Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, О топологической устойчивости непрерывных функций в некоторых пространствах, связанных с рядами Фурье, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 2, 131–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:06:02

УДК 517.51

В. В. Лебедев

О топологической устойчивости непрерывных функций в некоторых пространствах, связанных с рядами Фурье

Показано, что для произвольной непрерывной функции f на окружности $\mathbb{T}$ следующие условия эквивалентны: для любого гомеоморфизма h окружности на себя последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f \circ h}$ суперпозиции $f \circ h$ принадлежит слабому l^1 ; функция f имеет ограниченную квадратичную вариацию. Получены подобные результаты для пространств функций с последовательностью коэффициентов Фурье из слабого l^p , $1 < p < 2$, для пространств A_p функций f таких, что $\widehat{f} \in l^p$, для пространств Соболева W_2^λ и других пространств функций на $\mathbb{T}$. При некоторых общих предположениях относительно пространства $\mathbb{X}$ функций на окружности указано условие, необходимое для того, чтобы после любой замены переменной заданная непрерывная функция f оставалась в $\mathbb{X}$. Рассмотрен также многомерный случай. Этот случай существенно отличается от одномерного. В частности, показано, что если $p < 2$ и f – непрерывная функция на торе $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, такая, что $f \circ h \in A_p(\mathbb{T}^d)$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$, то f постоянна.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: гомеоморфизмы окружности, ряды Фурье.

Введение

Для произвольной интегрируемой функции f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (где $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел) запишем ее ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}. \quad (1)$$

Пусть $C(\mathbb{T})$ – класс непрерывных (комплекснозначных) функций на $\mathbb{T}$. Мы рассматриваем некоторые пространства $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$, естественным образом связанные с разложением (1), и изучаем следующий вопрос об устойчивости непрерывных функций в этих пространствах: какие функции $f \in C(\mathbb{T})$ обладают тем свойством, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$?

Первые результаты в этом направлении получены в работах [1] и [2] в случаях, когда $\mathbb{X}$ – это соответственно пространство функций, имеющих сходящийся всюду ряд Фурье, и пространство функций, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье. Д. Ватерман [3] рассматривал пространства функций, имеющих заданную скорость убывания коэффициентов Фурье, и показал, что для $f \in C(\mathbb{T})$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $\widehat{f \circ h}(n) = O(\gamma(|n|)/|n|)$, $|n| \rightarrow \infty$, для любого гомеоморфизма h ;
- (ii) $V(f, n) = O(\gamma(n))$.

Здесь γ – заданная функция, удовлетворяющая некоторым простым условиям (см. § 3), и $V(f, n)$ – модуль вариации функции f , введенный З. А. Чантурией [4] (см. также [5], [6]) и позже, независимо, Е. А. Севастьяновым [7], а именно

$$V(f, n) = \sup \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|,$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T}$, $j = 1, 2, \dots, n$. В частности, $\widehat{f \circ h}(n) = O(1/|n|)$ для любого гомеоморфизма h тогда и только тогда, когда f – функция ограниченной вариации. Отметим, что нетривиальная часть теоремы Ватермана – это утверждение (i) $\Rightarrow$ (ii). Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) доказывается следующим образом. Пользуясь хорошо известной оценкой $|\widehat{g}(n)| \leq c\omega_1(g, 1/|n|)$ коэффициентов Фурье через L^1 -модуль непрерывности (см. [8]) и оценкой $\omega_1(g, 1/n) \leq cV(g, n)/n$, полученной в [5], мы имеем $|\widehat{g}(n)| \leq cV(g, |n|)/|n|$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, и остается лишь заметить, что модуль вариации функции инвариантен относительно замен переменных, т. е. $V(f, n) = V(f \circ h, n)$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$.

В § 1 мы получаем общую теорему, которая при некоторых предположениях относительно пространства $\mathbb{X}$ дает инвариантное условие, необходимое для устойчивости функций в $\mathbb{X}$. В дальнейшем мы применяем эту теорему к конкретным пространствам функций и получаем необходимые условия устойчивости в этих пространствах. Достаточные условия устойчивости получены вполне стандартными методами. Мы также указываем класс пространств $\mathbb{X}$, в которых нет нетривиальных (т. е. непостоянных) непрерывных устойчивых функций. Грубо говоря, это имеет место, если $\mathbb{X}$ не содержит характеристических функций интервалов. Так, например, в пространстве $A(\mathbb{T})$ функций f таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k), k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^1 , т. е.

$$\|f\|_A = \|\widehat{f}\|_{l^1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty,$$

устойчивы лишь постоянные. Это было ранее отмечено в [9], [10].

Напомним, что слабое пространство l^p , $1 \leq p < \infty$, – это пространство последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ таких, что $\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |x_k| > \lambda\} = O(1/\lambda^p)$, $\lambda \rightarrow +0$, где $\text{card } E$ – число элементов (конечного) множества $E \subset \mathbb{Z}$.

В § 2 мы показываем, что если $f \in C(\mathbb{T})$, то следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f \circ h}$ суперпозиции $f \circ h$ принадлежит слабому l^1 , т. е. $\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow +0$;

(ii) функция f имеет ограниченную квадратичную вариацию.

Напомним, что квадратичная вариация $V_2(f)$ функции f определяется соотношением

$$V_2(f) = \sup \left(\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^2 \right)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем n и всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Этот результат о функциях с коэффициентами Фурье из слабого пространства l^1 является частным случаем более общей теоремы об устойчивости в пространствах функций с заданной оценкой распределения коэффициентов Фурье. Определим модуль квадратичной вариации $V_2(f, n)$, $n = 1, 2, \dots$, функции f , полагая

$$V_2(f, n) = \sup \left(\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^2 \right)^{1/2},$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам из n попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Мы покажем, что если $f \in C(\mathbb{T})$, то следующие условия эквивалентны:

(i) $\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O(1/\varphi(\lambda))$, $\lambda \rightarrow +0$, для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$;

(ii) $V_2(f, n) = O(n\varphi^{-1}(1/n))$, $n \rightarrow \infty$.

Здесь φ – произвольно заданная непрерывная строго возрастающая функция на некотором отрезке $[0, \lambda_0]$, $\varphi(0) = 0$ ($\lambda_0 > 0$), удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям, и φ^{-1} – функция, обратная к φ . В частности, отсюда вытекает (как и выше, $f \in C(\mathbb{T})$), что при $1 < p < 2$ следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h последовательность коэффициентов Фурье суперпозиции $\widehat{f \circ h}$ принадлежит слабому l^p , т.е. $\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O(1/\lambda^p)$;

(ii) $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$, где $1/p + 1/q = 1$.

Отметим, что во многих случаях условия устойчивости можно дать в терминах роста модуля вариации $V(f, n)$ вместо модуля квадратичной вариации $V_2(f, n)$. Ясно, что $V(f, n) \leq n^{1/2}V_2(f, n)$. Между тем, можно оценить $V_2(f, n)$ через $V(f, n)$. В частности, при $\gamma > 0$ имеем $V_2(f, n) = O(n^\gamma)$ тогда и только тогда, когда $V(f, n) = O(n^{1/2+\gamma})$ (см. § 2).

В § 3 мы рассматриваем пространства $A_p(\mathbb{T})$ и пространства Соболева $W_2^\lambda(\mathbb{T})$, состоящие из (интегрируемых) функций f на $\mathbb{T}$ таких, что соответственно

$$\|f\|_{A_p} = \|\widehat{f}\|_{l^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

$$\|f\|_{W_2^\lambda} = |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 |k|^{2\lambda} \right)^{1/2} < \infty.$$

Несложно показать, что (мы считаем функцию f непрерывной) при $1 < p < 2$ условие $\sum_{n=1}^\infty (V_2(f, n)/n)^p < \infty$ влечет $f \in A_p$. Поскольку указанное условие инвариантно относительно суперпозиций функции f с гомеоморфизмами, из него следует, что $f \circ h \in A_p$ для любого гомеоморфизма h . В частности, это имеет место, если $V_2(f, n) = O(n^{1/q-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$. С другой стороны, из приведенного выше результата о слабом l^p ясно, что (при $1 < p < 2$) если $f \circ h \in A_p$ для любого гомеоморфизма h , то $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$. Таким образом, нами получен частичный ответ на отмеченный А. М. Олевским [9], [10]

вопрос о функциях, устойчивых в A_p . Подобный результат имеет место для пространств W_2^λ , $0 < \lambda < 1/2$, а именно несложно увидеть, что если $\sum_{n=1}^{\infty} (V_2(f, n)/n^{1-\lambda})^2 < \infty$ и, в частности, $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda-\varepsilon})$, то $f \circ h \in W_2^\lambda$ для любого гомеоморфизма h . С другой стороны, мы показываем, что если $f \circ h \in W_2^\lambda$ для любого гомеоморфизма h , то $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda})$. Вопрос о точном описании непрерывных функций, устойчивых в A_p , $1 < p < 2$, и в W_2^λ , $0 < \lambda < 1/2$, остается открытым. Что касается пространств W_2^λ , $\lambda \geq 1/2$, то соответствующий класс устойчивых непрерывных функций содержит лишь постоянные.

Мы также показываем, что если $f \in C(\mathbb{T})$ и для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ функция $\widetilde{f \circ h}$, сопряженная к $f \circ h$, принадлежит $L^\infty(\mathbb{T})$, то $f = \text{const}$.

Отметим, что из нашего результата о функциях, устойчивых в A_p , вытекает усиление полученной в [11] теоремы о функциях, устойчивых в пространствах l^p -мультипликаторов Фурье. Отметим также, что из леммы 2 настоящей работы легко получается новое доказательство указанной выше теоремы Ватермана об устойчивом убывании коэффициентов Фурье (см. § 3).

В § 4 мы рассматриваем вопрос об устойчивости в многомерном случае. Этот случай существенно отличается от одномерного. В частности, при $d \geq 2$ в пространствах $A_p(\mathbb{T}^d) = \{f \in L^1(\mathbb{T}^d) : \hat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^d)\}$, $1 < p < 2$, нет непостоянных непрерывных устойчивых функций. Более того, мы показываем, что если f – непрерывная функция на торе $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, и для любого гомеоморфизма h тора $\mathbb{T}^d$ мы имеем $f \circ h \in \bigcup_{1 < p < 2} A_p(\mathbb{T}^d)$, то $f = \text{const}$. Этот результат является следствием общей теоремы, доказанной в § 4, согласно которой при некоторых предположениях относительно пространства $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, либо $L^\infty(\mathbb{T}^d) \subseteq \mathbb{X}$ и, следовательно, всякая непрерывная функция устойчива в $\mathbb{X}$, либо устойчивы лишь постоянные. Причина этого состоит в том, что группа гомеоморфизмов тора $\mathbb{T}^d$ при $d \geq 2$ слишком массивна.

Мы используем следующие обозначения: 1_E – характеристическая функция множества $E \subseteq \mathbb{T}$, т. е. $1_E(t) = 1$ при $t \in E$, $1_E(t) = 0$ при $t \in \mathbb{T} \setminus E$, и (если E измеримо) $|E|$ – его лебегова мера. Мы равным образом будем использовать обозначение 1_E в случае, когда E – множество на $\mathbb{R}$ такое, что $E \subseteq (-\pi, \pi)$, в этом случае 1_E – функция на $\mathbb{T}$, равная 1 на E и равная 0 на дополнении $[-\pi, \pi] \setminus E$. То же касается обозначения $|E|$, которое мы будем использовать для меры множеств $E \subseteq (-\pi, \pi)$. Через $c, c_1, c_2, \dots$ мы обозначаем различные положительные константы.

Частично результаты настоящей работы были ранее анонсированы автором без доказательств в заметках [12] (об устойчивости в пространствах $A_p(\mathbb{T})$) и [13] (об устойчивости в пространстве функций с последовательностью коэффициентов Фурье из слабого l^1).

Автор благодарен М. Л. Гольдману за полезное замечание.

§ 1. Две теоремы об устойчивости

Пусть $\mathbb{X}$ – линейное нормированное пространство функций на окружности $\mathbb{T}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Мы рассматриваем пространства, обладающие следующими свойствами:

(а) $\mathbb{X} \subseteq L^1(\mathbb{T})$ (как обычно, мы отождествляем функции, совпадающие почти всюду);

(б) если $g \in \mathbb{X}$, $f \in L^1(\mathbb{T})$ и $|\widehat{f}(k)| \leq |\widehat{g}(k)|$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \leq \|g\|_{\mathbb{X}}$;

(с) если последовательность функций $f_n \in \mathbb{X}$, $n = 1, 2, \dots$, сходится в $L^1(\mathbb{T})$ к функции f и $\|f_n\|_{\mathbb{X}} \leq c$, $n = 1, 2, \dots$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \leq c$;

(д) при любом $n \in \mathbb{Z}$ оператор $Q_n: f \rightarrow e_n f$ умножения на экспоненту $e_n(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$, является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$ и существует $\sigma \geq 0$ такое, что $\|Q_n\| = O(|n|^\sigma)$, $|n| \rightarrow \infty$;

(е) характеристическая функция 1_I любого интервала $I \subseteq \mathbb{T}$ принадлежит $\mathbb{X}$.

Простыми примерами таких пространств являются A_p , $1 < p < 2$, и W_2^λ , $0 < \lambda < 1/2$.

Положим

$$\alpha_{\mathbb{X}}(\delta) = \|1_{(-\delta, \delta)}\|_{\mathbb{X}}, \quad 0 < \delta \leq \pi.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на окружности $\mathbb{T}$ обладает свойствами (а)–(е). Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Предположим, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$. Тогда

$$V_2(f, n) = O\left(\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – произвольный (невырожденный) интервал (неважно – открытый, замкнутый или полуоткрытый), содержащийся в $(-\pi, \pi)$, и I^0 – интервал длиной $|I|/2$ с тем же центром, что и I . Пусть χ_I – некоторая функция на $\mathbb{T}$, равная 1 на I^0 и равная 0 на $[-\pi, \pi] \setminus I$, такая, что $0 \leq \chi_I(t) \leq 1$ при всех t , и оператор умножения на χ_I является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$. Всякую такую функцию χ_I назовем срезающей функцией интервала I . Нам потребуется следующая

ЛЕММА 1. Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$ обладает свойствами (а), (с), (д). Тогда для любого интервала $I \subseteq (-\pi, \pi)$ существует срезающая функция χ_I такая, что для любой функции $g \in \mathbb{X}$ имеем $\|\chi_I g\|_{\mathbb{X}} \leq c(|I|)\|g\|_{\mathbb{X}}$, где $c(|I|)$ зависит только от длины $|I|$ интервала I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon = |I|/2$ и γ – центр интервала I . Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию χ_ε на $\mathbb{T}$, равную 1 на $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, равную 0 на $[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ и такую, что $0 \leq \chi_\varepsilon(t) \leq 1$ при всех t . Положим $\chi_I(t) = \chi_\varepsilon(t - \gamma)$. Тогда $|\widehat{\chi_I}(k)| = |\widehat{\chi_\varepsilon}(k)|$, $k \in \mathbb{Z}$. Через $S_N(\chi_I)$ обозначим N -ю частичную сумму ряда Фурье функции χ_I . Пусть $g \in \mathbb{X}$. По свойству (д) имеем $e_n g \in \mathbb{X}$ и

$$\|e_n g\|_{\mathbb{X}} \leq (c|n|^\sigma + 1)\|g\|_{\mathbb{X}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $c > 0$ не зависит от n и g . Поэтому $S_N(\chi_I)g \in \mathbb{X}$ и

$$\begin{aligned} \|S_N(\chi_I)g\|_{\mathbb{X}} &= \left\| \sum_{|n| \leq N} \widehat{\chi_I}(n) e_n g \right\|_{\mathbb{X}} \leq \sum_{|n| \leq N} |\widehat{\chi_I}(n)| \|e_n g\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \sum_{|n| \leq N} |\widehat{\chi_\varepsilon}(n)| (c|n|^\sigma + 1) \|g\|_{\mathbb{X}} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\chi_\varepsilon}(n)| (c|n|^\sigma + 1) \right) \|g\|_{\mathbb{X}} = c(\varepsilon) \|g\|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Вместе с тем, поскольку $g \in L^1(\mathbb{T})$ (см. свойство (а)) и последовательность $S_N(\chi_I)$, $N = 1, 2, \dots$, сходится к χ_I в пространстве $L^\infty(\mathbb{T})$, видим, что последовательность $S_N(\chi_I)g$ сходится к $\chi_I g$ в $L^1(\mathbb{T})$. Учитывая свойство (с), получаем $\chi_I g \in \mathbb{X}$ и $\|\chi_I g\|_{\mathbb{X}} \leq c(\varepsilon)\|g\|_{\mathbb{X}}$. Лемма доказана.

Пусть I и Δ – два произвольных отрезка, содержащихся в $(-\pi, \pi)$. Пусть φ – возрастающий гомеоморфизм отрезка I на отрезок Δ . Тогда φ может быть продолжен до гомеоморфизма окружности на себя. (Например, мы можем продолжить φ до гомеоморфизма отрезка $[-\pi, \pi]$ на себя. Всякий такой гомеоморфизм, в свою очередь, порождает гомеоморфизм окружности.) В предположениях теоремы относительно f положим

$$\rho(I, \Delta) = \sup_{\varphi: I \rightarrow \Delta} \inf_{h|_I = \varphi} \|f \circ h\|_{\mathbb{X}}, \quad (2)$$

где верхняя грань берется по всем возрастающим гомеоморфизмам φ отрезка I на отрезок Δ , а нижняя грань берется по всем гомеоморфизмам h окружности $\mathbb{T}$ на себя, совпадающим с φ на I .

Как и выше, через I^0 мы обозначаем интервал длиной $|I|/2$ с тем же центром, что и I . Через $\{-1; 1\}^n$ мы обозначаем множество всевозможных последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_j = \pm 1$.

ЛЕММА 2. *Предположим, что линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$ обладает свойствами (а), (с), (d) и $f \in C(\mathbb{T})$ – функция такая, что $f \circ h \in \mathbb{X}$ для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$. Пусть I и Δ – отрезки, содержащиеся в $(-\pi, \pi)$, такие, что $\rho(I, \Delta) < \infty$. Пусть $I_1, I_2, \dots, I_n$ – попарно непересекающиеся интервалы, содержащиеся в I^0 , занумерованные в порядке следования на $(-\pi, \pi)$ слева направо. Пусть a_j, b_j , $j = 1, 2, \dots, n$, – точки из Δ такие, что $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$. Положим $\omega_j = f(b_j) - f(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда для любой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ функция*

$$g_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \omega_j 1_{I_j}$$

принадлежит $\mathbb{X}$ и $\|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \leq c(|I|)\rho(I, \Delta)$, где $c(|I|)$ зависит только от длины $|I|$ отрезка I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая, что $I = [A, B]$, рассмотрим точки t_j , $j = 0, 1, \dots, N$, с условием

$$A = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = B$$

и точки θ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, из Δ такие, что

$$\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_N.$$

Определим кусочно постоянной функцию G на $\mathbb{T}$, полагая $G(t) = f(\theta_j)$ при $t_{j-1} \leq t < t_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, и $G(t) = 0$ при $-\pi \leq t < A$ и $B \leq t < \pi$. Класс всех функций G такого вида, соответствующих различным N и различным наборам точек $\{t_j\}$, $\{\theta_j\}$, обозначим через Ω .

Заметим сначала, что если $G \in \Omega$, то

$$\chi_I G \in \mathbb{X}, \quad \|\chi_I G\|_{\mathbb{X}} \leq 2c(|I|)\rho(I, \Delta), \quad (3)$$

где χ_I – срезающая функция из леммы 1. Действительно, определим функцию φ на интервале $[A, B]$, полагая $\varphi(t) = \theta_j$ при $t_{j-1} \leq t < t_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда на $[A, B]$ имеем $G = f \circ \varphi$. Ясно, что существует последовательность φ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, возрастающих гомеоморфизмов отрезка I на отрезок Δ , сходящаяся к φ поточечно во внутренней (A, B) отрезка I . Каждый гомеоморфизм φ_ν можно продолжить до гомеоморфизма h_ν окружности так, что $\|f \circ h_\nu\|_{\mathbb{X}} \leq 2\rho(I, \Delta)$ и, следовательно,

$$\|\chi_I \cdot (f \circ h_\nu)\|_{\mathbb{X}} \leq 2c(|I|)\rho(I, \Delta). \quad (4)$$

Поскольку последовательность функций $f \circ \varphi_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, ограничена в $L^\infty(I)$ и на (A, B) сходится поточечно к $f \circ \varphi = G$, мы имеем

$$\|f \circ \varphi_\nu - G\|_{L^1(I)} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|\chi_I \cdot (f \circ h_\nu) - \chi_I G\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \|\chi_I \cdot (f \circ h_\nu - G)\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|f \circ h_\nu - G\|_{L^1(I)} = \|f \circ \varphi_\nu - G\|_{L^1(I)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

С учетом оценки (4) в соответствии со свойством (с) получаем соотношения (3).

Заметим далее, что для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда при всех j мы имеем $\varepsilon_j = +1$, поскольку в общем случае мы можем записать $g_\varepsilon = g_\varepsilon^+ - g_\varepsilon^-$, где

$$g_\varepsilon^+ = \sum_{j: \varepsilon_j = +1} \omega_j 1_{I_j}, \quad g_\varepsilon^- = \sum_{j: \varepsilon_j = -1} \omega_j 1_{I_j}.$$

Заметим также, что ввиду свойства (с) мы можем считать, что интервалы I_j имеют вид $I_j = [A_j, B_j]$, $A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < \dots < A_n < B_n$.

Пусть $x_0 = A$, $x_n = B$, и при $j = 1, 2, \dots, n-1$ пусть x_j – какая-то точка, лежащая строго между I_j и I_{j+1} , положим, например, $x_j = (B_j + A_{j+1})/2$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Рассмотрим две функции G_1, G_2 на $\mathbb{T}$, заданные на $[-\pi, \pi)$ следующим образом:

$$G_1(t) = \begin{cases} f(a_j), & \text{если } x_{j-1} \leq t < A_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ f(b_j), & \text{если } A_j \leq t < x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{если } -\pi \leq t < A \text{ или } B \leq t < \pi, \end{cases}$$

$$G_2(t) = \begin{cases} f(a_j), & \text{если } x_{j-1} \leq t < B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ f(b_j), & \text{если } B_j \leq t < x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{если } -\pi \leq t < A \text{ или } B \leq t < \pi. \end{cases}$$

Ясно, что функции G_1, G_2 принадлежат Ω , поэтому (см. (3)) $\chi_I G_1, \chi_I G_2 \in \mathbb{X}$, и $\|\chi_I G_1\|_{\mathbb{X}} \leq 2c(|I|)\rho(I, \Delta)$, $\|\chi_I G_2\|_{\mathbb{X}} \leq 2c(|I|)\rho(I, \Delta)$.

Легко увидеть, что

$$G_1 - G_2 = \sum_{j=1}^n \omega_j 1_{I_j} = g_\varepsilon.$$

Поскольку функция g_ε равна нулю на $[-\pi, \pi] \setminus I^0$, получаем

$$g_\varepsilon = \chi_I g_\varepsilon = \chi_I (G_1 - G_2) = \chi_I G_1 - \chi_I G_2 \in \mathbb{X},$$

и $\|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} = \|\chi_I G_1 - \chi_I G_2\|_{\mathbb{X}} \leq 4c(|I|)\rho(I, \Delta)$. Лемма доказана.

Через $V_2(f, \Delta, n)$ обозначим модуль квадратичной вариации функции f на отрезке $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$, а именно

$$V_2(f, \Delta, n) = \sup \left(\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^2 \right)^{1/2},$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subseteq \Delta$, $j = 1, 2, \dots, n$.

ЛЕММА 3. *В предположениях теоремы 1 относительно пространства $\mathbb{X}$ и функции f для любых двух отрезков I и Δ , содержащихся в $(-\pi, \pi)$, при всех $n = 1, 2, \dots$ имеем*

$$V_2(f, \Delta, n) \alpha_{\mathbb{X}} \left(\frac{1}{n} \right) \leq c(|I|)\rho(I, \Delta),$$

где $c(|I|)$ зависит только от длины $|I|$ отрезка I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что $\rho(I, \Delta) < \infty$, иначе доказывать нечего. Фиксируем n . Выберем произвольным образом точки $a_j, b_j \in \Delta$, $j = 1, 2, \dots, n$, $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$, и, как и выше, положим $\omega_j = f(b_j) - f(a_j)$. Пусть $I_1, I_2, \dots, I_n$ — занумерованные слева направо попарно непересекающиеся интервалы, содержащиеся в интервале I^0 длиной $|I|/2$, концентрическом с I . Пусть все интервалы $I_1, I_2, \dots, I_n$ имеют одинаковую длину, равную $2\delta_n$, которую мы выберем позже так, что

$$0 < 2\delta_n n < \frac{|I|}{2} \quad (5)$$

(это условие гарантирует существование интервалов I_j с указанным свойством).

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$. По лемме 2 для функции

$$g_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \omega_j 1_{I_j}$$

имеем $g_\varepsilon \in \mathbb{X}$ и $\|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \leq c(|I|)\rho(I, \Delta)$. Определим функцию G_ε ее разложением Фурье:

$$G_\varepsilon(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_\varepsilon(k)| e^{ikt}.$$

Ясно, что для любой последовательности $\varepsilon \in \{-1; 1\}^n$ функция G_ε принадлежит $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. Учитывая свойство (b) пространства $\mathbb{X}$, видим, что $G_\varepsilon \in \mathbb{X}$ и

$$\|G_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \leq \|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \leq c(|I|)\rho(I, \Delta).$$

Рассмотрим функцию G , получающуюся усреднением функций G_ε по всем наборам знаков $\varepsilon \in \{-1; 1\}^n$, а именно

$$G = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1; 1\}^n} G_\varepsilon.$$

Мы имеем

$$\|G\|_{\mathbb{X}} \leq c(|I|)\rho(I, \Delta). \quad (6)$$

При $j = 1, 2, \dots, n$ пусть γ_j – центр интервала I_j ; тогда

$$\widehat{1_{I_j}}(k) = e^{-i\gamma_j k} (1_{(-\delta_n, \delta_n)})^\wedge(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и, следовательно,

$$\widehat{g_\varepsilon}(k) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \omega_j e^{-i\gamma_j k} (1_{(-\delta_n, \delta_n)})^\wedge(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$\widehat{G_\varepsilon}(k) = \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \omega_j e^{-i\gamma_j k} \right| |(1_{(-\delta_n, \delta_n)})^\wedge(k)|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Перейдем в этом соотношении к среднему по расстановкам знаков $\varepsilon_j = \pm 1$, воспользовавшись неравенством Хинчина [14] (см. также [15, гл. 5, § 8])

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq c_1 \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n a_j r_j(\theta) \right| d\theta,$$

где $r_j(\theta) = \text{sign}(\sin(2^j \pi \theta))$, $j = 1, 2, \dots$, – функции Радемахера (константа $c_1 > 0$ не зависит ни от n , ни от коэффициентов $\{a_j\}$). Мы получаем

$$\left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^2 \right)^{1/2} |(1_{(-\delta_n, \delta_n)})^\wedge(k)| \leq c_1 \widehat{G}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда, учитывая свойство (b), видим, что

$$\left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^2 \right)^{1/2} \|1_{(-\delta_n, \delta_n)}\|_{\mathbb{X}} \leq c_1 \|G\|_{\mathbb{X}}.$$

Вместе с оценкой (6) это влечет

$$\left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^2 \right)^{1/2} \alpha_{\mathbb{X}}(\delta_n) \leq c_1 c(|I|)\rho(I, \Delta). \quad (7)$$

Выберем теперь δ_n , полагая $\delta_n = 1/(mn)$, где m – целое число такое, что

$$\frac{6}{|I|} \leq m < \frac{6}{|I|} + 1. \quad (8)$$

Ясно, что условие (5) выполнено. Разобьем интервал $(-1/n, 1/n)$ на m интервалов длиной $2\delta_n$. Каждый из этих интервалов получается сдвигом интервала $(-\delta_n, \delta_n)$, и поскольку из свойства (b) следует, что норма в $\mathbb{X}$ инвариантна относительно сдвига, мы имеем (см. (8))

$$\alpha_{\mathbb{X}}\left(\frac{1}{n}\right) = \|1_{(-1/n, 1/n)}\|_{\mathbb{X}} \leq m \|1_{(-\delta_n, \delta_n)}\|_{\mathbb{X}} = m \alpha_{\mathbb{X}}(\delta_n) \leq \left(\frac{6}{|I|} + 1\right) \alpha_{\mathbb{X}}(\delta_n).$$

Таким образом, из оценки (7) получаем

$$\left(\sum_{j=1}^n |\omega_j|^2\right)^{1/2} \alpha_{\mathbb{X}}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \left(\frac{6}{|I|} + 1\right) c_1 c(|I|) \rho(I, \Delta).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть f – непрерывная функция на $[-\pi, \pi]$ и $\tau(n)$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность положительных чисел. Предположим, что

$$V_2(f, [-\pi, \pi], n) \neq O(\tau(n)).$$

Тогда для произвольной последовательности положительных чисел d_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, найдутся последовательность отрезков $\Delta_\nu \subseteq (-\pi, \pi)$, $\nu = 1, 2, \dots$, вида $\Delta_\nu = [a_\nu, a_{\nu+1}]$ или вида $\Delta_\nu = [a_{\nu+1}, a_\nu]$ и последовательность целых положительных чисел n_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, такие, что $V_2(f, \Delta_\nu, n_\nu) > d_\nu \tau(n_\nu)$ при всех $\nu = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного отрезка $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$ пусть

$$Q(\Delta, n) = \frac{V_2(f, \Delta, n)}{\tau(n)}.$$

Заметим, что если $-\pi \leq a < b < c \leq \pi$, то

$$V_2(f, [a, c], n) \leq V_2(f, [a, b], n) + V_2(f, [b, c], n),$$

поэтому

$$Q([a, c], n) \leq Q([a, b], n) + Q([b, c], n).$$

Построим по индукции последовательность отрезков I_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, следующим образом. Положим $I_0 = [-\pi, \pi]$. Мы имеем

$$\sup_n Q(I_0, n) = \infty.$$

Пусть отрезок I_j такой, что

$$\sup_n Q(I_j, n) = \infty, \quad (9)$$

уже определен. Определим отрезок I_{j+1} . Пусть $I_j = [l_j, r_j]$, и пусть c_j – центр отрезка I_j . Рассмотрим левую и правую половины отрезка I_j , т. е. отрезки $I_j^- = [l_j, c_j]$, $I_j^+ = [c_j, r_j]$. Выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$\sup_n Q(I_j^-, n) = \infty, \quad \sup_n Q(I_j^+, n) = \infty.$$

Если выполнено первое соотношение, то обозначим через I_{j+1} отрезок I_j^- . Если первое соотношение не выполнено, то выполнено второе, и тогда мы полагаем $I_{j+1} = I_j^+$.

По построению мы получаем последовательность вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, содержащихся в $[-\pi, \pi]$, такую, что $|I_j| \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, и соотношение (9) выполнено при всех $j = 0, 1, 2, \dots$.

Ясно, что пересечение $\bigcap_{j=0}^{\infty} I_j$ содержит единственную точку t_0 и либо для любого отрезка вида $[t_0, a]$, $t_0 < a < \pi$, мы имеем

$$\sup_n Q([t_0, a], n) = \infty, \quad (10)$$

либо для любого отрезка $[a, t_0]$, $-\pi < a < t_0$, выполняется аналогичное соотношение. Рассмотрим первый случай (второй случай аналогичен).

Выберем a_1 , $t_0 < a_1 < \pi$, произвольно. Из (10) следует, что можно найти n_1 такое, что

$$Q([t_0, a_1], n_1) > d_1.$$

Поскольку функция f непрерывна, существует a_2 , $t_0 < a_2 < a_1$, такое, что

$$Q([a_2, a_1], n_1) > d_1.$$

Снова используя (10), найдем n_2 такое, что

$$Q([t_0, a_2], n_2) > d_2.$$

Существует a_3 , $t_0 < a_3 < a_2$, такое, что

$$Q([a_3, a_2], n_2) > d_2.$$

Продолжая по индукции, получаем требуемую последовательность чисел $\{n_\nu\}$ и отрезков $\{\Delta_\nu\}$. Лемма доказана.

Завершив доказательство теоремы. Легко увидеть, что

$$V_2(f, n) \leq 2V_2(f, [-\pi, \pi], n)$$

для любой 2π -периодической функции f . Поэтому, допустив, что заключение теоремы не верно, мы будем иметь

$$V_2(f, [-\pi, \pi], n) \neq O\left(\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Положим

$$\tau(n) = \frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}, \quad d_\nu = \nu c(2^{-\nu}),$$

где $c(y)$, $0 < y < 2\pi$, – та же функция, что в лемме 3. Пользуясь леммой 4, найдем отрезки $\Delta_\nu \subset (-\pi, \pi)$, $\nu = 1, 2, \dots$, вида $\Delta_\nu = [a_{\nu+1}, a_\nu]$ (накапливающиеся влево) или вида $\Delta_\nu = [a_\nu, a_{\nu+1}]$ (накапливающиеся вправо) и последовательность чисел n_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, с условием

$$V_2(f, \Delta_\nu, n_\nu) \geq \nu c(2^{-\nu}) \frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Определим отрезки I_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, следующим образом. В зависимости от того, накапливаются ли отрезки Δ_ν влево или вправо, полагаем соответственно $I_\nu = [2^{-\nu}, 2^{-\nu+1}]$ или $I_\nu = [-2^{-\nu+1}, -2^{-\nu}]$, $\nu = 1, 2, \dots$. Пользуясь леммой 3, получаем

$$V_2(f, \Delta_\nu, n_\nu) \leq c(2^{-\nu}) \rho(I_\nu, \Delta_\nu) \frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Вместе с оценкой (11) это влечет $\rho(I_\nu, \Delta_\nu) \geq \nu$ при всех ν . Следовательно (см. (2)), при каждом $\nu = 1, 2, \dots$ существует возрастающий гомеоморфизм φ_ν отрезка I_ν на отрезок Δ_ν такой, что если h – гомеоморфизм окружности, совпадающий с φ_ν на I_ν , то $\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq \nu/2$. Ясно, что существует гомеоморфизм h отрезка $[-\pi, \pi]$ на себя и, следовательно, гомеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$, совпадающий с φ_ν на I_ν при всех $\nu = 1, 2, \dots$. Для этого гомеоморфизма соотношение $\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq \nu/2$ выполняется при всех $\nu = 1, 2, \dots$, что невозможно. Теорема доказана.

Отметим теперь особую роль свойства (е). А именно, покажем, что если пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (а)–(d), но не обладает свойством (е), то всякая непрерывная функция, остающаяся в $\mathbb{X}$ после любой замены переменной, постоянна. При этом вместо свойства (b) достаточно потребовать, чтобы $\mathbb{X}$ обладало следующим более слабым свойством:

(b') если $f \in \mathbb{X}$, то при любом $\theta \in \mathbb{T}$ функция $f_\theta(t) = f(t + \theta)$ принадлежит $\mathbb{X}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$ обладает свойствами (а), (b'), (с), (d), но не обладает свойством (е). Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Предположим, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$. Тогда $f = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что вопреки утверждению теоремы функция f не постоянна. Тогда, поскольку f непрерывна, мы можем найти бесконечно много (попарно различных) точек $\theta_j \in (-\pi, \pi)$, $j = 1, 2, \dots$, таких, что в любой окрестности каждой точки θ_j функция f не постоянна. Переходя, при необходимости, к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательность θ_j , $j = 1, 2, \dots$, сходится. При каждом $j = 1, 2, \dots$, выбирая достаточно малую окрестность точки θ_j , мы получим последовательность попарно непересекающихся отрезков $I_j \subset (-\pi, \pi)$, $j = 1, 2, \dots$, таких, что последовательность их центров сходится и ни на каком из них функция f не является постоянной. Если мы предположим, что $\rho(I_j, I_j) = \infty$ при всех $j = 1, 2, \dots$, то при каждом j найдется возрастающий гомеоморфизм φ_j отрезка I_j на себя такой, что если гомеоморфизм h окружности совпадает с φ_j на I_j , то $\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq j$. Определим тогда отображение $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, полагая его

равным φ_j на I_j , $j = 1, 2, \dots$, и равным тождественному на $[-\pi, \pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Мы получим гомеоморфизм h окружности такой, что $\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq j$ при всех $j = 1, 2, \dots$, что невозможно. Таким образом, существует отрезок $I = I_{j_0}$, содержащийся в $(-\pi, \pi)$, такой, что f не постоянна на I и $\rho(I, I) < \infty$. Фиксируем этот отрезок I .

Пусть U – произвольный интервал, $U \subset I^0$ (как и выше, I^0 – интервал длиной $|I|/2$, концентрический с I). Выберем в I точки a_1, b_1 такие, что $f(a_1) \neq f(b_1)$, и положим $\omega = f(b_1) - f(a_1)$. Пользуясь леммой 2 при $n = 1$, $\Delta = I$ и $I_1 = U$, мы получаем $\omega 1_U \in \mathbb{X}$ и, следовательно, $1_U \in \mathbb{X}$.

Пусть теперь F – произвольный интервал, содержащийся в $(-\pi, \pi)$. Рассмотрим разбиение $F = \bigcup_{k=1}^N U_k$ интервала F попарно непересекающимися интервалами U_k , $k = 1, 2, \dots, N$, длиной, меньшей, чем $|I^0|$. Каждый такой интервал U_k получается сдвигом некоторого интервала, содержащегося в I^0 , поэтому с учетом свойства (b') имеем $1_{U_k} \in \mathbb{X}$, $k = 1, 2, \dots, N$, и, следовательно, $1_F \in \mathbb{X}$. Отсюда $1_E \in \mathbb{X}$ для любого интервала $E \subseteq \mathbb{T}$, что противоречит предположению теоремы. Теорема доказана.

§ 2. Устойчивое распределение коэффициентов Фурье

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем

$$\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +0;$$

(ii) функция f имеет ограниченную квадратичную вариацию.

Эта теорема ранее была анонсирована автором без доказательства в заметке [13]. Как мы увидим, справедлива также

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < 2$. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем

$$\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \quad \lambda \rightarrow +0;$$

(ii) $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$, $n \rightarrow \infty$, где $1/p + 1/q = 1$.

Обе теоремы немедленно вытекают из приведенной ниже теоремы 5, в которой мы рассмотрим пространства функций f таких, что

$$\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right), \quad \lambda \rightarrow +0,$$

где φ – произвольно заданная функция со следующими свойствами:

- (I) φ строго возрастает и непрерывна на некотором отрезке $[0, \lambda_0]$, $\varphi(0) = 0$ ($\lambda_0 > 0$);
- (II) функция $\varphi(\lambda)/\lambda$ неубывающая на $(0, \lambda_0]$;

(III) функция

$$G_{\varphi}(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{dt}{\varphi(t)}$$

почти убывает на $(0, \lambda_0]$, т. е.¹ $G_{\varphi}(y) \leq c G_{\varphi}(x)$ при $0 < x \leq y \leq \lambda_0$, где константа $c > 0$ не зависит от x и y .

Через φ^{-1} мы обозначаем функцию, обратную к φ .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. В предположении, что φ обладает свойствами (I)–(III), следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем

$$\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right), \quad \lambda \rightarrow +0;$$

(ii) $V_2(f, n) = O(n\varphi^{-1}(1/n))$, $n \rightarrow \infty$.

Нам потребуется следующая далее простая лемма, которая будет также использована в § 3 при выводе достаточных условий устойчивости в некоторых других пространствах.

Для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ положим

$$\Omega_n(f) = \left(\sum_{|k| \geq n} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

ЛЕММА 5. Пусть f – ограниченная измеримая функция на $\mathbb{T}$. Тогда при всех $n = 1, 2, \dots$

$$\Omega_n(f) \leq \frac{c}{\sqrt{n}} V_2(f, n),$$

где константа $c > 0$ не зависит от n и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ через $\omega_2(f, \delta)$ обозначим ее L^2 -модуль непрерывности:

$$\omega_2(f, \delta) = \sup_{0 \leq \theta \leq \delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t + \theta) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \delta > 0.$$

Если $0 < \theta \leq 1/n$, то при любом $x \in \mathbb{T}$ интервалы

$$\left(x + \frac{2\pi(k-1)}{n}, x + \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

¹Определение почти монотонной функции заимствовано нами из книги [16].

попарно не пересекаются. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t+\theta) - f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} |f(t+\theta) - f(t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left| f\left(x + \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right) - f\left(x + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right) \right|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sum_{k=1}^n \left| f\left(x + \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\right) - f\left(x + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right) \right|^2 dx \\
 &\leq \frac{1}{n} (V_2(f, n))^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} V_2(f, n),$$

и остается воспользоваться хорошо известной оценкой $\Omega_n(f) \leq c\omega_2(f, 1/n)$ (см., например, [8, гл. IX, § 2]). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Нам потребуется

ЛЕММА 6. Пусть f – ограниченная измеримая функция на $\mathbb{T}$. Пусть $V_2(f, n) = O(n\varphi^{-1}(1/n))$, $n \rightarrow \infty$, где φ – строго возрастающая непрерывная функция на $[0, \lambda_0]$, $\varphi(0) = 0$ ($\lambda_0 > 0$). Тогда

$$\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\hat{f}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right), \quad \lambda \rightarrow +0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие множества в $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 E(f, \lambda) &= \{k \in \mathbb{Z}: |\hat{f}(k)| > \lambda\}, \quad \lambda > 0, \\
 I_n &= \{k \in \mathbb{Z}: |k| \geq n\}, \quad J_n = \{k \in \mathbb{Z}: |k| < n\}, \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 5, видим, что при любых $\lambda > 0$ и $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{card}(E(f, \lambda) \cap I_n) &\leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k \in E(f, \lambda) \cap I_n} |\hat{f}(k)|^2 \\
 &\leq \frac{1}{\lambda^2} (\Omega_n(f))^2 \leq \frac{c^2}{\lambda^2 n} (V_2(f, n))^2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Вместе с тем,

$$\text{card}(E(f, \lambda) \cap J_n) \leq \text{card } J_n \leq 2n. \tag{14}$$

Складывая оценки (13) и (14), получаем

$$\text{card } E(f, \lambda) \leq 2n + \frac{c^2}{\lambda^2 n} (V_2(f, n))^2, \quad \lambda > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

По условию $V_2(f, n) \leq c_1 n \varphi^{-1}(1/n)$ при всех достаточно больших n , скажем при $n > n_0$. Следовательно,

$$\text{card } E(f, \lambda) \leq 2n + \frac{c_2}{\lambda^2} n \left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2, \quad \lambda > 0, \quad n > n_0.$$

Отсюда, считая, что $\lambda > 0$ достаточно мало, и выбирая целое $n > n_0$ так, что

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} \leq n < \frac{2}{\varphi(\lambda)},$$

получаем $\text{card } E(f, \lambda) \leq c_3/\varphi(\lambda)$. Лемма доказана.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) в теореме 5 немедленно вытекает из леммы 6 (условие (ii) инвариантно относительно гомеоморфизмов окружности).

Покажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Из условия (II) ясно, что функция $\varphi^{-1}(t)/t$ невозрастающая, поэтому если $c > 0$, то для всех достаточно малых $t > 0$ мы имеем

$$\frac{\varphi^{-1}(ct)}{(c+1)t} \leq \frac{\varphi^{-1}((c+1)t)}{(c+1)t} \leq \frac{\varphi^{-1}(t)}{t},$$

откуда

$$\varphi^{-1}(ct) = O(\varphi^{-1}(t)), \quad t \rightarrow +0 \quad (15)$$

(при любом $c > 0$). Таким образом, умножая при необходимости функцию φ на константу, мы, не ограничивая общности, можем считать, что $\varphi(\lambda_0) = 1$ и, следовательно, функция φ^{-1} определена на отрезке $[0, 1]$.

Положим

$$\xi(y) = \sum_{1 \leq k \leq y} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right), \quad y \in [1, +\infty),$$

и рассмотрим пространство Марцинкевича $\mathcal{X}$ последовательностей $x = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ комплексных чисел таких, что

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \sup_{E \subset \mathbb{Z}} \frac{1}{\xi(\text{card } E)} \sum_{k \in E} |x_k| < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем конечным непустым множествам E в $\mathbb{Z}$.

Напомним, что (см., например, [15, гл. XII], [17, гл. V]) если $x = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $x_k \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$, то последовательность $x^* = \{x_k^*, k = 1, 2, \dots\}$, полученная перестановкой в невозрастающем порядке членов последовательности $\{|x_k|, k \in \mathbb{Z}\}$, называется невозрастающей перестановкой последовательности x , т. е. мы полагаем

$$x_k^* = \inf\{\lambda: m(\lambda) \leq k\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$m(\lambda) = \text{card}\{n \in \mathbb{Z}: |x_n| > \lambda\}.$$

Последовательность x^* имеет ту же функцию распределения, что и x :

$$\text{card}\{k: x_k^* > \lambda\} = \text{card}\{k: |x_k| > \lambda\}, \quad \lambda > 0, \quad (16)$$

и если множество $E \subset \mathbb{Z}$ конечно, то

$$\sum_{k \in E} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\text{card } E} x_k^*. \quad (17)$$

Заметим теперь, что если

$$\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |x_k| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right), \quad \lambda \rightarrow +0, \quad (18)$$

то $x \in \mathcal{X}$. В самом деле, рассмотрим невозрастающую перестановку x^* последовательности x (условие (18) влечет $x_k \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$). Поскольку последовательности x и x^* имеют одинаковую функцию распределения (см. (16)) и последовательность x^* невозрастающая, мы получаем для всех достаточно больших номеров k

$$x_k^* \leq \varphi^{-1}\left(\frac{c}{k}\right),$$

где $c > 0$ не зависит от k . Отсюда (см. (15))

$$x_k^* = O\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, для любого конечного (непустого) множества $E \subset \mathbb{Z}$ имеем (см. (17))

$$\sum_{k \in E} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\text{card } E} x_k^* \leq c_1 \sum_{k=1}^{\text{card } E} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = c_1 \xi(\text{card } E),$$

и, следовательно, $x \in \mathcal{X}$.

Пусть $\mathbb{X}$ – пространство всех функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ таких, что $\widehat{f} \in \mathcal{X}$. Положим $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{X}}$.

Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и выполнено условие (i). Мы видим, что тогда для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$. Очевидно, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (a)–(d) (оператору Q_n в $\mathbb{X}$ соответствует оператор сдвига в $\mathcal{X}$, являющийся изометрией, поэтому пространство $\mathbb{X}$ обладает свойством (d) с показателем $\sigma = 0$). Мы также можем считать, что $\mathbb{X}$ обладает свойством (e), поскольку в противном случае по теореме 2 получаем $f = \text{const}$, и оценка (ii) очевидна.

Оценим $\alpha_{\mathbb{X}}(\delta)$. Прямое вычисление дает

$$\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k) = \frac{\sin k\delta}{\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad 0 < \delta < \pi. \quad (19)$$

Пусть

$$0 < \delta < \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Рассмотрим следующие промежутки в $\mathbb{Z}$:

$$I_m(\delta) = \left\{ k \in \mathbb{Z}: \frac{1}{\delta} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m \right) \leq k < \frac{1}{\delta} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что эти промежутки попарно не пересекаются. Пусть $N \geq 1$ целое. Рассмотрим множество

$$E(\delta, N) = \bigcup_{m=1}^N I_m(\delta).$$

При $k \in I_m(\delta)$ имеем $\sin k\delta \geq 1/2$ и $0 < k < 10m/\delta$, поэтому (см. (19))

$$|\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k)| = \left| \frac{\sin k\delta}{\pi k} \right| \geq \frac{\delta}{80m}, \quad k \in I_m(\delta), \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда, поскольку

$$\frac{1}{2\delta} \leq \text{card } I_m(\delta) \leq \frac{2}{\delta} \quad (21)$$

(см. (20)), видим, что

$$\sum_{k \in I_m(\delta)} |\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k)| \geq \frac{1}{160m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \in E(\delta, N)} |\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k)| = \sum_{m=1}^N \sum_{k \in I_m(\delta)} |\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k)| \geq \sum_{m=1}^N \frac{1}{160m} \geq \frac{1}{160} \ln(N+1).$$

Вместе с тем (см. (20), (21)),

$$1 \leq \frac{N}{2\delta} \leq \text{card } E(\delta, N) \leq \frac{2N}{\delta}.$$

Таким образом, при всех $0 < \delta < 1/2$ и $N = 1, 2, \dots$ получаем

$$\alpha_{\mathbb{X}}(\delta) = \|\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}\|_{\mathcal{X}} \geq \frac{1}{\xi(\text{card } E(\delta, N))} \sum_{k \in E(\delta, N)} |\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k)| \geq \frac{1}{\xi(2N/\delta)} \frac{\ln(N+1)}{160}.$$

Покажем, что

$$\inf_{N=1,2,3,\dots} \frac{\xi(2Nn)}{\ln(N+1)} \leq cn\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

(где $c > 0$ не зависит от n), тем самым, в силу теоремы 1 оценка (ii) теоремы 5 будет доказана².

Рассмотрим функцию J , являющуюся непрерывным аналогом функции ξ :

$$J(x) = \int_1^x \varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt, \quad x \in [1, +\infty).$$

Положим

$$F(x) = \frac{J(x)}{x\varphi^{-1}(1/x)}, \quad x \in [1, +\infty).$$

После замены переменной $t = 1/\varphi(\theta)$ и интегрирования по частям получаем

$$J(x) = \int_{\lambda_0}^{\varphi^{-1}(1/x)} \theta d\left(\frac{1}{\varphi(\theta)}\right) = x\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda_0 + \int_{\varphi^{-1}(1/x)}^{\lambda_0} \frac{d\theta}{\varphi(\theta)},$$

откуда имеем

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_0}{x\varphi^{-1}(1/x)} + G_{\varphi}\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

²Легко увидеть, что оценка (22) верна в случае $\varphi(\lambda) = \lambda^p$. Достаточно взять $N = 1$ при $p > 1$ и $N = n$ при $p = 1$.

и в силу условий (I)–(III) ясно, что функция F почти возрастает на $[1, +\infty)$, т. е. если $x \geq y \geq 1$, то $F(x) \geq cF(y)$, где константа $c > 0$ не зависит от x и y .

Положим

$$\gamma(x) = e^{F(x)}.$$

Мы имеем

$$(\ln J(x))' = \frac{J'(x)}{J(x)} = \frac{1}{xF(x)}, \quad x > 1,$$

и поскольку F почти возрастает, при всех $y > 1$ получаем

$$\ln \frac{J(\gamma(y)y)}{J(y)} = \int_y^{\gamma(y)y} \frac{dx}{xF(x)} \leq \frac{1}{cF(y)} \int_y^{\gamma(y)y} \frac{dx}{x} = \frac{1}{cF(y)} \ln \gamma(y) = \frac{1}{c}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{J(\gamma(y)y)}{J(y)} \leq c_1, \quad y > 1.$$

Следовательно,

$$\frac{J(\gamma(y)y)}{\ln \gamma(y)} \leq \frac{c_1 J(y)}{\ln \gamma(y)} = \frac{c_1 J(y)}{F(y)} = c_1 y \varphi^{-1}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y > 1 \quad (23)$$

(константа $c_1 > 0$ не зависит от y).

Заметим, далее, что

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \int_{k-1}^k \varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

поэтому при $\nu = 2, 3, \dots$

$$\sum_{k=2}^{\nu} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \leq J(\nu),$$

и, таким образом,

$$\xi(\nu) \leq c_2 J(\nu), \quad \nu = 2, 3, \dots, \quad (24)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от ν .

Фиксируем целое положительное n и положим $N = [\gamma(2n)]$, где $[a]$ – целая часть числа a . Тогда (см. (24), (23))

$$\frac{\xi(2Nn)}{\ln(N+1)} \leq \frac{c_2 J(2Nn)}{\ln \gamma(2n)} \leq \frac{c_2 J(\gamma(2n)2n)}{\ln \gamma(2n)} \leq c_2 c_1 2n \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq c_2 c_1 2n \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right),$$

и мы получаем оценку (22). Теорема 5, а с ней и теоремы 3, 4 доказаны.

Помимо теорем 3, 4 укажем еще один частный случай теоремы 5. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{\ln(1/\lambda)}, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2}, \quad \varphi(0) = 0.$$

Свойства (I)–(III) проверяются непосредственно. Ясно, что

$$c_1 x \ln \frac{1}{x} \leq \varphi^{-1}(x) \leq c_2 x \ln \frac{1}{x}$$

для всех достаточно малых $x > 0$. Таким образом, соответствующее необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид $V_2(f, n) = O(\ln n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неясно, существуют ли непостоянные функции $f \in C(\mathbb{T})$ такие, что $\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = o(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow +0$, для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Естественно предположить, что ответ на этот вопрос отрицательный. Отметим, что Г. Т. Ониани [18] анонсировал следующий результат: если $f \in C(\mathbb{T})$ и $\widehat{f \circ h}(n) = o(1/|n|)$ для любого гомеоморфизма h , то функция f постоянна³. Вообще, представляется естественным предположить, что $\text{card}\{k \in \mathbb{Z}: |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = o(1/\varphi(\lambda))$ для любого гомеоморфизма h тогда и только тогда, когда $V_2(f, n) = o(n\varphi^{-1}(1/n))$. Возможно также, что $\widehat{f \circ h}(n) = o(\gamma(|n|)/|n|)$ для любого гомеоморфизма h тогда и только тогда, когда $V(f, n) = o(\gamma(n))$.

В заключение этого параграфа обсудим связь между модулем вариации и модулем квадратичной вариации. Мы увидим, что условие $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$ в теореме 4 (условие (ii)) можно заменить эквивалентным условием $V(f, n) = O(n^{1/2+1/q})$ (см. ниже следствие 1).

Мы получим несколько более общий результат. Напомним, что при $\alpha \geq 1$ (только этот случай нетривиален) α -вариация $V_\alpha(f)$ функции f на $\mathbb{T}$ определяется следующим образом:

$$V_\alpha(f) = \sup \left(\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^\alpha \right)^{1/\alpha},$$

где верхняя грань берется по всем n и всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Определим модуль α -вариации $V_\alpha(f, n)$, полагая

$$V_\alpha(f, n) = \sup \left(\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^\alpha \right)^{1/\alpha},$$

где n фиксировано. Мы будем считать, что $\alpha > 0$.

ЛЕММА 7. Пусть f – функция на $\mathbb{T}$. Тогда:

- 1) если $\alpha > \beta > 0$, то $V_\beta(f, n) \leq n^{1/\beta-1/\alpha} V_\alpha(f, n)$, $n = 1, 2, \dots$;
- 2) при всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$ имеем

$$V_\alpha(f, n) \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{V_\beta(f, k)}{k^{1/\beta}} \right)^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha > \beta > 0$, полагая $p = \alpha/\beta$, $1/p + 1/q = 1$ и пользуясь неравенством Гёльдера, для любых попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T}$, $j = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^\beta &\leq \left(\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^{\beta p} \right)^{1/p} n^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|^\alpha \right)^{\beta/\alpha} n^{1-\beta/\alpha}, \end{aligned}$$

откуда получаем утверждение 1).

³В той же работе [18] указан без доказательства частный случай теоремы Ватермана при $\gamma(n) \equiv 1$ (см. введение). Работа [18] появилась двумя годами позже работы Д. Ватермана [3].

Докажем утверждение 2). Выберем произвольным образом попарно непересекающиеся интервалы $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T}$, $j = 1, 2, \dots, n$, и положим $\omega_j = f(b_j) - f(a_j)$. Пусть W_k , $k = 1, 2, \dots, n$, – перенумерованные в невозрастающем порядке величины $|\omega_j|$, $j = 1, 2, \dots, n$. Имеем $kW_k^\beta \leq W_1^\beta + W_2^\beta + \dots + W_k^\beta \leq (V_\beta(f, k))^\beta$, откуда $W_k \leq V_\beta(f, k)/k^{1/\beta}$. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^n |\omega_j|^\alpha = \sum_{k=1}^n W_k^\alpha \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{V_\beta(f, k)}{k^{1/\beta}} \right)^\alpha.$$

Лемма доказана.

Из леммы 7 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha > \beta > 0$. Пусть $\Psi(n)$, $n = 1, 2, \dots$, – положительная неубывающая последовательность такая, что

$$\inf_{n=1,2,\dots} \frac{\Psi(2n)}{\Psi(n)} > 1. \quad (25)$$

Тогда условия $V_\alpha(f, n) = O(\Psi(n))$ и $V_\beta(f, n) = O(n^{1/\beta-1/\alpha}\Psi(n))$ эквивалентны. В частности, при $\gamma > 0$ эквивалентны условия $V_2(f, n) = O(n^\gamma)$ и $V(f, n) = O(n^{\gamma+1/2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 1) леммы 7 очевидно, что если выполнено условие $V_\alpha(f, n) = O(\Psi(n))$, то $V_\beta(f, n) = O(n^{1/\beta-1/\alpha}\Psi(n))$.

Обратно, пусть $V_\beta(f, n) = O(n^{1/\beta-1/\alpha}\Psi(n))$. Пользуясь утверждением 2) леммы 7, при $m = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} (V_\alpha(f, 2^m - 1))^\alpha &\leq \sum_{k=1}^{2^m-1} \left(\frac{V_\beta(f, k)}{k^{1/\beta}} \right)^\alpha \leq c \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{(\Psi(k))^\alpha}{k} \\ &= c \sum_{j=1}^m \sum_{2^{j-1} \leq k < 2^j} \frac{(\Psi(k))^\alpha}{k} \leq c \sum_{j=1}^m (\Psi(2^j))^\alpha. \end{aligned}$$

В силу условия (25) последняя сумма оценивается своим старшим слагаемым:

$$\sum_{j=1}^m (\Psi(2^j))^\alpha \leq c_1 (\Psi(2^m))^\alpha,$$

поэтому

$$V_\alpha(f, 2^m - 1) \leq c_2 \Psi(2^m).$$

Для произвольного целого $n \geq 2$, выбирая $m = 1, 2, \dots$ так, что $2^m \leq n < 2^{m+1}$, и пользуясь очевидным соотношением $(V_\alpha(f, 2\nu))^\alpha \leq 2(V_\alpha(f, \nu))^\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} V_\alpha(f, n) &\leq V_\alpha(f, 2^{m+1}) \leq 4^{1/\alpha} V_\alpha(f, 2^m - 1) \leq 4^{1/\alpha} V_\alpha(f, 2^m - 1) \\ &\leq 4^{1/\alpha} c_2 \Psi(2^m) \leq 4^{1/\alpha} c_2 \Psi(n). \end{aligned}$$

Следствие доказано.

§ 3. Устойчивость в пространствах A_p , W_2^λ и некоторых других пространствах

Рассмотрим пространства A_p . Следующая теорема была анонсирована автором без доказательства в заметке [12].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 < p < 2$ и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда:

1) если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_2(f, n)}{n} \right)^p < \infty, \quad (26)$$

то $f \circ h \in A_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$; в частности, это так, если $V_2(f, n) = O(n^{1/q-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$ ($1/p + 1/q = 1$);

2) если $f \circ h \in A_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, то $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p^* = 2/p$, $1/p^* + 1/q^* = 1$. Пользуясь неравенством Гёльдера и леммой 5, получаем (см. (12))

$$\begin{aligned} \sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} |\widehat{f}(k)|^p &\leq \left(\sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} |\widehat{f}(k)|^{pp^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} 1 \right)^{1/q^*} \\ &\leq c 2^{j/q^*} (\Omega_{2^j}(f))^p \leq c_1 2^{-j(p-1)} (V_2(f, 2^j))^p. \end{aligned}$$

Ряд в (26) и ряд $\sum_{j \geq 0} 2^{-j(p-1)} (V_2(f, 2^j))^p$ сходятся одновременно, таким образом, (26) влечет $f \in A_p$. Поскольку условие (26) инвариантно относительно замен переменной, получаем утверждение 1).

Утверждение 2) немедленно следует из теоремы 4. Его можно также вывести непосредственно из теоремы 1. Очевидно, что пространство A_p обладает свойствами (а)–(е). Остается лишь заметить, что поскольку $\sin \alpha \geq \alpha/2$ при $0 \leq \alpha \leq 1$, то (см. (19))

$$|\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k)| = \left| \frac{\sin k\delta}{\pi k} \right| \geq \frac{\delta}{8}, \quad 1 \leq k \leq \frac{1}{\delta},$$

откуда, если $\delta > 0$ достаточно мало, получаем

$$\alpha_{A_p}(\delta) \geq \left(\sum_{1 \leq k \leq 1/\delta} (c\delta)^p \right)^{1/p} \geq c_1 \delta^{1/q}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 6 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $f \circ h \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$;
- (ii) при любом $\varepsilon > 0$ имеем $V_2(f, n) = O(n^\varepsilon)$, $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что условие (ii) в следствии 2 выполнено тогда и только тогда, когда функция f имеет ограниченную α -вариацию при всех $\alpha > 2$. Это легко увидеть, воспользовавшись леммой 7.

Рассмотрим пространства Соболева W_2^λ .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $0 < \lambda < 1/2$ и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда:

1) если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_2(f, n)}{n^{1-\lambda}} \right)^2 < \infty, \quad (27)$$

то $f \circ h \in W_2^\lambda(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$; в частности, это так, если $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$;

2) если $f \circ h \in W_2^\lambda(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, то $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 5, имеем (см. (12))

$$\sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} |\widehat{f}(k)|^2 |k|^{2\lambda} \leq 2^{(j+1)2\lambda} (\Omega_{2^j}(f))^2 \leq c 2^{-j(1-2\lambda)} (V_2(f, 2^j))^2.$$

Ряд в (27) и ряд $\sum_{j \geq 0} 2^{-j(1-2\lambda)} (V_2(f, 2^j))^2$ сходятся одновременно, поэтому условие (27) влечет $f \in W_2^\lambda$. Поскольку (27) инвариантно относительно замен переменной, получаем утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) заметим, что при $0 < \lambda < 1/2$ пространство W_2^λ обладает свойствами (а)–(е). (Свойство (d) выполнено с константой σ , равной λ .) Оценим $\alpha_{W_2^\lambda}(\delta) = \|1_{(-\delta, \delta)}\|_{W_2^\lambda}$. Как и выше, $|\widehat{1_{(-\delta, \delta)}}(k)| \geq c\delta$ при $1 \leq k \leq 1/\delta$, откуда

$$\alpha_{W_2^\lambda}(\delta) \geq \left(\sum_{1 \leq k \leq 1/\delta} (c\delta)^2 k^{2\lambda} \right)^{1/2} \geq c_1 \delta^{1/2-\lambda}.$$

Остается воспользоваться теоремой 1. Теорема доказана.

Ясно, что пространства $A(\mathbb{T})$ и $W_2^\lambda(\mathbb{T})$, $\lambda \geq 1/2$, не содержат характеристических функций интервалов, таким образом, по теореме 2 в этих пространствах устойчивыми непрерывными функциями являются лишь постоянные.

Дадим еще одно приложение теоремы 2. Напомним, что (см. [8], [15], [19]) если $f \in L^1(\mathbb{T})$, то функцией, сопряженной к f , называется функция

$$\widetilde{f}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H_\varepsilon(f)(t),$$

где

$$H_\varepsilon(f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |t-\theta| \leq \pi} \frac{f(\theta)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-\theta}{2}} d\theta, \quad \varepsilon > 0$$

(предел существует и конечен для почти всех $t \in \mathbb{T}$). Для $f \in L^2(\mathbb{T})$ имеем $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ и

$$\widetilde{f}(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} k) \widehat{f}(k) e^{ikt}.$$

Хорошо известно, что если $f \in L^p(\mathbb{T})$, то $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$. Вместе с тем существуют непрерывные функции, сопряженные к которым не принадлежат L^∞ . Усилением этого утверждения является следующая

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Предположим, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ мы имеем $\widetilde{f \circ h} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Тогда $f = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $\mathbb{X}$ всех функций $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ таких, что $\tilde{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Определим норму в $\mathbb{X}$, полагая $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|f\|_{L^\infty} + \|\tilde{f}\|_{L^\infty}$.

В предположениях теоремы имеем $f \circ h \in \mathbb{X}$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Ясно, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (а) и (b'). Убедимся, что $\mathbb{X}$ обладает свойствами (с) и (d).

Пусть последовательность функций $f_n \in \mathbb{X}$, $n = 1, 2, \dots$, сходится в $L^1(\mathbb{T})$ к функции f и $\|f_n\|_{\mathbb{X}} \leq 1$. Как известно, оператор $f \rightarrow \tilde{f}$ имеет слабый тип $(1-1)$, поэтому при любом $\delta > 0$ мера множества $\{t \in \mathbb{T}: |(\tilde{f}_n - \tilde{f})(t)| > \delta\}$ не превосходит $c\|f_n - f\|_{L^1}/\delta$, и мы видим, что последовательность $\tilde{f}_n$ сходится к $\tilde{f}$ по мере. Поскольку при этом $\|f_n\|_{L^\infty} + \|\tilde{f}_n\|_{L^\infty} \leq 1$, то $f, \tilde{f} \in L^\infty$ и $\|f\|_{L^\infty} + \|\tilde{f}\|_{L^\infty} \leq 1$. Таким образом, $\mathbb{X}$ обладает свойством (с).

Пусть $f \in \mathbb{X}$. Заметим, что

$$\left| \frac{e^{in\theta} - e^{int}}{2 \operatorname{tg} \frac{t-\theta}{2}} \right| \leq |n|, \quad 0 < |t - \theta| \leq \pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon(e_n f)(t) - e_n(t)H_\varepsilon(f)(t)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |t-\theta| \leq \pi} \frac{e^{in\theta} - e^{int}}{2 \operatorname{tg} \frac{t-\theta}{2}} f(\theta) d\theta \right| \\ &\leq 2|n| \|f\|_{L^\infty}, \quad t \in \mathbb{T}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|\widetilde{(e_n f)}(t) - e_n(t)\tilde{f}(t)| \leq 2|n| \|f\|_{L^\infty}$$

для почти всех $t \in \mathbb{T}$, и мы получаем

$$\|\widetilde{e_n f}\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{f}\|_{L^\infty} + 2|n| \|f\|_{L^\infty} \leq (1 + 2|n|) \|f\|_{\mathbb{X}}.$$

Следовательно,

$$\|e_n f\|_{\mathbb{X}} \leq (2 + 2|n|) \|f\|_{\mathbb{X}}.$$

Таким образом, $\|Q_n\| = O(|n|)$, и мы видим, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойством (d).

Вместе с тем легко проверить, что $\mathbb{X}$ не обладает свойством (е). Остается лишь воспользоваться теоремой 2. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь пространства мультипликаторов Фурье. Напомним, что если G – локально компактная абелева группа и Γ – группа, двойственная к G , то функция $m \in L^\infty(\Gamma)$ называется L^p -мультипликатором в случае, когда оператор Q , задаваемый соотношением $\widehat{Qg} = m\hat{g}$, $g \in L^p \cap L^2(G)$, является ограниченным оператором в $L^p(G)$. Здесь $1 \leq p \leq \infty$ и через $\hat{\cdot}$ обозначено преобразование Фурье. Пространство всех таких мультипликаторов обозначается через $M_p(\Gamma)$. Основные свойства мультипликаторов изложены в работах [20], [21]. Мы рассмотрим пространства $M_p(\mathbb{T})$ при $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 9. Для $1 < p < \infty$ положим $\tau_p = \max\{p, q\}$, $1/p + 1/q = 1$. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда:

1) если $V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p - \varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f \circ h \in M_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$;

2) если $f \circ h \in M_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, то $V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\alpha_p = \frac{1}{|1/p - 1/2|}, \quad p \neq 2.$$

Из результата, полученного Р. Койфманом, Х. Л. Рубио де Франсия и С. Семмесом [22, лемма 3], следует, что⁴ если f – функция на $\mathbb{T}$ такая, что $V_{\alpha_p - \varepsilon}(f) < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f \in M_p(\mathbb{T})$. (Позже этот результат был независимо получен В. А. Олевским [24], [25].)

Покажем, что если f – произвольная функция такая, что $V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p - \varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$, то выполнено условие Койфмана–Рубио де Франсия–Семмеса. Тем самым утверждение 1) будет доказано.

Пусть $V_2(f, n) \leq cn^{1/\tau_p - \varepsilon}$. Мы имеем

$$\frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{2}.$$

Выберем α так, что

$$\frac{\alpha_p}{1 + \alpha_p \varepsilon} < \alpha < \alpha_p.$$

Воспользуемся утверждением 2) леммы 7, положив $\beta = 2$. При всех $n = 1, 2, \dots$ получаем

$$(V_\alpha(f, n))^\alpha \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{ck^{1/\tau_p - \varepsilon}}{k^{1/2}} \right)^\alpha \leq c^\alpha \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{(1/\alpha_p + \varepsilon)\alpha}}.$$

Таким образом, $V_\alpha(f) < \infty$.

Докажем утверждение 2). Ввиду известного соотношения двойственности: $M_p = M_q$ при $1/p + 1/q = 1$, мы можем считать, что $1 < p < 2$. Остается воспользоваться очевидным включением $M_p(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$ и теоремой 6. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ранее В. А. Олевский [11] показал⁵, что если $f \circ h \in M_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма h , то $V_{\alpha_p + \varepsilon}(f) < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$. Этот результат следует из утверждения 2) теоремы 9. В самом деле, применяя утверждение 2) леммы 7 при $\alpha = \alpha_p + \varepsilon$ и $\beta = 2$, легко увидеть, что условие

⁴В указанной работе рассматриваются мультипликаторы на прямой; перенос на окружность немедленно получается применением теоремы Джодета [23]: если t есть 2π -периодическая функция на $\mathbb{R}$ и ее сужение на $[-\pi, \pi]$, продолженное нулем на $\mathbb{R}$, принадлежит $M_p(\mathbb{R})$, то $t \in M_p(\mathbb{T})$.

⁵Мы формулируем теорему 2 из работы [11] в несколько иной, чем в оригинале, но эквивалентной форме.

$V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p})$ влечет $V_{\alpha_p+\varepsilon}(f) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$. Отметим, что обратное неверно. Для функции

$$f(t) = |t|^{1/\alpha_p} \left(\ln \frac{1}{|t|} \right) \sin \frac{1}{|t|}, \quad 0 < |t| \leq \pi, \quad f(0) = 0,$$

имеем $V_{\alpha_p+\varepsilon}(f) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$, но $V_2(f, n) \geq cn^{1/\tau_p} \ln n$.

Отметим также, что, как мы видели, из условия, наложенного на функцию f в утверждении 1) теоремы 9, следует условие Койфмана–Рубио де Франсия–Семмеса. Легко увидеть, что на самом деле эти условия эквивалентны. Действительно, $V_2(f, n) \leq V_\alpha(f, n)n^{1/2-1/\alpha}$ при $\alpha > 2$ (см. утверждение 1) леммы 7), и, таким образом, если $V_\alpha(f) < \infty$ при некотором $\alpha < \alpha_p$, то $V_2(f, n) = O(n^\gamma)$ при некотором $\gamma < 1/\tau_p$.

Автору неизвестно, существуют ли функции, устойчивые в A_p и не являющиеся устойчивыми в M_p , $1 < p < 2$.

В заключение этого параграфа дадим простое доказательство отмеченной во введении теоремы Ватермана об устойчивом убывании коэффициентов Фурье. Наше доказательство основано на лемме 2. Прежде всего сформулируем теорему Ватермана⁶. Пусть $\gamma(y)$ – положительная неубывающая функция на $[1, +\infty)$ такая, что функция $\gamma(y)/y$ невозрастающая. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем

$$\widehat{f \circ h}(n) = O\left(\frac{\gamma(|n|)}{|n|}\right), \quad |n| \rightarrow \infty;$$

(ii) $V(f, n) = O(\gamma(n))$.

В доказательстве нуждается лишь импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) (см. введение). Рассмотрим пространство $\mathbb{X}$ функций $f \in L^1(\mathbb{T})$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathbb{X}} = |\widehat{f}(0)| + \sup_{k \neq 0} \frac{|k| |\widehat{f}(k)|}{\gamma(|k|)} < \infty.$$

Очевидно, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (a) и (c). Убедимся в том, что $\mathbb{X}$ обладает свойством (d). Для этого рассмотрим пространство $\mathcal{X}$ последовательностей $x = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ комплексных чисел, для которых

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = |x_0| + \sup_{k \neq 0} \frac{|k| |x_k|}{\gamma(|k|)} < \infty,$$

и оценим норму $\|S_n\|$ оператора сдвига $S_n: x \rightarrow S_n x$, $(S_n x)_k = x_{k+n}$, $k \in \mathbb{Z}$, в пространстве $\mathcal{X}$. Ясно, что $\|Q_n\| = \|S_{-n}\|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\gamma(1) = 1$. Пусть $n \neq 0$ и $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$. Пусть $k \neq 0$. Рассмотрим два случая: $|n+k| > |k|/2$ и $|n+k| \leq$

⁶В работе [3] рассмотрен случай произвольной функции f на $\mathbb{T}$. Мы рассматриваем только непрерывные функции.

$|k|/2$. В первом случае, поскольку функция $\gamma(y)/y$ невозрастающая, а $\gamma(y)$ неубывающая, имеем

$$|x_{k+n}| \leq \frac{\gamma(|k+n|)}{|k+n|} \leq \frac{\gamma(|k|/2)}{|k|/2} \leq 2 \frac{\gamma(|k|)}{|k|}. \quad (28)$$

Во втором случае имеем $|k| \leq 2|n|$, и если $k \neq -n$, то

$$|x_{k+n}| \leq \frac{\gamma(|k+n|)}{|k+n|} \leq \gamma(|k+n|) \leq \gamma\left(\frac{|k|}{2}\right) \leq \gamma(|k|) \leq 2|n| \frac{\gamma(|k|)}{|k|}, \quad (29)$$

а если $k = -n$, то

$$|x_{k+n}| = |x_0| \leq 1 \leq |n| \frac{\gamma(|k|)}{|k|}. \quad (30)$$

Из оценок (28)–(30) получаем

$$|x_{k+n}| \leq 2|n| \frac{\gamma(|k|)}{|k|}, \quad k \neq 0.$$

Вместе с тем $|x_n| \leq \gamma(|n|)/|n| \leq \gamma(1) = 1$. Таким образом, имеем

$$\|S_n\|_{\mathcal{X}} = |x_n| + \sup_{k \neq 0} \frac{|k| |x_{k+n}|}{\gamma(|k|)} \leq 1 + 2|n|.$$

Следовательно, $\|S_n\| \leq 1 + 2|n|$, и мы видим, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойством (d).

Завершим доказательство. Через $V(f, \Delta, n)$ обозначим модуль вариации функции f на отрезке $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$, т. е.

$$V(f, \Delta, n) = \sup \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)|,$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subseteq \Delta$, $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть I и Δ – два произвольных отрезка, содержащихся в $(-\pi, \pi)$. Пусть выполнено условие (i) и, следовательно, $f \circ h \in \mathbb{X}$ для любого гомеоморфизма h . Покажем, что тогда

$$V(f, \Delta, n) \leq c(|I|)\rho(I, \Delta)\gamma(n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где $c(|I|)$ зависит только от длины $|I|$ отрезка I и $\rho(I, \Delta)$ определено соотношением (2). Будем считать, что $\rho(I, \Delta) < \infty$, иначе доказывать нечего. Фиксируем n . Пусть I^0 – интервал длиной $|I|/2$, концентрический с I . Пусть a – левый конец интервала I^0 . Выберем целое m так, что

$$\frac{8\pi}{|I|} \leq m < \frac{8\pi}{|I|} + 1, \quad (32)$$

и рассмотрим интервалы I_j длиной $\pi/(mn)$ с центрами $a + 2\pi j/(mn)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что эти интервалы содержатся в I^0 и попарно не пересекаются. По лемме 2, сохраняя ее обозначения, имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \omega_j 1_{I_j} \right\|_{\mathbb{X}} \leq c(|I|)\rho(I, \Delta)$$

для произвольных чисел $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда, вычисляя коэффициенты Фурье, получаем

$$\left| \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \omega_j e^{-i(a + \frac{2\pi j}{mn})k} \right) \frac{\sin(\pi k / (2mn))}{\pi k} \right| \leq c(|I|) \rho(I, \Delta) \frac{\gamma(|k|)}{|k|}, \quad k \neq 0.$$

Полагая в этом соотношении $k = mn$, имеем

$$\left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \omega_j \right| \leq \pi c(|I|) \rho(I, \Delta) \gamma(mn),$$

и, таким образом, поскольку числа $\varepsilon_j = \pm 1$ произвольны, получаем

$$\sum_{j=1}^n |\omega_j| \leq 2\pi c(|I|) \rho(I, \Delta) \gamma(mn). \quad (33)$$

Заметим, далее, что $\gamma(mn)/(mn) \leq \gamma(n)/n$, поэтому (см. (32))

$$\gamma(mn) \leq m\gamma(n) \leq \left(\frac{8\pi}{|I|} + 1 \right) \gamma(n),$$

и из (33) следует оценка (31) (с другой константой $c(|I|)$).

Легко увидеть, что справедливо утверждение, аналогичное лемме 4 для модуля вариации вместо модуля квадратичной вариации (чтобы убедиться в этом, достаточно всюду в доказательстве леммы 4 заменить $V_2(\dots)$ на $V(\dots)$). Пользуясь этим вариантом леммы 4 и оценкой (31), завершаем доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii), повторяя с очевидными изменениями рассуждения, использованные в конце доказательства теоремы 1.

§ 4. Многомерный случай

Рассмотрим пространства $A_p(\mathbb{T}^d)$, $1 < p < 2$, состоящие из интегрируемых функций f на торе $\mathbb{T}^d$ таких, что $\widehat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^d)$, т. е.

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^d)} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Покажем, что, в отличие от одномерного случая (рассмотренного в § 3), в многомерном случае в пространствах A_p , $1 < p < 2$, нет нетривиальных непрерывных устойчивых функций. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 10. Пусть f – непрерывная функция на $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, такая, что $f \circ h \in \bigcup_{1 < p < 2} A_p(\mathbb{T}^d)$ для любого гомеоморфизма h тора $\mathbb{T}^d$ на себя. Тогда $f = \text{const}$.

Этот результат вытекает из следующей далее теоремы 11.

Пусть $\mathbb{X}$ – линейное нормированное пространство функций на торе $\mathbb{T}^d$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Мы предполагаем, что $\mathbb{X}$ обладает следующими свойствами (аналогичными свойствам (a), (b'), (c), (d)):

- (А) $\mathbb{X} \subseteq L^1(\mathbb{T}^d)$ (мы отождествляем функции, совпадающие почти всюду);
 (В) если $f \in \mathbb{X}$, то для любого $\theta \in \mathbb{T}^d$ функция $f_\theta(t) = f(t+\theta)$ принадлежит $\mathbb{X}$ и $\|f_\theta\|_{\mathbb{X}} \leq \|f\|_{\mathbb{X}}$;
 (С) если $f_n \in \mathbb{X}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность функций, сходящаяся к f в $L^1(\mathbb{T}^d)$, и $\|f_n\|_{\mathbb{X}} \leq c$, $n = 1, 2, \dots$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \leq c$;
 (D) при любом $n \in \mathbb{Z}^d$ оператор $Q_n: f \rightarrow e_n f$ умножения на экспоненту $e_n(t) = e^{i(n,t)}$, $t \in \mathbb{T}^d$, где (n, t) – скалярное произведение, является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$ и существует $\sigma \geq 0$ такое, что $\|Q_n\| = O(|n|^\sigma)$, $|n| \rightarrow \infty$, где $|n|$ – длина целочисленного вектора n .

ТЕОРЕМА 11. Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на торе $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, обладает свойствами (А)–(D). Допустим, что существует непрерывная непостоянная функция f на $\mathbb{T}^d$ такая, что для любого гомеоморфизма h тора $\mathbb{T}^d$ на себя мы имеем $f \circ h \in \mathbb{X}$. Тогда $L^\infty(\mathbb{T}^d) \subseteq \mathbb{X}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{X}} \leq c \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}$.

Прежде чем доказывать эту теорему, покажем, как из нее следует теорема 10. Рассмотрим пространство Марцинкевича $\mathcal{X}$ последовательностей $x = \{x_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$ комплексных чисел таких, что

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \sup_{E \subset \mathbb{Z}^d} \frac{\ln(\text{card } E)}{(\text{card } E)^{1/2}} \sum_{k \in E} |x_k| < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем конечным (непустым) множествам $E \subset \mathbb{Z}^d$. Пусть $\mathbb{X}$ – пространство всех интегрируемых функций на $\mathbb{T}^d$ таких, что $\hat{f} \in \mathcal{X}$ с нормой $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{X}}$. Ясно, что $\mathbb{X}$ обладает свойствами (А)–(D).

Рассмотрим полиномы Рудина–Шапиро, т. е. полиномы вида

$$P_N(t) = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n e^{int}, \quad \varepsilon_n = \pm 1, \quad t \in \mathbb{T},$$

для которых $\|P_N\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq 5\sqrt{N}$ (см., например, [19, гл. 4, § 4]). Рассмотрим функцию g_N на $\mathbb{T}^d$, полагая $g_N(t) = P_N(t_1)$ для $t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d$. Мы видим, что $\|g_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \leq 5N^{1/2}$ и вместе с тем $\|g_N\|_{\mathbb{X}} \geq N^{1/2} \ln N$ при всех $N \geq 1$. Таким образом, по теореме 11 любая непрерывная функция, устойчивая в $\mathbb{X}$, постоянна. Остается заметить, что, пользуясь неравенством Гёльдера, мы имеем

$$\sum_{k \in E} |x_k| \leq \|x\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)} (\text{card } E)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

поэтому $\bigcup_{1 < p < 2} l^p(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathcal{X}$ и, следовательно, $\bigcup_{1 < p < 2} A_p(\mathbb{T}^d) \subseteq \mathbb{X}$. Теорема 10 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Всюду в доказательстве под кубом мы понимаем куб в $\mathbb{R}^d$ с ребрами, параллельными координатным осям. Для произвольного куба I пусть I^0 – куб, концентрический с I и имеющий вдвое меньшее ребро. Если $E \subseteq \mathbb{T}^d$ – измеримое множество, то, как и в одномерном случае, через $|E|$ мы обозначаем его лебегову меру и через 1_E – его характеристическую функцию. Аналогично, если E – измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, содержащееся

в $(-\pi, \pi)^d$, то $|E|$ – его мера Лебега и 1_E – функция на $\mathbb{T}^d$, равная 1 на E и равная 0 на дополнении $[-\pi, \pi]^d \setminus E$. Через $E \Delta F$ мы обозначаем симметрическую разность множеств E и F .

Для произвольного куба $I \subseteq (-\pi, \pi)^d$ пусть χ_I – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{T}^d$, равная 1 на I^0 и равная 0 на $[-\pi, \pi]^d \setminus I$. Повторяя с очевидными изменениями доказательство леммы 1, легко увидеть, что в силу свойств (A), (C), (D) оператор умножения на любую бесконечно дифференцируемую функцию, и в частности на χ_I , является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$.

Пусть I – какой-то замкнутый куб, содержащийся в $(-\pi, \pi)^d$, и φ – гомеоморфизм куба I на себя, тождественный на его границе. Всякий такой гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма тора $\mathbb{T}^d$; например, можно продолжить φ до гомеоморфизма h куба $[-\pi, \pi]^d$ на себя, тождественного на границе. Всякий такой гомеоморфизм h порождает гомеоморфизм тора.

В предположениях теоремы относительно f положим для произвольного замкнутого куба $I \subset (-\pi, \pi)^d$

$$\rho(I) = \sup_{\varphi: I \rightarrow I} \inf_{h|_I = \varphi} \|f \circ h\|_{\mathbb{X}},$$

где верхняя грань берется по всем гомеоморфизмам φ куба I на себя, тождественным на его границе, и нижняя грань берется по всем гомеоморфизмам h тора $\mathbb{T}^d$ на себя, совпадающим с φ на I .

Заметим, что существует замкнутый куб $I \subset (-\pi, \pi)^d$ такой, что f не постоянна на I и $\rho(I) < \infty$. Действительно, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, легко увидеть, что мы можем выбрать бесконечную последовательность попарно непересекающихся замкнутых кубов I_j , $j = 1, 2, \dots$, в $(-\pi, \pi)^d$ таких, что ни на каком из них f не является постоянной и последовательность центров кубов I_j сходится. Если мы предположим, что для всех кубов I_j , $j = 1, 2, \dots$, мы имеем $\rho(I_j) = \infty$, то при каждом $j = 1, 2, \dots$ мы найдем гомеоморфизм φ_j куба I_j на себя, тождественный на его границе и такой, что если гомеоморфизм h тора совпадает с φ_j на I_j , то

$$\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq j. \quad (34)$$

Определим тогда отображение h тора в себя, полагая его равным φ_j на I_j при $j = 1, 2, \dots$ и равным тождественному на дополнении $[-\pi, \pi]^d \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Очевидно, что h – гомеоморфизм тора $\mathbb{T}^d$ на себя и соотношение (34) выполнено при всех $j = 1, 2, \dots$, что невозможно.

Фиксируем куб I такой, что f не постоянна на I и $\rho(I) < \infty$.

Выберем два значения a_0 и a_1 , $a_0 \neq a_1$, принимаемые функцией f во внутренности куба I . Для произвольного множества $U \subseteq I^0$ положим

$$F^U = \chi_I \cdot (a_0 1_{I \setminus U} + a_1 1_U).$$

Пусть U – произвольная замкнутая область в I^0 , гомеоморфная замкнутому кубу. Покажем, что

$$F^U \in \mathbb{X}, \quad \|F^U\|_{\mathbb{X}} \leq c, \quad (35)$$

где $c > 0$ не зависит от U .

Пусть t_0 и t_1 – точки, лежащие во внутренности куба I , такие, что $f(t_0) = a_0$, $f(t_1) = a_1$ (мы имеем $t_0 \neq t_1$). Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем во внутренности куба I такие замкнутые кубы B_0^ε и B_1^ε с центрами t_0, t_1 соответственно, что $B_0^\varepsilon \cap B_1^\varepsilon = \emptyset$ и

$$|f(t) - a_0| < \varepsilon \quad \text{при } t \in B_0^\varepsilon, \quad |f(t) - a_1| < \varepsilon \quad \text{при } t \in B_1^\varepsilon.$$

Ясно, что мы можем найти замкнутую область W_ε , содержащуюся во внутренности куба I и гомеоморфную замкнутому кубу, такую, что

$$W_\varepsilon \cap U = \emptyset, \quad |I \setminus (W_\varepsilon \cup U)| < \varepsilon. \quad (36)$$

Пусть φ_ε – гомеоморфизм куба I на себя, тождественный на его границе и такой, что $\varphi_\varepsilon(W_\varepsilon) = B_0^\varepsilon$ и $\varphi_\varepsilon(U) = B_1^\varepsilon$. Существует гомеоморфизм h_ε тора, совпадающий с φ_ε на I и удовлетворяющий условию

$$\|f \circ h_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \leq 2\rho(I).$$

Мы имеем

$$|f \circ h_\varepsilon(t) - a_0| < \varepsilon \quad \text{при } t \in W_\varepsilon, \quad |f \circ h_\varepsilon(t) - a_1| < \varepsilon \quad \text{при } t \in U. \quad (37)$$

Положим $F_\varepsilon = \chi_I \cdot (f \circ h_\varepsilon)$. Пусть норма оператора умножения на χ_I в $\mathbb{X}$ равна c_1 . Тогда $\|F_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \leq c_1 2\rho(I)$. Вместе с тем $\|F_\varepsilon - F^U\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. (36), (37)), откуда в силу свойства (C) получаем соотношения (35).

Пусть U_ε – произвольный замкнутый куб, содержащийся в I^0 , такой, что $|U_\varepsilon| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Подставляя U_ε вместо U в (35) и устремляя ε к нулю, видим, что соотношения (35) верны в случае $U = \emptyset$.

Заметим, далее, что (как и выше, мы считаем, что $U \subseteq I^0$)

$$F^U - F^\emptyset = (a_1 - a_0)1_U.$$

Таким образом, для любой замкнутой области $U \subseteq I^0$, гомеоморфной замкнутому кубу, получаем

$$1_U \in \mathbb{X}, \quad \|1_U\|_{\mathbb{X}} \leq c, \quad (38)$$

где $c > 0$ не зависит от U .

Покажем теперь, что для произвольного измеримого множества $E \subseteq I^0$ мы имеем

$$1_E \in \mathbb{X}, \quad \|1_E\|_{\mathbb{X}} \leq c, \quad (39)$$

где константа $c > 0$ не зависит от E . Чтобы показать это, мы просто аппроксимируем E (замкнутыми) областями, гомеоморфными замкнутому кубу. А именно, пусть $\varepsilon > 0$. Мы можем найти конечное семейство кубов $I_j \subseteq I^0$, $j = 1, 2, \dots, N$, таких, что их внутренности попарно не пересекаются и

$$\left| E \Delta \bigcup_{j=1}^N I_j \right| < \varepsilon.$$

Заменяя при необходимости кубы I_j , $j = 1, 2, \dots, N$, замкнутыми концентрическими кубами с чуть меньшими ребрами, мы можем считать, что эти кубы замкнуты, попарно не пересекаются и лежат во внутренности куба I^0 . Пусть, далее, V – замкнутый куб, содержащийся во внутренности куба I^0 , не пересекающийся с объединением $\bigcup_{j=1}^N I_j$ и такой, что $|V| < \varepsilon$. При каждом $j = 1, 2, \dots, N$ соединим центр куба I_j с центром куба V конечноточечной ломаной без самопересечений. Обозначим соответствующие ломаные через γ_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Очевидно, что можно добиться того, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) все ломаные γ_j лежат во внутренности куба I^0 ;
- 2) никакие две различные ломаные не имеют общих точек, кроме центра куба V ;
- 3) каждая ломаная γ_j имеет лишь одну точку пересечения с границей куба I_j и лишь одну точку пересечения с границей куба V ;
- 4) $\gamma_j \cap I_k = \emptyset$ при $j \neq k$.

Пусть $\Gamma_j(\delta)$ – замкнутая δ -окрестность ломаной γ_j . Если $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $|\bigcup_{j=1}^N \Gamma_j(\delta_\varepsilon)| < \varepsilon$ и множество

$$U_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^N I_j \cup \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j(\delta_\varepsilon) \cup V$$

содержится в I^0 и гомеоморфно замкнутому кубу. Пользуясь соотношениями (38), мы видим, что $1_{U_\varepsilon} \in \mathbb{X}$ и $\|1_{U_\varepsilon}\|_{\mathbb{X}} \leq c$, где $c > 0$ не зависит от ε и E . Вместе с тем мы имеем $|E \Delta U_\varepsilon| < 3\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно взять сколь угодно малым, свойство (C) влечет (39).

Фиксируем теперь замкнутый куб J , содержащийся в I^0 , с ребром длиной $2\pi/M$, где $M \geq 1$ целое. Рассмотрим разбиение $[-\pi, \pi]^d = \bigcup_{k=1}^{M^d} J_k$ куба $[-\pi, \pi]^d$ кубами J_k , $k = 1, 2, \dots, M^d$, которые имеют попарно непересекающиеся внутренности и получены из J сдвигами. Пусть E – произвольное измеримое множество в $(-\pi, \pi)^d$. Из (39) и свойства (B) следует, что $1_{E \cap J_k} \in \mathbb{X}$ и $\|1_{E \cap J_k}\|_{\mathbb{X}} \leq c$ при всех $k = 1, 2, \dots, M^d$, откуда $1_E \in \mathbb{X}$ и $\|1_E\|_{\mathbb{X}} \leq c_1$, где $c_1 = cM^d$. Следовательно, соотношения (39) верны для любого измеримого множества $E \subseteq (-\pi, \pi)^d$ (с константой c_1 вместо c). Таким образом, для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{T}^d$ мы имеем $1_E \in \mathbb{X}$ и $\|1_E\|_{\mathbb{X}} \leq c_1$, где c_1 не зависит от E .

Завершим доказательство теоремы. Пусть $g \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$, $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} = 1$. Пусть сначала g – вещественная функция. Тогда g может быть приближена в $L^1(\mathbb{T}^d)$ функциями вида

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1_{E_{k,n}^+} - 1_{E_{k,n}^-}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$E_{k,n}^+ = \left\{ t: g(t) \geq \frac{k}{n} \right\}, \quad E_{k,n}^- = \left\{ t: g(t) \leq -\frac{k}{n} \right\}.$$

Мы имеем $g_n \in \mathbb{X}$, $\|g_n\|_{\mathbb{X}} \leq 2c_1$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и $g_n \rightarrow g$ в $L^1(\mathbb{T}^d)$. По свойству (C) получаем $g \in \mathbb{X}$ и $\|g\|_{\mathbb{X}} \leq 2c_1$. Для комплекснозначной функции g достаточно рассмотреть ее вещественную и мнимую части. Теорема доказана.

Список литературы

1. C. Goffman, D. Waterman, “Functions whose Fourier series converge for every change of variable”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:1 (1968), 80–86.
2. A. Baernstein, D. Waterman, “Functions whose Fourier series converge uniformly for every change of variable”, *Indiana Univ. Math. J.*, **22** (1972), 569–576.

3. D. Waterman, "On the preservation of the order of magnitude of Fourier coefficients under every change of variable", *Analysis*, **6**:2–3 (1986), 255–264.
4. З. А. Чантурия, "Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье", *Докл. АН СССР*, **214**:1 (1974), 63–66; англ. пер.: Z. A. Chanturiya, "The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series", *Soviet Math. Dokl.*, **15** (1974), 67–71.
5. З. А. Чантурия, "Об абсолютной сходимости рядов Фурье", *Матем. заметки*, **18**:2 (1975), 185–192; англ. пер.: Z. A. Chanturiya, "Absolute convergence of Fourier series", *Math. Notes*, **18**:2 (1975), 695–700.
6. З. А. Чантурия, "О равномерной сходимости рядов Фурье", *Матем. сб.*, **100**(142):4(8) (1976), 534–554; англ. пер.: Z. A. Čanturija, "On uniform convergence of Fourier series", *Math. USSR-Sb.*, **29**:4 (1976), 475–495.
7. Е. А. Севастьянов, "Кусочно монотонная аппроксимация и Ф-вариация", *Anal. Math.*, **1**:2 (1975), 141–164.
8. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
9. А. М. Олевский, "Модификация функций и ряды Фурье", *УМН*, **40**:3 (1985), 157–193; англ. пер.: A. M. Olevskii, "Modifications of functions and Fourier series", *Russian Math. Surveys*, **40**:3 (1985), 181–224.
10. А. М. Олевский, "Гомеоморфизмы окружности, модификации функций и ряды Фурье", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, USA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 976–989.
11. V. Olevskii, "Variation, homeomorphisms, and Fourier multipliers", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325**:6 (1997), 639–644.
12. В. В. Лебедев, "О функциях на окружности, всякая суперпозиция которых с гомеоморфизмом принадлежит пространству $A_p(T)(= \mathcal{F}l^p)$ ", *Тез. докл. 9-й Саратовской зимней школы, Современные проблемы теории функций и их приложения* (Сарат. унив., 1997), Саратов, 1998, 100.
13. V. Lebedev, "Superposition operators and distribution of Fourier coefficients", *12-th Summer St. Petersburg Meeting in Math. Analysis* (2003, Abstracts, Euler Int. Math. Inst.), St. Petersburg, 2003, 23.
14. A. Khintchine, "Über dyadische Brüche", *Math. Z.*, **18**:1 (1923), 109–116.
15. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vols. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
16. С. Н. Бернштейн, *Полное собрание сочинений*, т. 2. *Конструктивная теория функций*, Изд-во АН СССР, М., 1954.
17. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
18. Г. Т. Ониани, "Топологическая характеристика некоторых классов непрерывных функций, ряды Фурье которых сходятся равномерно", *Сообщ. АН ГрузССР*, **132**:2 (1988), 261–263.
19. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
20. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
21. R. E. Edwards, G. I. Gaudry, *Littlewood–Paley and multiplier theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

22. R. Coifman, J. L. Rubio de Francia, S. Semmes, “Multiplicateurs de Fourier de $L^p(\mathbb{R})$ et estimations quadratiques”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **306**:8 (1988), 351–354.
23. M. Jodeit, jr., “Restrictions and extensions of Fourier multipliers”, *Studia Math.*, **34** (1970), 215–226.
24. V. Olevskii, “A note on multiplier transformations”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1** (1994), 13–17.
25. V. Olevskii, “Addendum to «A note on multiplier transformations»”, *Internat. Math. Res. Notices*, **7** (1994), 311.

В. В. ЛЕБЕДЕВ (V. V. LEBEDEV)

Московский государственный институт

электроники и математики (технический университет)

E-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило в редакцию

12.11.2007