Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 1, 175–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:05:23

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий

При некоторых естественных предположениях о когомологиях комплексного проективного расслоенного трехмерного многообразия с полустабильными вырождениями доказана стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов Λ и $*$. В частности, показано, что гипотеза $B(X)$ верна, если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий: общий геометрический слой некоторого 1-параметрического голоморфного семейства $\pi: X \rightarrow C$ бирационально эквивалентен линейчатой поверхности, поверхности Энриквеса или КЗ-поверхности; все слои морфизма π являются гладкими поверхностями размерности Кодаиры ≤ 0 .

Библиография: 30 наименований.

Ключевые слова: стандартная гипотеза типа Лефшеца.

Введение

Для d -мерного комплексного гладкого проективного многообразия X и целого числа $p \geq 0$ обозначим через $H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$ -подпространство в $H^{2p}(X, \mathbb{Q})$, порожденное классами когомологий $\text{cl}_X(Z) \in H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ алгебраических циклов Z коразмерности p на X .

Пусть H – обильный дивизор на X . Тогда отображение

$$L^{d-i}: H^i(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(H)^{\cup d-i}} H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом согласно сильной теореме Лефшеца. Для $j \geq 0$ имеется примитивное разложение Лефшеца:

$$H^j(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{k \geq \max(0, j-d)} L^k P^{j-2k}(X),$$

где $P^i(X) = H^i(X, \mathbb{Q}) \cap \text{Ker } L^{d-i+1}$, $i \leq d$, – примитивная часть пространства $H^i(X, \mathbb{Q})$ [1, § 3, (3.4)]. В частности, любой элемент $x \in H^j(X, \mathbb{Q})$ однозначно записывается в следующем виде:

$$x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} L^k x_{j-2k},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00181).

где $x_{j-2k} \in P^{j-2k}(X)$ [1, § 3, (3.3)]. Это разложение позволяет определить следующий абстрактный оператор степени -2 :

$$\Lambda x = \sum_{k \geq \max(1, j-d)} L^{k-1} x_{j-2k}.$$

Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца утверждает, что оператор Λ алгебраический [2]. Обозначим через ${}^c\Lambda$ двойственный оператор для L в классической теории Ходжа (см. [3, гл. 0, § 6], [1, § 3]). Тогда

$${}^c\Lambda x = \sum_{k \geq \max(1, j-d)} k(d-j+k+1)L^{k-1}x_{j-2k}$$

(см. [4, п. 1.4.2.2]) и гипотеза $B(X)$ эквивалентна алгебраичности ${}^c\Lambda$.

Гипотеза $B(X)$ эквивалентна алгебраичности абстрактного оператора $*$, определенного формулой

$$*x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} (-1)^{(j-2k)(j-2k+1)/2} L^{d-j+k} x_{j-2k}.$$

Из $B(X)$ следует гипотеза $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на X . Более того, $B(X) \Leftrightarrow D(X \times X)$, и $B(X) \Rightarrow C(X)$, где $C(X)$ утверждает алгебраичность компонент Кюннета класса диагонали $\Delta_X \hookrightarrow X \times X$ [4]. Кроме того, $B(X)$ эквивалентна полупростоте $\mathbb{Q}$ -алгебры $\mathcal{A}(X)$ алгебраических соответствий [5, предложение 1.7].

Стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для многообразий Грассмана, кривых, поверхностей и абелевых многообразий [4]. С другой стороны, $D(X)$ верна для многообразий размерности не более 4 [6] и для потенциально простых абелевых схем простой относительной размерности над гладкой проективной кривой [5, теорема 2.5]. Наконец, $C(X)$ верна для всех гладких проективных многообразий над конечными полями [7]. Все эти гипотезы совместимы с моноидальными преобразованиями вдоль замкнутых гладких неприводимых центров [8].

По классификации Энрикеса [9, таблица типов алгебраических поверхностей] гладкая проективная поверхность размерности Кодаиры $\varkappa \leq 0$ бирационально эквивалентна рациональной или линейчатой поверхности (если $\varkappa = -\infty$), либо поверхности Энрикеса, КЗ-поверхности, абелевой поверхности, минимальной поверхности с пучком эллиптических кривых над $\mathbb{P}^1$ (в последнем случае канонический класс $K \neq 0$, $2K = 0$, или $3K = 0$, или $4K = 0$, или $6K = 0$, все слои эллиптического пучка, кроме конечного числа кратных слоев, изоморфны).

Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую C , обладающий сечением, для некоторой непустой открытой подсхемы $C' \hookrightarrow C$ ограничение $\pi' = \pi|_{X'}$ на схему $X' = \pi^{-1}(C')$ является гладким. Предположим, что любой геометрический слой X_s является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, причем алгебраический цикл Пуанкаре

$[\Lambda_{\overline{\eta}}]_{1,1}$ на общем геометрическом слое морфизма $X' \times_{C'} X' \rightarrow C'$ определен над полем рациональных функций кривой C .

Если пространство инвариантных циклов $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ и коядро

$$\mathrm{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]]$$

– $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа типа $(1, 1)$, то доказывается, что стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X (теорема из п. 2.3).

Из этого результата следует, что $B(X)$ верна для гладкого комплексного проективного трехмерного многообразия X , если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) общий геометрический слой некоторого 1-параметрического голоморфного семейства $\pi: X \rightarrow C$ бирационально эквивалентен линейчатой поверхности, поверхности Энриквеса или КЗ-поверхности;

2) все слои морфизма π являются гладкими поверхностями размерности Ко-даиры $\kappa \leq 0$ (теорема из п. 3.1);

3) все слои морфизма π полустабильны, хотя бы один из них сильно вырожден, общий геометрический слой имеет иррегулярность 0 и π обладает сечением (теорема из п. 2.4).

Автор благодарит рецензента, предложившего существенные улучшения первоначального текста.

§ 1. Некоторые замечания о рациональных структурах Ходжа и классах Пуанкаре

1.1. Пусть $V_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа веса r . Разложение Ходжа $V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ определяет морфизм вещественных алгебраических групп:

$$h: \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}),$$

где $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$ – вещественная алгебраическая группа, полученная из мультипликативной группы G_m над $\mathbb{C}$ ограничением поля скаляров до $\mathbb{R}$ [10, определение В.42]. Элемент $z \in \mathbb{C}^{\times} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R})$ действует на $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ по правилу [11, п. (2.1.5.1)]

$$z \cdot v = z^p \bar{z}^q v.$$

Рассмотрим $U^1 = \{z \in \mathbb{C}^{\times} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}$. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$, называется *группой Ходжа* структуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$ и обозначается через $\mathrm{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ [10, определение В.51]. Если $V_{\mathbb{Q}}$ – поляризуемая рациональная структура Ходжа, то $\mathrm{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ – редуктивная $\mathbb{Q}$ -группа, естественным образом действующая в пространстве $V_{\mathbb{Q}}$ [10, предложение В.57]. При этом рациональные подструктуры Ходжа в $V_{\mathbb{Q}}$ совпадают с $\mathrm{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ -подмодулями [10, предложение В.54].

Пусть X – гладкое d -мерное комплексное проективное многообразие, и пусть $\mathrm{Hg}(H^i(X, \mathbb{Q}))$ – группа Ходжа, ассоциированная с канонической $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа на $H^i(X, \mathbb{Q})$. Известно [10, следствие В.55], что

$$H^{2i}(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^{2i}(X, \mathbb{Q}))} = H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C}),$$

где $H^{i,i}(X, \mathbb{C})$ – компонента типа (i, i) в разложении Ходжа

$$H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=2i} H^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

По теореме Лефшеца имеем соотношения

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q} = H^2(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} = H^2(X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C}). \quad (1.1)$$

1.2. Пусть $\mathbb{Q}(1)$ – структура Ходжа–Тэйта типа $(-1, -1)$ с решеткой $2\pi i\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(n) = \mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$. Хорошо известно, что существует канонический изоморфизм

$$H^{2d}(X, \mathbb{Q}(d)) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Q}.$$

Выбор $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ определяет изоморфизм $\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(1)$ и изоморфизм ориентации

$$\langle \rangle: H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q},$$

что позволяет использовать когомологии Вейля $X \mapsto H^*(X, \mathbb{Q})$ без скручивания с помощью структур Ходжа–Тэйта [4].

Рассмотрим отображение степени $\langle \rangle: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$, определенное как изоморфизм ориентации на $H^{2d}(X, \mathbb{Q})$ и как нуль на $H^i(X, \mathbb{Q})$ для $i \neq 2d$. Теорема двойственности Пуанкаре утверждает, что отображение $\alpha \mapsto \langle \cdot \cup \alpha \rangle$ индуцирует изоморфизм $H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})^\vee$, который будет рассматриваться как отождествление [4, п. 1.2].

По формуле Кюннета и двойственности Пуанкаре имеются $\mathbb{Q}$ -линейные изоморфизмы

$$H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H^*(X, \mathbb{Q}), H^*(X, \mathbb{Q})),$$

где элемент $u \in H^*(X \times X, \mathbb{Q})$ отвечает композиции

$$u^*: H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{w \mapsto w \cup u} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{2*}} H^*(X, \mathbb{Q}).$$

В частности, пространство $H^*(X \times X, \mathbb{Q})$ можно отождествить с $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} H^*(X, \mathbb{Q})$, причем элемент $u = \alpha \otimes \beta \in H^*(X \times X, \mathbb{Q})$ соответствует $\mathbb{Q}$ -линейному отображению $u^*: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$, определенному формулой $u^*(\gamma) = \langle \gamma \cup \alpha \rangle \beta$ [4, п. 1.3].

Заметим, что

$$\mathrm{pr}_{2*}(H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^*(X, \mathbb{Q})) = 0 \quad \text{для всех} \quad i \neq 2d. \quad (1.2)$$

Действительно, если $i \neq 2d$, то для всех $\alpha \in H^i(X, \mathbb{Q})$, $\beta \in H^*(X, \mathbb{Q})$, $\gamma \in H^*(X, \mathbb{Q})$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle &= 0, \\ \langle \mathrm{pr}_{2*}(\alpha \otimes \beta) \cup \gamma \rangle &= \langle (\alpha \otimes \beta) \cup \mathrm{pr}_2^*(\gamma) \rangle = \langle (\alpha \otimes \beta) \cup (\mathrm{cl}_X(X) \otimes \gamma) \rangle \\ &= \langle \alpha \otimes (\beta \cup \gamma) \rangle = \langle \alpha \rangle \langle \beta \cup \gamma \rangle = 0, \end{aligned}$$

поэтому $\mathrm{pr}_{2*}(\alpha \otimes \beta) = 0$.

1.3. Пусть $V_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$ и $W_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$ – рациональные подструктуры Ходжа. По определению изоморфизм $\mathbb{Q}$ -векторных пространств $\varphi: V_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} W_{\mathbb{Q}}$ алгебраический, если существует такой алгебраический цикл Z на $X \times X$ с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$, что для любого $v \in V_{\mathbb{Q}}$ имеем равенство

$$\varphi(v) = \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(v) \cup \text{cl}_{X \times X}(Z)).$$

1.4. Зафиксируем обильный дивизор H , определяющий поляризацию на X , и обозначим через $\text{cl}_X^0(H) \in H^2(X, \mathbb{Q}(1))$ его класс в скрученных когомологиях (так что $\text{cl}_X^0(H)$ имеет тип Ходжа $(0, 0)$). Для любого натурального числа $n \leq d$ сильная теорема Лефшеца дает изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^n(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{\cup \text{cl}_X^0(H) \cup d-n} H^{2d-n}(X, \mathbb{Q}(d-n)).$$

Пусть $h: \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \text{GL}(H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R})$ – морфизм вещественных алгебраических групп, определенный $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа на $H^n(X, \mathbb{Q})$. В силу теоремы двойственности Пуанкаре спаривание

$$H^n(X, \mathbb{Q}) \times H^{2d-n}(X, \mathbb{Q}(d-n)) \xrightarrow{\alpha \times \beta \mapsto \alpha \cup \beta} H^{2d}(X, \mathbb{Q}(d-n)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-n)$$

определяет поляризацию

$$\Psi: H^n(X, \mathbb{Q}) \times H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}(-n),$$

причем вещественная билинейная форма $(2\pi i)^n \Psi_{\mathbb{R}}(x, h(i)y)$ на $H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$ симметрична и положительно определена [11, п. 2.1.16].

Выбор $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ определяет невырожденное спаривание

$$\Phi: H^n(X, \mathbb{Q}) \times H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}, \quad x \times y \mapsto \Phi(x, y) = \langle x \cup \text{cl}_X(H)^{d-n} y \rangle.$$

В силу (1.1) группа U^1 тривиально действует на подмножестве $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \hookrightarrow H^{1,1}(X, \mathbb{C})$, так что мы имеем (при тривиальном действии U^1 на $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in U^1 \quad \Phi_{\mathbb{R}}(x, y) &= [\Phi_{\mathbb{R}}(x, y)]^{\sigma} = \langle x \cup \text{cl}_X(H)^{d-n} y \rangle^{\sigma} \\ &= \langle x^{\sigma} \cup \text{cl}_X(H)^{d-n} y^{\sigma} \rangle = \Phi_{\mathbb{R}}(x^{\sigma}, y^{\sigma}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$h(U^1) \hookrightarrow \begin{cases} \text{Sp}(\Phi_{\mathbb{R}}) & \text{для нечетного } n, \\ \text{SO}(\Phi_{\mathbb{R}}) & \text{для четного } n \end{cases}$$

(см. [11, п. 2.1.16]). Следовательно,

$$\text{Hg}(H^n(X, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \text{Aut}(\Phi)^0 = \begin{cases} \text{Sp}(\Phi) & \text{для нечетного } n, \\ \text{SO}(\Phi) & \text{для четного } n, \end{cases} \quad (1.3)$$

и Φ является $\text{Hg}(H^n(X, \mathbb{Q}))$ -инвариантной формой [12, п. 6.6.2]. Группа $\text{Aut}(\Phi)^0$ действует диагонально на $H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes H^n(X, \mathbb{Q})$ и тривиально на $\mathbb{Q}(n)$.

Если $H^n(X, \mathbb{Q}) \neq 0$, то хорошо известно, что $H^n(X, \mathbb{Q})$ является абсолютно неприводимым $\text{Aut}(\Phi)^0$ -модулем, кроме случая, когда n четное и $\dim H^n(X, \mathbb{Q}) = 2$ [13, гл. I, § 6, п°7, предложение 9].

Будем предполагать далее, что если n четное, то $\dim H^n(X, \mathbb{Q}) \neq 2$. Тогда лемма Шура дает соотношение

$$\text{End}_{\text{Aut}(\Phi)^0} H^n(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}.$$

С другой стороны, $H^n(X, \mathbb{Q})$ – поляризуемая $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа веса n , и имеются изоморфизмы $\text{Aut}(\Phi)^0$ -модулей [11, лемма 4.2.3]

$$H^n(X, \mathbb{Q})^\vee \simeq H^n(X, \mathbb{Q})(n) \simeq H^n(X, \mathbb{Q}).$$

В частности,

$$\dim [H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes H^n(X, \mathbb{Q})]^{\text{Aut}(\Phi)^0} = \dim \text{End}_{\text{Aut}(\Phi)^0} H^n(X, \mathbb{Q}) = 1.$$

Поэтому из (1.3) и [10, следствие B.55] получаем, что 1-мерное подпространство

$$\begin{aligned} [H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes H^n(X, \mathbb{Q})]^{\text{Aut}(\Phi)^0} &\hookrightarrow [H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes H^n(X, \mathbb{Q})]^{\text{Hg}(H^n(X, \mathbb{Q}))} \\ &= [H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes H^n(X, \mathbb{Q})] \cap H^{n,n}(X \times X, \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

порождается некоторым циклом Ходжа $\wp(H^n(X, \mathbb{Q}))$. Мы называем этот цикл *классом Пуанкаре*. Он однозначно определен поляризованным многообразием $(X, \text{cl}_X(H))$ с точностью до скалярного множителя.

Если, например, X – абелево многообразие с главной поляризацией φ_L : $X \xrightarrow{\sim} X^\vee$, то

$$\wp(H^1(X, \mathbb{Q})) \in \mathbb{Q} \cdot c_1(\mathcal{P}),$$

где $\mathcal{P}$ – расслоение Пуанкаре на $X \times X^\vee = X \times X$. Эта конструкция допускает обобщение. Пусть $V_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^n(X, \mathbb{Q})$ – нетривиальная рациональная подструктура Ходжа и $\dim V_{\mathbb{Q}} \neq 2$ для четного n . Поскольку ограничение $(2\pi i)^n \Psi_{\mathbb{R}}(x, h(i)y)|_{V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}}$ является симметричной и положительно определенной формой, мы видим, что ограничение $\Phi|_{V_{\mathbb{Q}} \times V_{\mathbb{Q}}} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{V_{\mathbb{Q}}}$ невырождено. Из леммы Шура следует, что $[V_{\mathbb{Q}} \otimes V_{\mathbb{Q}}]^{\text{Aut}(\Phi_{V_{\mathbb{Q}}})^0}$ является 1-мерным подпространством, порожденным некоторым циклом Ходжа $\wp(V_{\mathbb{Q}})$. Мы называем $\wp(V_{\mathbb{Q}})$ *классом Пуанкаре* подструктуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$.

1.5. ЛЕММА. Пусть $n \leq d$, причем в случае четного n имеется неравенство $\dim H^n(X, \mathbb{Q}) \neq 2$. Тогда композиция отображений

$$\begin{aligned} H^{2d-n}(X, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^{2d-n}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup \wp(H^n(X, \mathbb{Q}))} H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^n(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^n(X, \mathbb{Q}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

биективна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при отождествлениях $H^{2d-n}(X, \mathbb{Q}) = H_n(X, \mathbb{Q})$ и

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \cdot \wp(H^n(X, \mathbb{Q})) &= [H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes H^n(X, \mathbb{Q})]^{\text{Aut}(\Phi)^0} \\ &= \text{Hom}_{\text{Aut}(\Phi)^0}(H_n(X, \mathbb{Q}), H^n(X, \mathbb{Q})) \end{aligned}$$

композиция (1.5), очевидно, является изоморфизмом.

§ 2. Инвариантные циклы и стандартная гипотеза типа Лефшеца для расслоенного трехмерного многообразия

2.1. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую C , обладающий сечением. Всюду далее мы предполагаем, что любой геометрический слой X_s является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями.

В этом случае спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ вырождается [14, следствие (15.15)]: $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$. Когомологическая размерность C равна 2 [15, гл. II, § 5, теорема 5.13.1], поэтому

$$E_2^{p,q} = 0 \text{ для } p \geq 3. \quad (2.1)$$

Для объекта E^n имеется такая фильтрация

$$E^n = E_0^n \supset E_1^n \supset E_2^n \supset \dots \supset E_n^n \supset 0,$$

что

$$E_p^n / E_{p+1}^n = E_\infty^{p, n-p}.$$

Имеется каноническая точная последовательность [16, приложение B]

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}] \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

которая в силу (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \\ \rightarrow \text{Ker}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из существования сечения морфизма π следует, что эта последовательность дает точную последовательность

$$0 \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

С другой стороны, каноническое отображение $\pi^*: H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ является морфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа, а каноническое отображение $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [14, следствие (15.14)]. Значит, $H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q})$ имеет каноническую структуру Ходжа, индуцированную структурой Ходжа на $H^2(X, \mathbb{Q})$, так что (2.2) является канонической точной последовательностью $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа.

Согласно теореме Лефшеца пространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = H^2(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))}$ совпадает с суммой всех неприводимых 1-мерных $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа в $H^2(X, \mathbb{Q})$. Пусть $T_{\mathbb{Q}}^2(X)$ – сумма всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности более 1 в $H^2(X, \mathbb{Q})$. Тогда $T_{\mathbb{Q}}^2(X)$ является канонически определенной $\mathbb{Q}$ -подструктурой Ходжа в $H^2(X, \mathbb{Q})$, так что мы имеем каноническое разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа (и $\mathrm{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ -модулей)

$$H^2(X, \mathbb{Q}) = T_{\mathbb{Q}}^2(X) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X). \quad (2.3)$$

Пусть H – обильный дивизор на X . Согласно сильной теореме Лефшеца $T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \mathrm{cl}_X(H)$ совпадает с суммой всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности более 1 в $H^4(X, \mathbb{Q})$, а $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \mathrm{cl}_X(H)$ совпадает с суммой всех 1-мерных $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа, поэтому существует *каноническое* разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа:

$$H^4(X, \mathbb{Q}) = [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \mathrm{cl}_X(H)] \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \mathrm{cl}_X(H)]. \quad (2.4)$$

2.2. Можно считать, что $\pi: X \rightarrow C$ является гладким над $C' \stackrel{\mathrm{def}}{=} C \setminus \Delta$, где $\Delta \hookrightarrow C$ – конечное замкнутое подмножество. Пусть $X' = X \setminus \pi^{-1}(\Delta)$, $\pi' = \pi|_{X'}: X' \rightarrow C'$, $\tau': X' \times_{C'} X' \rightarrow C'$ – структурный морфизм расслоенного произведения.

Для точки $s \in (C')^{\mathrm{an}}$ пространство $H_{\mathrm{alg}}^{2j}(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$ отождествляется с $\mathbb{Q}$ -пространством алгебраических соответствий степени $2j - 4$. Поскольку $B(X_s)$ верна, то соответствующий оператор Λ_s степени -2 [4, формула 1.4.2.1] представлен алгебраическим классом, который снова будет обозначаться через Λ_s . Обозначим через $[\Lambda_s]_{1,1}$ компоненту Кюннета типа $(1, 1)$ алгебраического класса $\Lambda_s \in H_{\mathrm{alg}}^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$. Тогда $[\Lambda_s]_{1,1}$ является алгебраическим классом по теореме Лефшеца. Пусть $\eta \in C$ – общая точка кривой C . Алгебраический класс $[\Lambda_{\eta}]_{1,1}$ на общем геометрическом слое морфизма $\tau': X' \times_{C'} X' \rightarrow C'$ представлен алгебраическим *циклом Пуанкаре* (который мы снова обозначим через $[\Lambda_{\eta}]_{1,1}$), определенным над некоторым конечным алгебраическим расширением поля $\kappa(\eta)$ рациональных функций кривой C .

Фиксируем точку $s \in C'$. По теореме Делиня [11, пп. 4.1.1, 4.1.2] отображение ограничения $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X_s, \mathbb{Q})$ является композицией канонического сюръективного морфизма $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ и морфизмов $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \hookrightarrow H^2(X_s, \mathbb{Q}).$$

Если $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ имеет тип Ходжа $(1, 1)$, то по теореме Лефшеца $\mathbb{Q}$ -пространство $H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$ инвариантных циклов порождается классами алгебраических циклов.

Пусть

$$f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$$

– нормализация $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку f – разрешение особенностей

замкнутой подсхемы $i_{\Delta}: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, то имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [17, следствие (8.2.8)]

$$H^0(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_{\Delta}f)_*} H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q}).$$

Поэтому

$$K \stackrel{\text{def}}{=} (i_{\Delta}f)_* H^0(Z, \mathbb{Q}) = \text{Ker}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]$$

является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$.

Пусть $j: C' \hookrightarrow C$ – каноническое вложение. Можно считать, что $\Delta \neq \emptyset$ и, следовательно, $H^2(C', \mathbb{Q}) = 0$. Известно, что имеется канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ [14, следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [14, диаграмма (15.1) в случае $m = 1$]:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \simeq \downarrow \gamma & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H^1(C, j_*R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \cap & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta} & H^2(X', \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

причем $\gamma \circ \alpha$ – морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и β – морфизм смешанных структур Ходжа [14, теоремы (15.3), (15.4)].

Рассматриваемая диаграмма получается из анализа фильтрации $E^2 = E_0^2 \supset E_1^2 \supset E_2^2 \supset 0$ на $H^2(X, \mathbb{Q})$, ассоциированной с вырожденной спектральной последовательностью Лере для π [14, следствие (15.15)], и фильтрации $E^{2'} = E_0^{2'} \supset E_1^{2'} \supset E_2^{2'} \supset 0$ на $H^2(X', \mathbb{Q})$, ассоциированной с вырожденной спектральной последовательностью Лере для π' [11, теорема 4.1.1]. Заметим, что $H^2(C, \mathbb{Q}) \hookrightarrow K$, потому что $H^2(C, \mathbb{Q})$ порождается классом слоя. Канонический морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ сюръективен по теореме Делиня [11, теорема 4.1.1], поэтому в силу (2.2) наша диаграмма преобразуется в коммутативную диаграмму морфизмов смешанных структур Ходжа с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & K/H^2(C, \mathbb{Q}) & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Q})/H^2(C, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & 0 \\ & & \cap & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & H^2(X', \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

которая, в свою очередь, дает коммутативную диаграмму $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & K/H^2(C, \mathbb{Q}) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 0 \rightarrow & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Q})/H^2(C, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) & \rightarrow 0 \\
 & \cap & & \downarrow \varphi & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi) & \rightarrow & \text{Im}(\varphi) & \rightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) & \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

2.3. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую C , обладающий сечением, любой геометрический слой X_s является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, причем алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\pi}}]_{1,1}$ на общем геометрическом слое морфизма $X' \times_{C'} X' \rightarrow C'$ определен над полем рациональных функций кривой C .

Предположим, что выполнены следующие эквивалентные условия:

- i) $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$;
- ii) $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ и

$$\text{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]]$$

– $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа типа $(1, 1)$.

Тогда стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $K = (i_{\Delta}f)_*H^0(Z, \mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$, эквивалентность условий i) и ii) следует из точности канонической последовательности змеевидной диаграммы [18, § 1, предложение 2]

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow K/H^2(C, \mathbb{Q}) &\rightarrow \text{Ker}[H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})] \\
 &\rightarrow \text{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]] \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

потому что она является последовательностью морфизмов рациональных структур Ходжа.

Действительно, мы должны показать, что каноническое отображение

$$\begin{aligned}
 d: \text{Ker}[H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})] \\
 \rightarrow \text{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]]
 \end{aligned}$$

является морфизмом $\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ -модулей. Прежде всего заметим, что $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$, $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$, $\text{Ker}[H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})]$, а также $H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q})$, $\text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]$, $H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]$ являются рациональными подструктурами Ходжа рациональных факторструктур Ходжа структуры $H^2(X, \mathbb{Q})$. Поэтому они суть $\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ -

модули [10, предложение В.54]. В частности,

$$\begin{aligned} \text{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]] \\ = \frac{H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]}{H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q})} \end{aligned}$$

является $\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ -модулем. Следуя [18, § 1, доказательство предложения 2], напомним конструкцию отображения d . Пусть v – каноническое отображение

$$H^2(X, \mathbb{Q})/H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$$

и k – каноническое вложение

$$\text{Ker}[H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{h} H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})] \hookrightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}).$$

Если $z \in \text{Ker}[H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{h} H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})]$, то имеется такой элемент $y \in H^2(X, \mathbb{Q})/H^2(C, \mathbb{Q})$, что $v(y) = k(z)$. Пусть

$$g: H^2(X, \mathbb{Q})/H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow \varphi(H^2(X, \mathbb{Q})/H^2(C, \mathbb{Q})),$$

$$u': H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})] \hookrightarrow \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]$$

– канонические отображения. В этом случае существует единственный элемент $x' \in H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]$, для которого $u'(x') = g(y)$. По определению имеем $d(z) = p(x')$, где p – каноническое отображение

$$\begin{aligned} H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})] \\ \rightarrow \text{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]]. \end{aligned}$$

Поскольку h, k, v, g, u', p – морфизмы $\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ -модулей, то для всех $\sigma \in \text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))$ имеем

$$\begin{aligned} k(\sigma \cdot z) &= \sigma \cdot k(z) = \sigma \cdot v(y) = v(\sigma \cdot y), \\ g(\sigma \cdot y) &= \sigma \cdot g(y) = \sigma \cdot u'(x') = u'(\sigma \cdot x'), \\ d(\sigma \cdot z) &= p(\sigma \cdot x') = \sigma \cdot p(x') = \sigma \cdot d(z). \end{aligned}$$

Следовательно, d действительно является морфизмом рациональных структур Ходжа.

Специализации [19] алгебраического цикла Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ позволяют нам построить семейство $([\Lambda_s]_{1,1})_{s \in (C')^{\text{an}}}$, которое, в свою очередь, определяет элемент типа Ходжа $(1, 1)$:

$$\Lambda_{1,1}' \in H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}).$$

Пусть

$$\begin{array}{ccc} X \times_C X & \xrightarrow{p_1} & X \\ \downarrow p_2 & \searrow \tau & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

– каноническая диаграмма расслоенного произведения и $\sigma: Y \rightarrow X \times_C X$ – разрешение особенностей $X \times_C X$. Можно считать, что σ индуцирует изоморфизм над C' . В частности, Y можно рассматривать как гладкую проективную компактификацию $X' \times_{C'} X'$. Более того, можно считать, что $(\tau\sigma)^{-1}(\Delta)$ является объединением гладких дивизоров с некоторыми положительными кратностями и нормальными пересечениями. По теореме Делиня канонический морфизм $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [11, теорема 4.1.1, доказательство следствия 4.1.2].

Имеется коммутативная диаграмма канонических отображений

$$\begin{array}{ccc} H^2(Y, \mathbb{Q}) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q}) \end{array} \quad (2.5)$$

Поскольку $\tau\sigma: Y \rightarrow C$ является 1-параметрическим семейством четырехмерных многообразий с гладким общим слоем, спектральная последовательность Лере для $\tau\sigma$ вырождается [14, следствие (15.15)]: $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. В частности, существует каноническая точная последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^1(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

Более того, каноническое отображение $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [14, следствие (15.14)], следовательно, (2.5) является коммутативной диаграммой морфизмов $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа.

Поскольку $\Lambda'_{1,1} \in H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ – элемент типа Ходжа $(1, 1)$, из теоремы Лефшеца следует, что существует алгебраический класс $\mathcal{D} \in H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q})$, образ которого при каноническом сюръективном морфизме $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ совпадает с $\Lambda'_{1,1}$. Обозначим через $\Lambda_{1,1} \in H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ образ алгебраического класса $\mathcal{D}$ относительно канонического краевого морфизма $H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$. Очевидно, что

$$\Lambda_{1,1}|_{C'} = \Lambda'_{1,1}.$$

Пусть $s \in C'$ и $\text{pr}_{ks}: X_s \times X_s \rightarrow X_s$ – канонические проекции. Из соотношения (1.2) следует, что композиция

$$\begin{aligned} H^3(X_s, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_{1s}^*} H^3(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup[\Lambda_{1,1}]_s} H^4(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2s*}} H^1(X_s, \mathbb{Q}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

определяет алгебраический изоморфизм $H^3(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_s, \mathbb{Q})$.

Рассмотрим каноническую диаграмму расслоенного произведения:

$$\begin{array}{ccccc} X' \times_{C'} X' & & \xrightarrow{p'_1} & & X' \\ \downarrow p'_2 & & \searrow \tau' & & \downarrow \pi' \\ X' & & \xrightarrow{\pi'} & & C' \end{array}$$

Для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow (C')^{\text{an}}$ собственный морфизм $p'_i: (\tau')^{-1}(U) \rightarrow (\pi')^{-1}(U)$ определяет каноническое отображение

$$(p'_i)^*: H^q((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H^q((\tau')^{-1}(U), (p'_1)^*\mathbb{Q})$$

(см. [15, гл. II, п. 4.16]). Поскольку $(p'_i)^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, то это отображение принимает вид $(p'_i)^*: H^q((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H^q((\tau')^{-1}(U), \mathbb{Q})$. Следовательно, разложения Кюннета на слоях τ' дают каноническое инъективное отображение

$$(p'_i)^*: R^q \pi'_* \mathbb{Q} \hookrightarrow R^q \tau'_* \mathbb{Q} = \bigoplus_{a+b=q} R^a \pi'_* \mathbb{Q} \otimes R^b \pi'_* \mathbb{Q}.$$

С другой стороны, собственный морфизм $p'_i: (\tau')^{-1}(U) \rightarrow (\pi')^{-1}(U)$ определяет каноническое отображение $(p'_i)^*: H_c^q((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^q((\tau')^{-1}(U), \mathbb{Q})$ когомологий с компактными носителями [15, гл. II, п. 4.16].

По теореме двойственности Пуанкаре для комплексного многообразия V комплексной размерности d имеется изоморфизм [20, § 2, теорема (2.8)] $H_c^{2d}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$, индуцирующий изоморфизм

$$H_c^i(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H_{2d-i}^c(V, \mathbb{Q})$$

(см. [21, гл. I, § 4, п. 4.3], [22, § 7.8], [4, с. 359], [16, гл. VI, § 11, следствие 11.2]). По теореме Де Рама [3, гл. 0, § 3] имеется изоморфизм вещественных когомологий Де Рама с сингулярными когомологиями. С другой стороны, теория сингулярных гомологий [23, гл. 4, § 1, п. 4] является теорией гомологий с компактными носителями [23, гл. 4, § 8, п. 11]. Следовательно, можно отождествить пространство $H^{2d-i}(V, \mathbb{Q})$ с двойственным пространством к $H_c^i(V, \mathbb{Q})$.

В силу теоремы двойственности Пуанкаре двойственное к

$$(p'_2)^*: H_c^5((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^5((\tau')^{-1}(U), \mathbb{Q})$$

отображение принимает вид $(p'_2)_*: H^5((\tau')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H^1((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q})$. Оно дает каноническое отображение $(p'_2)_*: R^5 \tau'_* \mathbb{Q} \rightarrow R^1 \pi'_* \mathbb{Q}$. Ограничение $(p'_2)_*$ на подпучок $R^4 \pi'_* \mathbb{Q} \otimes R^1 \pi'_* \mathbb{Q} \hookrightarrow R^5 \tau'_* \mathbb{Q}$ индуцирует канонический изоморфизм

$$(p'_2)_*: R^4 \pi'_* \mathbb{Q} \otimes R^1 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^1 \pi'_* \mathbb{Q}.$$

В частности, композиция

$$R^3 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{(p'_1)^*} R^3 \pi'_* \mathbb{Q} \otimes R^0 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\cup \Lambda'_{1,1}} R^4 \pi'_* \mathbb{Q} \otimes R^1 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{(p'_2)_*} R^1 \pi'_* \mathbb{Q} \quad (2.7)$$

является глобализацией (2.6).

Аналогично, для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow C^{\text{an}}$ коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & X \times_C X & \xrightarrow{p_1} & X \\ & & \downarrow p_2 & \searrow \tau & \downarrow \pi \\ & & X & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

дает канонический собственный морфизм $p_1\sigma: (\tau\sigma)^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(U)$ и каноническое отображение $(p_1\sigma)^*: H^q(\pi^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H^q((\tau\sigma)^{-1}(U), \mathbb{Q})$ [15, гл. II, п. 4.16]. Следовательно, определено каноническое отображение

$$(p_1\sigma)^*: R^q\pi_*\mathbb{Q} \rightarrow R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q},$$

причем

$$(p_1\sigma)^*|_{C'} = (p'_1)^*. \quad (2.8)$$

Для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow C^{\text{an}}$ имеется каноническое отображение $\cup$ -умножения [15, гл. II, § 6.6]:

$$H^p((\tau\sigma)^{-1}(U), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^q((\tau\sigma)^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H^{p+q}((\tau\sigma)^{-1}(U), \mathbb{Q}),$$

которое, в свою очередь, определяет канонические отображения

$$\begin{aligned} R^p(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} &\rightarrow R^{p+q}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}, \\ R^p(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} H^0(C, R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{x \otimes y \mapsto x \cup y} R^{p+q}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Второе отображение является частным случаем совместимости $\cup$ -произведений со спектральной последовательностью Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ [24, с. 143]. Элемент $\Lambda_{1,1} \in H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ позволяет определить отображение

$$R^3(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\cup \Lambda_{1,1}} R^5(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}$$

и композицию

$$R^3\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^3(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\cup \Lambda_{1,1}} R^5(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}. \quad (2.9)$$

Для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow C^{\text{an}}$ канонический собственный морфизм $p_2\sigma: (\tau\sigma)^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(U)$ определяет каноническое отображение

$$(p_2\sigma)^*: H_c^5(\pi^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^5((\tau\sigma)^{-1}(U), \mathbb{Q})$$

когомологий с компактными носителями [15, гл. II, п. 4.16]. По теореме двойственности Пуанкаре двойственное к $(p_2\sigma)^*$ отображение принимает вид

$$(p_2\sigma)_*: H^5((\tau\sigma)^{-1}(U), \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(\pi^{-1}(U), \mathbb{Q}).$$

Следовательно, определено каноническое отображение

$$(p_2\sigma)_*: R^5(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \rightarrow R^1\pi_*\mathbb{Q},$$

и можно расширить (2.9) до композиции

$$R^3\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^3(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\cup \Lambda_{1,1}} R^5(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_2\sigma)_*} R^1\pi_*\mathbb{Q}. \quad (2.10)$$

Поскольку $(p_2\sigma)_*|_{C'} = (p'_2)_*$, легко видеть, что (2.7), (2.8) и (2.10) дают точную последовательность пучков на C^{an} :

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow R^3\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \Lambda_{1,1}]} R^1\pi_*\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

где носители $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ сосредоточены на Δ .

Пусть

$$\mathcal{F} = \operatorname{Im} [R^3 \pi_* \mathbb{Q} \xrightarrow{x \mapsto (p_2 \sigma)_* [(p_1 \sigma)^* x \cup \Lambda_{1,1}]} R^1 \pi_* \mathbb{Q}].$$

Тогда (2.11) дает точные последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow R^3 \pi_* \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow R^1 \pi_* \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Поскольку $H^1(C, \mathcal{E}) = H^2(C, \mathcal{E}) = 0$, из (2.12) следует, что

$$H^1(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, \mathcal{F}). \quad (2.14)$$

С другой стороны, $H^1(C, \mathcal{G}) = 0$, поэтому (2.13), (2.14) дают точную последовательность

$$H^1(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \mapsto (p_2 \sigma)_* [(p_1 \sigma)^* x \cup \Lambda_{1,1}]} H^1(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Поляризация на X определяет поляризации на слоях гладкого морфизма π' , поэтому сильная теорема Лефшеца дает изоморфизм локальных систем $R^1 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^3 \pi'_* \mathbb{Q}$ (определенный $\cup$ -умножением на образ $\operatorname{cl}_X(H)$ в пространстве $H^0(C', R^2 \pi'_* \mathbb{Q})$), который, в свою очередь, определяет изоморфизм пучков

$$j_* R^1 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} j_* R^3 \pi'_* \mathbb{Q}. \quad (2.16)$$

Согласно теореме о локально инвариантных циклах каноническое отображение $R^n \pi_* \mathbb{Q} \rightarrow j_* R^n \pi'_* \mathbb{Q}$ сюръективно для любого натурального числа n (с ядром, сконцентрированным на Δ) [25, п. (3.7)] и, следовательно, определяет канонический изоморфизм

$$H^1(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, j_* R^n \pi'_* \mathbb{Q}).$$

Поэтому (2.16) дает равенство

$$\dim H^1(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) = \dim H^1(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}). \quad (2.17)$$

Из вырожденности спектральной последовательности Лере для π [14, следствие (15.15), теоремы (15.11), (15.16)] следует, что имеется каноническая точная последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа:

$$0 \rightarrow H^2(C, R^2 \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow \operatorname{Ker}[H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4 \pi_* \mathbb{Q})] \rightarrow H^1(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

Пусть h – образ $\operatorname{cl}_X(H)$ в $H^0(C, R^2 \pi_* \mathbb{Q})$. Согласно сильной теореме Лефшеца имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow R^1 \pi_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\cup h} R^3 \pi_* \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow 0,$$

причем носители $\mathcal{E}'$, $\mathcal{G}'$ сконцентрированы на Δ . Следовательно, (2.17) дает изоморфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа:

$$H^1(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{\cup h} H^1(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}). \quad (2.18)$$

Из (2.15) и (2.17) следует, что имеется изоморфизм

$$H^1(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \Lambda_{1,1}]} H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}). \quad (2.19)$$

Заметим, что (2.19) является изоморфизмом типа $(-1, -1)$ рациональных структур Ходжа. Поэтому он индуцирует изоморфизм соответствующих сумм всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности более 1. Поскольку $H^2(C, \mathbb{Q})$ является 1-мерной подструктурой Ходжа, порожденной классом слоя $\text{cl}_X(X_s)$, и $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ – рациональная структура Ходжа типа $(1, 1)$ по условию i) теоремы, из точности последовательности (2.2) рациональных структур Ходжа следует, что сумма всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности более 1 в $H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q})$ канонически отождествляется с $T_{\mathbb{Q}}^2(X)$. С другой стороны, из (2.4) и (2.18) следует, что сумма всех неприводимых $\mathbb{Q}$ -подструктур Ходжа размерности более 1 в $H^1(C, R^3\pi_*\mathbb{Q})$ канонически отождествляется с $T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)$. Поэтому из (2.19) следует, что имеется изоморфизм типа $(-1, -1)$ рациональных структур Ходжа:

$$T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \mathcal{D}]} T_{\mathbb{Q}}^2(X). \quad (2.20)$$

Пусть $\text{pr}_k: X \times X \rightarrow X$ – каноническая проекция, $\iota: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение. Тогда

$$\text{pr}_k \iota \sigma = p_k \sigma.$$

Поскольку pr_k и $\iota \sigma$ – морфизмы гладких проективных многообразий, по формуле проекции для всех $x \in T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H)$ имеем

$$\begin{aligned} (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \mathcal{D}] &= [\text{pr}_2 \iota \sigma]_*([\text{pr}_1 \iota \sigma]^*x \cup \mathcal{D}) \\ &= (\text{pr}_2)_*(\iota \sigma)_*((\iota \sigma)^* \text{pr}_1^* x \cup \mathcal{D}) = (\text{pr}_2)_*(\text{pr}_1^* x \cup (\iota \sigma)_* \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Поэтому алгебраический класс $u \stackrel{\text{def}}{=} (\iota \sigma)_* \mathcal{D} \in H_{\text{alg}}^4(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм типа $(-1, -1)$ рациональных структур Ходжа:

$$T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H) \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{Q}}^2(X). \quad (2.21)$$

Очевидно, что

$$u = u_{0,4} + u_{1,3} + u_{2,2} + u_{3,1} + u_{4,0},$$

где

$$\begin{aligned} u_{i,4-i} &\in [H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^{4-i}(X, \mathbb{Q})] \cap H^{2,2}(X \times X, \mathbb{C}), \\ u_{2,2} &\in [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \oplus \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]^{\otimes 2} \cap H^{2,2}(X \times X, \mathbb{C}) \\ &= [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \\ &\quad \oplus [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \\ &= [T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)]^{\text{Hg}(H^2(X, \mathbb{Q}))} \oplus [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]. \end{aligned}$$

В частности, $u_{2,2} = t_{2,2} + n_{2,2}$, где $t_{2,2} \in T_{\mathbb{Q}}^2(X) \otimes T_{\mathbb{Q}}^2(X)$ и $n_{2,2} \in \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Предположим сначала, что $\dim \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \neq 2$. Тогда определен класс Пуанкаре $\wp(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)) \in \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Соответствия $u_{0,4}, u_{1,3}, u_{3,1}, u_{4,0}$ аннулируют $H^4(X, \mathbb{Q})$ в силу (1.2). С другой стороны,

$$T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = 0, \quad (2.22)$$

потому что иначе это пространство совпадает с суммой некоторых неприводимых $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа размерности более 1, что противоречит равенству $\dim H^6(X, \mathbb{Q}) = 1$. Поэтому соответствие $-n_{2,2} + \wp(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X))$ аннулирует подпространство $T_{\mathbb{Q}}^2(X) \cup \text{cl}_X(H) \subset H^4(X, \mathbb{Q})$ и алгебраический класс $u - n_{2,2} + \wp(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X))$ определяет изоморфизм (2.21). Наконец, соответствие $t_{2,2}$ аннулирует подпространство $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \text{cl}_X(H) \subset H^4(X, \mathbb{Q})$ в силу равенства (2.22), а соответствие $\wp(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)) \in [\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)]^{\text{SO}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X))}$ определяет алгебраический изоморфизм $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cup \text{cl}_X(H) \xrightarrow{\sim} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ (этот результат доказывается так же, как лемма из п. 1.5). Поэтому из (2.4) следует, что алгебраический класс

$$u - n_{2,2} + \wp(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)) = u_{0,4} + u_{1,3} + t_{2,2} + u_{3,1} + u_{4,0} + \wp(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X))$$

определяет алгебраический изоморфизм $H^4(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q})$.

С другой стороны, класс Пуанкаре $\wp(H^1(X, \mathbb{Q}))$ является циклом Ходжа (другими словами, он принадлежит $H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X \times X, \mathbb{C})$). Поэтому он алгебраический в силу теоремы Лефшеца. Согласно лемме из п. 1.5 этот цикл определяет алгебраический изоморфизм $H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Q})$. Наконец, алгебраический класс $\text{cl}_X(X) \otimes \text{cl}_X(X)$ определяет алгебраический изоморфизм $H^6(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathbb{Q})$. Поскольку характеристический полином любого эндоморфизма пространства $H^i(X, \mathbb{Q})$ имеет рациональные коэффициенты, гипотеза $B(X)$ верна в силу [4, теорема 2.9].

Если $\dim \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = 2$, то рассмотрим моноидальное преобразование $f: \tilde{X} \rightarrow X$ вдоль гладкой кривой $e(C) \hookrightarrow X$, где $e: C \rightarrow X$ – сечение морфизма π . Тогда для канонического морфизма $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow C$ рациональная структура Ходжа $H^0(C, R^2\tilde{\pi}_*\mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$, $\dim \text{NS}_{\mathbb{Q}}(\tilde{X}) = 3$. По доказанному выше гипотеза $B(\tilde{X})$ верна. Остается заметить, что $B(\tilde{X}) \Rightarrow B(X)$ в силу [26, теорема 1.6]. Теорема доказана.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую C . Предположим, что любой геометрический слой X_s является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и существует такой слой $X_{\delta} = \bigcup_{i=1}^n E_i$, что $H^2(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$ для любой неприводимой компоненты E_i слоя X_{δ} (другими словами, слой X_{δ} сильно вырожден). Тогда пространство инвариантных циклов $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$. Если существует сечение морфизма π и общий слой π имеет иррегулярность 0, то гипотеза $B(X)$ верна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы утверждаем, что

$$\forall \alpha \in H^2(X, \mathcal{O}_X), \quad \forall s \in C' \quad \alpha_s \stackrel{\text{def}}{=} \alpha|_{X_s} = 0. \quad (2.23)$$

Действительно, в силу классической теории Ходжа $\alpha = \bar{\beta}$ для голоморфной 2-формы $\beta \in H^0(X, \Omega_X^2)$. Если z_1, z_2 – локальные голоморфные координаты на X_s , то мы имеем

$$\begin{aligned} \beta_s &\stackrel{\text{def}}{=} \beta|_{X_s} = b(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2, \\ \beta_s \wedge \bar{\beta}_s &= |b(z_1, z_2)|^2 dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{X_s} \beta_s \wedge \bar{\beta}_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_s = 0. \quad (2.24)$$

Поскольку $\int_{X_s} \beta_s \wedge \bar{\beta}_s = \int_{X_s} \beta \wedge \bar{\beta}$, соотношение (2.24) принимает вид

$$\int_{X_s} \beta \wedge \bar{\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_s = 0. \quad (2.25)$$

Для любой неприводимой компоненты E_i , $i = 1, \dots, n$, геометрического слоя $X_\delta = \bigcup_{i=1}^n E_i$ имеем равенство $H^2(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$. Поэтому $H^0(E_i, \Omega_{E_i}^2) = 0$ по двойственности Серра и $\beta|_{E_i} = 0$ для всех i ,

$$\int_{X_\delta} \beta \wedge \bar{\beta} = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \beta \wedge \bar{\beta} = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \beta|_{E_i} \wedge \overline{\beta|_{E_i}} = 0. \quad (2.26)$$

Поскольку X_δ гомологичен X_s на X и $\beta \wedge \bar{\beta}$ является d -замкнутой формой, по теореме Стокса мы получаем

$$\int_{X_\delta} \beta \wedge \bar{\beta} = \int_{X_s} \beta \wedge \bar{\beta}.$$

Поэтому (2.25), (2.26) дают равенства $\alpha_s = \bar{\beta}_s = 0$. Формула (2.23) доказана.

Из результатов Делиня следует, что канонические отображения

$$H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$$

являются сюръективными морфизмами $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [11, следствие 4.1.2]. С другой стороны, $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ совпадает с компонентой типа $(0, 2)$ разложения Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$. Из (2.23) следует, что $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$.

В силу теоремы Мамфорда о полустабильной редукции [27] существуют такие конечное разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$ и разрешение особенностей $\tilde{X} \rightarrow X \times_C \tilde{C}$, что канонический морфизм $\tilde{X} \rightarrow \tilde{C}$ является (возможно, вырожденным) семейством поверхностей (с сечением) и все неприводимые компоненты любого геометрического слоя $\tilde{X}_{\tilde{s}}$ являются гладкими поверхностями кратности 1 с нормальными пересечениями. Можно считать, что алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\tilde{X}}]_{1,1}$ определен над полем рациональных функций кривой $\tilde{C}$. Хорошо известно, что существование полустабильного сильно вырожденного слоя сохраняется при замене базы $\tilde{C} \rightarrow C$. Поскольку $B(\tilde{X}) \Rightarrow B(X)$ в силу [26, теорема 1.6], можно считать, что все неприводимые компоненты любого

геометрического слоя X_s морфизма $\pi: X \rightarrow C$ являются гладкими поверхностями кратности 1 с нормальными пересечениями, причем алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ определен над полем рациональных функций кривой C .

Если общий геометрический слой X_s имеет иррегулярность 0, то выполнено условие ii) теоремы из п. 2.3 и, следовательно, гипотеза $B(X)$ верна.

§ 3. Доказательство стандартной гипотезы типа Лефшеца для некоторых трехмерных многообразий

3.1. ТЕОРЕМА. *Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов Λ и $*$ верна для гладкого комплексного проективного трехмерного многообразия X , если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

- 1) *общий геометрический слой некоторого 1-параметрического голоморфного семейства $\pi: X \rightarrow C$ бирационально эквивалентен линейчатой поверхности, поверхности Энриквеса или КЗ-поверхности;*
- 2) *все слои морфизма π являются гладкими поверхностями размерности Кодаиры $\kappa \leq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Мамфорда о полустабильной редукции [27] можно считать, что все неприводимые компоненты любого геометрического слоя X_s морфизма $\pi: X \rightarrow C$ являются гладкими поверхностями кратности 1 с нормальными пересечениями, причем алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ определен над полем рациональных функций кривой C .

Заметим, что стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца совместима с моноидальными преобразованиями трехмерных многообразий вдоль гладких неприводимых центров [8, теорема 4.3], потому что $B(Y)$ верна для точек и гладких неприводимых кривых. В частности, можно заменить X бирационально эквивалентным гладким проективным трехмерным многообразием.

Если общий геометрический слой X_s бирационально эквивалентен линейчатой поверхности, то X рационально доминируется произведением $S \times \mathbb{P}^1$, где S – некоторая гладкая проективная поверхность. Поскольку $B(Y)$ верна для кривых и поверхностей, то мы видим, что гипотезы $B(S)$ и $B(\mathbb{P}^1)$ верны. С другой стороны, стандартная гипотеза типа Лефшеца стабильна относительно произведений в силу [4, следствие 2.5]. Поэтому $B(S \times \mathbb{P}^1)$ верна. Поскольку рациональное отображение $S \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ доминантно, то из [26, теорема 1.6] и [8, теорема 4.3] следует, что гипотеза $B(X)$ верна.

Если общий геометрический слой X_s бирационально эквивалентен поверхности Энриквеса, то $H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$ и, следовательно, гипотеза $B(X)$ верна в силу теоремы из п. 2.4.

Если общий геометрический слой X_s бирационально эквивалентен КЗ-поверхности, то можно считать, что $\pi': X' \rightarrow C'$ является гладким семейством КЗ-поверхностей.

Если семейство $\pi': X' \rightarrow C'$ изотривиально, то имеется такое конечное разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C'$, что $X \times_{C'} \tilde{C}$ бирационально эквивалентно прямому произведению $S \times \tilde{C}$, где S – КЗ-поверхность. Поэтому $B(S \times \tilde{C})$ верна.

Поскольку композиция канонических рациональных отображений $S \times \tilde{C} \rightarrow X \times_C \tilde{C} \rightarrow X$ доминантна, то гипотеза $B(X)$ верна.

Можно считать, что семейство $\pi': X' \rightarrow C'$ неизотривиально. Тогда имеются морфизмы $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^0(C', R^2 \pi'_* \mathbb{Q}) \simeq H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \hookrightarrow H_{\text{alg}}^2(X_s, \mathbb{Q})$$

в силу [28, следствие 4.1.1]. В частности, $H^0(C', R^2 \pi'_* \mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$. Поскольку общий геометрический слой X_s имеет иррегулярность 0, то гипотеза $B(X)$ верна в силу теоремы из п. 2.3.

Будем предполагать в дальнейшем, что все слои морфизма π являются гладкими поверхностями размерности Кодaira $\varkappa \leq 0$.

Если общий геометрический слой X_s является минимальной эллиптической поверхностью, для которой $K_{X_s} \neq 0$, то существует наименьшее целое положительное число m , для которого $mK_{X_s} = 0$, причем $m \in \{2, 3, 4, 6\}$. С другой стороны, существует такой канонический этальный морфизм $f_s: \tilde{X}_s \rightarrow X_s$ степени m , что K_{X_s} индуцирует на $\tilde{X}_s$ тривиальный $K_{\tilde{X}_s}$ (конструкция f_s сходит к Кодaira [29, теорема 33]). Эти морфизмы склеиваются в этальный C -морфизм $f: \tilde{X} \rightarrow X$ степени m , поэтому задача сводится к доказательству стандартной гипотезы для гладких семейств КЗ-поверхностей или абелевых поверхностей.

Мы можем считать, что $\pi: X \rightarrow C$ – непостоянная абелева схема относительной размерности 2. Если она содержит нетривиальную постоянную абелеву подсхему, то из теоремы Пуанкаре о полной приводимости для абелевых многообразий [30, § 19, теорема 1] следует существование такого конечного разветвленного накрытия $\tilde{C} \rightarrow C$, что абелева схема $X \times_C \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ изогенна $E \times S$, где E – эллиптическая кривая и $S \rightarrow \tilde{C}$ – абелева схема относительной размерности 1 над $\tilde{C}$. Поскольку гипотезы $B(E)$ и $B(S)$ верны, то мы видим, что гипотеза $B(X)$ также верна.

Далее можно считать, что абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ не содержит нетривиальной постоянной абелевой подсхемы. Тогда из результатов Делиня следует, что

$$\text{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq \text{End}(R^1 \pi_* \mathbb{Q})$$

(см. [11, следствие 4.4.13]). Более того, $\text{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q}$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(0, 0)$ [11, п. 4.4.6]. С другой стороны, поляризация абелева многообразия X_s , $s \in C$, определяет изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^1(X_s, \mathbb{Q})^\vee \simeq H^1(X_s, \mathbb{Q})(1)$ [11, п. 4.2.3]. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{End}(R^1 \pi_* \mathbb{Q}) &\simeq [H^1(X_s, \mathbb{Q})^\vee \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \\ &\simeq [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)}(1) \end{aligned}$$

является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(0, 0)$. Поскольку имеются морфизмы $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [13, гл. VIII, § 7, упражнение 11 (а)]:

$$H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} \simeq [\wedge^2 H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \hookrightarrow [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)},$$

мы видим, что $H^0(C, R^2 \pi_* \mathbb{Q}) \simeq H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$. Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна по теореме из п. 2.3.

Список литературы

1. Ш.-Ш. Чжэнь, *Комплексные многообразия*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: Sh.-Sh. Chern, *Complex manifolds*, Instituto de Física e Matemática, Recife, 1959.
2. A. Grothendieck, "Standard conjectures on algebraic cycles", *Algebraic geometry*, Internat. Colloq. (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.
3. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
4. S. L. Kleiman, "Algebraic cycles and the Weil conjectures", *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.
5. С. Г. Танкеев, "О численной эквивалентности алгебраических циклов на потенциально простых абелевых схемах простой относительной размерности", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 145–164; англ. пер.: S. G. Tankeev, "On the numerical equivalence of algebraic cycles on potentially simple Abelian schemes of prime relative dimension", *Izv. Math.*, **69**:1 (2005), 143–162.
6. D. I. Lieberman, "Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds", *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.
7. N. M. Katz, W. Messing, "Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields", *Invent. Math.*, **23**:1 (1974), 73–77.
8. С. Г. Танкеев, "Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, "Monoidal transformations and conjectures on algebraic cycles", *Izv. Math.*, **71**:3 (2007), 629–655.
9. И. Р. Шафаревич, Б. Г. Авербух, Ю. Р. Вайнберг, А. Б. Жижченко, Ю. И. Манин, Б. Г. Мойшезон, Г. Н. Тюрин, А. Н. Тюрин, *Алгебраические поверхности*, Тр. МИАН, **75**, Наука, М., 1965.
10. B. B. Gordon, "A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties", Appendix to J. D. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, CRM Monogr. Ser., **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 297–356.
11. П. Делинь, "Теория Ходжа. II", *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; пер. с франц.: P. Deligne, "Théorie de Hodge. II", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
12. Ю. Г. Зархин, "Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; англ. пер.: Yu. G. Zarkhin, "Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties", *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.
13. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. 1–3, Мир, М., 1976; гл. 4–6, 1972; гл. 7, 8, 1978; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1, Actualités Sci. Indust., **1285**, Hermann, Paris, 1971; Chaps. 2–3, **1349**, 1972; Chaps. 4–6, **1337**, 1968; Chaps. 7–8, **1364**, 1975.
14. S. Zucker, "Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric", *Ann. of Math. (2)*, **109**:3 (1979), 415–476.
15. Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961; пер. с фр.: R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
16. Дж. Милн, *Эталные когомологии*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
17. P. Deligne, "Théorie de Hodge. III", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44**:1 (1974), 5–77.
18. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Алгебра*, гл. 10: *Гомологическая алгебра*, Наука, М., 1987; пер. с франц.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Algèbre. Ch. 10: Algèbre homologique, Masson, Paris, 1980.

19. G. Shimura, “Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field”, *Amer. J. Math.*, **77**:1 (1955), 134–176.
20. П. Делинь, “Гипотеза Вейля. I”, *УМН*, **30**:5 (1975), 159–190; пер. с фр.: P. Deligne, “La conjecture de Weil. I”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43**:1 (1974), 273–307.
21. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
22. А. Боре́ль, А. Хаефлигер, “La classe d’homologie fondamentale d’un espace analytique”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 461–513.
23. Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1966.
24. G. E. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1967.
25. С. Н. Клемменс, “Degeneration of Kähler manifolds”, *Duke Math. J.*, **44**:2 (1977), 215–290.
26. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 183–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture for complex Abelian schemes over smooth projective curves”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 597–635.
27. G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
28. Yu. G. Zarhin, “Hodge groups of K3 surfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 193–220.
29. K. Kodaira, “On the structure of compact complex analytic surfaces. II”, *Amer. J. Math.*, **88**:3 (1966), 682–721.
30. Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, London, 1970.

С. Г. ТАНКЕЕВ (S. G. TANKEEV)
Владимирский государственный университет
E-mail: tankeev@vpti.vladimir.ru

Поступило в редакцию
01.11.2007