Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Миклюков, К неравенству Гарнака для почти решений эллиптических уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 5, 171–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:56:07

УДК 517.95

В. М. Миклюков

К неравенству Гарнака для почти решений эллиптических уравнений

Установлен аналог неравенства Гарнака для почти решений A -гармонических уравнений.

Библиография: 8 наименований.

Ключевые слова: неравенство Гарнака, почти решение, уравнение эллиптического типа.

§ 1. Уравнения

Введем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство, $n > 1$, со стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и модулем $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. Пусть $A: D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее предположениям:

- (i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \rightarrow A(x, \xi)$ определено и непрерывно;
- (ii) отображение $x \in D \rightarrow A(x, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$A(x, \lambda \xi) = \lambda |\lambda|^{p-2} A(x, \xi), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\nu_1 |\xi|^p \leq \langle \xi, A(x, \xi) \rangle, \quad (2)$$

$$|A(x, \xi)| \leq \nu_2 |\xi|^{p-1}, \quad (3)$$

где $\nu_1, \nu_2 > 0$ и $p \geq 1$ – некоторые постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0. \quad (4)$$

Решения h уравнения (4) называются A -гармоническими функциями, а само уравнение – A -гармоническим [1, гл. 6].

Простейшим уравнением описанного вида является уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2} \nabla h) = 0, \quad p > 1.$$

§ 2. Почти решения

Говорят, что функция $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Липшица* на множестве U , если существует постоянная $0 \leq C < \infty$ такая, что для произвольной пары точек $x', x'' \in U$ выполнено

$$|h(x'') - h(x')| \leq C |x'' - x'|.$$

Функция $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локально липшицевой*, если она удовлетворяет условию Липшица на всяком компактном подмножестве $F \subset U$.

Через $C(E)$ обозначим класс функций, непрерывных на множестве E , а через $C^k(D)$, $k = 1, 2, \dots$, – множество функций, имеющих производные порядка k в области D .

Функция h принадлежит классу $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$, если она имеет обобщенные в смысле С. Л. Соболева частные производные $\partial h / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, суммируемые по D со степенью p . Функция h принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$, если она принадлежит классу $W^{1,p}(D')$ для всякой подобласти $D' \Subset D$. Последнее означает, что замыкание D' компактно и содержится в D .

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, ∂D – ее граница и $A(x, \xi): D \times \mathbb{R}^n$ – вектор-функция со свойствами (i)–(iii). Фиксируем $\varepsilon > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что непрерывная функция h , принадлежащая классу $W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$, является *почти решением уравнения (4)*, если для всякой функции

$$\varphi(x) \in W^{1,p}(D) \cap C(\overline{D}), \quad \varphi|_{\partial D} = 0, \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad (5)$$

выполнено

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle d\mathcal{H}^n \right| \leq \varepsilon \quad (6)$$

(здесь $d\mathcal{H}^n$ – элемент n -мерной меры Лебега).

Величина $\varepsilon > 0$ называется *уклонением* почти решения h [2].

Если функция h определена в неограниченной области D , то h – почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$ при условии, что она является таковым в каждой ограниченной подобласти $D' \subset D$. Ниже, если не оговорено противное, предполагается, что область определения почти решения ограничена.

Носителем $\text{supp } h$ функции $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество

$$\overline{\{x \in D: h(x) \neq 0\}}.$$

Функция h *финитна* в D , если ее носитель компактен и содержится в D .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При определении почти решения достаточно ограничиться финитными в D функциями φ со свойствами (5), (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ – почти решение уравнения (4) в смысле определения 1 в некоторой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$. Для произвольной неотрицательной функции φ со свойствами (5) и произвольного $\delta > 0$ полагаем

$$D_\delta = \{x \in D: 0 \leq \varphi(x) \leq \delta\}, \quad \varphi_\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in D_\delta, \\ \varphi(x) - \delta & \text{при } x \in D \setminus D_\delta. \end{cases}$$

Функции φ_δ финитны в D и обладают свойствами (5), тем самым,

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi_\delta, A(x, \nabla h) \rangle d\mathcal{H}^n \right| \leq \varepsilon.$$

Замечая, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_D \langle \nabla \varphi_\delta, A(x, \nabla h) \rangle d\mathcal{H}^n = \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle d\mathcal{H}^n,$$

получаем справедливость предложения.

Отдельные свойства почти решений, а также их связи с почти квазиконформными отображениями в смысле Кэллендера [3] можно найти в [4, § 8.7]. Ниже для почти решений A -гармонических уравнений предлагаются некоторые версии неравенства типа неравенства Гарнака. Для решений уравнений эллиптического типа различные варианты неравенства Гарнака приведены, например, в [1, теорема 6.6], [4, теорема 3.2.3], [5, § 3.5 и др.].

§ 3. Подготовительное неравенство

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, и пусть $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ – почти решение уравнения (4) с уклонением $\varepsilon > 0$. Предположим, что $h > 0$ в D . Введем обозначение $u = \ln h$.

В силу (6) для произвольной функции φ со свойствами (5) выполнено

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla e^u) \rangle d\mathcal{H}^n \right| \leq \varepsilon.$$

Для функций φ со свойствами

$$\varphi(x) \in W^{1,p}(D) \cap C(\overline{D}), \quad \varphi|_{\partial D} = 0, \quad 0 \leq \varphi(x) < \infty, \quad (7)$$

имеем

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla e^u) \rangle d\mathcal{H}^n \right| \leq \varepsilon \max_{x \in D} \varphi(x).$$

Пользуясь соотношением (1), находим

$$A(x, \nabla e^u) = e^{(p-1)u} A(x, \nabla u)$$

и, далее, имеем

$$\begin{aligned} \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla e^u) \rangle d\mathcal{H}^n &= \int_D \langle e^{(p-1)u} \nabla \varphi, A(x, \nabla u) \rangle d\mathcal{H}^n \\ &= \int_D \langle \nabla(\varphi e^{(p-1)u}), A(x, \nabla u) \rangle d\mathcal{H}^n - (p-1) \int_D \varphi e^{(p-1)u} \langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle d\mathcal{H}^n \\ &= \int_D \langle \nabla \psi, A(x, \nabla u) \rangle d\mathcal{H}^n - (p-1) \int_D \psi \langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle d\mathcal{H}^n, \end{aligned}$$

где $\psi = \varphi e^{(p-1)u}$.

Отсюда получаем

$$(p-1) \int_D \psi \langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle d\mathcal{H}^n \leq \varepsilon \max_{x \in D} \varphi(x) + \left| \int_D \langle \nabla \psi, A(x, \nabla u) \rangle d\mathcal{H}^n \right|.$$

На основании структурных ограничений (2) и (3) получаем

$$(p-1)\nu_1 \int_D \psi |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq \varepsilon \max_{x \in D} \frac{\psi(x)}{(h(x))^{p-1}} + \nu_2 \int_D |\nabla \psi| |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^n.$$

Удобно положить $\psi = \eta^p$. В этом случае предыдущее неравенство переписывается в виде

$$(p-1)\nu_1 \int_D \eta^p |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq \varepsilon \max_{x \in D} \frac{\eta^p(x)}{(h(x))^{p-1}} + p\nu_2 \int_D \eta^{p-1} |\nabla \eta| |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^n.$$

Пользуясь неравенством

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}, \quad a, b \geq 0, \quad p > 1,$$

для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$\eta^{p-1} |\nabla \eta| |\nabla u|^{p-1} \leq \frac{\delta^p}{p} |\nabla \eta|^p + \frac{p-1}{p\delta^{\frac{p}{p-1}}} \eta^p |\nabla u|^p.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} < \delta^{\frac{p}{p-1}}. \quad (8)$$

Тогда

$$\int_D \eta^p |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq C_1(\delta) \varepsilon \max_{x \in D} \frac{\eta^p(x)}{(h(x))^{p-1}} + C_2(\delta) \int_D |\nabla \eta|^p d\mathcal{H}^n, \quad (9)$$

где

$$C_1(\delta) = \frac{1}{(p-1)(\nu_1 - \nu_2 \delta^{-p/(p-1)})}, \quad C_2(\delta) = \frac{\nu_2 \delta^p}{(p-1)(\nu_1 - \nu_2 \delta^{-p/(p-1)})}.$$

Пусть $U \Subset D$ – подобласть. Выберем $\eta = 1$ на U . Учитывая, что $\eta \geq 0$ в D , на основании неравенства (9) приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, и пусть h – положительное почти решение в D уравнения (4) с уклоном $\varepsilon > 0$. Тогда для всякой подобласти $U \Subset D$, произвольного $\delta > 0$ со свойством (8) и произвольной неотрицательной в D функции η со свойствами

$$\eta(x) \in W^{1,p}(D) \cap C(\overline{D}), \quad \eta|_{\partial D} = 0, \quad \eta|_U = 1$$

выполнено

$$\int_U |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq C_1(\delta) \varepsilon \max_{x \in D} \frac{\eta^p(x)}{(h(x))^{p-1}} + C_2(\delta) \int_{D \setminus \overline{U}} |\nabla \eta|^p d\mathcal{H}^n. \quad (10)$$

§ 4. Емкость

Оценка (10) справедлива для произвольной постоянной $\delta > 0$, удовлетворяющей неравенству (8). Данная оценка является ключевой в построениях.

Обозначим через $\mathcal{E}(\kappa)$ множество всех функций $\eta(x)$, допустимых в (10) и таких, что

$$\sup_{x \in D} \frac{\eta^p(x)}{(h(x))^{p-1}} \leq \kappa < \infty. \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Величина

$$\text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D) = \inf_{\eta \in \mathcal{E}(\kappa)} \int_{D \setminus \bar{U}} |\nabla \eta|^p d\mathcal{H}^n \quad (12)$$

называется $\mathcal{E}(\kappa)$ -емкостью конденсатора $(U, \partial D)$.

Если множество $\mathcal{E}(\kappa)$ пусто, то мы полагаем $\text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D) = \infty$.

Следует отметить, что в общем случае в силу специфики условия (11) класс функций $\mathcal{E}(\kappa)$ и, следовательно, величина $\text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)$ зависят от p и h .

В случае, когда точная нижняя грань в (12) берется по всем непрерывным в области D функциям $\eta \in W^{1,p}(D)$, $\eta|_U = 1$, $\eta|_{\partial D} = 0$, мы имеем стандартную p -емкость $\text{cap}_p(U, \partial D)$ конденсатора, образуемого парой областей U, D ; $U \Subset D$, т. е.

$$\text{cap}_p(U, \partial D) = \inf_{\eta} \int_{D \setminus \bar{U}} |\nabla \eta|^p d\mathcal{H}^n. \quad (13)$$

С использованием введенных величин лемма 1 принимает следующий вид.

ЛЕММА 2. Если h – положительное почти решение в области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения (4) с уклонением $\varepsilon > 0$, то для всякой подобласти $U \Subset D$ выполнено

$$\int_U |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq \inf_{\delta, \kappa} [C_1(\delta)\kappa\varepsilon + C_2(\delta) \text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)], \quad (14)$$

где точная нижняя грань берется по всем $\delta > 0$, удовлетворяющим (8), и всем κ , $0 \leq \kappa < \infty$.

В случае решений уравнения (4) имеем $\varepsilon = 0$ и оценка (14) совпадает с оценкой (5.5) из [6].

§ 5. Принцип “длины и площади”

Нам потребуется специальная форма известного принципа “длины и площади” [7]. Пусть $V \Subset U$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $g: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ – липшицева функция, подчиненная условиям:

- (а) $g|_{\partial U} = 0$ и $g|_V = 1$;
- (б) для всякой подобласти $F \Subset (U \setminus \bar{V})$ выполнено

$$0 < \text{ess inf}_F |\nabla g(x)| \leq \text{ess sup}_F |\nabla g(x)| < \infty.$$

Для произвольного $t \in (0, 1)$ через Σ_t обозначим компоненту связности множества $\{x \in D: g(x) = t\}$, разделяющую границы ∂U и ∂V , через B_t – открытое подмножество D с границей $\partial B_t = \Sigma_t$. Поскольку функция g липшицева, то почти все ее поверхности уровня $\{y: g(x) = t\}$ являются счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ -спрямляемыми [8, теорема 3.2.15], в частности на них определена $(n-1)$ -мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$.

Зафиксируем гиперповерхность Σ_t описанного вида. Для произвольной пары точек $a, b \in \Sigma_t$ пусть $\Gamma = \Gamma(a, b)$ – семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \Sigma_t$, соединяющих точки a и b . Определим величину

$$\text{mod}_p(g, \Gamma) = \inf \frac{\int_{\Sigma_t} \frac{\rho^p}{|\nabla g|} d\mathcal{H}^{n-1}}{\left(\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho d\mathcal{H}^1\right)^p}, \quad (15)$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным борелевским функциям $\rho: \Sigma_t \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\Gamma(a, b) = \emptyset$, то мы полагаем $\text{mod}_p(g, \Gamma) = \infty$.

Введем обозначение

$$\mu_p(t) = \inf_{a, b \in \Sigma_t} \text{mod}_p(g, \Gamma). \quad (16)$$

Функция $\mu_p(t)$ измерима на $(0, 1)$. Некоторые конкретные примеры этой функции можно найти в [6, с. 207].

Имеет место

ЛЕММА 3. Если функция $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $W^{1,p}(U)$, $p > n-1$, и $\text{osc}\{h, \Sigma_t\}$ есть колебание h на Σ_t , то

$$\int_0^1 \text{osc}^p\{h, \Sigma_t\} \mu_p(t) dt \leq \int_{U \setminus \bar{V}} |\nabla h|^p d\mathcal{H}^n. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [6, лемма 5.1].

§ 6. Основная теорема

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть U, V – ее подобласти, $V \Subset U \Subset D$. Положим

$$\theta_p(V, U, D) = \frac{(\inf_{\delta, \kappa} [C_1(\delta)\kappa\varepsilon + C_2(\delta) \text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)])^{1/p}}{(\int_0^1 \mu_p(t) dt)^{1/p}}. \quad (18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{O}$ – область в $\mathbb{R}^n$. Величина

$$\lambda_p(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n}{\int_{\mathcal{O}} u^p d\mathcal{H}^n}, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\bar{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad (19)$$

называется *основной частотой порядка $p \geq 1$ открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$* .

Следующее утверждение является центральным в настоящей работе.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и U, V – ее подобласти, $V \Subset U \Subset D$. Если h – положительное почти решение уравнения (4), $p > n-1$, в D , то

$$\inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x): x \in V \setminus \mathcal{O}_C\} \leq \exp\{\theta_p(V, U, D)\} \sup_{\mathcal{O}_C} \min\{h(x): x \in V \setminus \mathcal{O}_C\}, \quad (20)$$

где точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всевозможным непустым открытым подмножествам $\mathcal{O}_C \subset D$ таким, что $h|_{\partial\mathcal{O}_C} = C$, $C = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объединяя оценки (14) и (17), находим

$$\int_0^1 \text{osc}^p \{\ln h, \Sigma_t\} \mu_p(t) dt \leq \inf_{\delta, \kappa} [C_1(\delta) \kappa \varepsilon + C_2(\delta) \text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)],$$

или

$$\left(\inf_{t \in (0,1)} \text{osc} \{\ln h, \Sigma_t\} \right)^p \int_0^1 \mu_p(t) dt \leq \inf_{\delta, \kappa} [C_1(\delta) \kappa \varepsilon + C_2(\delta) \text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)].$$

Таким образом, для всякого достаточно малого $s > 0$ и подходящего $t_0 > 0$ имеем

$$(\text{osc} \{\ln h, \Sigma_{t_0}\} - s)^p \int_0^1 \mu_p(t) dt \leq \inf_{\delta, \kappa} [C_1(\delta) \kappa \varepsilon + C_2(\delta) \text{cap}_{\mathcal{E}(\kappa)}(U, \partial D)].$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \max \{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - \min \{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - s \\ & = \text{osc} \{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - s \leq \theta_p(V, U, D), \\ & \max \{\ln h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} - \min \{\ln(e^s h(x)) : x \in \Sigma_{t_0}\} \leq \theta_p(V, U, D). \end{aligned}$$

Потенцируя, находим

$$\max \{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} \leq \exp \{\theta_p(V, U, D)\} \min \{(e^s h(x)) : x \in \Sigma_{t_0}\}.$$

Поскольку $s > 0$ есть произвольное сколь угодно малое число, то

$$\max \{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} \leq \exp \{\theta_p(V, U, D)\} \min \{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\}.$$

Воспользуемся утверждением из [4, следствие 7.1.1].

ЛЕММА 4. Пусть f – почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$ в области D уравнения (4) с ограничениями (1)–(3), удовлетворяющее на границе области предположению $f|_{\partial D} \leq C$. Тогда либо $f(x) \leq C$ всюду в D , либо множество $\mathcal{O}_C = \{x \in D : f(x) > C\}$ не пусто и

$$\int_{\mathcal{O}_C} |f(x) - C|^p d\mathcal{H}^n \leq \frac{2\widetilde{M}\varepsilon}{\nu_1 \lambda_p(D)}, \quad \widetilde{M} = \sup_{x \in D} |f(x) - C|.$$

Поскольку h – почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$, то $-h$ – также почти решение. При этом если множество $\mathcal{O}_C$ не пусто, то

$$\widetilde{M} = \max_{x \in D} |h(x) - C| \leq 2 \max_{x \in D} h(x) = 2M.$$

На основании леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} \inf_{\mathcal{O}_C} \max \{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\} & \leq \inf_{\mathcal{O}_C} \max \{h(x) : x \in B_{t_0} \setminus \mathcal{O}_C\} \\ & \leq \max \{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\}, \\ \min \{h(x) : x \in \Sigma_{t_0}\} & \leq \sup_{\mathcal{O}_C} \max \{h(x) : x \in B_{t_0} \setminus \mathcal{O}_C\} \\ & \leq \sup_{\mathcal{O}_C} \min \{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\}, \end{aligned}$$

что непосредственно влечет (20).

§ 7. Монотонные функции

Рассмотрим частный случай. Напомним следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *монотонной*, если для всякой подобласти $D' \subset D$ выполнено

$$\operatorname{osc}(h, D') \leq \operatorname{osc}(h, \partial D').$$

Поскольку для монотонной функции открытые множества $\mathcal{O}_C$ описанного выше вида отсутствуют, то из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и U, V – ее подобласти, $V \Subset U \Subset D$. Если h – положительное монотонное почти решение уравнения (4), $p > n - 1$, в D , то

$$\max\{h(x): x \in V\} \leq \exp\{\theta_p(V, U, D)\} \min\{h(x): x \in V\}. \quad (21)$$

§ 8. Почти решения в шаре

Если функция η является экстремальной в вариационной задаче (13), то из соотношения (14) следует

$$\int_U |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq \inf_{\delta} \left[C_1(\delta) \varepsilon \sup_{x \in D} \frac{\eta^p(x)}{(h(x))^{p-1}} + C_2(\delta) \operatorname{cap}_p(U, \partial D) \right]. \quad (22)$$

Пусть $D = B(0, r_3)$ – шар радиуса $r_3 > 0$ с центром в начале координат $x = 0$, и пусть $U = B(0, r_2)$, $V = B(0, r_1)$, где $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$. Несложно проверить, что экстремальная в вариационной задаче (13) для конденсатора $(U, \partial D)$ функция имеет вид

$$\eta_0(|x|) = \int_{|x|}^{r_3} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}} \left(\int_{r_2}^{r_3} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}} \right)^{-1}.$$

Здесь имеем

$$\operatorname{cap}_p(U, \partial D) = \int_{D \setminus U} |\nabla \eta_0|^p d\mathcal{H}^n, \quad p > 1,$$

и оценка (22) принимает вид

$$\int_U |\nabla u|^p d\mathcal{H}^n \leq \inf_{\delta} \left[C_1(\delta) \varepsilon \sup_{x \in D} \frac{\eta_0^p(|x|)}{(h(x))^{p-1}} + C_2(\delta) \omega_{n-1} \left(\int_{r_2}^{r_3} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}} \right)^{1-p} \right], \quad (23)$$

где ω_{n-1} – $(n-1)$ -мерная площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{r_2 - |x|}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \leq |x| \leq r_2.$$

Мы имеем $|\nabla g(x)| \equiv 1$. Тем самым, g удовлетворяет условиям (а), (b) из § 5. Величина (15) в данном случае имеет вид

$$\operatorname{mod}_p(g, \Gamma) = \inf_{\rho} \frac{\int_{\Sigma_t} \rho^p d\mathcal{H}^{n-1}}{(\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho d\mathcal{H}^1)^p}.$$

Мы имеем

$$d\mathcal{H}^{n-1}|_{\Sigma_t} = \omega_{n-1}[r_2 - t(r_2 - r_1)]^{n-1} d\omega_{n-1}, \quad d\mathcal{H}^1|_{\Sigma_t} = [r_2 - t(r_2 - r_1)] ds_{n-1},$$

где $d\omega_{n-1}$ и ds_{n-1} – элемент площади и элемент длины на $(n-1)$ -мерной сфере в $\mathbb{R}^n$ единичного радиуса. Тем самым, для функции, определяемой равенством (16), и произвольного $t \in (0, 1)$ можем записать

$$\mu_p(t) = \mu_{p,n-1}[r_2 - t(r_2 - r_1)]^{n-p-1},$$

где $\mu_{p,n-1} = \text{mod}_p(g, \Gamma_0)$ – стандартный p -мерный модуль семейства всевозможных спрямляемых дуг Γ_0 на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, соединяющих “северный и южный полюсы” сферы. Отсюда получаем

$$\int_0^1 \mu_p(t) dt = \frac{\mu_{p,n-1}}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau^{n-p-1} d\tau. \quad (24)$$

Здесь $\mu_{p,n-1} > 0$ тогда и только тогда, когда $p > n - 1$, что непосредственно следует из вида элемента площади $d\mathcal{H}^{n-1}$ на единичной сфере и интегрального неравенства Гёльдера.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что области $V \Subset U \Subset D$ суть концентрические шары в $\mathbb{R}^n$ радиусов $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$ соответственно. Тогда если h – положительное почти решение уравнения (4), $p > n - 1$, с уклонением $\varepsilon > 0$ в D , то имеет место утверждение теоремы 1 с постоянной $\theta_p(V, U, D)$ в (20), равной*

$$\frac{\left(\inf_{\delta} \left[C_1(\delta) \varepsilon \sup_{x \in D} \frac{\eta_0^p(|x|)}{(h(x))^{p-1}} + C_2(\delta) \omega_{n-1} \left(\int_{r_2}^{r_3} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}} \right)^{1-p} \right] \right)^{1/p}}{\left(\frac{\mu_{p,n-1}}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} t^{n-p-1} dt \right)^{1/p}}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно воспользоваться оценками (23) и (24). Заметим при этом, что точная нижняя грань в (25) берется по всем $\delta > 0$, удовлетворяющим неравенству (8).

Список литературы

1. Ju. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1993.
2. В. М. Миклюков, “А-решения с особенностями как почти решения”, *Матем. сб.*, **197**:11 (2006), 31–50; англ. пер.: V. M. Miklyukov, “A-solutions with singularities as almost solutions”, *Sb. Math.*, **197**:11 (2006), 1587–1605.
3. E. D. Callender, “Hölder continuity of n -dimensional quasi-conformal mappings”, *Pacific J. Math.*, **10**:2 (1960), 499–515.
4. В. М. Миклюков, *Геометрический анализ*, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2007.
5. Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

6. O. Martio, V. M. Miklyukov, M. Vuorinen, “Harnack’s inequality for p -harmonic functions on Riemannian manifolds for different exhaustions”, *Комплексный анализ в современной математике*, Фазис, М., 2001, 201–230.
7. Г. Д. Суворов, *Обобщенный “принцип длины и площади” в теории отображений*, Наукова думка, Киев, 1985.
8. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.

В. М. Миклюков (V. M. Miklyukov)
Волгоградский государственный университет
E-mail: miklyuk@mail.ru

Поступило в редакцию
06.11.2007