbf{1}/\mathbf{p}' - \beta)\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Тогда при $\alpha_1 + \frac{1}{\mathbf{p}'_1} < \beta \leq \min((\alpha_0 + \varepsilon) + \frac{1}{\mathbf{p}'_0}, \alpha_0 + \frac{1}{(\mathbf{p}_0 + \delta)'})$ функция f_β принадлежит $B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}^{\alpha_1 \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ и не принадлежит $B_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}}^{(\alpha_0 + \varepsilon) \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n) \cup B_{(\mathbf{p}_0 + \delta) \mathbf{r}}^{\alpha_0 \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q}_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq \mathbf{q}_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$, $\mathbf{r}_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \infty$ и $\mathbf{1}/\mathbf{q}_0 + \mathbf{1}/\mathbf{r}_0 = \mathbf{1}/\mathbf{q}_1 + \mathbf{1}/\mathbf{r}_1$. Тогда для произвольных $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > \mathbf{0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > \mathbf{0}$ найдется функция $f_\gamma \in B_{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0, 2\pi)^n)$ такая, что $f_\gamma \notin B_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1}^{\alpha(\mathbf{q}_1 - \varepsilon)}([0, 2\pi)^n) \cup B_{\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \delta)}^{\alpha \mathbf{q}_1}([0, 2\pi)^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [13] показано, что для тригонометрического полинома

$$\Phi_m(t) = \sum_{l=0}^m \frac{A_{m-l}^{1/p-1} D_l(t)}{A_m^{1/p}},$$

где $D_l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^l \cos(kt)$, $A_l^\beta = \frac{(\beta+1)\cdots(\beta+l)}{l!}$, порядка не выше $n-1$ справедлива асимптотическая оценка

$$\|\Phi_m\|_{L_{pr}([0,2\pi])} \sim m^{1-1/p} \log_2^{1/r}(m+2). \quad (8)$$

Исходя из оценки (8), нетрудно показать, что для функции

$$Q_k(t) = \sum_{l=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{A_{2^k-l}^{1/p-1} \sum_{\nu=2^{k-1}}^l \cos(\nu t)}{A_{2^k}^{1/p}}$$

выполняется асимптотическая оценка

$$\|Q_k\|_{L_{pr}([0,2\pi])} \sim 2^{(1-1/p)k} k^{1/r}. \quad (9)$$

Положим $f_\gamma(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{\gamma_i}(x_i)$, где $f_{\gamma_i}(x_i) = \sum_{k_i=1}^\infty \frac{Q_{k_i}(x_i)}{2^{(\alpha_i+1-1/p_i)k_i} k_i^{\gamma_i}}$, и согласно оценке (9) получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f_\gamma)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0,2\pi]^n)} &= \prod_{i=1}^n \|\Delta_{k_i}(f_{\gamma_i})\|_{L_{p_i r_i}([0,2\pi])} \\ &\sim \prod_{i=1}^n 2^{-\alpha_i k_i} k_i^{1/r_i - \gamma_i} \sim 2^{-\alpha \mathbf{k}} \mathbf{k}^{1/\mathbf{r} - \gamma}. \end{aligned}$$

Тогда при $\frac{1}{\mathbf{q}_0} + \frac{1}{\mathbf{r}_0} < \gamma \leq \min(\frac{1}{\mathbf{q}_1 - \varepsilon} + \frac{1}{\mathbf{r}_1}, \frac{1}{\mathbf{q}_1} + \frac{1}{\mathbf{r}_1 - \delta})$ функция f_γ принадлежит $B_{\mathbf{pr}_0}^{\alpha \mathbf{q}_0}([0,2\pi]^n)$ и не принадлежит $B_{\mathbf{pr}_1}^{\alpha(\mathbf{q}_1 - \varepsilon)}([0,2\pi]^n) \cup B_{\mathbf{pr}_1}^{\alpha \mathbf{q}_1}([0,2\pi]^n)$. Утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$ имеет место вложение

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}([0,2\pi]^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\bar{\alpha} \bar{\mathbf{q}}}([0,2\pi]^m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно неравенству разных измерений (лемма 5) и неравенству Минковского получим

$$\begin{aligned} &\|f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\bar{\alpha} \bar{\mathbf{q}}}([0,2\pi]^m)} \\ &= \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{\mathbf{s}} \rangle} \|\Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n))\|_{L_{\mathbf{pr}}([0,2\pi]^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} \\ &\leq \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{\mathbf{s}} \rangle} \left\| \sum_{s_n=0}^\infty \dots \sum_{s_{m+1}=0}^\infty \Delta_{s_{m+1}}(\dots \Delta_{s_n}(\Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(f))) \right\|_{L_{\mathbf{pr}}([0,2\pi]^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} \\ &\leq \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{\mathbf{s}} \rangle} \sum_{s_n=0}^\infty \dots \sum_{s_{m+1}=0}^\infty \|\Delta_{s_{m+1}}(\dots \Delta_{s_n}(\Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(f)))\|_{L_{\mathbf{pr}}([0,2\pi]^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} = \\ &= \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{\mathbf{s}} \rangle} \sum_{s_n=0}^\infty \dots \sum_{s_{m+1}=0}^\infty \|\Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0,2\pi]^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \sum_{s_n=0}^{\infty} 2^{s_n/p_n} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} 2^{s_{m+1}/p_{m+1}} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \right\} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} \\
&\leq C_1 \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \left\| \{ 2^{(\alpha, \mathbf{s})} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} \\
&= C_1 \left\| \{ 2^{(\alpha, \mathbf{s})} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^n)} \} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} = C_1 \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)},
\end{aligned}$$

где $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$.

Условия $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ при $i = m+1, \dots, n$ обеспечивают непрерывность функции $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ по переменным $x_{m+1}, \dots, x_n$, что гарантирует наличие следа. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда для функции $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^m)$ при $\alpha_i = 1/p_i$ и $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$ можно построить функцию $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ от n переменных, обладающую следующими свойствами:

- 1) $f \in B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$, $\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)} \leq C \|\varphi\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^m)}$;
- 2) $f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^m)$. Эту функцию можно представить в виде сходящегося к ней в смысле $L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^m)$ ряда:

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\bar{\mathbf{s}}=\mathbf{0}}^{\infty} \Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(\varphi(x_1, \dots, x_m)).$$

Имеем

$$\|\varphi\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^m)} = \left\| \{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{s}})} \|\Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(\varphi)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^m)} \} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}}.$$

Для $i = m+1, \dots, n$ выберем функции $f_i(x_i)$ из $B_{p_i r_i}^{\alpha_i 1}([0, 2\pi))$, $\alpha_i = 1/p_i$, такие, что $f_i(0) = 1$, и введем новую функцию

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{s}=\mathbf{0}}^{\infty} \Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(\varphi(x_1, \dots, x_m)) \prod_{i=m+1}^n \Delta_{s_i}(f_i(x_i)).$$

Для этой функции получим

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)} &= \left\| \{ 2^{(\alpha, \mathbf{s})} \|\Delta_{\mathbf{s}}(\varphi)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^m)} \} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} \\
&= \left\| \{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{s}})} \|\Delta_{\bar{\mathbf{s}}}(\varphi)\|_{L_{\mathbf{pr}}([0, 2\pi)^m)} \} \right\|_{l_{\bar{\mathbf{q}}}} \prod_{i=m+1}^n \|f_i\|_{B_{p_i r_i}^{\alpha_i 1}([0, 2\pi))} \\
&= C_6 \|\varphi\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha, \mathbf{q}}([0, 2\pi)^m)}.
\end{aligned}$$

Из условия $f_i(0) = 1$, $i = m+1, \dots, n$, имеем

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m),$$

а условия $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ при $i = m + 1, \dots, n$ обеспечивают непрерывность функций $f_i(x_i)$.

Эти рассуждения показывают, что φ есть след функции f . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теоремах 3, 4, в отличие от классических теорем вложения, нам удалось достичь предельного случая для “сильных” гладкостных и метрических параметров пространства, т. е. $\alpha_i = 1/p_i$ при $i = m + 1, \dots, n$, за счет того, что $q_i = 1$ для $i = m + 1, \dots, n$ (ранее этот эффект был замечен в работах [17], [18]). При этом полученные условия не ведут к расширениям пространств из следов по остальным “сильным” параметрам.

Список литературы

1. С. Л. Соболев, “Об одной теореме функционального анализа”, *Матем. сб.*, **4(46)**:3 (1938), 471–497.
2. С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, *Посв. акад. И. М. Виноградову к его 60-летию. Сборник статей*, Тр. МИАН, **38**, Изд-во АН СССР, М., 1951, 244–278; англ. пер.: S. M. Nikol'skij, “Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **80** (1969), 1–38.
3. О. В. Бесов, “Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения”, *Посв. акад. М. А. Лаврентьеву к его 60-летию. Сборник статей*, Тр. МИАН, **60**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 42–81; англ. пер.: O. V. Besov, “Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **40** (1964), 85–126.
4. И. П. Лизоркин, “Пространства $L_p^r(\Omega)$. Теоремы продолжения и вложения”, *Докл. АН СССР*, **145** (1962), 527–530; англ. пер.: P. I. Lizorkin, “ $L_p^r(\Omega)$ spaces. Extension and imbedding theorems”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 1053–1057.
5. Н. Triebel, “Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n -space. Duality, interpolation”, *Ark. Mat.*, **11**:1–2 (1973), 13–64.
6. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969; англ. пер.: S. M. Nikol'skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
7. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, vol. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
8. Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: Н. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Math. Library, **18**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1978.
9. Е. Д. Нурсултанов, “Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения”, *Докл. РАН*, **394**:1 (2004), 22–25; англ. пер.: E. D. Nursultanov, “Interpolation theorems for anisotropic function spaces and their applications”, *Dokl. Math.*, **69**:1 (2004), 16–19.

10. Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **223**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
11. Е. Д. Нурсултанов, “Неравенство разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 197–215; англ. пер.: E. D. Nursultanov, “Nikol’skii’s inequality for different metrics and properties of the sequence of norms of the Fourier sums of a function in the Lorentz space”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **255**:1 (2006), 185–202.
12. А. Б. Гулисашвили, “Тригонометрические ряды с монотонно убывающими коэффициентами и функциями распределения”, *Матем. заметки*, **10**:1 (1971), 3–10; англ. пер.: A. B. Gulisashvili, “Distribution functions and trigonometric series with monotonically decreasing coefficients”, *Math. Notes*, **10**:1 (1971), 427–430.
13. Л. А. Шерстнева, “Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, №4, 75–79; англ. пер.: L. A. Sherstneva, “Nikol’skij inequalities for trigonometric polynomials in Lorentz spaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **39**:4 (1984), 75–81.
14. Г. А. Акишев, “Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 17–40; англ. пер.: G. A. Akishev, “Approximation of function classes in spaces with mixed norm”, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1121–1144.
15. О. В. Бесов, “Теорема Литтлвуда–Пэли для смешанной нормы”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям* – 10, Тр. МИАН, **170**, Наука, М., 1984, 31–36; англ. пер.: O. V. Besov, “The Littlewood–Paley theorem for a mixed norm”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **170** (1987), 33–38.
16. К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов, “Метод многопараметрической интерполяции и теоремы вложения пространств Бесова $B_{p,\vec{r}}^{\vec{\alpha}}[0, 2\pi)$ ”, *Anal. Math.*, **24**:1 (1998), 241–263.
17. О. В. Бесов, “Об условиях существования классического решения волнового уравнения”, *Сиб. матем. журн.*, **8**:2 (1967), 243–256; англ. пер.: O. V. Besov, “On the conditions for the existence of a classical solution of the wave equation”, *Siberian Math. J.*, **8**:2 (1967), 179–188.
18. О. В. Бесов, “Классы функций с обобщенным смешанным условием Гёльдера”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям* – 3, Тр. МИАН, **105**, Наука, М., 1969, 21–29; англ. пер.: O. V. Besov, “Classes of functions with a generalized mixed Hölder condition”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **105** (1971), 24–34.

К. А. БЕКМАГАНБЕТОВ (К. А. BEKMAGANBETOV)
 Казахстанский филиал
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.ru

Поступило в редакцию
 29.10.2007
 21.02.2008

Е. Д. НУРСУЛТАНОВ (Е. D. NURSULTANOV)
 Казахстанский филиал
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова;
 Евразийский национальный университет
 им. Л. Н. Гумилёва
E-mail: er-nurs@yandex.ru