Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Кузьмин, Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. V. Рост ℓ -адического регулятора в круговом $\mathbb{Z}_\ell$ -расширении поля алгебраических чисел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 5, 105–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:56:16

УДК 519.4

Л. В. Кузьмин

Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. V. Рост ℓ -адического регулятора в круговом $\mathbb{Z}_\ell$ -расширении поля алгебраических чисел

Для поля алгебраических чисел k , являющегося либо полем CM-типа (вещественным или мнимым), либо полем, имеющим абелевы пополнения в точках над ℓ и удовлетворяющим слабой гипотезе о ℓ -адическом регуляторе [1], и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞ найдены формулы, представляющие для всех достаточно больших n ℓ -адический показатель числа $R_\ell(k_{n+1})/R_\ell(k_n)$, где $R_\ell(k_n)$ – ℓ -адический регулятор в смысле [1]. Обсуждается смысл инвариантов Ивасава, входящих в эти формулы, и сходство полученных результатов с теоремой Брауэра–Зигеля.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: теория Ивасава, круговые $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения, ℓ -адический регулятор, инварианты Ивасава.

§ 1. Введение

Пусть k – поле алгебраических чисел и ℓ – фиксированное простое число. Пусть $U(k)$ – группа единиц поля k , $U(k)[\ell]$ – ее про- ℓ -пополнение и $U(k_v)$ – группа единиц пополнения k_v поля k относительно точки v . Известная гипотеза Леопольдта утверждает, что естественное диагональное вложение $U(k) \hookrightarrow \prod_{v \in S} U(k_v)$, где S – множество всех точек, лежащих над ℓ , индуцирует вложение

$$\alpha(k): U(k)[\ell] \rightarrow \prod_{v \in S} U(k_v). \quad (1.1)$$

Для вполне вещественного поля k гипотеза Леопольдта равносильна утверждению, что ℓ -адический регулятор $R_\ell(k)$ отличен от нуля [2].

Известна (и доказана) *слабая гипотеза Леопольдта*, утверждающая, что для промежуточных подполей k_n кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k группы $E_n := \text{Ker } \alpha(k_n)$ стабилизируются, начиная с некоторого n .

В [1] автор предложил другое определение ℓ -адического регулятора, которое, в отличие от обычного определения, имеет смысл не только для вполне вещественного, а для любого поля алгебраических чисел k . Этот новый регулятор мы обозначаем через $R_\ell(k)$ и даем его подробное определение в § 2 (определение 2.1).

В [1] была высказана *гипотеза о ℓ -адическом регуляторе*, утверждающая, что $R_\ell(k) \neq 0$ для любого поля алгебраических чисел k .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00777).

Для вполне вещественного k эта гипотеза эквивалентна гипотезе Леопольдта, но в общем случае гипотеза о ℓ -адическом регуляторе строго сильнее. Она утверждает, что билинейная форма

$$S_k: \prod_{v \in S} U(k_v) \times \prod_{v \in S} U(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell, \quad (x, y) \rightarrow \mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}(\log x \log y), \quad (1.2)$$

где $\log$ – ℓ -адический логарифм (см. (2.1)) и $\mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}$ – след из $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ в $\mathbb{Q}_\ell$, с помощью отображения (1.1) индуцирует невырожденную билинейную форму на группе $(U(k)/\mu(k))[\ell]$; здесь $\mu(k)$ – группа всех корней из единицы в поле k . По существу, $R_\ell(k)$ определяется как детерминант матрицы этой билинейной формы.

Наше определение регулятора позволяет для любого конечного расширения полей алгебраических чисел K/k ввести понятие относительного регулятора $R_\ell(K/k)$ (см. § 2, определение 2.2), который совпадает с определителем матрицы формы S_k , ограниченной на группу относительных единиц.

Слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе утверждает, что для любого поля алгебраических чисел k и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k существует индекс n_0 такой, что $R_\ell(k_m/k_n) \neq 0$ для всех $m > n \geq n_0$.

Для вполне вещественного поля слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе эквивалентна слабой гипотезе Леопольдта и, следовательно, является теоремой, но в общем случае слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе строго сильнее слабой гипотезы Леопольдта и остается недоказанной.

В [1], [3]–[5] гипотеза о ℓ -адическом регуляторе и слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе были доказаны для некоторых типов полей. Однако мы не касались вопроса об арифметической интерпретации числа $R_\ell(k) \in \mathbb{Q}_\ell$. В настоящей работе мы частично восполним этот пробел. При некоторых ограничениях на поле k мы вычислим, как растет ℓ -адический показатель $\nu_\ell(R_\ell(k_n))$ с ростом n , где показатель $\nu_\ell(\cdot)$ нормирован условием $\nu_\ell(\ell) = 1$.

Итак, наша цель – вычислить функцию $f(n) := \nu_\ell(R_\ell(k_{n+1})/R_\ell(k_n))$, для чего мы должны были бы ограничиться рассмотрением только тех полей k , для которых гипотеза о ℓ -адическом регуляторе справедлива для всех полей k_n . На самом деле, мы поступаем иначе. Если K/k – произвольное конечное расширение полей алгебраических чисел, то можно явно определить ненулевую константу c такую, что

$$R_\ell(K) = cR_\ell(K/k)R_\ell(k)$$

(предложение 2.3). Мы обозначаем величину $cR_\ell(K/k)$ через $\mathcal{R}_\ell(K/k)$ и называем ее нормированным относительным регулятором. Таким образом, $\mathcal{R}_\ell(K/k)$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда $R_\ell(K/k) \neq 0$, и в случае, когда $R_\ell(K) \neq 0$, выполняется равенство $\mathcal{R}_\ell(K/k) = R_\ell(K)/R_\ell(k)$. Мы доказываем, что нормированный относительный регулятор обладает свойством мультипликативности, т. е. для башни полей $k \subseteq K \subseteq L$ выполняется соотношение $\mathcal{R}_\ell(L/k) = \mathcal{R}_\ell(K/k)\mathcal{R}_\ell(L/K)$ (предложение 2.4), причем $\mathcal{R}_\ell(L/k) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_\ell(K/k) \neq 0$ и $\mathcal{R}_\ell(L/K) \neq 0$.

Таким образом, если для расширения k_∞/k справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе, то $\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n) \neq 0$ начиная с некоторого n_0 , и мы

можем в дальнейшем считать, что

$$f(n) = \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)), \quad (1.3)$$

при этом мы будем вычислять $f(n)$ только для n , больших некоторого значения n_0 . Как мы увидим далее, существует целый ряд причин, не позволяющих вычислять $f(n)$ для малых n нашими методами. Наш основной результат может быть сформулирован следующим образом.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть k – либо поле CM-типа (т.е. k – вполне вещественное поле или чисто мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля), либо k – поле, абелево над ℓ (т.е. имеющее абелевы пополнения k_v для всех точек $v|\ell$) и такое, что для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) = (m+1)a\ell^n(\ell-1) + \tilde{\lambda} + \tilde{\mu}\ell^n(\ell-1),$$

где $m = n+1$ при $\ell \neq 2$, $m = n+2$ при $\ell = 2$ и инвариант a определен из того условия, что $a\ell^n$ совпадает с числом архимедовых точек поля k_n (т.е. a может не быть целым) для всех достаточно больших n , и $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ – некоторые инварианты, не зависящие от n .

Эта теорема объединяет содержания теорем 4.2, 5.2, 8.3 и 8.4. В основной теореме $\tilde{\lambda}$ – целое неотрицательное число и $\tilde{\mu}$ – неотрицательное число такое, что $\tilde{\mu}\ell^p$ является целым для некоторого p . Как следует из обозначений, инварианты $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ подобны инвариантам Ивасава, и, действительно, в указанных теоремах мы даем их явное выражение в виде линейных комбинаций инвариантов Ивасава некоторых модулей Галуа, связанных с расширением k_∞/k . Отметим, что в предположении справедливости так называемой “гипотезы о μ -инварианте” мы имеем $\tilde{\mu} = 0$ для вполне вещественного поля (в этом случае $a = [k_\infty : \mathbb{Q}_\infty]$), $\tilde{\mu} \geq d/2$ для чисто мнимого поля и $\ell = 2$.

Ниже мы опишем план работы, укажем основные идеи доказательств и сформулируем более подробно полученные результаты.

Начнем с того, что для расширения $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ через $\mathbb{Q}_n$ мы обозначаем единственное подполе поля $\mathbb{Q}_\infty$, имеющее степень ℓ^n над $\mathbb{Q}$. Для произвольного поля алгебраических чисел k мы полагаем $k_n = k\mathbb{Q}_n$, но при этом возможна ситуация, когда на поле k_∞ действует не вся группа Галуа $\Gamma \cong G(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$, а только некоторая ее подгруппа Γ_p . Соответственно, мы часто говорим в дальнейшем не о Γ -модулях, а о Γ_p -модулях.

В § 2, который носит вспомогательный характер, кроме уже упоминавшихся результатов, мы получаем формулу, связывающую $R_\ell(k)$ и $\mathbf{R}_\ell(k)$ для вполне вещественного поля k (предложение 2.1).

В случае вполне вещественных полей и полей CM-типа метод, применяемый нами, основан на сравнении регулятора с дискриминантом, поэтому § 3 посвящен вычислению дифференциалов и дискриминанта (точнее, их ℓ -компонент) поля k_n . Это чисто локальная задача, и мы решаем ее тем же методом, который был использован в [4]. Именно, мы строим специальную систему унифицирующих элементов $\lambda_n \in K_n$, где K – произвольное конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$,

и доказываем, что существует целое δ , не зависящее от n и такое, что дифференда K_n над $\mathbb{Q}_{\ell,n}$ равна (λ_n^δ) для всех достаточно больших n .

Используя мультипликативное свойство дифференды и то, что дискриминант совпадает с нормой дифференды, мы получаем, что для любого поля алгебраических чисел k и всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(D(k_{n+1})/D(k_n)) = d(m+1)\ell^n(\ell-1), \quad (1.4)$$

где $m = n+1$ при $\ell \neq 2$, $m = n+2$ при $\ell = 2$ и $d = [k_\infty : \mathbb{Q}_\ell]$ (предложение 3.7). Интересно то, что в (1.4) уже не входит δ . Отметим, что инвариант δ был введен ранее другим способом в [6].

В § 4 мы рассматриваем вполне вещественное поле k такое, что для всех полей k_n справедлива гипотеза Леопольдта, т. е. $R_\ell(k_n) \neq 0$. Мы определяем (с точностью до умножения на единицу) регулятор $R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_n))$, где $\mathcal{A}_\ell(k_n) = \prod_{v \in S} U(k_{n,v})$, который совпадает с дискриминантом решетки $\log(\mathcal{A}_\ell(k_n))$, и, пользуясь результатами предыдущего параграфа, вычисляем $R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_n))$ и $R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_{n+1}/k_n))$ для всех достаточно больших n , где $\mathcal{A}_\ell(k_{n+1}/k_n)$ – подгруппа тех элементов в $\mathcal{A}_\ell(k_{n+1})$, нормы которых являются корнями из единицы. Теперь вычисление $\nu_\ell(R_\ell(k_n))$ сводится к вычислению индекса $[\mathcal{A}_\ell(k_n) : U(k_n)[\ell]]$, но теория полей классов позволяет интерпретировать группу $\mathcal{A}(k_n)/U(k_n)[\ell]$ как некоторую группу Галуа, что, в свою очередь, позволяет применить теорию Ивасава для вычисления ее порядка. В результате мы получаем (теорема 4.1) формулу для $\nu_\ell(R_\ell(k_n))$, верную для всех достаточно больших n . В эту формулу входят три инварианта Ивасава λ_2 , μ_2 и ν_2 , не зависящие от n , причем λ_2 и μ_2 – это инварианты Ивасава модуля R , являющегося ядром естественного отображения $X \rightarrow \bar{T}_\ell(k)$, где X (соответственно, $\bar{T}_\ell(k)$) – группа Галуа максимального абелева не разветвленного вне ℓ (соответственно, неразветвленного) ℓ -расширения поля k_∞ . Из этой теоремы непосредственно следует формула для $\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n))$ (теорема 4.2).

В § 5 мы снова предполагаем, что k – вполне вещественное поле, но не предполагаем справедливости гипотезы Леопольдта. Пользуясь вычислением $R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_{n+1}/k_n))$, выполненным в § 4, и снова применяя теорию Ивасава, мы доказываем основную теорему для вполне вещественного поля (теорема 5.1). Для мнимого поля CM-типа только при $\ell = 2$ в формуле для $\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n))$ появляется дополнительное слагаемое $d \cdot 2^{n-1}$ (теорема 5.2).

В § 6–8 мы рассматриваем случай, когда k – поле алгебраических чисел произвольной сигнатуры, но абелево над ℓ , т. е. с абелевыми пополнениями k_v для всех $v|\ell$.

В § 6 рассматривается локальная ситуация. Пусть K – конечное абелево расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Для поля K_n мы определяем модуль Галуа $V_n = V(K_n)$, который является свободным $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем ранга $[K_n : \mathbb{Q}_\ell]$ и содержит группу $U(K_n)/\mu(K_n)$ в качестве подгруппы конечного индекса. В [3] такой модуль рассматривался для круговых локальных полей. Мы обобщаем результаты, полученные в [3], на случай произвольного абелева локального поля K , а также обобщаем основную теорему из [7]. Именно, если $V_n^\perp$ – $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль тех $x \in K_n$, для которых $\text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(x \log y) \in \mathbb{Z}_\ell$ при всех $y \in V_n$, то найдется индекс p , зависящий только от K и такой, что для всех $n > p$

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V_n = \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) \quad (1.5)$$

(теорема 6.1), где $\Phi_n(p)$ – некоторый, явно выписываемый элемент групповой алгебры $\mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_p)]$. Пусть $V_\infty = \varprojlim V_n$, где предел берется относительно норменных отображений. Исходя из (1.5), мы строим внутреннее произведение $T_p: V_\infty \times V_\infty \rightarrow \Lambda(p)$, где $\Lambda(p) = \mathbb{Z}_\ell[[G(K_\infty/K_p)]]$ (теорема 6.2).

В § 7, который является центральным в техническом отношении, мы обобщаем результаты § 6 на полулокальную ситуацию, т.е. для поля k , абелева над ℓ , мы полагаем $V_n = \prod_{v|\ell} V(k_n, v)$. Аналогичным образом определяется модуль $V_\infty = V(k_\infty)$, на который обобщаются теоремы 6.1 и 6.2 (предложения 7.2 и 7.3). Предположим теперь, что в V_∞ задан некоторый собственный $\Lambda(p)$ -подмодуль A (любого ранга) такой, что T_p остается невырожденным при ограничении на A и V_∞/A не имеет $\Lambda(p)$ -кручения. Пусть $B \subseteq V_\infty$ – ортогональное дополнение к A и $D = V_\infty/(A \oplus B)$ (отметим, что D – периодический $\Lambda(p)$ -модуль). Для любого n с модулем A связаны группы A_n и $A_{n+1,n}$, где A_n – образ естественной проекции $A \rightarrow V_n$ и $A_{n+1,n}$ – ядро естественного отображения $A_{n+1} \rightarrow A_n$. В $A_{n+1,n}$ имеется подгруппа конечного индекса $\widehat{A}_{n+1,n}$ (этот индекс вычисляется в лемме 7.1), совпадающая с образом естественной проекции $(\gamma_n - 1)A \rightarrow V_{n+1}$, где γ_n – некоторая топологическая образующая группы Γ_n . Тогда определены (с точностью до ℓ -адической единицы) регуляторы $R_\ell(A_{n+1,n})$ и $R_\ell(\widehat{A}_{n+1,n})$. Теорема 7.1, являющаяся основным результатом § 7, дает формулы для этих регуляторов, справедливые для всех достаточно больших n .

Чтобы объяснить идею доказательства, рассмотрим модельную ситуацию. Предположим, что вместо (1.5) выполняется равенство $\Phi_n(\log V_n) = V_n^\perp$ для некоторого обратимого $\Phi_n \in \mathbb{Q}_\ell[G(k_n/k_p)]$ и что A – прямое слагаемое в V_∞ . Тогда мы имели бы $A_n^\perp = \Phi_n A_n$ и $R_\ell(A_n) = [A_n^\perp : A_n]$. Таким образом, доказательство свелось бы к вычислению определителя Φ_n , действующего на $A \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. В действительности возникает ряд дополнительных трудностей, из-за которых результат верен лишь для достаточно больших n и зависит от инвариантов Ивасава модуля D .

Сравнительно легко из теоремы 7.1 следует теорема 7.2, в которой вычисляется регулятор $R_\ell(\widehat{M}_{n+1,n})$ для некоторого свободного $\Lambda(p)$ -подмодуля максимального ранга M модуля A , где $\widehat{M}_{n+1,n}$ определяется аналогично группе $\widehat{A}_{n+1,n}$.

В § 8 мы применяем теорему 7.2 к следующей ситуации. Для поля k , абелева над ℓ , пусть $\overline{U}_\infty = \varprojlim (U(k_n)/\mu(k_n)[\ell])$, где предел берется относительно норменных отображений. Пусть V_∞^+ – минимальный $\Lambda(p)$ -подмодуль модуля V_∞ такой, что $\overline{U}_\infty \subseteq V_\infty^+$ и V_∞/V_∞^+ не имеет кручения. Чтобы применить теорему 7.2 к паре $\overline{U}_\infty \subseteq V_\infty^+$, мы должны проверить, что T_p остается невырожденным при ограничении на V_∞^+ , а это равносильно справедливости слабой гипотезы о ℓ -адическом регуляторе. В теоремах 8.1 и 8.2 мы перечисляем случаи, для которых данная гипотеза доказана.

В предложении 8.1 мы вычисляем с помощью теоремы 7.1 регуляторы $R_\ell(V_{n+1,n}^+)$ и $R_\ell(\widehat{V}_{n+1,n}^+)$. Чтобы оказаться в ситуации теоремы 7.2, мы доказываем, что $\overline{U}_\infty$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем (предложение 8.2), что позволяет вычислить $\nu_\ell(R_\ell(\widehat{U}_{n+1,n}))$ (предложение 8.3). Остается проблема,

как связать группу $\widehat{U}_{n+1,n}$, определенную в терминах $\Lambda(p)$ -модуля $\overline{U}_\infty$, с пополненной группой единиц $\overline{U}_n[\ell] := (U(k_n)/\mu(k_n))[\ell]$. Мы доказываем (предложение 8.5), что существует индекс n_0 такой, что (в аддитивной записи) для всех $n > n_0$ выполнено равенство $\overline{U}_n[\ell] = \overline{U}_{n_0}[\ell] + U_n''$, где U_n'' – образ проекции $\overline{U}_\infty \rightarrow \overline{U}_n[\ell]$. Таким образом, для больших n группа $\widehat{U}_{n+1,n}$ совпадает с $(\gamma_n - 1)\overline{U}_{n+1}$, что позволяет доказать основной результат § 8 (теорему 8.3), дающий явные формулы для $\nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}/k_n))$ и $\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n))$ при всех достаточно больших n .

В случае, когда поле k чисто мнимое, мы более подробно исследуем инварианты Ивасава, входящие в формулу для $\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n))$, и даем в теореме 8.4 три эквивалентные переформулировки результата теоремы 8.3. Другие переформулировки содержатся в теоремах 8.5, 8.6. Они выявляют некоторое сходство наших результатов с теоремой Брауэра–Зигеля, что подробнее обсуждается в § 9. Наконец, в теореме 8.7 мы получаем некоторые любопытные следствия из теоремы 8.4 и аналога формулы Римана–Гурвица [8]. Особенно хотелось бы отметить соотношение (8.21).

В § 9 мы вкратце обсуждаем полученные результаты и формулируем некоторые открытые проблемы.

В § 10 доказываются некоторые вспомогательные результаты о круговых $\mathbb{Z}_2$ -расширениях в случае, когда $\sqrt{-1} \notin k$. Эти результаты используются при доказательстве предложений 8.3–8.5. Эти доказательства существенно опираются на результаты из работы [9], но в случае $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \notin k$ результаты [9] содержат некоторые ошибки, которые мы и исправляем.

Наконец, приведем несколько замечаний об используемых обозначениях. Часто мы используем аддитивные обозначения для записи операции умножения. Например, мы пишем $(\gamma_n - 1)U_{n+1}$ вместо $U_{n+1}^{\gamma_n - 1}$. В таких случаях из контекста всегда понятно, о какой операции идет речь.

Через $[A : B]$ обозначается индекс группы B в группе A в предположении, что группы A и B соизмеримы. В работе фигурирует большое количество различных групп и модулей. Чтобы придать некое единообразие обозначениям, мы старались придерживаться следующей системы. Допустим, через A_n обозначается группа, функториально зависящая от поля k_n . Для $m > n$ через $A_{m,n}$ обозначается ядро естественного отображения $A_m \rightarrow A_n$. Группа $\varprojlim A_n$ обозначается через A_∞ , а группа $A_\infty/(\gamma_n - 1)A_\infty$ – через $A_{(n)}$. Через $A_{(m,n)}$ обозначается ядро естественного отображения $A_{(m)} \rightarrow A_{(n)}$. Остальные обозначения объясняются в тексте.

§ 2. Соотношения между различными регуляторами

Пусть k – поле алгебраических чисел и ℓ – фиксированное простое число. Рассмотрим алгебру $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong \prod_{v|\ell} k_v$, где v пробегает все точки поля k , лежащие над ℓ , и k_v означает пополнение поля k относительно v . Для любой точки $v|\ell$ определен ℓ -адический логарифм в смысле Ивасава $\log_v : k_v^\times \rightarrow k_v$, где $k_v^\times$ – мультипликативная группа поля k_v . Таким образом, на группе главных единиц $U^{(1)}(k_v)$ функция $\log_v$ определяется с помощью обычного степенного ряда, $\log_v(\ell) = 0$ и $\log_v(\mu(k_v)) = 0$, где $\mu(k_v)$ – группа всех корней из единицы в поле k_v .

Набор гомоморфизмов $\log_v$ для всех точек $v|\ell$ определяет гомоморфизм

$$\log := \prod_{v|\ell} \log_v : \prod_{v|\ell} k_v^\times \rightarrow \prod_{v|\ell} k_v. \quad (2.1)$$

Если $x \in k^\times$, то диагональное вложение позволяет рассматривать x как элемент группы $\prod_{v|\ell} k_v^\times$. Таким образом, определен элемент $\log x \in \prod_{v|\ell} k_v$. Отображение следа $\mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}} : k \rightarrow \mathbb{Q}$ индуцирует отображение $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, которое мы будем также обозначать через $\mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}$.

Пусть $U(k)$ – группа единиц поля k и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in U(k)$ – некоторая система его основных единиц. Положим $\varepsilon_0 = 1 + \ell$ при $\ell \neq 2$ и $\varepsilon_0 = 1 + \ell^2 = 5$ при $\ell = 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. ℓ -адический регулятор поля k определяется формулой

$$R_\ell(k) = R_\ell(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = \det(\mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \log \varepsilon_j)), \quad 0 \leq i, j \leq r.$$

Таким образом, $R_\ell(k)$ – это элемент поля $\mathbb{Q}_\ell$, который, как будет показано ниже, не зависит от выбора системы основных единиц.

Пусть $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r$ – некоторая другая система независимых единиц поля k . Тогда можно определить регулятор

$$R_\ell(\varepsilon_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r) = \det(\mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon'_i \log \varepsilon'_j)), \quad 0 \leq i, j \leq r.$$

Пусть C – матрица перехода от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ к $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r$, т.е. $C = (c_{ij})$, $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i, j \leq r$, где $\varepsilon'_i = \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{c_{ij}}$. Тогда легко видеть, что

$$R_\ell(\varepsilon_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r) = R_\ell(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)(\det C)^2. \quad (2.2)$$

В частности, если $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r$ – другая система основных единиц, то $(\det C)^2 = 1$. Таким образом, $R_\ell(k)$ зависит только от поля k .

В общем случае положим $\overline{U}(k) = U(k)/\mu(k)$, где $\mu(k)$ – группа всех корней из единицы в поле k . Пусть $\overline{V}$ – подгруппа, порожденная в $\overline{U}(k)$ единицами $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r$. Тогда $\det C = \pm[\overline{U}(k) : \overline{V}]$ и, следовательно,

$$R_\ell(\varepsilon_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_r) = [\overline{U}(k) : \overline{V}]^2 R_\ell(k). \quad (2.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть k – вполне вещественное поле алгебраических чисел и $\mathbf{R}_\ell(k)$ – классический ℓ -адический регулятор поля k , определенный, например, в книге [2]. Тогда справедливо соотношение

$$R_\ell(k) = (\log \varepsilon_0)^2 [k : \mathbb{Q}]^2 \mathbf{R}_\ell(k)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ – все вложения поля k в алгебру $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$. Рассмотрим $((r+1) \times (r+1))$ -матрицу $A = (\sigma_j(\log \varepsilon_i))$, где $0 \leq i, j \leq r$. Легко видеть, что $\det A = [k : \mathbb{Q}] \log \varepsilon_0 \mathbf{R}_\ell(k)$ (нужно прибавить все столбцы к первому и полученный столбец, умноженный на $[k : \mathbb{Q}]^{-1} = (r+1)^{-1}$, вычесть из всех других столбцов). С другой стороны, $A^t A$ – это матрица, определитель которой совпадает с $R_\ell(k)$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если k – вполне вещественное поле алгебраических чисел, то $R_\ell(k) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}_\ell(k) \neq 0$, т. е. когда для поля k и простого ℓ справедлива гипотеза Леопольдта.

Пусть K/k – конечное расширение полей алгебраических чисел и $U(K/k)$ – группа относительных единиц расширения K/k , т. е.

$$U(K/k) := \{x \in U(K) \mid N_{K/k}(x) \in \mu(k)\},$$

где $N_{K/k}$ – норма из K в k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $u_1, \dots, u_t$ – некоторый базис группы $\bar{U}(K/k) := U(K/k)/\mu(K)$. Тогда относительный ℓ -адический регулятор расширения K/k определяется формулой

$$R_\ell(K/k) = R_\ell(u_1, \dots, u_t) = \det(\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}_\ell}(\log u_i \log u_j)), \quad 1 \leq i, j \leq t.$$

Таким образом, $R_\ell(K/k) \in \mathbb{Q}_\ell$, и без труда проверяется, что $R_\ell(K/k)$ не зависит от выбора базиса $u_1, \dots, u_t$. Если единицы $u'_1, \dots, u'_t$ независимы, т. е. порождают подгруппу конечного индекса $\bar{V}$ в $\bar{U}(K/k)$, то, определяя $R_\ell(u'_1, \dots, u'_t)$, как выше, мы получаем соотношение

$$R_\ell(u'_1, \dots, u'_t) = [\bar{U}(K/k) : \bar{V}]^2 R_\ell(K/k), \quad (2.4)$$

которое вполне аналогично (2.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть k – произвольное вполне вещественное поле и $k_\infty = \bigcup_n k_n$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k . Тогда $R(k_m/k_n) \neq 0$ для всех достаточно больших n при любом $m > n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(k_n)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы единиц $U(k_n)$ поля k_n . Пусть $E(k_n)$ – ядро естественного диагонального отображения $\alpha_n: U(k_n)[\ell] \rightarrow \mathcal{A}(k_n)$, где $\mathcal{A}(k_n) := \prod_{v|\ell} U^{(1)}(k_{n,v})$, $U^{(1)}(k_{n,v})$ – группа главных единиц локального поля $k_{n,v}$, являющегося пополнением k_n относительно v , и v пробегает все точки поля k_n , лежащие над ℓ . Гипотеза Леопольдта для поля k_n равносильна равенству $E(k_n) = 1$. Хорошо известно, что для расширения k_∞/k (и даже для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения любого поля алгебраических чисел) справедлива слабая гипотеза Леопольдта, утверждающая, что группы $E(k_n)$ стабилизируются для всех достаточно больших n . Пусть n выбрано настолько большим, что $E(k_m) = E(k_n)$ для всех $m > n$. Пусть $U(k_m/k_n)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы относительных единиц $U(k_m/k_n)$ и $\mathcal{A}(k_m/k_n) := \{x \in \mathcal{A}(k_m) \mid N_{k_m/k_n}(x) \in \prod_{v|\ell} \mu(k_{n,v})\}$. Тогда $U(k_m/k_n)[\ell] \cap E(k_m) = 1$. Следовательно, α_n индуцирует вложение $\tilde{\alpha}: U(k_m/k_n)[\ell] \hookrightarrow \mathcal{A}(k_m/k_n)$, и поскольку $U(k_m/k_n)[\ell]$ и $\mathcal{A}(k_m/k_n)$ имеют один и тот же ранг как $\mathbb{Z}_\ell$ -модули (равный $[k_m : \mathbb{Q}] - [k_n : \mathbb{Q}]$), образ $\tilde{\alpha}_n$ имеет конечный индекс в $\mathcal{A}(k_m/k_n)$.

Рассмотрим невырожденное спаривание $\mathcal{A}(k_m) \times \mathcal{A}(k_m) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, $(x, y) \rightarrow \mathrm{Sp}_{k_m/\mathbb{Q}}(\log x \log y)$, где $\log$ – отображение (2.1). Это спаривание, очевидно, остается невырожденным при ограничении на $\mathcal{A}(k_m/k_n)$. Следовательно, оно невырождено и на группе $U(k_m/k_n)[\ell]$, но это означает, что $R_\ell(k_m/k_n) \neq 0$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть K/k – конечное расширение полей алгебраических чисел и $r = r(k)$ – ранг группы единиц $U(k)$ поля k . Тогда выполняется соотношение

$$R_\ell(K) = [K : k]^{1-r} [\bar{U}(k) : N_{K/k} \bar{U}(K)]^2 R_\ell(K/k) R_\ell(k),$$

где $N_{K/k}$ – норма из K в k . В частности, $R_\ell(K) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $R_\ell(k) \neq 0$ и $R_\ell(K/k) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в $\bar{U}(K)$ подгруппу конечного индекса $\bar{V} := \bar{U}(k) \oplus \bar{U}(K/k)$. Если $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ и $\{u_1, \dots, u_t\}$ образуют базисы групп $\bar{U}(k)$ и $\bar{U}(K/k)$ соответственно, то набор $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, u_1, \dots, u_t\}$ образует базис $\bar{V}$ и согласно (2.3) выполняется соотношение

$$R_\ell(\bar{V}) = R_\ell(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, u_1, \dots, u_t) = [\bar{U}(K) : \bar{V}]^2 R_\ell(K). \quad (2.5)$$

Для любых $0 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq t$ мы имеем

$$\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \log u_j) = \mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \mathrm{Sp}_{K/k}(\log u_j)) = \mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \log(N_{K/k} u_j)) = 0.$$

Следовательно, матрица, определителем которой является $R_\ell(\bar{V})$, имеет вид $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $A = (\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \log \varepsilon_j))$, $0 \leq i, j \leq r$, $B = (\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log u_i \log u_j))$, $1 \leq i, j \leq t$.

Из определений 2.1 и 2.2, учитывая, что

$$\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \log \varepsilon_j) = [K : k] \mathrm{Sp}_{k/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \log \varepsilon_j)$$

для любых $0 \leq i, j \leq r$, мы получаем

$$R_\ell(\bar{V}) = \det A \det B = [K : k]^{1+r} R_\ell(k) R_\ell(K/k). \quad (2.6)$$

Для вычисления индекса $[\bar{U}(K) : \bar{V}]$ мы заметим, что $\bar{U}(K/k)$ совпадает с ядром норменного отображения $N_{K/k} : \bar{U}(K) \rightarrow \bar{U}(k)$. Поэтому $N_{K/k}$ индуцирует изоморфизм $\bar{U}(K)/\bar{V} \cong (N_{K/k} \bar{U}(K))/U(k)^{[K:k]}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} [\bar{U}(K) : \bar{V}] &= [N_{K/k} \bar{U}(K) : \bar{U}(k)^{[K:k]}] = [\bar{U}(k) : N_{K/k} \bar{U}(K)]^{-1} [\bar{U}(k) : \bar{U}(k)^{[K:k]}] \\ &= [\bar{U}(k) : N_{K/k} \bar{U}(K)]^{-1} [K : k]^r. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Утверждение предложения следует теперь из (2.5)–(2.7). Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Для конечного расширения полей алгебраических чисел K/k определим *нормированный относительный регулятор* $\mathcal{R}_\ell(K/k)$ формулой

$$\mathcal{R}_\ell(K/k) = [K : k]^{1-r} [\bar{U}(k) : N_{K/k} \bar{U}(K)]^2 R_\ell(K/k),$$

где $r = r(k)$ – ранг группы единиц поля k .

Предложение 2.3 показывает, что $\mathcal{R}_\ell(K/k)$ ведет себя мультипликативно в башне расширений, т. е. для башни конечных расширений $L \supseteq K \supseteq k$ выполняется равенство $\mathcal{R}_\ell(L/k) = \mathcal{R}(L/K) \mathcal{R}(K/k)$, если только $R_\ell(L) \neq 0$, т. е. для L справедлива гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. Следующее предложение показывает, что мультипликативность имеет место и без этого предположения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть задана башня конечных расширений полей алгебраических чисел $L \supseteq K \supseteq k$. Тогда нормированные относительные ℓ -адические регуляторы этих расширений связаны соотношением

$$\mathcal{R}_\ell(L/k) = \mathcal{R}(L/K)\mathcal{R}_\ell(K/k).$$

В частности, $\mathcal{R}_\ell(L/k) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_\ell(L/K) \neq 0$ и $\mathcal{R}_\ell(K/k) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи формул обозначим для конечного расширения полей алгебраических чисел K/k индекс $[\bar{U}(K) : \bar{U}(K/k) \oplus \bar{U}(k)]$ через $i(K/k)$. Аналогичный смысл будут иметь $i(L/K)$ и $i(L/k)$. С башней полей $L \supseteq K \supseteq k$ связаны включения групп

$$\bar{U}(L) \supseteq \bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K) \supseteq \bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k) \oplus \bar{U}(k), \quad \bar{U}(L) \supseteq \bar{U}(L/k) \oplus \bar{U}(k).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} [\bar{U}(L/k) : \bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k)] &= [\bar{U}(L/k) \oplus \bar{U}(k) : \bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k) \oplus \bar{U}(k)] \\ &= [\bar{U}(L/k) \oplus \bar{U}(k) : \bar{U}(L)] [\bar{U}(L) : \bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k) \oplus \bar{U}(k)] \\ &= i(L/k)^{-1} i(L/K) i(K/k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Регулятор R_1 группы $\bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k)$ можно вычислить так же, как это было сделано в доказательстве предложения 2.3. Именно, если $v_1, \dots, v_s$ и $u_1, \dots, u_t$ — некоторые базисы групп $\bar{U}(L/K)$ и $\bar{U}(K/k)$ соответственно, то $R_1 = \det A \det B$, где $A = (\mathrm{Sp}_{L/\mathbb{Q}}(\log v_i \log v_j))$, $1 \leq i, j \leq s$, и $B = (\mathrm{Sp}_{L/\mathbb{Q}}(\log u_i \log u_j))$, $1 \leq i, j \leq t$. Таким образом, $\det A = R_\ell(L/K)$, и, учитывая, что ранг группы $\bar{U}(K/k)$ равен $r(K) - r(k)$, мы получаем $\det B = [L : K]^{r(K) - r(k)} R_\ell(K/k)$, т. е.

$$R_\ell(\bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k)) = [L : K]^{r(K) - r(k)} R_\ell(L/K) R_\ell(K/k).$$

С другой стороны, согласно (2.8)

$$\begin{aligned} R_\ell(\bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k)) &= R_\ell(L/k) [\bar{U}(L/k) : \bar{U}(L/K) \oplus \bar{U}(K/k)]^2 \\ &= R_\ell(L/k) i(L/k)^{-2} i(L/K)^2 i(K/k)^2. \end{aligned}$$

Используя (2.7) для вычисления индексов $i(L/k)$, $i(L/K)$, $i(K/k)$ и учитывая, что

$$[L : K]^{r(K) - r(k)} = [L : K]^{-1 + r(K)} [K : k]^{-1 + r(k)} [L : k]^{1 - r(k)},$$

мы получаем

$$\begin{aligned} R_\ell(L/K) [L : K]^{-1 + r(K)} R_\ell(K/k) [K : k]^{-1 + r(k)} \\ = R_\ell(L/k) [L : k]^{1 - r(k)} [L : k]^{2r(k)} [\bar{U}(k) : N_{L/k} \bar{U}(L)]^2 \\ \times [L : K]^{2r(K)} [\bar{U}(K) : N_{L/K} \bar{U}(L)]^{-2} [K : k]^{2r(k)} [\bar{U}(k) : N_{K/k} \bar{U}(K)]^{-2}, \end{aligned}$$

т. е. $\mathcal{R}_\ell(L/k) = \mathcal{R}_\ell(L/K)\mathcal{R}_\ell(K/k)$. Предложение доказано.

§ 3. Дифферента и дискриминант

Для поля алгебраических чисел K пусть $K_\infty = \bigcup_n K_n$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K , где поля K_n определены, как во введении. Мы изучим поведение ℓ -адического показателя $\nu_\ell(D(K_n))$ абсолютного дискриминанта $D(K_n)$ поля K_n как функции от n при достаточно больших n . Эта задача, очевидно, сводится к локальному случаю. Если $K_{n,v}$ – пополнение поля K_n , то дискриминант поля K_n равен произведению локальных дискриминантов, т. е. $D(K_n) = \prod_v D(K_{n,v})$, где v пробегает все неархимедовы точки поля K_n . Таким образом,

$$\nu_\ell(D(K_n)) = \nu_\ell\left(\prod_{v|\ell} D(K_{n,v})\right), \quad (3.1)$$

где произведение берется по всем точкам v поля K_n , лежащим над ℓ .

Итак, рассмотрим локальный случай. Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ и $K_\infty = \bigcup_n K_n$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение локального поля K , где поля K_n были определены во введении. Поскольку дискриминант совпадает с нормой дифференты, вычисление дискриминанта $D(K_n)$ равносильно вычислению дифференты $\mathcal{D}(K_n)$. Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $k = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_0)$, где ζ_0 – первообразный корень из единицы степени ℓ при $\ell \neq 2$ (степени 4 при $\ell = 2$). Пусть $\mathcal{D}(k_n)$ – дифферента поля k_n , где $k_n = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_n)$, и ζ_n – первообразный корень из единицы степени ℓ^{n+1} при $\ell \neq 2$ (степени 2^{n+2} при $\ell = 2$). При $\ell \neq 2$ пусть $\pi_0 = 1 - \zeta_0$. Тогда

$$\mathcal{D}(k_n) = \begin{cases} (\ell^{n+1}\pi_0^{-1}) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (2^{n+1}) & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

Мы применим этот результат для вычисления дифференты поля $\mathbb{Q}_{\ell,n}$, т. е. n -го этажа кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения поля $\mathbb{Q}_\ell$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathbb{Q}_{\ell,\infty}$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ и $\mathbb{Q}_{\ell,n}$ – единственное промежуточное подполе расширения $\mathbb{Q}_{\ell,\infty}/\mathbb{Q}_\ell$ степени ℓ^n над $\mathbb{Q}_\ell$. Пусть ρ_n – униформизирующий элемент поля $\mathbb{Q}_{\ell,n}$. Тогда

$$\mathcal{D}(\mathbb{Q}_{\ell,n}) = \begin{cases} (\ell^{n+1}\rho_n^{-s_n-1}) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (2^{n+1}\rho_n^{-1}) & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \ell^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\ell \neq 2$. Пусть $k_n = \mathbb{Q}_{\ell,n}(\zeta_0)$. Тогда $k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n}$ – чисто разветвленное циклическое расширение степени $\ell - 1$. Поле $\mathbb{Q}_\ell$ содержит первообразный корень степени $\ell - 1$ из единицы, поэтому $k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n}$ – куммерово расширение, т. е. $k_n = \mathbb{Q}_{\ell,n}(\sqrt[\ell-1]{x_n})$, где, не ограничивая общности, можно считать, что x_n – некоторый униформизирующий элемент поля $\mathbb{Q}_{\ell,n}$. Тогда $y_n := \sqrt[\ell-1]{x_n}$ является униформизирующим элементом поля k_n и удовлетворяет уравнению $f(x) = x^{\ell-1} - x_n = 0$. Следовательно, дифферента $\mathcal{D}(k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n})$ расширения $k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n}$ равна $(f'(y_n))$, причем $(f'(y_n)) = (y_n^{\ell-2})$, где $f'(x)$ – производная $f(x)$, и в силу мультипликативного свойства дифференты

$$\mathcal{D}(\mathbb{Q}_{\ell,n}) = \mathcal{D}(k_n)\mathcal{D}(k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n})^{-1} = (\ell^{n+1}\pi_0^{-1}y_n^{2-\ell}).$$

Поскольку k_n имеет индекс ветвления ℓ^n над $k_0 = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_0)$, мы имеем $\nu_\ell(\pi_0) = \nu_\ell(y_n^{\ell^n})$. Поэтому, учитывая, что $\nu_\ell(y_n) = (\ell - 1)^{-1} \nu_\ell(\rho_n)$, мы получаем

$$\mathcal{D}(\mathbb{Q}_{\ell,n}) = (\ell^{n+1} \pi_0^{-1} y_n^{2-\ell}) = (\ell^{n+1} y_n^{1-\ell^n} y_n^{1-\ell}) = (\ell^{n+1} \rho_n^{-s_n} \rho_n^{-1}),$$

что доказывает предложение для $\ell \neq 2$.

В случае $\ell = 2$ положим $k_n = \mathbb{Q}_{2,n}(\zeta_0)$, где $\zeta_0 = \sqrt{-1}$. Тогда k_n – разветвленное квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}_{2,n}$ и элемент $\pi_n = 1 - \zeta_n$, где ζ_n – первообразный корень из единицы степени 2^{n+2} , является униформизирующим элементом поля k_n . Пусть σ – единственный нетривиальный автоморфизм расширения $k_n/\mathbb{Q}_{2,n}$. Тогда $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{-1}$ и $\mathcal{D}(k_n/\mathbb{Q}_\ell) = (\sigma(\pi_n) - \pi_n) = (\zeta_n - \zeta_n^{-1}) = (\pi_n^2) = (\rho_n)$. Снова применяя предложение 3.1 и используя мультипликативное свойство дифференты, мы получаем, что

$$\mathcal{D}(\mathbb{Q}_{2,n}) = \mathcal{D}(k_n) \mathcal{D}(k_n/\mathbb{Q}_{2,n})^{-1} = (2^{n+1} \rho_n^{-1}).$$

Предложение доказано полностью.

В дальнейшем мы выберем некоторую согласованную систему униформизирующих элементов $\rho_n \in \mathbb{Q}_{\ell,n}$. Именно, выберем корни из единицы ζ_n так, чтобы для любого $n \geq 0$ выполнялось условие $\zeta_{n+1}^\ell = \zeta_n$. Положим $\pi_n = 1 - \zeta_n \in k_n$. Тогда π_n является униформизирующим элементом поля k_n . Далее, положим

$$\rho_n = N_{k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n}}(\pi_n). \quad (3.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для любого $n \geq 0$ элемент ρ_n является униформизирующим элементом поля $\mathbb{Q}_{2,n}$ и выполняется сравнение*

$$\rho_{n+1}^\ell \equiv \rho_n \pmod{\ell \rho_{n+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверяется сравнение $\pi_{n+1}^\ell \equiv \pi_n \pmod{\ell \pi_{n+1}}$, поэтому $\pi_{n+1}^\ell = \pi_n + c \ell \pi_{n+1}$ для некоторого целого $c \in k_{n+1}$. Тогда для любого автоморфизма $\sigma \in G(k_{n+1}/\mathbb{Q}_{\ell,n+1})$ мы имеем $\sigma(\pi_{n+1}^\ell) = \sigma(\pi_n) + c_\sigma \ell \pi_{n+1}$ с некоторым целым $c_\sigma \in k_{n+1}$. Заметим, что группы Галуа $G := G(k_{n+1}/\mathbb{Q}_{\ell,n+1})$ и $G(k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n})$ естественно изоморфны. Тогда из (3.2) следует, что

$$\rho_{n+1}^\ell = N_{k_{n+1}/\mathbb{Q}_{\ell,n+1}}(\pi_{n+1}^\ell) = \prod_{\sigma \in G} (\sigma(\pi_n) + c_\sigma \ell \pi_{n+1}) = N_{k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n}}(\pi_n) + d \ell = \rho_n + d \ell,$$

где $d \in \mathbb{Q}_{\ell,n+1}$ и $d \equiv 0 \pmod{\pi_{n+1}}$. Следовательно, $d \equiv 0 \pmod{\rho_{n+1}}$. Предложение доказано.

Пусть теперь K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ и K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . Пусть H – максимальное неразветвленное подполе поля K_∞ . Тогда H – конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$ и $H \subseteq K_n$ для всех достаточно больших n . Положим $H_n := H \cdot \mathbb{Q}_{\ell,n}$. Тогда для всех достаточно больших n расширение K_n/H_n чисто разветвлено и имеет некоторую степень e , не зависящую от n . Как было показано в [10], $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/H_n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В частности, существует индекс q такой, что $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/H_n)) \leq 1/2$ при всех $n \geq q$.

Пусть $\mathcal{O}_H$ – кольцо целых поля H и $R := \mathcal{O}_H[[T]]$ – кольцо формальных степенных рядов от T . Пусть φ – автоморфизм Фробениуса поля H . Мы определим действие φ на R , полагая

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(a_i) T^i.$$

Если $F(X) \in R[X]$, то для любого целого n через $F^{(n)}(X)$ мы обозначим многочлен, полученный из $F(X)$ действием φ^n на коэффициенты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть поля K_n и H_n определены, как выше. Тогда существует многочлен степени e вида $F(X) = F(X, T) = X^e + \sum_{i=0}^{e-1} a_i X^i \in R[X]$ такой, что для всех $n \geq q$, где индекс q был определен выше, выполняются следующие условия:

- (i) многочлен $F(X, \rho_n)$ является многочленом Эйзенштейна и, следовательно, неприводим над H_n ;
- (ii) в поле K_n существует униформизирующий элемент λ_n , удовлетворяющий уравнению $F^{(-n)}(\lambda_n, \rho_n) = 0$;
- (iii) существует целое неотрицательное δ , не зависящее от n и такое, что $\mathcal{D}(K_n/H_n) = (G^{(-n)}(\lambda_n, \rho_n)) = (\lambda_n^\delta)$, где $G(X, T)$ – производная $F(X, T)$ по X ;
- (iv) элементы λ_n из п. (ii) можно выбрать так, чтобы для любого $n \geq q$ выполнялось сравнение

$$\lambda_{n+1}^\ell \equiv \lambda_n \pmod{\ell \lambda_n^{-\delta} \rho_{n+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для указанного выше индекса q , т. е. индекса, удовлетворяющего условию $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_q/H_q)) \leq 1/2$, выберем в поле K_q некоторый униформизирующий элемент λ_q . Пусть $f(X) \in \mathcal{O}_q[X]$ – многочлен Эйзенштейна степени e , корнем которого является λ_q , где $\mathcal{O}_q$ – кольцо целых поля H_q . Если b_i – коэффициент $f(X)$ при X^i , то b_i можно записать как степенной ряд от ρ_q , т. е. существует ряд $c_i(T) \in \mathcal{O}_H[[T]]$ такой, что $c(\rho_q) = b_i$. При этом мы можем считать, что $c_e = 1$, c_i делятся на T для $i = 0, \dots, e-1$ и c_0 не делится на T^2 , причем коэффициент при T в $c_0(T)$ не делится на ℓ .

Согласно нашему выбору q мы имеем $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_q/H_q)) = (f'(\lambda_q)) \leq 1/2$. Поскольку все слагаемые $ib_i \lambda_q^{i-1}$, входящие в $f'(\lambda_q)$, имеют различные ℓ -адические показатели, мы имеем

$$\nu_\ell(f'(\lambda_q)) = \min_{1 \leq i \leq e} \{\nu_\ell(ib_i \lambda_q^{i-1})\} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Если $(e, \ell) = 1$, т. е. расширение K_n/H_n имеет только ручное ветвление, то минимум достигается при $i = e$. Если $e \equiv 0 \pmod{\ell}$, то минимум достигается на некотором индексе i_0 , где $1 \leq i_0 < e$. Условие (3.3) означает, что $i_0 \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ и не все коэффициенты ряда $c_{i_0}(T)$ делятся на ℓ . Пусть $j \geq 1$ – наименьший индекс такой, что коэффициент при T^j ряда $c_{i_0}(T)$ не делится на ℓ . Тогда $\nu_\ell(b_{i_0}) = \nu_\ell(c_{i_0}(\rho_q)) = \nu_\ell(\rho_q^j)$ и $\nu_\ell(f'(\lambda_q)) = \nu_\ell(\lambda_q^\delta)$, где $\delta = ej + i_0$, поскольку $\nu_\ell(\rho_q) = \nu_\ell(\lambda_q^e)$.

Теперь мы рассмотрим многочлен

$$F(X, T) = X^e + \sum_{i=0}^{e-1} \varphi^q(c_i(T)) X^i \in R \quad (3.4)$$

и покажем, что он обладает требуемыми свойствами. Прежде всего отметим, что $F^{(-q)}(X, \rho_q) = f(X)$ по построению, поэтому $F^{(-q)}(\lambda_q, \rho_q) = 0$. Очевидно, что при любой подстановке $T = \rho_n$ для $n \geq q$ многочлены $F(X, \rho_n)$, а следовательно, и $F^{(-n)}(X, \rho_n)$ являются многочленами Эйзенштейна. Предположим теперь, что для некоторого $n \geq q$ уже определены униформизирующие элементы $\lambda_q, \dots, \lambda_n$ полей $K_q, \dots, K_n$ соответственно, которые удовлетворяют условиям (ii)–(iv). Чтобы определить элемент λ_{n+1} , мы покажем, что хотя бы один из корней многочлена $F^{(-n-1)}(X, \rho_{n+1})$ лежит в поле K_{n+1} . Пусть $\lambda_{n+1}^{(1)}$ – некоторый корень многочлена $F^{(-n-1)}(X, \rho_{n+1})$ и $L = \mathbb{Q}_{\ell, n+1}(\lambda_{n+1}^{(1)})$. Повторяя приведенное выше рассуждение для вычисления показателя $\nu_\ell(G^{(-n-1)}(\lambda_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}))$, где $G(X, T)$ – производная $F(X, T)$ по X , мы получаем

$$\nu_\ell(G^{(-n-1)}(\lambda_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1})) = \nu_\ell((\lambda_{n+1}^{(1)})^\delta) = \frac{\delta}{e} \nu_\ell(\rho_{n+1}),$$

где δ имеет тот же смысл, что и выше. Мы покажем, что в поле L лежит один из корней многочлена $F^{(-n)}(X, \rho_n)$. Действительно,

$$F^{(-n-1)}(\lambda_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}) = 0.$$

Возводя обе части этого равенства в степень ℓ , обозначая $\lambda_{n+1}^{(1)}$ через λ и учитывая, что $(A+B)^\ell \equiv A^\ell + B^\ell \pmod{\ell AB}$ для любых A, B и что все ряды $c_i(T)$ делятся на T , мы получаем

$$0 = (F^{(-n-1)}(\lambda, \rho_{n+1}))^\ell \equiv \lambda^{e\ell} + \sum_{i=0}^{e-1} \varphi^{-n-1}(c_i(\rho_{n+1}))^\ell \lambda^{i\ell} \pmod{\ell \rho_{n+1}}.$$

Далее, $\varphi(x) \equiv x \pmod{\ell}$ для любого $x \in \mathcal{O}_H$, поэтому

$$\varphi^{-n-1}(c_i(\rho_{n+1}))^\ell \equiv \varphi^{-n}(c_i(\rho_{n+1}^\ell)) \pmod{\ell \rho_{n+1}}.$$

Тогда, применяя предложение 3.3, мы получаем $F^{(-n)}(\lambda^\ell, \rho_n) \equiv 0 \pmod{\ell \rho_{n+1}}$, т. е. элемент $\lambda^\ell = (\lambda_{n+1}^{(1)})^\ell$ является приближенным решением (по модулю $\ell \rho_{n+1}$) уравнения $F^{(-n)}(X, \rho_n) = 0$. Снова без труда получаем, что $\nu_\ell(G^{(-n)}(\lambda^\ell, \rho_n)) = \nu_\ell(G^{(-n)}(\lambda_n, \rho_n)) \leq 1/2$. Таким образом, мы можем применить лемму Гензеля и продолжить приближенное решение λ^ℓ уравнения $F^{(-n)}(X, \rho_n) = 0$ до некоторого решения $\lambda_n^{(1)}$, лежащего в поле L . Из леммы Гензеля следует также, что выполняется сравнение

$$(\lambda_{n+1}^{(1)})^\ell \equiv \lambda_n^{(1)} \pmod{\ell (\lambda_n^{(1)})^{-\delta} \rho_{n+1}}. \quad (3.5)$$

Пусть теперь $\lambda_{n+1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(e)}$ – все корни уравнения $F^{(-n-1)}(X, \rho_{n+1}) = 0$. Выполняя для каждого из этих корней описанную выше процедуру, мы получаем некоторые корни $\lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(e)}$ уравнения $F^{(-n)}(X, \rho_n) = 0$. Мы покажем,

что все корни $\lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(e)}$ различны. Предположим, что $\lambda_n^{(i_1)} = \lambda_n^{(i_2)}$ для некоторых $i_1 \neq i_2$. Согласно (3.5) это означает, что $(\lambda_{n+1}^{(i_1)})^\ell \equiv (\lambda_{n+1}^{(i_2)})^\ell \equiv \lambda_n^{(i_1)} \pmod{\ell(\lambda_n^{(i_1)})^{-\delta} \rho_{n+1}}$.

Пусть a и $a+b$ – некоторые целые элементы в алгебраическом замыкании $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ поля $\mathbb{Q}_\ell$, удовлетворяющие сравнению $a^\ell \equiv (a+b)^\ell \pmod{\ell \lambda_n^{-\delta} \rho_{n+1}}$. Тогда или $\nu_\ell(b) \geq 1/(\ell-1)$, или $b^\ell \equiv 0 \pmod{\ell \lambda_n^{-\delta} \rho_{n+1}}$, т.е. $\nu_\ell(b) > 1/(2\ell)$. В нашем случае это означает, что $\nu_\ell(\lambda_{n+1}^{(i_1)} - \lambda_{n+1}^{(i_2)}) > 1/(2\ell)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \nu_\ell(\lambda_{n+1}^{(i_1)} - \lambda_{n+1}^{(i_2)}) &\leq \nu_\ell(G^{(-n-1)}(\lambda_{n+1}^{(i_1)}, \rho_{n+1})) = \delta \nu_\ell(\lambda_{n+1}^{(i_1)}) \\ &= \frac{\delta}{\ell} \nu_\ell(\lambda_n) = \frac{1}{\ell} \nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/\mathbb{Q}_{\ell,n})) \leq \frac{1}{2\ell}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что корни $\lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(e)}$ различны, следовательно, они образуют набор всех корней уравнения $F^{(-n)}(X, \rho_n) = 0$. Тогда один из этих корней, например $\lambda_n^{(i)}$, совпадает с λ_n . Мы положим $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}^{(i)}$. Поскольку поле $\mathbb{Q}_{\ell,n+1}(\lambda_{n+1})$ имеет степень e над $\mathbb{Q}_{\ell,n+1}$ и содержит λ_n , оно совпадает с K_{n+1} . Таким образом, λ_{n+1} является униформизирующим элементом поля K_{n+1} , удовлетворяющим условиям (ii)–(iv). Предложение доказано.

Сопоставляя предложения 3.2 и 3.4 и используя мультипликативное свойство дифференты, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда существует целое неотрицательное δ , зависящее только от K и такое, что для всех достаточно больших n

$$\mathcal{D}(K_n/\mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} (\ell^{n+1} \rho_n^{-s_n-1} \lambda_n^\delta) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (2^{n+1} \rho_n^{-1} \lambda_n^\delta) & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где ρ_n и λ_n – униформизирующие элементы полей $\mathbb{Q}_{\ell,n}$ и K_n соответственно и $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \ell^i$.

Поскольку дискриминант равен норме дифференты, предложение 3.5 позволяет вычислить ℓ -адический показатель дискриминанта $D(K_n)$ поля K_n для всех достаточно больших n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Положим $d = ef = [K_\infty : \mathbb{Q}_{\ell,\infty}]$, где e имеет тот же смысл, что и в предложении 3.4, $f = [H : \mathbb{Q}_\ell]$ и H – максимальное неразветвленное подполе поля K_∞ . Тогда для всех достаточно больших n выполняется равенство

$$\nu_\ell(D(K_n)) = \begin{cases} (n+1)d\ell^n - (s_n+1)d + \delta f & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+1)d \cdot 2^n - d + \delta f & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где s_n и δ имеют тот же смысл, что и в предложении 3.5.

Для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(D(K_{n+1})/D(K_n)) = \begin{cases} d(n+2)\ell^n(\ell-1) & \text{при } \ell \neq 2, \\ d(n+3) \cdot 2^n & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения непосредственно следует из предложения 3.5, если учесть, что для всех достаточно больших n выполнено

$$\begin{aligned}\nu_\ell(N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\ell)) &= [K_n : \mathbb{Q}_\ell] = d\ell^n, \\ \nu_\ell(N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\rho_n)) &= d, \quad \nu_\ell(N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\lambda_n)) = f.\end{aligned}$$

Второе утверждение предложения следует из первого. Предложение доказано.

Пусть теперь k – произвольное поле алгебраических чисел и k_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k . Для точки v поля k_∞ , лежащей над ℓ , пусть $k_{v,\infty}$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение локального поля k_v , являющегося пополнением k относительно v . Для расширения $k_{v,\infty}/k_v$ величины d , f и δ из предложения 3.6 мы будем обозначать через d_v , f_v и δ_v соответственно. В качестве непосредственного следствия формулы (3.1) и предложения 3.6 мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть k – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ и k_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k . Пусть $D(k_n)$ – дискриминант промежуточного подполя k_n расширения k_∞/k . Пусть $d = \sum_{v|\ell} d_v = [k_\infty : \mathbb{Q}_\ell]$ и $\delta = \sum_{v|\ell} \delta_v f_v$, где в обоих случаях сумма берется по всем точкам v поля k_∞ , лежащим над ℓ . Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(D(k_n)) = \begin{cases} (n+1)d\ell^n - (s_n+1)d + \delta & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+1)d \cdot 2^n - d + \delta & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

Для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(D(k_{n+1})/D(k_n)) = \begin{cases} d(n+2)\ell^n(\ell-1) & \text{при } \ell \neq 2, \\ d(n+3) \cdot 2^n & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

§ 4. Вполне вещественные поля и поля СМ-типа

Предположим, что k – вполне вещественное поле алгебраических чисел такое, что для всех промежуточных подполей k_n кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k справедлива гипотеза Леопольдта. Тогда согласно следствию из предложения 2.1 выполнено $R_\ell(k_n) \neq 0$ для всех n . Цель этого параграфа – получить формулу, описывающую ℓ -адический показатель $\nu_\ell(R_\ell(k_n))$ при всех достаточно больших n . Но сначала мы докажем некоторые вспомогательные результаты, которые справедливы для произвольного поля алгебраических чисел k . Пусть $\mathcal{A}(k_n)$ – группа, которая была определена в доказательстве предложения 2.2. Отображение ℓ -адического логарифма (2.1) переводит $\mathcal{A}_\ell(k_n)$ в некоторую полную решетку $\log \mathcal{A}(k_n) \subset \prod_{v|\ell} k_{n,v}$. Следовательно, можно определить ℓ -адический регулятор $R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_n))$ группы $\mathcal{A}_\ell(k_n)$. Имено, если $c(n) := [k_n : \mathbb{Q}] = \ell^n d$ и $e_1, \dots, e_{c(n)}$ – некоторый $\mathbb{Z}_\ell$ -базис группы $\mathcal{A}_\ell(k_n)/\prod_{v|\ell} \mu_\ell(k_{n,v})$, где $\mu_\ell(k_{n,v})$ – группа всех корней из единицы ℓ -примарной степени в поле $k_{n,v}$, то

$$R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_n)) := \det(\mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}(\log e_i \log e_j)), \quad 1 \leq i, j \leq c(n).$$

Элемент $R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_n)) \in \mathbb{Q}_\ell$ зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_{c(n)}$. Этот элемент определен с точностью до ℓ -адической единицы, но его ℓ -адический показатель $\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_\ell(k_n)))$ определен однозначно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть k – произвольное поле алгебраических чисел. Положим $\mathcal{O}_\ell(k_n) = \prod_{v|\ell} \mathcal{O}(k_{n,v})$, $P(k_n) = \prod_{v|\ell} \bar{k}_{n,v}$ и $Y(k_n) = \prod_{v|\ell} \mu_\ell(k_{n,v})$, где $\mathcal{O}(k_{n,v})$ – кольцо целых поля $k_{n,v}$, $\bar{k}_{n,v}$ – поле вычетов поля $k_{n,v}$ и $\mu_\ell(k_{n,v})$ – ℓ -компонента группы всех корней из единицы в поле $k_{n,v}$, причем во всех трех случаях произведение берется по всем точкам v поля k_n , лежащим над ℓ . Пусть d определено из условия $[k_n : \mathbb{Q}] = \ell^n d$. Тогда

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_\ell(k_n) : \log \mathcal{A}(k_n)] &= |P(k_n)| |Y(k_n)|, \\ \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_n))) &= \begin{cases} (n+1)d\ell^n - (s_n+1)d + \delta + 2\nu_\ell(|P(k_n)| |Y(k_n)|) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+1)d \cdot 2^n - d + \delta + 2\nu_\ell(|P(k_n)| |Y(k_n)|) & \text{при } \ell = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

где s_n и δ имеют тот же смысл, что и в предложении 3.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки v поля k_n , лежащей над ℓ , рассмотрим гомоморфизм ℓ -адического логарифма $\log_v : U^{(1)}(k_{n,v}) \rightarrow k_{n,v}$. Как хорошо известно, для любого достаточно большого i ℓ -адический логарифм индуцирует изоморфизм мультипликативной и аддитивной групп $\log_v : U^{(i)}(k_{n,v}) \cong \pi_v^i \mathcal{O}(k_{n,v})$, где $U^{(i)}(k_{n,v}) = 1 + \pi_v^i \mathcal{O}(k_{n,v})$ и π_v – униформизирующий элемент поля $k_{n,v}$. Таким образом, для любого достаточно большого i отображение $\log_v$ индуцирует точную последовательность

$$1 \rightarrow \mu_\ell(k_{n,v}) \rightarrow U^{(1)}(k_{n,v})/U^{(i)}(k_{n,v}) \rightarrow k_{n,v}/\pi_v^i \mathcal{O}(k_{n,v}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}(k_{n,v}) : \log_v U^{(1)}(k_{n,v})) &= |\mu_\ell(k_{n,v})| (U^{(1)}(k_{n,v}) : U^{(i)}(k_{n,v}))^{-1} \\ &\times (\mathcal{O}(k_{n,v}) : \pi_v^i \mathcal{O}(k_{n,v})) = |\mu_\ell(k_{n,v})| |\bar{k}_{n,v}|. \end{aligned}$$

Первая формула предложения следует теперь из того, что

$$(\mathcal{O}_\ell(k_n) : \log \mathcal{A}_\ell(k_n)) = \prod_{v|\ell} (\mathcal{O}(k_{n,v}) : \log_v U^{(1)}(k_{n,v})).$$

Для доказательства второй формулы нужно заметить, что мы можем так же, как и для $\mathcal{A}_\ell(k_n)$, определить ℓ -адический регулятор $R_\ell(\mathcal{O}_\ell(k_n))$ и для $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля $\mathcal{O}_\ell(k_n)$, который есть не что иное, как ℓ -компонента дискриминанта поля k_n . Поэтому, используя те же рассуждения, что и при выводе формулы (2.3), мы получаем

$$\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_n))) = \nu_\ell(\mathcal{D}(k_n)) + 2\nu_\ell([\mathcal{O}_\ell(k_n) : \log \mathcal{A}_\ell(k_n)]). \quad (4.1)$$

Вторая формула предложения следует теперь из первой и из предложения 3.7. Предложение доказано.

Следующее утверждение потребуется нам только в §5, но мы дадим его доказательство здесь, так как по смыслу оно близко к предложению 4.1.

Для $m > n$ пусть $\mathcal{A}(k_m/k_n)$ имеет тот же смысл, что и в доказательстве предложения 2.2. Положим

$$\bar{\mathcal{A}}(k_n) = \mathcal{A}(k_n)/Y(k_n) = \prod_{v|\ell} U^{(1)}(k_{n,v})/\mu_\ell(k_{n,v}). \quad (4.2)$$

Определим $\bar{\mathcal{A}}(k_m)$ аналогично и положим $\bar{\mathcal{A}}(k_m/k_n) = \mathcal{A}(k_m/k_n)/Y(k_m)$. Таким образом, $\bar{\mathcal{A}}(k_n)$, $\bar{\mathcal{A}}(k_m)$ и $\bar{\mathcal{A}}(k_m/k_n)$ – это свободные $\mathbb{Z}_\ell$ -модули ранга $[k_n : \mathbb{Q}]$, $[k_m : \mathbb{Q}]$ и $t := [k_m : \mathbb{Q}] - [k_n : \mathbb{Q}]$ соответственно. Пусть элементы $u_1, \dots, u_t \in \mathcal{A}(k_m/k_n)$ образуют базис $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля $\bar{\mathcal{A}}(k_m/k_n)$. Положим

$$R_\ell(\mathcal{A}(k_m/k_n)) := \det(\mathrm{Sp}_{k_m/\mathbb{Q}_\ell}(\log u_i \log u_j)) \in \mathbb{Q}_\ell^\times, \quad 1 \leq i, j \leq t.$$

Заметим, что регулятор $R_\ell(\mathcal{A}(k_m/k_n))$ определен с точностью до умножения на ℓ -адическую единицу (зависящую от выбора базиса), но значение нормирования $\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_m/k_n)))$ зависит только от m и n .

Мы будем предполагать, что n достаточно велико. В частности, это означает, что все точки поля k_n , лежащие над ℓ , чисто разветвлены в расширении k_m/k_n для любого $m > n$. Над каждой точкой $v|\ell$ поля k_n лежит ровно одна точка поля k_m , которую мы будем также обозначать через v , и во всех полях k_n имеется одно и то же число s точек, лежащих над ℓ .

Существуют два варианта поведения групп корней из единицы $\mu_\ell(k_{n,v})$: при фиксированной точке v либо мы имеем $\mu_\ell(k_{n,v}) = 1$ ($\mu_\ell(k_{n,v}) = \{\pm 1\}$ при $\ell = 2$) для всех n , либо для всех достаточно больших n мы имеем $|\mu_\ell(k_{n,v})| = \ell^{n+1}$ ($|\mu_\ell(k_{n,v})| = \ell^{n+2}$ при $\ell = 2$). Число точек $v|\ell$ первого типа мы обозначим через s_1 , а второго типа – через s_2 . Таким образом, $s_1 + s_2 = s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть k – произвольное поле алгебраических чисел. Тогда для всех достаточно больших n справедливо равенство

$$\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_{n+1}/k_n))) = \begin{cases} (n+1)\ell^n(\ell-1)d + \ell^{n+1}d - 2s_1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+4) \cdot 2^n d - 2s_1 & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где $\ell^n d = [k_n : \mathbb{Q}_\ell]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем рассуждать так же, как при доказательстве предложения 2.3. Поскольку мы рассматриваем одно и то же поле k , мы не будем использовать k в обозначениях, т.е. вместо $\mathcal{A}(k_n)$ или $\mathcal{A}(k_{n+1}/k_n)$ мы запишем просто $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_{n,n+1}$. Группу Галуа $G(k_{n+1}/k_n)$ мы обозначаем через G , а норменное отображение $N_G = N_{k_{n+1}/k_n}$ – просто через N .

Очевидно, что $\bar{\mathcal{A}}_{n+1,n}$ совпадает с ядром отображения $N: \bar{\mathcal{A}}_{n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_n$. Как и в доказательстве предложения 2.3, мы положим $\bar{V} = \bar{\mathcal{A}}_n \oplus \bar{\mathcal{A}}_{n+1,n}$ и определим регулятор $R_\ell(\bar{V})$ с помощью некоторого $\mathbb{Z}_\ell$ -базиса модуля $\bar{V}$. Отметим, что $\nu_\ell(R_\ell(\bar{V}))$ зависит только от $\bar{V}$. Как и в (2.3), мы имеем

$$\nu_\ell(R_\ell(\bar{V})) = \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_{n+1})) + 2\nu_\ell([\bar{\mathcal{A}}_{n+1} : \bar{V}]). \quad (4.3)$$

Рассуждая, как при выводе (2.6), мы получаем

$$\begin{aligned}\nu_\ell(R_\ell(\bar{V})) &= \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_{n+1,n})R_\ell(\mathcal{A}_n)[k_{n+1} : k_n]^{[k_n:\mathbb{Q}_\ell]}) \\ &= \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_{n+1,n})) + \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_n)) + \ell^n d.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Вычисляя индекс $[\bar{\mathcal{A}}_{n+1} : \bar{V}]$ так же, как в доказательстве предложения 2.3, мы получаем

$$[\bar{\mathcal{A}}_{n+1} : \bar{V}] = [N\bar{\mathcal{A}}_{n+1} : \bar{\mathcal{A}}_n^\ell] = \ell^{\ell^n d} [\bar{\mathcal{A}}_n : N\bar{\mathcal{A}}_{n+1}]^{-1}.$$

Индекс $i := [\bar{\mathcal{A}}_n : N\bar{\mathcal{A}}_{n+1}]$ легко вычисляется с помощью локальной теории полей классов. Пусть $U_{n,v}^{(1)}$ и $\mu_{\ell,n,v}$ – соответственно группа главных единиц и ℓ -компонента группы всех корней из единицы локального поля $k_{n,v}$. Положим $\bar{U}_{n,v}^{(1)} = U_{n,v}^{(1)}/\mu_{\ell,n,v}$. Тогда $i = \prod_{v|\ell} i_v$, где $i_v = [\bar{U}_{n,v}^{(1)} : N\bar{U}_{n+1,v}^{(1)}]$. Если $\ell \neq 2$, то группа $\mu_{\ell,n,v}$ является когомологически тривиальным G -модулем, и в этом случае $\bar{U}_{n,v}^{(1)}/N\bar{U}_{n+1,v}^{(1)} \cong H^0(G, \bar{U}_{n+1,v}^{(1)}) \cong H^0(G, U_{n+1,v})$. Согласно локальной теории полей классов для любой размерности i

$$H^i(G, U_{n+1,v}) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Следовательно, при $\ell \neq 2$ мы имеем $i_v = \ell$ для любой точки $v|\ell$, т. е. $i = \ell^s$.

Если $\ell = 2$, то $U_{n,v} = U_{n,v}^{(1)}$. Если $\mu_{\ell,n+1,v} \neq \{\pm 1\}$, то, рассуждая, как и в случае $\ell \neq 2$, мы получаем $i_v = 2$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $\ell = 2$ и $\mu_{\ell,n+1,v} = \{\pm 1\}$. В этом случае имеется естественный эпиморфизм

$$H^0(G, U_{n+1,v}) = U_{n,v}/N U_{n+1,v} \xrightarrow{\varphi} \bar{U}_{n,v}/N \bar{U}_{n+1,v}. \quad (4.6)$$

Легко видеть, что $-1 \in N U_{n+1,v}$. Действительно, тождественное отображение $\text{id}: U_{n,v} \rightarrow U_{n,v}$ индуцирует эпиморфизм

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong H^0(G(k_{n+2}/k_n), U_{n+2,v}) \rightarrow H^0(G, U_{n+1,v}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

но элемент -1 не может представлять элемент четвертого порядка в группе $H^0(G(k_{n+2}/k_n), U_{n+2,v})$. Таким образом, φ в (4.6) является изоморфизмом. Следовательно, и в этом случае $i_v = 2$, т. е. при любом ℓ выполняется равенство $i = \ell^s$. Тогда

$$\nu_\ell([\bar{\mathcal{A}}_{n+1} : \bar{V}]) = \ell^n d - s. \quad (4.7)$$

Теперь, приравнивая правые части (4.3) и (4.4) и используя (4.7), мы получаем

$$\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_{n+1,n})) = \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_{n+1})) - \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_n)) + \ell^n d - 2s.$$

Подставляя в последнюю формулу значения $\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_{n+1}))$ и $\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_n))$ из предложения 4.1 и учитывая, что $|P_{n+1}| = |P_n|$ и

$$|Y_{n+1}| = \ell^{s_2}|Y_n| = \ell^{s-s_1}|Y_n|, \quad (4.8)$$

мы получаем утверждение предложения. Предложение доказано.

Пусть теперь k – вполне вещественное поле алгебраических чисел такое, что для любого промежуточного подполя k_n в круговом $\mathbb{Z}_\ell$ -расширении k_∞/k справедлива гипотеза Леопольдта. Пусть L_n – максимальное абелево ℓ -расширение поля k_n , не разветвленное вне простых делителей ℓ , и $L_\infty = \bigcup_n L_n$ – максимальное абелево ℓ -расширение поля k_∞ , не разветвленное вне точек, лежащих над ℓ . Пусть $X = G(L_\infty/k_\infty)$ – группа Галуа расширения L_∞/k_∞ . Тогда X является компактным периодическим Λ -модулем, где $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$ – пополненная групповая алгебра группы Галуа $\Gamma := G(k_\infty/k)$. Пусть $\Gamma_n = G(k_\infty/k_n)$ и γ_n – некоторая топологическая образующая группы Γ_n . Положим $X_n = X/(\gamma_n - 1)X$. Тогда при любом n точна последовательность

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow G(L_n/k_n) \rightarrow \Gamma_n \rightarrow 0.$$

Согласно нашему предположению k_∞/k_n – единственное $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k_n . Следовательно, Λ -модуль X строго конечен в смысле Ивасава, т. е. X_n является конечной абелевой группой при любом n . Тогда согласно теореме Ивасава для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(|X_n|) = \lambda_1 n + \mu_1 \ell^n + \nu_1, \quad (4.9)$$

где λ_1, μ_1, ν_1 – инварианты Ивасава Λ -модуля X , не зависящие от n . Пусть $\text{Cl}_\ell(k_n)$ – ℓ -компонента группы классов идеалов поля k_n . Тогда согласно теории Ивасава для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(|\text{Cl}_\ell(k_n)|) = \lambda n + \mu \ell^n + \nu, \quad (4.10)$$

где λ, μ, ν – инварианты Ивасава расширения k_∞/k .

Пусть N_∞ – максимальное абелево неразветвленное ℓ -расширение поля k_∞ и $\bar{T}_\ell(k) = G(N_\infty/k_\infty)$. Тогда $\bar{T}_\ell(k)$ является периодическим Λ -модулем с инвариантами Ивасава λ, μ . Поскольку $N_\infty \subseteq L_\infty$, существует естественный эпиморфизм $\varphi: X \rightarrow \bar{T}_\ell(k)$. Пусть $W = \ker \varphi$. Тогда W – это Λ -подмодуль в X , порожденный подгруппами инерции для всех точек v , лежащих над ℓ , и W имеет инварианты Ивасава $\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda \geq 0$ и $\mu_2 = \mu_1 - \mu \geq 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть k – вполне вещественное поле алгебраических чисел такое, что для всех промежуточных подполей k_n кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k справедлива гипотеза Леопольдта. Пусть λ_2 и μ_2 – инварианты Ивасава расширения k_∞/k , определенные выше. Тогда существует целое ν_2 , не зависящее от n и такое, что для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(R_\ell(k_n)) = \begin{cases} (n+1)d\ell^n - s_n d + 2\lambda_2 n + 2\mu_2 \ell^n + \nu_2 & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+1)d \cdot 2^n + 2\lambda_2 n + 2\mu_2 \ell^n + \nu_2 & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где d определяется из условия $[k_n : \mathbb{Q}] = \ell^n d$ и $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \ell^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(k_n)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы единиц $U(k_n)$ поля k_n . Пусть $\tilde{U}(k_n) = U(k_n)[\ell] \oplus \mathbb{Z}_\ell \varepsilon_0$ – мультипликативный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, порожденный $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем $U(k_n)[\ell]$ и элементом ε_0 , где $\varepsilon_0 = 1 + \ell$ при $\ell \neq 2$ и $\varepsilon_0 = 5$ при $\ell = 2$. Согласно предположению для поля k_n справедлива гипотеза Леопольдта, поэтому естественные отображения $U(k_n)[\ell] \rightarrow \mathcal{A}(k_n)$ и

$\tilde{U}(k_n) \rightarrow \mathcal{A}(k_n)$ являются вложениями. Легко видеть, что $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг каждого из модулей $\tilde{U}(k_n)$ и $\mathcal{A}(k_n)$ равен степени $[k_n : \mathbb{Q}]$, поэтому определен индекс $i_n := (\log \mathcal{A}(k_n) : \log \tilde{U}(k_n))$. Наша ближайшая цель – вычислить этот индекс.

Поскольку поле k_n вполне вещественное, в нем нет корней из единицы, отличных от ± 1 , т. е. $\mu_\ell(k_n) = 1$ при $\ell \neq 2$ и $\mu_\ell(k_n) = \{\pm 1\}$ при $\ell = 2$. Поэтому

$$i_n = (\mathcal{A}(k_n) : \tilde{U}(k_n)) |Y(k_n)|^{-1\tau}, \quad (4.11)$$

где $\tau = 1$ при $\ell \neq 2$ и $\tau = 2$ при $\ell = 2$. Для вычисления индекса $(\mathcal{A}(k_n) : \tilde{U}(k_n))$ мы применим теорию полей классов. Согласно этой теории подгруппа $W(k_n)$ группы $G(L_n/k_n)$, порожденная подгруппами ветвления для всех точек $v|\ell$ и, следовательно, совпадающая с ядром естественного эпиморфизма $\alpha: G(L_n/k_n) \rightarrow \text{Cl}_\ell(k_n)$, канонически изоморфна группе $\mathcal{A}(k_n)/U(k_n)[\ell]$. Таким образом, индекс $(\mathcal{A}(k_n) : \tilde{U}(k_n))$ равен индексу $(W(k_n) : \langle \varepsilon_0 \rangle)$, где $\langle \varepsilon_0 \rangle$ – $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль в $W(k_n)$, порожденный образом элемента ε_0 . Группа $W(k_n)$ содержится в точной последовательности

$$0 \rightarrow W'(k_n) \xrightarrow{f'} W(k_n) \xrightarrow{f''} W''(k_n), \quad (4.12)$$

где $W'(k_n) = W(k_n) \cap X_n$ и $W''(k_n)$ – подгруппа группы Γ_n , порожденная подгруппами ветвления. Если n достаточно велико, то расширение k_∞/k_n чисто разветвлено. Следовательно, $W''(k_n) = \Gamma_n$ для таких n , и эпиморфизм α индуцирует эпиморфизм $\alpha': X_n \rightarrow \text{Cl}_\ell(k_n)$ с ядром $W'(k_n)$.

Пусть $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля $\mathbb{Q}$. Имеется канонический эпиморфизм $\beta: \mathbb{Z}_\ell^\times \rightarrow \Gamma = G(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$, ядро которого состоит из всех корней из единицы в $\mathbb{Z}_\ell$. Тогда элемент $\gamma = \beta(\varepsilon_0)$ является топологической образующей группы Γ . Если $\mathbb{Q}_n$ – промежуточное подполе расширения $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ (степени ℓ^n над $\mathbb{Q}$), то имеется канонический эпиморфизм $\beta_n: \mathcal{A}(\mathbb{Q}_n) \rightarrow \Gamma_n$, где $\Gamma_n = G(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}_n)$. Если рассматривать ε_0 как элемент группы $\mathcal{A}(\mathbb{Q}_n)$, то легко проверить, что $\beta_n(\varepsilon_0) = \gamma_n$, где $\gamma_n = \gamma^{\ell^n}$ является топологической образующей группы Γ_n .

Рассмотрим теперь ε_0 как элемент группы $\mathcal{A}(k_n)$. Пусть γ' – элемент группы $\Gamma_n = G(k_\infty/k_n)$, соответствующий элементу ε_0 в смысле теории полей классов, т. е. γ' получается в результате применения к ε_0 сквозного отображения

$$\mathcal{A}(k_n) \rightarrow \mathcal{A}(k_n)/U(k_n)[\ell] \cong W(k_n) \xrightarrow{f''} W''(k_n) \cong \Gamma_n,$$

где f'' – отображение из (4.12). Тогда ограничение γ' на поле $\mathbb{Q}_\infty$ совпадает с автоморфизмом расширения $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}_n$, соответствующим в смысле теории полей классов элементу $\varepsilon_0^d = N_{k_n/\mathbb{Q}_n}(\varepsilon_0) \in \mathcal{A}(\mathbb{Q}_n)$, т. е. с автоморфизмом $\beta_n(\varepsilon_0^d) = \gamma_n^d$. Таким образом, $[\mathcal{A}(k_n) : \tilde{U}(k_n)] = |W'(k_n)| |\text{Coker } f''| = |X_n| |\text{Cl}_\ell(k_n)|^{-1\ell^a}$, где $a = \nu_\ell(d)$. Применяя (4.9) и (4.10), мы получаем, что для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell([\mathcal{A}(k_n) : \tilde{U}(k_n)]) = \lambda_2 n + \mu_2 \ell^n + (\nu_1 - \nu) + \nu_\ell(d).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \nu_\ell(i_n) &= \nu_\ell([\log \mathcal{A}(k_n) : \log \tilde{U}(k_n)]) \\ &= \lambda_2 n + \mu_2 \ell^n + (\nu_1 - \nu_2) + \nu_\ell(d) - \nu_\ell(|Y(k_n)|) + \nu_\ell(\tau). \end{aligned}$$

Согласно (2.3) имеем

$$R_\ell(k_n) = R_\ell(\mathcal{A}(k_n)) [\log \mathcal{A}(k_n) : \log \tilde{U}(k_n)]^2,$$

т. е.

$$\nu_\ell(R_\ell(k_n)) = \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_n))) + 2\nu_\ell(i_n).$$

Подставляя в последнюю формулу значение $\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_n)))$ из предложения 4.1, мы получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Следующий результат непосредственно вытекает из теоремы 4.1, но ввиду его важности мы сформулируем его как отдельную теорему.

ТЕОРЕМА 4.2. В условиях теоремы 4.1 для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(R_\ell(k_{n+1})/R_\ell(k_n)) = \begin{cases} (n+2)d(\ell-1)\ell^n + 2\lambda_2 + 2\mu_2(\ell^{n+1} - \ell^n) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+3)d \cdot 2^n + 2\lambda_2 + 2\mu_2 \cdot 2^n & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

§ 5. Вполне вещественные поля и поля CM-типа (продолжение)

В этом параграфе мы покажем, что теорема 4.2 остается справедливой для произвольного вполне вещественного поля алгебраических чисел, если в ее формулировке заменить отношение регуляторов $R_\ell(k_{n+1})/R_\ell(k_n)$ на нормированный относительный ℓ -адический регулятор $\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)$.

Итак, пусть k – вполне вещественное поле алгебраических чисел. Как и в доказательстве предложения 2.2, рассмотрим для некоторого n естественное диагональное отображение $\alpha_n: U(k_n)[\ell] \rightarrow \mathcal{A}(k_n)$. Если не предполагать, что для поля k_n справедлива гипотеза Леопольдта, то отображение α_n не обязано быть вложением. Положим $\text{Кег } \alpha_n = E_n$. Как хорошо известно (см., например, [9]), для любого поля алгебраических чисел k справедлива слабая гипотеза Леопольдта, т. е. группы E_n стабилизируются, начиная с некоторого n . Кроме того, $E_n \cap \mu_\ell(k_n) = 1$, т. е. для любого достаточно большого n группа $E := E_n = E_{n+1}$ не зависит от n и является свободным $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем с тривиальным действием группы Галуа $G = G(k_{n+1}/k_n)$. Следовательно, $E \cap U_{n+1,n}[\ell] = 1$, где $U_{n+1,n}[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы относительных единиц $U_{n+1,n} := U(k_{n+1}/k_n)$, т. е. для всех достаточно больших n отображение α_{n+1} индуцирует вложение

$$\tilde{\alpha}_{n+1}: U_{n+1,n}[\ell] \hookrightarrow \mathcal{A}_{n+1,n}, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{A}_{n+1,n} := \mathcal{A}(k_{n+1}/k_n)$ имеет тот же смысл, что и в доказательстве предложения 2.2.

Если k – вполне вещественное поле, то $\mathbb{Z}_\ell$ -модули $U_{n+1,n}[\ell]$ и $\mathcal{A}_{n+1,n}$ имеют одинаковый $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг (равный $[k_{n+1} : \mathbb{Q}] - [k_n : \mathbb{Q}] = \ell^n(\ell-1)d$), поэтому группа Сокег $\tilde{\alpha}_{n+1}$, которую мы будем обозначать через $W(k_{n+1}/k_n)$ или просто через $W_{n+1,n}$, конечна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть k – вполне вещественное поле алгебраических чисел. Тогда для всех достаточно больших n справедливо равенство

$$\nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}/k_n)) = \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_{n+1}/k_n)) |W_{n+1,n}|^2 |Y_{n+1}|^{-2} \tau^2),$$

где $\tau = 1$ при $\ell \neq 2$ и $\tau = 2$ при $\ell = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tilde{U}_{n+1,n} := U_{n+1,n}[\ell]$ при $\ell \neq 2$ и $\tilde{U}_{n+1,n} = U_{n+1,n}[\ell]/\{\pm 1\}$ при $\ell = 2$. Тогда $\tilde{U}_{n+1,n}$ – свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль в $\bar{\mathcal{A}}_{n+1,n}$ и

$$\nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}/k_n)) = \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}_{n+1,n})) + 2\nu_\ell([\bar{\mathcal{A}}_{n+1,n} : \tilde{U}_{n+1,n}]).$$

Поскольку подгруппы $\mathbb{Z}_\ell$ -кручения в $U_{n+1,n}[\ell]$ и $\mathcal{A}_{n+1,n}$ имеют порядки τ и $|Y_{n+1}|$ соответственно, мы получаем

$$[\bar{\mathcal{A}}_{n+1,n} : \tilde{U}_{n+1,n}] = [\mathcal{A}_{n+1,n} : \tilde{\alpha}_{n+1}(U_{n+1,n}[\ell])] |Y_{n+1}|^{-1}\tau.$$

Предложение доказано.

Теперь мы вычислим порядок группы $W_{n+1,n}$. Как и в доказательстве теоремы 4.1, положим $W_n := W(k_n) = \mathcal{A}_n/\alpha_n(U_n[\ell])$. Рассмотрим две точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \alpha_{n+1}(U_{n+1}[\ell]) \rightarrow \mathcal{A}_{n+1} \rightarrow W_{n+1} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \alpha_n(U_n[\ell]) \rightarrow \mathcal{A}_n \rightarrow W_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если n достаточно велико, то $E_n = E_{n+1} = E$, т.е. $\alpha_n(U_n[\ell]) \cong U_n[\ell]/E$ и $\alpha_{n+1}(U_{n+1}[\ell]) \cong U_{n+1}[\ell]/E$. Следовательно, естественное вложение $U_n[\ell] \hookrightarrow U_{n+1}[\ell]$ индуцирует вложение $i_1: \alpha_n(U_n[\ell]) \hookrightarrow \alpha_{n+1}(U_{n+1}[\ell])$, которое согласовано с естественным вложением $i_2: \mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$. Если обозначить через i_3 естественное отображение $W_n \rightarrow W_{n+1}$, индуцированное отображением i_2 , то указанные точные последовательности можно включить в следующую коммутативную диаграмму, в которой точны столбцы и нижние две строки:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Coker } i_1 & \longrightarrow & \text{Coker } i_2 & \longrightarrow & \text{Coker } i_3 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \alpha_{n+1}(U_{n+1}[\ell]) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{n+1} & \longrightarrow & W_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 & & \uparrow i_3 \\ 0 & \longrightarrow & \alpha_n(U_n[\ell]) & \longrightarrow & \mathcal{A}_n & \longrightarrow & W_n \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & \text{Ker } i_3 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & 0 \end{array} \quad (5.2)$$

Согласно “лемме о змее” эта диаграмма индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } i_3 \rightarrow \text{Coker } i_1 \xrightarrow{f} \text{Coker } i_2 \rightarrow \text{Coker } i_3 \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

Мы охарактеризуем группы $\text{Coker } i_1$, $\text{Coker } i_2$, $\text{Coker } i_3$ и покажем, что $\text{Ker } i_3 = 0$. Очевидно, что

$$\text{Coker } i_1 = \alpha_{n+1}(U_{n+1}[\ell])/\alpha_n(U_n[\ell]) \cong (U_{n+1}[\ell]/E)/(U_n[\ell]/E) \cong U_{n+1}[\ell]/U_n[\ell].$$

Поскольку $U_n[\ell] = U_{n+1}[\ell]^G$, где $G = G(k_{n+1}/k_n)$, мы получаем

$$\text{Coker } i_1 \cong U_{n+1}[\ell]/U_{n+1}[\ell]^G \cong (\sigma - 1)U_{n+1}[\ell] \subset U_{n+1}[\ell],$$

где последний изоморфизм совпадает с умножением на $\sigma - 1$ и σ – некоторая образующая группы G . Аналогично, мы получаем

$$\text{Coker } i_2 \cong \mathcal{A}_{n+1}/\mathcal{A}_{n+1}^G \cong (\sigma - 1)\mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_{n+1},$$

причем отображение f в последовательности (5.3) индуцировано отображением $\alpha_{n+1}: U_{n+1}[\ell] \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}$. Имеются очевидные включения $(\sigma - 1)U_{n+1}[\ell] \subset U_{n+1,n}[\ell]$ и $(\sigma - 1)\mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_{n+1,n}$, но согласно (5.1) отображение α_{n+1} становится вложением при ограничении на $U_{n+1,n}[\ell]$. Следовательно, отображение f в (5.3) является вложением, т. е. $\text{Ker } i_3 = 0$ и точна последовательность

$$0 \rightarrow W_n \xrightarrow{i_3} W_{n+1} \rightarrow \text{Coker } i_3 \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. То, что i_3 является вложением, может быть доказано также в рамках теории Ивасава. Пусть A_n – группа Галуа максимального абелева ℓ -расширения поля k_n , не разветвленного вне простых делителей ℓ , и A_{n+1} – аналогичным образом определенная группа Галуа для поля k_{n+1} . Тогда согласно теории полей классов группы W_n и W_{n+1} естественно изоморфны подгруппам групп A_n и A_{n+1} соответственно, порожденным подгруппами инерции всех точек, лежащих над ℓ . При этом отображение i_3 индуцируется отображением перемещения $\text{Ver}_{n,n+1}: A_n \rightarrow A_{n+1}$, которое является вложением.

Дальнейший план действий таков. Используя формулу (5.3) (с учетом того, что $\text{Ker } i_3 = 0$), мы получим соотношение между $|W_{n+1,n}|$ и $|\text{Coker } i_3|$, а затем, используя (5.4), выразим $|\text{Coker } i_3|$ в терминах некоторых инвариантов Ивасава.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Для любого достаточно большого n порядки групп $W_{n+1,n}$ и $\text{Coker } i_3$ связаны соотношением

$$|W_{n+1,n}| = |\text{Coker } i_3| \ell^{s_1} |Y_{n+1}| \tau^{-1} \ell^{-1} [\overline{U}_n : N\overline{U}_{n+1}]^{-1},$$

где $N = N_{k_{n+1}/k_n}$ – норменное отображение относительно группы G , s_1 имеет тот же смысл, что и в предложении 4.2, и τ имеет тот же смысл, что и в предложении 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из данной выше характеристики групп $\text{Coker } i_1$, $\text{Coker } i_2$ и отображения f , мы имеем изоморфизм

$$\text{Coker } i_3 \cong (\sigma - 1)\mathcal{A}_{n+1}/(\sigma - 1)U_{n+1}[\ell].$$

С другой стороны, $W_{n+1,n} \cong \mathcal{A}_{n+1,n}/U_{n+1,n}[\ell]$, поэтому

$$|W_{n+1,n}| = [\mathcal{A}_{n+1,n} : (\sigma - 1)\mathcal{A}_{n+1}] |\text{Coker } i_3| [U_{n+1,n}[\ell] : (\sigma - 1)U_{n+1}[\ell]]^{-1}. \quad (5.5)$$

Пусть $\text{Ker } N \mathcal{A}_{n+1}$ – подгруппа элементов с нормой 1 (относительно группы G) в группе $\mathcal{A}_{n+1}$. Определим группу $\text{Ker } N U_{n+1}[\ell]$ аналогичным образом. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1,n} &\supseteq \text{Ker } N \mathcal{A}_{n+1} \supseteq (\sigma - 1)\mathcal{A}_{n+1}, \\ U_{n+1,n}[\ell] &\supseteq \text{Ker } N U_{n+1}[\ell] \supseteq (\sigma - 1)U_{n+1}[\ell]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p &:= |\mathcal{A}_{n+1,n}/(\sigma-1)\mathcal{A}_{n+1}| = [\mathcal{A}_{n+1,n} : \text{Ker } N \mathcal{A}_{n+1}][\text{Ker } N \mathcal{A}_{n+1} : (\sigma-1)\mathcal{A}_{n+1}], \\ q &:= |U_{n+1,n}[\ell]/(\sigma-1)U_{n+1}[\ell]| = [U_{n+1,n}[\ell] : \text{Ker } N U_{n+1}[\ell]] \\ &\quad \times [\text{Ker } N U_{n+1}[\ell] : (\sigma-1)U_{n+1}[\ell]]. \end{aligned}$$

Используя (4.5), мы получаем

$$\text{Ker } N \mathcal{A}_{n+1}/(\sigma-1)\mathcal{A}_{n+1} \cong \prod_{v|\ell} H^{-1}(G, U_{n+1,v}) \cong (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^s, \quad (5.6)$$

где s – число точек поля k_n , лежащих над ℓ . Далее, отображение N индуцирует вложение

$$N: \mathcal{A}_{n+1,n}/\text{Ker } N \mathcal{A}_{n+1} \hookrightarrow Y_n. \quad (5.7)$$

Если $\ell \neq 2$, то для любой точки $v|\ell$ группа $\mu_\ell(k_{n+1,v})$ является кохомологически тривиальным G -модулем. Тогда Y_{n+1} – кохомологически тривиальный G -модуль и $N(Y_{n+1}) = Y_n$. Следовательно, вложение (5.7) является изоморфизмом и

$$[\mathcal{A}_{n+1,n} : \text{Ker } N \mathcal{A}_{n+1,n}] = |Y_n|. \quad (5.8)$$

В случае $\ell = 2$ ситуация несколько сложнее. Именно, возможны точки $v|\ell$, для которых $\mu_\ell(k_{n,v}) = \mu_\ell(k_{n+1,v}) = \{\pm 1\}$. Однако, как было показано в доказательстве предложения 4.2, и в этом случае $-1 \in N \mathcal{A}_{n+1}$, т.е. равенство (5.8) остается справедливым и в этом случае.

Итак, при любом ℓ из (5.6), (5.8) и (4.8) следует

$$p = \ell^s |Y_n| = \ell^{s_1} |Y_{n+1}|. \quad (5.9)$$

Теперь вычислим индекс q . Мы имеем

$$\text{Ker } N U_{n+1}[\ell]/(\sigma-1)U_{n+1}[\ell] = H^{-1}(G, U_{n+1}[\ell]) \cong H^1(G, U_{n+1}[\ell]).$$

Заметим, что согласно теореме Дирихле $|H^1(G, U_{n+1}[\ell])| = \ell |H^0(G, U_{n+1}[\ell])|$. Если $\ell \neq 2$, то $\mu_\ell(k_n) = \{1\}$, т.е. $U_{n+1,n}[\ell] = \text{Ker } N U_{n+1}[\ell]$. Следовательно, при $\ell \neq 2$

$$q = \ell |H^0(G, U_{n+1})| = \ell [\bar{U}_n : N \bar{U}_{n+1}]. \quad (5.10)$$

В случае $\ell = 2$ если $-1 \in N U_{n+1}[\ell]$, то $[U_{n+1,n}[\ell] : \text{Ker } N U_{n+1}[\ell]] = 2$ и $U_n/N U_{n+1} \cong \bar{U}_n/N \bar{U}_{n+1}$, т.е.

$$q = 4 [\bar{U}_n : N \bar{U}_{n+1}]. \quad (5.11)$$

Если $-1 \notin N U_{n+1}[\ell]$, то $U_{n+1,n}[\ell] = \text{Ker } N U_{n+1}[\ell]$ и $|H^0(G, U_{n+1})| = 2 [\bar{U}_n : N \bar{U}_{n+1}]$, т.е. и в этом случае выполняется (5.11).

Подставляя теперь значения p и q из (5.9)–(5.11) в формулу (5.5), мы получаем утверждение предложения. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Можно доказать, что для всех достаточно больших n всегда $-1 \in N U_{n+1}[\ell]$. Поскольку этот результат нигде не будет использован, мы оставляем его проверку читателю. Отметим только, что его достаточно доказать для случая $k = \mathbb{Q}$.

Для вычисления порядка группы $\text{Coker } i_3$ нам потребуется одно общее утверждение о периодических Λ -модулях. Хотя это утверждение едва ли может считаться новым, автор не знает подходящей ссылки и поэтому приведет также его доказательство.

Итак, пусть $\Gamma \cong \mathbb{Z}_\ell$, γ – некоторая топологическая образующая группы Γ и $\gamma_n = \gamma^{\ell^n}$ – образующая единственной подгруппы $\Gamma_n \subseteq \Gamma$ индекса ℓ^n . Для компактного нётерова Λ -модуля X пусть $X_{(n)} = X/(\gamma_n - 1)X$. Тогда для любых $m > n$ определен естественный эпиморфизм $N_{m,n}: X_{(m)} \rightarrow X_{(n)}$ и существует естественный гомоморфизм $i_{n,m}: X_{(n)} \rightarrow X_{(m)}$, однозначно определенный тем, что композиция $i_{n,m} \circ N_{m,n}$ совпадает с норменным отображением $N_{\Gamma_n/\Gamma_m}: X_{(m)} \rightarrow X_{(m)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть X – нётеров компактный периодический Λ -модуль, не содержащий нетривиальных конечных подмодулей, и W – некоторый подмодуль X с инвариантами Ивасава $\lambda = \lambda(W)$ и $\mu = \mu(W)$. Пусть $W(n)$ – образ $W_{(n)}$ в $X_{(n)}$ относительно естественного отображения $W_{(n)} \rightarrow X_{(n)}$ и $i(n): W(n) \rightarrow W(n+1)$ – отображение, индуцированное отображением $i_{n,n+1}: X_{(n)} \rightarrow X_{(n+1)}$. Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(|\text{Coker } i(n)|) = \lambda + \mu \ell^n (\ell - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем предложение в несколько этапов. Везде ниже предполагается, что X не содержит нетривиальных конечных подмодулей.

1. Пусть $W = X \cong \Lambda/\ell\Lambda$. Тогда $X_{(n)} \cong \mathbb{F}_\ell[\Gamma/\Gamma_n]$, где $\mathbb{F}_\ell$ – поле из ℓ элементов. Следовательно, $X_{(n+1)}$ – кохомологически тривиальный (Γ/Γ_n) -модуль, отображение $i_{n,n+1} = i(n)$ является вложением и $|X_{(n+1)}| = \ell^{n+1}$, $|X_{(n)}| = \ell^n$, т. е. $\nu_\ell(|\text{Coker } i(n)|) = \ell^n(\ell - 1) = \mu(X)\ell^n(\ell - 1)$.

2. Пусть X – $\mathbb{Z}_\ell$ -периодический модуль. Тогда X обладает композиционным рядом длины $\mu = \mu(X)$, все факторы которого изоморфны $\Lambda/\ell\Lambda$. Из этого снова следует, что $X_{(n+1)}$ – кохомологически тривиальный (Γ/Γ_n) -модуль, отображение $i_{n,n+1} = i(n)$ является вложением и $\nu_\ell(|\text{Coker } i(n)|) = \nu_\ell(|X_{(n+1)}|) - \nu_\ell(|X_{(n)}|) = \mu \ell^n (\ell - 1)$.

3. Пусть $W = X$ и $X \cong \mathbb{Z}_\ell^\lambda$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль. Тогда γ_n действует на X матрицей $A_n \in \text{GL}(\lambda, \mathbb{Z}_\ell)$, причем для достаточно больших n справедливо сравнение $A_n \equiv E \pmod{\ell}$, где E – единичная матрица. Следовательно, отображение $N_{\Gamma_n/\Gamma_{n+1}}: X_{(n+1)} \rightarrow X_{(n+1)}$ равно $\ell\varepsilon$ для некоторого обратимого отображения ε . Это означает, что $i_{n,n+1}(X_{(n)}) = i(n)(X_{(n)}) = \ell X_{(n+1)}$ для всех достаточно больших n и $|\text{Coker } i(n)| = \ell^\lambda$.

4. Пусть $W = X$ и X – произвольный периодический Λ -модуль. Тогда X содержится в точной последовательности

$$0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0,$$

где $X' \cong \mathbb{Z}_\ell^\lambda$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль и X'' – периодический $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, не содержащий нетривиальных конечных подмодулей. Эта последовательность индуцирует для любого n коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X'_{(n+1)} & \longrightarrow & X_{(n+1)} & \longrightarrow & X''_{(n+1)} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow i' & & \uparrow i & & \uparrow i'' \\ 0 & \longrightarrow & X'_{(n)} & \longrightarrow & X_{(n)} & \longrightarrow & X''_{(n)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

где i', i, i'' – это отображения $i_{n,n+1}$ для модулей X', X и X'' соответственно. Согласно п. 2 отображение i'' является вложением. Тогда в силу “леммы о змее” точна последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Coker} i' \rightarrow \operatorname{Coker} i \rightarrow \operatorname{Coker} i'' \rightarrow 0$$

и согласно пп. 2 и 3 для всех достаточно больших n

$$|\operatorname{Coker} i| = |\operatorname{Coker} i'| |\operatorname{Coker} i''| = \ell^{\lambda + \mu \ell^n (\ell - 1)}.$$

5. Пусть X – произвольный периодический Λ -модуль и $W \subseteq X$. Положим $T = X/W$. Тогда для всех достаточно больших n группы T^{Γ_n} стабилизируются и мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} T^{\Gamma_{n+1}} & \xrightarrow{\delta} & W_{(n+1)} & \xrightarrow{\beta} & X_{(n+1)} & \longrightarrow & T_{(n+1)} \longrightarrow 0 \\ \parallel & & \uparrow i_1 & & \uparrow i & & \uparrow i_2 \\ T^{\Gamma_n} & \xrightarrow{\delta} & W_{(n)} & \xrightarrow{\alpha} & X_{(n)} & \longrightarrow & T_{(n)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Отметим, что эта диаграмма подробно описана в [9, доказательство теоремы 1.2]. Согласно п. 4, примененному к W , мы получаем $|\operatorname{Coker} i_1| = \ell^{\lambda + \mu \ell^n (\ell - 1)}$, где λ, μ – инварианты Ивасава модуля W . Мы имеем

$$W(n) = \alpha(W_{(n)}) \cong W_{(n)}/T^{\Gamma_n}, \quad W(n+1) = \beta(W_{(n+1)}) \cong W_{(n+1)}/T^{\Gamma_n}.$$

Таким образом, отображение $i(n): W(n) \rightarrow W(n+1)$ совпадает с отображением $W(n)/\delta(T^{\Gamma_n}) \rightarrow W_{(n+1)}/i_1\delta(T^{\Gamma_n})$, индуцированным отображением i_1 . Следовательно, $\operatorname{Coker} i(n) \cong \operatorname{Coker} i_1$ и $|\operatorname{Coker} i(n)| = |\operatorname{Coker} i_1| = \ell^{\lambda + \mu \ell^n (\ell - 1)}$. Предложение доказано.

Мы применим предложение 5.3 для вычисления порядка группы $\operatorname{Coker} i_3$ из (5.4). Для вполне вещественного поля алгебраических чисел k и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞ пусть, как и в § 4, $X = G(L_\infty/k_\infty)$, где L_∞ – максимальное абелево ℓ -расширение поля k_∞ , не разветвленное вне точек, лежащих над ℓ . Пусть W – подгруппа в X , порожденная подгруппами инерции всех точек, лежащих над ℓ . Очевидно, что X и W являются периодическими Λ -модулями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть k – вполне вещественное поле алгебраических чисел, $\operatorname{Coker} i_3$ – группа (зависящая от n) из точной последовательности (5.4) и X, W – определенные выше Λ -модули, связанные с круговым $\mathbb{Z}_\ell$ -расширением k_∞/k . Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(|\operatorname{Coker} i_3|) = \lambda_2 + \mu_2 \ell^n (\ell - 1),$$

где λ_2 и μ_2 – инварианты Ивасава модуля W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – некоторая точка поля k_n , лежащая над ℓ , и $U_{n,v}^{(1)}$ – группа главных единиц локального поля $k_{n,v}$. Мы предполагаем n настолько большим, что все точки, лежащие над ℓ , чисто разветвлены в расширении k_{n+1}/k_n . Пусть $V_{n,v}$ – подгруппа универсальных норм в $U_{n,v}^{(1)}$ из поля $k_{\infty,v}$, т.е. $V_{n,v} = \bigcap_{m>n} N_{\Gamma_n/\Gamma_m}(U_{m,v}^{(1)})$. Тогда согласно локальной теории полей классов

$$U_{n,v}^{(1)}/V_{n,v} = G(k_{\infty,v}/k_{n,v}) = \Gamma_n \cong \mathbb{Z}_\ell.$$

Положим $\mathcal{A}'_n = \prod_{v|\ell} V_{n,v}$ и $\mathcal{A}''_n = \mathcal{A}_n/\mathcal{A}'_n$. Тогда $\mathcal{A}''_n \cong \mathbb{Z}_\ell^s$, где s – число точек, лежащих над ℓ в поле k_n .

Отображение i_2 из (5.2) индуцирует для любого n коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}'_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{n+1} & \xrightarrow{\pi_{n+1}} & \mathcal{A}''_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow i'_2 & & \uparrow i_2 & & \uparrow i''_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}'_n & \longrightarrow & \mathcal{A}_n & \xrightarrow{\pi_n} & \mathcal{A}''_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Из локальной теории полей классов следует, что i''_2 является изоморфизмом для всех достаточно больших n . Пусть $\mathcal{A}''$ – некоторая группа, изоморфная $\mathbb{Z}_\ell^s$. Выберем для любого достаточно большого n изоморфизм $\psi_n: \mathcal{A}''_n \cong \mathcal{A}''$ такой, что для любого достаточно большого n мы имеем $\psi_{n+1} = \psi_n i'_2$.

Положим $W'_n = \mathcal{A}'_n/(\alpha_n(U_n[\ell]) \cap \mathcal{A}'_n)$ и $W''_n = \mathcal{A}''_n/\pi_n \alpha_n(U_n[\ell])$. Определим группы W'_{n+1} и W''_{n+1} аналогичным образом. Тогда отображение i_3 из (5.4) индуцирует для любого n коммутативную диаграмму, в которой точны нижние две строки:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Coker } i'_3 & \longrightarrow & \text{Coker } i_3 & \longrightarrow & \text{Coker } i''_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W'_{n+1} & \longrightarrow & W_{n+1} & \longrightarrow & W''_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow i'_3 & & \uparrow i_3 & & \uparrow i''_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & W'_n & \longrightarrow & W_n & \longrightarrow & W''_n & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5.12)$$

Поскольку $U_n[\ell] \subset U_{n+1}[\ell]$ для любого n , группы $\psi_n \pi_n \alpha_n(U_n[\ell])$ образуют (нестрого) возрастающую цепочку подгрупп в группе $\mathcal{A}''$ и, следовательно, стабилизируются, начиная с некоторого n , т.е. для всех достаточно больших n отображение i''_3 в (5.12) является изоморфизмом и $\text{Ker } i''_3 = \text{Coker } i''_3 = 0$. Тогда для всех достаточно больших n верхняя строка в (5.12) точна в силу “леммы о змее” и сводится к изоморфизму

$$\text{Coker } i_3 = \text{Coker } i'_3. \quad (5.13)$$

Для вычисления порядка группы $\text{Coker } i'_3$ мы заметим, что норменное отображение $N = N_{k_{n+1}/k_n}: W_{n+1} \rightarrow W_n$ индуцирует отображение $N: W''_{n+1} \rightarrow W''_n$ такое, что $i''_3 \circ N = \ell$. Тогда согласно глобальной теории полей классов имеем $W = \varprojlim W_n = \varprojlim W'_n$, где предел берется относительно норменных отображений. Далее, для любого n норменное отображение $N: \mathcal{A}'_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}'_n$ является эпиморфизмом. Следовательно, отображение $N: W'_{n+1} \rightarrow W'_n$ эпиморфно

при любом n , но тогда и естественная проекция $W \rightarrow W'_n$ является эпиморфизмом, т. е. W'_n совпадает с группой $W(n)$ из предложения 5.3, а i'_3 совпадает с отображением $i(n)$ из этого предложения (примененного к Λ -модулю $X = G(L_\infty/k_\infty)$ и его подмодулю W). Тогда согласно предложению 5.3 мы имеем $\nu_\ell(|\text{Coker } i'_3|) = \lambda_2 + \mu_2 \ell^n (\ell - 1)$, но согласно (5.13) это же равенство справедливо и для $\text{Coker } i_3$. Предложение доказано.

Теперь мы сформулируем и докажем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть k – произвольное вполне вещественное поле алгебраических чисел и λ_2, μ_2 – инварианты Ивасава модуля W , имеющего тот же смысл, что и в предложении 5.4. Тогда для всех достаточно больших n*

$$\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) = \begin{cases} (n+2)d\ell^n(\ell-1) + 2\lambda_2 + 2\mu_2\ell^n(\ell-1) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+3)d \cdot 2^n + 2\lambda_2 + 2\mu_2 \cdot 2^n & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записи введем обозначения $x(n) = \lambda_2 + \mu_2 \ell^n (\ell - 1)$ и $y(n) = \nu_\ell([\bar{U}_n : N\bar{U}_{n+1}])$. Из предложений 5.1 и 5.2 мы получаем

$$\nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}/k_n)) = \nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_{n+1}/k_n))) + 2\nu_\ell(|\text{Coker } i_3|) + 2s_1 - 2 - 2y(n).$$

Подставляя в эту формулу значение $\nu_\ell(R_\ell(\mathcal{A}(k_{n+1}/k_n)))$ из предложения 4.2 и значение $\nu_\ell(|\text{Coker } i_3|)$ из предложения 5.4, мы получаем

$$\nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}/k_n)) = \begin{cases} (n+1)\ell^n(\ell-1)d + \ell^{n+1}d + 2x(n) - 2 - 2y(n) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+4) \cdot 2^n d + 2x(n) - 2 - 2y(n) & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

Применяя теперь определение 2.3 при $k = k_n$, $K = k_{n+1}$ и учитывая, что в нашем случае $[K : k] = \ell$ и $r(k) = d\ell^n - 1$, мы получаем

$$\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) = \begin{cases} (n+2)\ell^n(\ell-1)d + 2x(n) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+3) \cdot 2^n d + 2x(n) & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Полученные результаты легко переносятся на случай полей СМ-типа. Пусть K – поле СМ-типа, т. е. K – чисто мнимое квадратичное расширение некоторого вполне вещественного поля k . Пусть K_∞ и k_∞ – круговые $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения этих полей и K_n, k_n – промежуточные подполя в расширениях K_∞/K и k_∞/k соответственно. Тогда для любого n поле K_n является полем СМ-типа с максимальным вещественным подполем k_n . Положим $d = [K_\infty : \mathbb{Q}_\infty]$ и $d_0 = [k_\infty : \mathbb{Q}_\infty]$. Тогда для всех достаточно больших n мы имеем $[K_n : \mathbb{Q}] = \ell^n d$ и $[k_n : \mathbb{Q}] = \ell^n d_0$.

Согласно теореме Дирихле группы единиц $U(K_n)$ и $U(k_n)$ имеют одинаковый ранг и, как хорошо известно,

$$Q_n := [U(K_n) : \mu(K_n)U(k_n)] \leq 2,$$

причем либо $Q_n = 1$ для всех n , либо $Q_n = 2$ для всех достаточно больших n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть K – поле CM-типа с максимальным вещественным подполем k . Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(\mathcal{R}(K_{n+1}/K_n)) = \begin{cases} \nu_\ell(\mathcal{R}(k_{n+1}/k_n)) & \text{при } \ell \neq 2, \\ \nu_\ell(\mathcal{R}(k_{n+1}/k_n)) + 2^{n-1}d & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где $[K_n : \mathbb{Q}] = \ell^n d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\ell \neq 2$. Если единицы $u_1, \dots, u_t$ образуют базис группы относительных единиц $U(k_{n+1}/k_n)$, то они порождают в $U(K_{n+1}/K_n)$ подгруппу индекса ≤ 2 . Очевидно, что для $1 \leq i, j \leq t$

$$\mathrm{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}}(\log u_i \log u_j) = 2 \mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}(\log u_i \log u_j), \quad (5.14)$$

поэтому из определения 2.2 мы получаем $\nu_\ell(R(K_{n+1}/K_n)) = \nu_\ell(R(k_{n+1}/k_n))$. Далее, из $Q_n \leq 2$ следует

$$\nu_\ell([\overline{U}(K_n) : N \overline{U}(K_{n+1})]) = \nu_\ell([\overline{U}(k_n) : N \overline{U}(k_{n+1})]), \quad (5.15)$$

где $N = N_{K_{n+1}/K_n} = N_{k_{n+1}/k_n}$. Теперь утверждение предложения для $\ell \neq 2$ следует непосредственно из определения 2.3.

Если $\ell = 2$, возможны три случая.

1. $Q_n = 1$. Тогда $\overline{U}(K_{n+1}) = \overline{U}(k_{n+1})$, $\overline{U}(K_n) = \overline{U}(k_n)$ и $\overline{U}(K_{n+1}/K_n) = \overline{U}(k_{n+1}/k_n)$. Следовательно, выполняется равенство (5.15), а с учетом (5.14) и того, что $t = 2^n d_0 = 2^{n-1}d$, мы получаем

$$\nu_\ell(R(K_{n+1}/K_n)) = \nu_\ell(R(k_{n+1}/k_n)) + 2^{n-1}d, \quad (5.16)$$

откуда следует справедливость предложения в этом случае.

2. $Q_n = 2$. Тогда $K_n = k_n(\sqrt{u})$ для некоторой единицы $u \in U(k_n)$, причем мы предполагаем, что $u \notin N \overline{U}(k_{n+1})$. Тогда $[\overline{U}(K_n) : \overline{U}(k_n)] = [\overline{U}(K_{n+1}) : \overline{U}(k_{n+1})] = 2$, но, с другой стороны, $N(\sqrt{u}) = u$, т. е. $u \in N \overline{U}(K_{n+1})$. Следовательно, $[N \overline{U}(K_{n+1}) : N \overline{U}(k_{n+1})] = 2$, и тогда выполняется (5.15). Предположим, что $x \in \overline{U}(K_{n+1}/K_n) \setminus \overline{U}(k_{n+1}/k_n)$. Тогда $x = v\sqrt{u}$ для некоторого $v \in \overline{U}(k_{n+1})$. Следовательно, $1 = N(x) = uN(v)$, и мы получаем противоречие с тем, что $u \notin N \overline{U}(k_{n+1})$. Таким образом, $\overline{U}(K_{n+1}/K_n) = \overline{U}(k_{n+1}/k_n)$, откуда, как и в случае 1, следует (5.16), что доказывает предложение и в этом случае.

3. $Q = 2$. Тогда $K_n = k_n(\sqrt{u})$, где $u \in U(k_n)$ и $u \in N \overline{U}(k_{n+1})$. В этом случае $N \overline{U}(K_{n+1}) = N \overline{U}(k_{n+1})$, поэтому

$$[\overline{U}(K_n) : N \overline{U}(K_{n+1})] = 2[\overline{U}(k_n) : \overline{U}(k_{n+1})]. \quad (5.17)$$

С другой стороны, если $u = N(v)$ для некоторого $v \in \overline{U}(k_{n+1})$, то $N(v^{-1}\sqrt{u}) = 1$, т. е. $v\sqrt{u} \in U(K_{n+1}/K_n) \setminus \overline{U}(k_{n+1}/k_n)$ и $[\overline{U}(K_{n+1}/K_n) : \overline{U}(k_{n+1}/k_n)] = 2$. Таким образом, в этом случае вместо (5.16) мы получаем равенство

$$\nu_\ell(R(K_{n+1}/K_n)) = \nu_\ell(R(k_{n+1}/k_n)) + 2^{n-3}d.$$

Подставляя это равенство вместе с (5.17) в определение 2.3, мы получаем утверждение предложения и в этом случае.

Предложение доказано полностью.

Из теоремы 5.1 и предложения 5.5 немедленно следует

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть K – поле CM-типа с максимальным вещественным подполем k и $d = [K_\infty : \mathbb{Q}_\infty]$. Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(K_{n+1}/K_n)) = \begin{cases} (n+2)\ell^n(\ell-1)d/2 + 2\lambda_2 + 2\mu_2\ell^n(\ell-1) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+4)d \cdot 2^{n-1} + 2\lambda_2 + 2\mu_2 \cdot 2^n & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где инварианты Ивасава λ_2 и μ_2 имеют тот же смысл, что и в теореме 5.1.

§ 6. Абелевы локальные поля

В этом параграфе мы получаем некоторые результаты, относящиеся к конечному абелеву расширению K поля $\mathbb{Q}_\ell$ и его круговому $\mathbb{Z}_\ell$ -расширению K_∞/K . В случае, когда K – круговое локальное поле, большая часть этих результатов была уже получена в [3], [5] и [11]. В следующем параграфе эти результаты будут использованы для исследования одного класса полей алгебраических чисел, так называемых полей, абелевых над ℓ .

Начнем с некоторых предварительных рассуждений. Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, содержащее ζ_0 , где ζ_0 – первообразный корень из единицы степени ℓ при $\ell \neq 2$ и $\zeta_0 = \sqrt{-1}$ при $\ell = 2$. Пусть $K_n = K(\zeta_n)$ – n -й этаж кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K и $q_n = |\mu_\ell(K_n)|$ – порядок группы всех корней из единицы ℓ -примарной степени в поле K . Как и в [3], мы определяем группу $V(K_n)$ как подгруппу мультипликативной группы $\overline{U}(K_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, порожденную группой $\overline{U}(K_n) := U(K_n)/\mu(K_n)$ и элементом $\sqrt[q_n]{u_n}$, где $u_n \in U(K_n)$ – примарный элемент поля K_n , т.е. такой элемент, что $K_n(\sqrt[q_n]{u_n})/K_n$ является неразветвленным расширением степени q_n . Таким образом, $V(K_n)$ является свободным $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем ранга $[K_n : \mathbb{Q}_\ell]$ и модулем Галуа, причем $V(K_n)/\overline{U}(K_n)$ и $\mu_\ell(K_n)$ изоморфны как модули Галуа. Положим $V(K_\infty) = \varprojlim V(K_n)$ и $\overline{U}(K_\infty) = \varprojlim \overline{U}(K_n)$, где пределы берутся относительно норменных отображений.

Таким образом, $\overline{U}(K_\infty) \subset V(K_\infty)$, и эти группы являются нётеровыми компактными модулями над пополненным групповым кольцом $\mathfrak{R}_\infty := \mathbb{Z}_\ell[[\mathfrak{G}_\infty]]$, где $\mathfrak{G}_\infty = G(K_\infty/\mathbb{Q}_\ell)$.

В работе [11, § 4] было показано, что в случае, когда K является круговым полем и $\zeta_0 \in K$, группа $V(K_\infty)$ является свободным $\mathfrak{R}_\infty$ -модулем ранга 1. Более того, в [11, формулы (4.6)–(4.8)] были указаны два явно определенных элемента $\eta(K_\infty)$ и $\eta'(K_\infty)$, каждый из которых порождает $V(K_\infty)$ как $\mathfrak{R}_\infty$ -модуль. Положим

$$V(K_n)^0 = \{x \in V(K_n) \mid N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(x) = 1\}, \quad \overline{U}(K_n)^0 = \overline{U}(K_n) \cap V(K_n)^0.$$

Таким образом, $V(K_n)^0$ и $\overline{U}(K_n)^0$ являются свободными $\mathbb{Z}_\ell$ -модулями ранга $[K_n : \mathbb{Q}_\ell] - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть K – произвольное конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$ такое, что $\zeta_0 \in K$. Тогда для всех n группа $V(K_n)^0$ совпадает с образом естественной проекции $\pi_n : V(K_\infty) \rightarrow V(K_n)$, причем $V(K_n) = \overline{U}(K_n)V(K_n)^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из локальной теории полей классов следует, что $\overline{U}(K_n)^0$ совпадает с образом естественной проекции $\pi'_n: \overline{U}(K_\infty) \rightarrow \overline{U}(K_n)$. Обозначим через N_n норму из K_n в $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда N_n индуцирует эпиморфизм модулей Галуа

$$\mu_\ell(K_n) \cong V(K_n)/\overline{U}(K_n) \rightarrow N_n(V(K_n))/N_n(\overline{U}(K_n)),$$

откуда следует

$$[N_n(V(K_n)) : N_n(\overline{U}(K_n))] \leq 2. \quad (6.1)$$

Согласно локальной теории полей классов имеем $\bigcap_{m>n} N_m(\overline{U}(K_m)) = 1$, поэтому из (6.1) следует $\bigcap_{m>n} N_m(V(K_m)) = 1$. Таким образом, если $x \in \pi_n(V(K_\infty))$, то $N_n(x) \in \bigcap_{m>n} N_m(V(K_m)) = 1$, т. е. $\pi_n(V(K_\infty)) \subseteq V(K_n)^0$.

Пусть $x \in V(K_n)$. Поскольку $V(K_m)/\overline{U}(K_m)$ является когомологически тривиальным $G(K_m/K_n)$ -модулем при любом $m > n$, мы можем найти элемент $x_1 \in \pi_n(V(K_\infty))$ такой, что $xx_1^{-1} \in \overline{U}(K_n)$. Следовательно, $V(K_n) = \overline{U}(K_n)V(K_n)^0$. Если $x \in V(K_n)^0$, то и $xx_1^{-1} \in \overline{U}(K_n)^0$, т. е. $xx_1^{-1} = \pi'_n(y)$ для некоторого $y \in \overline{U}(K_\infty)$. Тогда $x = x_1\pi'_n(y) \in \pi_n(V(K_\infty))$. Предложение доказано.

Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ и $L = K(\zeta_0)$. Тогда для всех достаточно больших n мы имеем $G(L_n/K_n) \cong G(L_\infty/K_\infty) := \Delta$, где Δ – конечная циклическая группа, порядок которой делит $\ell - 1$ при $\ell \neq 2$ и $|\Delta| \leq 2$ при $\ell = 2$. Для всех таких n мы определим модули Галуа $V(K_n)$ и $V(K_n)^0$, полагая $V(K_n) = V(L_n)^\Delta$ и $V(K_n)^0 = V(K_n) \cap V(L_n)^0 = (V(L_n)^0)^\Delta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда найдутся индекс r и элемент $x \in V(K_r)$, зависящие только от K и такие, что для всех достаточно больших n существует изоморфизм $G(K_n/K_r)$ -модулей (в аддитивной записи)

$$V(K_n) = \mathbb{Z}_\ell x \oplus V(K_n)^0. \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\zeta_0 \in K$, то для всех полей K_n справедлива формула (6.1). Если $\zeta_0 \notin K$ и $L = K(\zeta_0)$, то формула (6.1) справедлива для полей L_n , откуда, как легко проверить, следует, что для всех достаточно больших n

$$[N_n(V(K_n)) : N_n(\overline{U}(K_n))] \leq \begin{cases} 1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ 4 & \text{при } \ell = 2. \end{cases} \quad (6.3)$$

Обозначим группу $\overline{U}(\mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Z}_\ell$ через Ψ , а через Ψ_n – единственную ее подгруппу индекса ℓ^n . Напомним, что $\Psi = \langle 1 + \ell \rangle$ при $\ell \neq 2$ и $\Psi = \langle 1 + 4 \rangle$ при $\ell = 2$. Согласно локальной теории полей классов для всех n , больших некоторого n_0 , справедливо условие $N_n(\overline{U}(K_n)) = \Psi_n$. Пусть $n_1 = n_0 + 1$ и $y \in \overline{U}(K_{n_1})$ – такой элемент, что $N_{n_1}(y)$ порождает Ψ_{n_1} . Тогда для любого $n > n_1$ элемент $N_n(y) = (N_{n_1}(y))^{\ell^{n-n_1}}$ порождает Ψ_n . Таким образом, при $\ell \neq 2$ из (6.3) следует справедливость (6.2) с $r = n_0$ и $x = y$.

В случае $\ell = 2$ пусть n_2 – некоторый индекс, на котором достигается максимум значения $[N_n(V(K_n)) : N_n(\overline{U}(K_n))] = 2^\rho$, где согласно (6.3) инвариант ρ может принимать одно из значений 0, 1, 2. Тогда если $x \in V(K_{n_2})$ и $N_{n_2}(x)$ порождает группу $N_{n_2}(V(K_{n_2}))$, то для любого $n > n_2$ элемент $N_n(x)$ порождает группу $N_n(V(K_n))$. Таким образом, равенство (6.2) выполняется и в этом случае с $r = \max\{n_0, n_2\}$ и x , определенным выше. Предложение доказано.

Пусть G – конечная группа и A – нётеров $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -модуль, не имеющий кручения над $\mathbb{Z}_\ell$. Положим

$$J_G(A) = \{x \in A \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \mid x = y - |G|^{-1}N_G(y) \text{ для некоторого } y \in A\}.$$

Очевидно, что сопоставление $j_G: y \rightarrow y - |G|^{-1}N_G(y)$ определяет эпиморфизм $j_G: A \rightarrow J_G(A)$, ядро которого совпадает с A^G . Если G – циклическая группа с образующей σ , то умножение на $\sigma - 1$ индуцирует изоморфизм между $J_G(A)$ и $(\sigma - 1)A$, рассматриваемыми как подмодули в $A \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Модуль $J_G(\mathbb{Z}_\ell[G])$ мы будем обозначать через J_G . Если A является (Γ_n/Γ_m) -модулем, где $m > n$ и $\Gamma_n/\Gamma_m = G(K_m/K_n)$, то вместо $J_{\Gamma_n/\Gamma_m}A$ мы будем для краткости записывать $J_{m,n}A$. Через $J_{m,n}$ мы будем обозначать $J_{m,n}\mathbb{Z}_\ell[\Gamma_n/\Gamma_m]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть K – конечное абелево расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда для всех достаточно больших n существует изоморфизм модулей Галуа $V(K_n)^0 \cong J_{\mathfrak{G}_n}$, где $\mathfrak{G}_n = G(K_n/\mathbb{Q}_\ell)$. В частности, $V(K_\infty)^0 := \varprojlim V(K_n)^0$ является свободным $\mathfrak{R}_\infty$ -модулем ранга 1.

Существует индекс r , зависящий только от K и такой, что для любых $n > p \geq r$ имеет место изоморфизм $J_{n,p}V(K_n) \cong J_{n,p}^{[K_p:\mathbb{Q}_\ell]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\zeta_0 \in K$, то, как уже упоминалось, группа $V(K_\infty)$ является свободным $\mathfrak{R}_\infty$ -модулем ранга 1. Согласно предложению 6.1 для любого n группа $V(K_n)^0$ является эпиморфным образом группы $V(K_\infty)$ и, следовательно, также порождается одним элементом как $\mathfrak{G}_n$ -модуль. Следовательно, существует эпиморфизм $\varphi_n: \mathbb{Z}_\ell[\mathfrak{G}_n] \rightarrow V(K_n)^0$. Поскольку $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг модуля $V(K_n)^0$ равен $|\mathfrak{G}_n| - 1$ и $(V(K_n)^0)^{\mathfrak{G}_n} = 0$, мы получаем $V(K_n)^0 \cong J_{\mathfrak{G}_n}$. Если $\zeta_0 \notin K$, то положим $L = K(\zeta_0)$. Пусть n настолько велико, что $G(L_n/K_n) = G(L_\infty/K_\infty) = \Delta$. Согласно уже доказанному имеем $V(L_n)^0 \cong J_{G_n}$, где $G_n = G(L_n/\mathbb{Q}_\ell)$. Тогда из существования точной последовательности Δ -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \rightarrow \mathbb{Z}_\ell[G_n] \rightarrow J_{G_n} \rightarrow 0$$

следует, что $H^0(\Delta, V(L_n)^0) = 0$, т. е.

$$V(K_n)^0 = (V(L_n)^0)^\Delta = N_\Delta(V(L_n)^0). \quad (6.4)$$

Таким образом, $V(K_n)^0$ является циклическим $\mathfrak{G}_n$ -модулем $\mathbb{Z}_\ell$ -ранга $|\mathfrak{G}_n| - 1$, причем $(V(K_n)^0)^{\mathfrak{G}_n} = 0$, откуда следует $V(K_n)^0 \cong J_{\mathfrak{G}_n}$, что доказывает первое утверждение предложения. Второе утверждение следует из первого, из предложения 6.2 и того факта, что для любой конечной группы G и ее подгруппы H справедливо равенство $J_H(J_G) = J_H(\mathbb{Z}_\ell[G]) \cong J_H^{[G:H]}$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть K – конечное абелево расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ такое, что $\zeta_0 \notin K_n$ для всех n . Тогда для всех достаточно больших n справедливо равенство $V(K_n)^0 = \overline{U}(K_n)^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $L = K(\zeta_0)$, то согласно предложению 6.1 точна последовательность

$$1 \rightarrow \overline{U}(L_n)^0 \rightarrow V(L_n)^0 \rightarrow \mu_\ell(L_n) \rightarrow 1. \quad (6.5)$$

Если $\ell \neq 2$, то взяв в (6.5) Δ -инвариантные элементы, а также учитывая, что $\mu_\ell(L_n)^\Delta = \{1\}$, мы получаем

$$\bar{U}(K_n)^0 = (\bar{U}(L_n)^0)^\Delta = (V(L_n)^0)^\Delta = V(K_n)^0.$$

В случае $\ell = 2$ мы имеем $\Delta = \{1, \tau\}$, причем для всех достаточно больших n элемент τ действует на $\mu_\ell(L_n)$ обращением, т.е. $\tau(a) = a^{-1}$ для любого $a \in \mu_\ell(L_n)$. Это означает, что $N_\Delta(\mu_\ell(L_n)) = \{1\}$, но тогда, применяя N_Δ к (6.5) и используя (6.4), мы получаем

$$\bar{U}(K_n)^0 \subseteq V(K_n)^0 = N_\Delta(V(L_n)^0) \subseteq (\bar{U}(L_n)^0)^\Delta.$$

Если $x \in (\bar{U}(L_n)^0)^\Delta \setminus \bar{U}(K_n)^0$, то $\tau(x) = -x$, но $L_n = K_n(\sqrt{-1})$ т.е. $x = y\sqrt{-1}$ для некоторого $y \in U(K_n)^0$. Следовательно, $(\bar{U}(L_n)^0)^\Delta = \bar{U}(K_n)^0$. Предложение доказано.

Если K – некоторое конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, то ℓ -адический логарифм $\log: \bar{U}(K) \hookrightarrow K$ по линейности продолжается до отображения $\log V(K) \hookrightarrow K$, образ которого $\log V(K)$ является полной решеткой в K . Положим

$$V(K)^\perp = \{x \in K \mid \text{Sp}_{K/\mathbb{Q}_\ell}(xy) \in \mathbb{Z}_\ell \text{ для всех } y \in \log V(K)\}. \quad (6.6)$$

Пусть M – некоторое $\mathbb{Q}_\ell$ -подпространство в K такое, что билинейная форма $(x, y) \rightarrow \text{Sp}_{K/\mathbb{Q}_\ell}(xy)$ остается невырожденной при ограничении на M . Если A – некоторая полная решетка в M , то мы полагаем

$$A^\perp = \{x \in M \mid \text{Sp}_{K/\mathbb{Q}_\ell}(xy) \in \mathbb{Z}_\ell \text{ для всех } y \in A\}. \quad (6.7)$$

Мы будем называть $A^\perp$ *решеткой, дуальной к A* .

Пусть $\{\dots, K_{n-1}, K_n, \dots\}$ – последовательность промежуточных подполей в круговом $\mathbb{Z}_\ell$ -расширении K_∞/K . Для заданного $q \geq 0$, удовлетворяющего условиям из [5, § 1], и i такого, что $0 \leq i \leq n - q - 1$, положим

$$\mathcal{F}_n^{(i)} = \ell \text{Sp}_{K_n/K_{n-i}} - \text{Sp}_{K_n/K_{n-i-1}}.$$

Элемент $\mathcal{F}_n^{(i)}$ можно рассматривать как оператор, действующий на K_n , а также как элемент групповой алгебры $\mathbb{Q}_\ell[\Gamma_q/\Gamma_n]$. Как и в [5, § 1], мы полагаем

$$\Phi_n(q) = \ell^{-m-1} \sum_{i=0}^{n-q-1} \mathcal{F}_n^{(i)} \in \mathbb{Q}[G(K_n/K_q)],$$

где $m = n + 1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n + 2$ при $\ell = 2$. Заметим, что для любого $p > q$ справедливо равенство $(\gamma_p - 1)\Phi_n(q) = (\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \in \mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_p)]$, где γ_p – некоторая фиксированная образующая группы $G(K_n/K_p) = \Gamma_p/\Gamma_n$. В случае абелева поля K основной результат о группах $V(K_n)$ составляет следующая теорема, обобщающая теорему 1.2 из [5]. Если поле K фиксировано, мы будем вместо $V(K_n)$ и $V(K_n)^\perp$ записывать просто V_n и $V_n^\perp$ соответственно.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть K – конечное абелево расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда найдется индекс r_0 , зависящий только от K и такой, что для любых $n > p > r_0$ выполняется равенство

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V_n = \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp), \quad (6.8)$$

где $\text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) = \{x \in V_n^\perp \mid \text{Sp}_{K_n/K_p}(x) = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если K – круговое поле, то наша теорема – это теорема 1.2 из [5]. Если K не является круговым, но $\zeta_0 \in K$, то K_r становится круговым для некоторого индекса r . Тогда теорему 1.2 из [5] можно применить к полю K_r . Таким образом, достаточно доказать нашу теорему в случае, когда $\zeta_0 \notin K_n$ при любом n .

Положим $L_n = K_n(\zeta_0)$ и будем предполагать индекс r_0 настолько большим, что $G(L_n/K_n) \cong G(L_\infty/K_\infty) := \Delta$ для всех $n \geq r_0$. Мы будем предполагать также, что индекс r_0 выбран настолько большим, что $r_0 \geq r$, где r – индекс из предложения 6.2, и что для любого $n > r_0$ справедливо второе утверждение предложения 6.3.

В силу предложения 6.2 имеем

$$(\gamma_p - 1) \log V(L_n) = (\gamma_p - 1) \log V(L_n)^0 \quad (6.9)$$

и аналогичное соотношение выполняется для K_n . Поскольку равенство (6.8) справедливо для кругового поля L_n , мы имеем

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V(L_n) = \text{Ker Sp}_{L_n/L_p}(V(L_n)^\perp)$$

для любых $n > p > r_0$. Применим к обеим частям последнего равенства Sp_Δ . Тогда, учитывая, что $G_n = G(L_n/\mathbb{Q}_\ell)$ – абелева группа, и применяя (6.4) и (6.9), мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp}_\Delta((\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V(L_n)) &= (\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V(K_n) \\ &= \text{Sp}_\Delta(\text{Ker Sp}_{L_n/L_p}(V(L_n)^\perp)). \end{aligned}$$

Если $x \in V(L_n)^\perp$, то для любого $y \in V(K_n)$ мы имеем $\text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\text{Sp}_\Delta(x) \times \log y) = \text{Sp}_{L_n/\mathbb{Q}_\ell}(x \log y) \in \mathbb{Z}_\ell$, т.е. Sp_Δ переводит $V(L_n)^\perp$ в $V(K_n)^\perp$. При этом $\text{Ker Sp}_{L_n/L_p}(V(L_n)^\perp)$ отображается в $\text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V(K_n)^\perp)$, и нам остается только проверить, что это отображение является эпиморфизмом. Чтобы показать это, заметим, что имеется точная последовательность G_n -модулей

$$0 \rightarrow V(L_n)^0 \rightarrow V(L_n) \rightarrow R \rightarrow 0,$$

где $R \cong \mathbb{Z}_\ell$ как G_n -модуль, причем согласно предложению 6.2 эта последовательность расщепляется как последовательность $G(K_n/K_p)$ -модулей. Тогда дуальная к ней последовательность имеет вид

$$0 \rightarrow Q \rightarrow V(L_n)^\perp \rightarrow (V(L_n)^0)^\perp \rightarrow 0, \quad (6.10)$$

где $Q \cong \mathbb{Z}_\ell$ и $(V(L_n)^0)^\perp$ изоморфен $\text{Hom}(V(L_n)^0, \mathbb{Z}_\ell)$ как G_n -модуль, причем последняя последовательность также расщепляется как последовательность $G(K_n/K_p)$ -модулей.

Согласно предложению 6.3 существует изоморфизм $V(L_n)^0 \cong J_{G_n}$, поэтому $(V(K_n)^0)^\perp \cong I_{G_n}$, где I_{G_n} – идеал аугментации в кольце $\mathbb{Z}_\ell[G_n]$, т. е. идеал, порожденный элементами $(\sigma - 1)$ для всех $\sigma \in G_n$. Применяя аналогичное рассуждение к K_n , мы получаем $(V(K_n)^0)^\perp \cong I_{\mathfrak{G}_n}$, где $\mathfrak{G}_n = G(K_n/\mathbb{Q}_\ell)$. Из расщепляемости последовательности (6.10) следует, что

$$\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(V(L_n)^\perp) \cong \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}((V(L_n)^0)^\perp) \cong \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(I_{G_n}).$$

Аналогичным образом,

$$\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(V(K_n)^\perp) \cong \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}((V(K_n)^0)^\perp) \cong \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(I_{\mathfrak{G}_n}).$$

Очевидно, что $\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(I_{G_n}) = \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(\mathbb{Z}_\ell[G_n])$ и $\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(I_{\mathfrak{G}_n}) = \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(\mathbb{Z}_\ell[\mathfrak{G}_n])$. Таким образом, мы получаем коммутативную диаграмму Δ -модулей с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(\mathbb{Z}_\ell[G_n]) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell[G_n] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell[G_p] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(\mathbb{Z}_\ell[\mathfrak{G}_n]) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell[\mathfrak{G}_n] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell[\mathfrak{G}_p] \longrightarrow 0 \end{array}$$

в которой отображения α_1 , α_2 и α_3 индуцированы отображением Sp_Δ . Из точности верхней строки диаграммы следует, что $\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(\mathbb{Z}_\ell[G_n])$ является когомологически тривиальным Δ -модулем. Поскольку существует вложение

$$i_1: \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(\mathbb{Z}_\ell[\mathfrak{G}_n]) \hookrightarrow \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(\mathbb{Z}_\ell[G_n]),$$

индуцированное вложением $i: \mathbb{Z}_\ell[\mathfrak{G}_n] \hookrightarrow \mathbb{Z}_\ell[G_n]$, эпиморфность α_1 следует из того, что $H^0(\Delta, \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{L_n/L_p}(\mathbb{Z}_\ell[G_n])) = 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть K – конечное абелево расширение $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда для всех достаточно больших n справедливо равенство

$$\ell^{-m-1}(\gamma_n - 1) \log V_{n+1} = \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_{n+1}/K_n}(V_{n+1}^\perp),$$

где $m = n + 1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n + 2$ при $\ell = 2$.

Действительно, заменяя p на n и n на $n + 1$ в формулировке теоремы 6.1 и учитывая, что $(\gamma_n - 1)\Phi_{n+1} = (\gamma_n - 1)\ell^{-m-1}$, мы получаем утверждение следствия.

Пусть $\Gamma_p = G(K_\infty/K_p)$ и $\Lambda(p) = \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma_p]] = \varprojlim R_n$, где $R_n = \mathbb{Z}_\ell[G(K_n/K_p)]$ для $n > p$. Пусть A – свободный $\Lambda(p)$ -модуль конечного ранга. Как и в [5], мы будем называть произведение $T_p: A \times A \rightarrow \Lambda(p)$ полуторалинейным, если для любых $x, y \in A$ и $\lambda, \mu \in \Lambda(p)$ выполняется равенство $T_p(\lambda x, \mu y) = \lambda T_p(x, y) \bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ – образ μ при автоморфизме кольца $\Lambda(p)$, переводящем любой $\sigma \in \Gamma_p$ в σ^{-1} . Произведение T_p называется внутренним, если оно индуцирует изоморфизм $V_\infty \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda(p)}(V_\infty, \Lambda(p))$, при котором элементу $y \in V_\infty$ соответствует гомоморфизм $\varphi_y: V_\infty \rightarrow \Lambda(p)$, $\varphi_y(x) = T_p(x, y)$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть K – конечное абелево расширение $\mathbb{Q}_\ell$ и $V_\infty = \varprojlim V(K_n)$, где предел берется относительно норменных отображений. Тогда для всех достаточно больших p существует естественное внутреннее полуторалинейное произведение

$$T_p: V_\infty \times V_\infty \rightarrow \Lambda(p),$$

причем V_∞ и $\text{Hom}_{\Lambda(p)}(V_\infty, \Lambda(p))$ изоморфны как модули Галуа, т.е. как $G(K_\infty/\mathbb{Q}_\ell)$ -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для кругового поля K произведение T_p было впервые построено в [3]. В [5, теорема 3.1] этот результат был передоказан для полей, которые в [5] назывались полями p -типа A , т.е. для полей K таких, что для некоторого p и всех $n > p$ выполняется равенство (6.8). В теореме 6.1 мы доказали, что равенство (6.8) справедливо для любого абелева K . Следовательно, теорема 3.1 из [5] справедлива для любого абелева K , но ее утверждение идентично утверждению теоремы 6.1. Теорема доказана.

§ 7. Поля алгебраических чисел, абелевы над ℓ (полулокальные результаты)

В этом параграфе мы предполагаем, что наше основное поле алгебраических чисел k абелево над ℓ в смысле [3], т.е. для любой точки v поля k , лежащей над ℓ , пополнение k_v поля k относительно v является абелевым расширением $\mathbb{Q}_\ell$. На поведение поля k в точках, не лежащих над ℓ , никаких ограничений не накладывается.

Пусть k_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k . Тогда для любого n и любой точки $v|\ell$ поля k_n его пополнение $k_{n,v}$ является абелевым расширением $\mathbb{Q}_\ell$ и, следовательно, для $k_{n,v}$ справедливы все результаты, полученные в § 6. Мы сформулируем сейчас полулокальную версию этих результатов.

Положим

$$V(k_n) = \prod_{v|\ell} V(k_{n,v}), \quad V(k_n)^0 = \prod_{v|\ell} V(k_{n,v})^0,$$

где произведение берется по всем точкам поля k , лежащим над ℓ . Если поле k фиксировано, то для упрощения обозначений мы будем записывать просто V_n и V_n^0 . Для достаточно большого индекса r все точки над ℓ чисто разветвлены в расширении k_n/k_r для любого $n > r$, поэтому мы можем отождествить глобальную группу Галуа $\Gamma_r/\Gamma_n = G(k_n/k_r)$ с локальной группой Галуа $G(k_{n,v}/k_{r,v})$ для любой точки $v|\ell$. В частности, мы считаем, что для любых $n > p \geq r$ выбрана некоторая образующая $\gamma_p \in \Gamma_p/\Gamma_n$, которая одновременно является образующей группы $G(k_{n,v}/k_{p,v})$ для любой точки $v|\ell$. Мы также считаем, что элемент $\Phi_n(p)$ в равенстве (6.8) – это элемент групповой алгебры $\mathbb{Q}_\ell[\Gamma_p/\Gamma_n]$. Непосредственно из предложений 6.2 и 6.3 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ . Тогда найдется индекс r , зависящий только от k и такой, что справедливы следующие утверждения:

(i) существует набор элементов $x_v \in V(k_{r,v})$, где v пробегает все точки поля k_r , лежащие над ℓ , такой, что для любого $n > r$ существует изоморфизм $G(k_n/k_r)$ -модулей

$$V(k_n) = \prod_{v|\ell} x_v^{\mathbb{Z}_\ell} \times V(k_n)^0;$$

(ii) для любых $n > p \geq r$ существует изоморфизм $G(k_n/k_p)$ -модулей

$$J_{n,p}V(k_n) \cong J_{n,p}^{[k_p:\mathbb{Q}]};$$

(iii) для любого $n > r$ существует изоморфизм $G(k_n/k_r)$ -модулей

$$V(k_n)^0 \cong \prod_{v|\ell} J_{G(k_{n,v}/\mathbb{Q}_\ell)}.$$

Напомним, что отображение $\log$ из (2.1) индуцирует вложение $\log: V(k_n) \hookrightarrow \prod_{v|\ell} k_{n,v}$. Отображение следа $\mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}$ индуцирует отображение, обозначаемое так же, $\mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}: \prod_{v|\ell} k_{n,v} = k_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$. Положим

$$V_n^\perp = V(k_n)^\perp = \left\{ x \in \prod_{v|\ell} k_{n,v} \mid \mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}(xy) \in \mathbb{Z}_\ell \text{ для всех } y \in \log V(k_n) \right\}.$$

Поскольку глобальный след равен сумме локальных следов, мы получаем

$$V(k_n)^\perp = \prod_{v|\ell} V(k_{n,v})^\perp,$$

где модули $V(k_{n,v}^\perp)$ определены, как в (6.6). Теорема 6.1 непосредственно обобщается на полулокальный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ . Тогда найдется индекс r_0 , зависящий только от поля k и такой, что для любых $n > p \geq r_0$ справедливо равенство

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V_n = \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{k_n/k_p}(V_n^\perp), \quad (7.1)$$

где

$$\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{k_n/k_p}(V_n^\perp) = \{x \in V_n^\perp \mid \mathrm{Sp}_{k_n/k_p}(x) = 0\}.$$

Подставляя $n + 1$ вместо n и n вместо p в (7.1) и учитывая, что $(\gamma_n - 1) \times \Phi_{n+1}(n) = \ell^{-m-1}(\gamma_n - 1)$, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ . Тогда для всех достаточно больших n справедливо равенство

$$\ell^{-m-1}(\gamma_n - 1) \log V_{n+1} = \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{k_{n+1}/k_n}(V_{n+1}^\perp), \quad (7.2)$$

где $m = n + 1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n + 2$ при $\ell = 2$.

Теорема 6.2 также без труда обобщается на полулокальный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ , и $V_\infty = \varprojlim V_n$, где предел берется относительно норменных отображений. Пусть $\Lambda(p) = \mathbb{Z}_\ell[[G(k_\infty/k_p)]]$. Тогда для всех достаточно больших p группа V_∞ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем ранга $[k_p : \mathbb{Q}]$ и существует естественное внутреннее полуторалинейное произведение

$$T_p : V_\infty \times V_\infty \rightarrow \Lambda(p). \quad (7.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p таково, что любая точка v поля k_p , лежащая над ℓ , имеет единственное продолжение в поле k_∞ . Тогда $V_\infty = \prod_{v|\ell} V(k_{\infty,v})$, но согласно предложению 6.3 каждая компонента $V(k_{\infty,v})$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем. Следовательно, V_∞ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем.

Если $x, y \in V_\infty$, то $x = \prod_{v|\ell} x_v$, $y = \prod_{v|\ell} y_v$, где $x_v, y_v \in V(k_{\infty,v})$ и v пробегает все точки над ℓ в поле k_∞ . Согласно теореме 6.2 для каждой точки $v|\ell$ имеется естественное внутреннее полуторалинейное произведение

$$T_{p,v} : V(k_{\infty,v}) \times V(k_{\infty,v}) \rightarrow \Lambda(p)_v := \mathbb{Z}_\ell[[G(k_{\infty,v}/k_{p,v})]].$$

Если p достаточно велико, то кольцо $\Lambda(p)_v$ не зависит от точки v , так как в этом случае $G(k_\infty/k_p) = G(k_{\infty,v}/k_{p,v})$ для любой точки $v|\ell$. Поэтому мы полагаем

$$T_p(x, y) = \sum_{v|\ell} T_{p,v}(x_v, y_v),$$

где сумма понимается как сложение в кольце $\Lambda(p)$. Предложение доказано.

Произведение T_p можно определить и непосредственно, как это было доказано в теореме 3.1 из [5]. Для этого нужно повторить полностью доказательство этой теоремы для полулокального модуля $V(k_\infty)$ и вместо равенства (6.8) использовать равенство (7.1). Далее нам будет нужен явный вид произведения T_p , поэтому мы приведем его конструкцию.

Заметим, что внутреннее произведение $\log V_n \times V_n^\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$, т. е. произведение, индуцирующее изоморфизм $V_n^\perp \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\log V_n, \mathbb{Z}_\ell)$, индуцирует внутреннее произведение

$$\log V_n / \log V_n^{G(k_n/k_p)} \times \text{Ker Sp}_{k_n/k_p}(V_n^\perp) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell. \quad (7.4)$$

Учитывая, что согласно предложению 7.1, (i)

$$\log V_n / \log V_n^{G(k_n/k_p)} = \log V_n / \log V_p = \log V_n^0 / \log V_p^0$$

и $(\gamma_p - 1)V_n = (\gamma_p - 1)V_n^0$, мы получаем, используя (7.1), внутреннее произведение

$$(\log V_n^0 / \log V_p^0) \times (\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log V_n^0 \rightarrow \mathbb{Z}_\ell,$$

индуцирующее внутреннее произведение $V_n^0/V_p^0 \times (\gamma_p - 1)V_n^0 \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$, которое на элементах $x_n \in V_n^0$, $y_n \in (\gamma_p - 1)V_n^0$ задается формулой

$$(x_n, y_n)_n = \text{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}((\log x_n)\Phi_n(p) \log y_n) \in \mathbb{Z}_\ell \quad (7.5)$$

и зависит только от $x_n \bmod V_n^0/V_p^0$. Полагая

$$[x_n, y_n]_n = \sum_{\sigma \in G(k_n/k_p)} (\sigma^{-1}(x_n), y_n)_n \sigma \in \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_p/\Gamma_n], \quad (7.6)$$

мы получаем произведение

$$V_n^0/V_p^0 \times (\gamma_p - 1)V_n^0 \rightarrow (\gamma_p - 1)\mathbb{Z}_\ell[G(k_n/k_p)]. \quad (7.7)$$

Пусть теперь $x, y \in V_\infty$ и x_n, y_n – их проекции в V_n^0 . Тогда для любого $n > p$ определен элемент $[x_n, (\gamma_p - 1)y_n]_n \in (\gamma_p - 1)\mathbb{Z}_\ell[G(k_n/k_p)]$. Без труда проверяется, что элементы $[x_n, (\gamma_p - 1)y_n]_n$ согласованы относительно естественных проекций $\mathbb{Z}_\ell[G(k_m/k_p)] \rightarrow \mathbb{Z}_\ell[G(k_n/k_p)]$ для любых $m > n \geq p$, поэтому, переходя в (7.7) к проективному пределу по n , мы получаем произведение $V_\infty \times (\gamma_p - 1)V_\infty \rightarrow (\gamma_p - 1)\Lambda(p)$, которое после деления на $\gamma_p - 1$ дает искомое произведение T_p .

Для произвольного фиксированного $n > p$ мы можем профакторизовать все модули, входящие в (7.3), по действию группы Γ_n . Поскольку V_∞ является свободным Γ_p -модулем, модуль $V_{(n)} := V_\infty/(\gamma_n - 1)V_\infty$ свободен как (Γ_p/Γ_n) -модуль. Таким образом, произведение (7.3) приводит к внутреннему полуторалинейному произведению (Γ_p/Γ_n) -модулей

$$T_{p,n}: V_{(n)} \times V_{(n)} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_p/\Gamma_n].$$

Пусть $\chi_n: \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_p/\Gamma_n] \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$ – эпиморфизм $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей, определенный условием $\chi_n(\sum_{\sigma \in \Gamma_p/\Gamma_n} a_\sigma \sigma) = a_1$. Тогда, полагая $\mathfrak{T}_{p,n}(u, v) = \chi_n(T_{p,n}(u, v))$ для любых $u, v \in V_{(n)}$, мы получаем внутреннее произведение

$$\mathfrak{T}_{p,n}: V_{(n)} \times V_{(n)} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad (7.8)$$

удовлетворяющее условию $\mathfrak{T}_{p,n}(u, v) = \mathfrak{T}_{p,n}(\sigma u, \sigma v)$ для любых $u, v \in V_{(n)}$ и $\sigma \in \Gamma_p/\Gamma_n$.

Пусть элементы $x, y \in V_\infty$ имеют вид $x = \varprojlim x_m, y = \varprojlim y_m$, где $x_m, y_m \in V_m^0$ и пределы берутся относительно норменных отображений. Пусть $\tilde{x}_n$ и $\tilde{y}_n$ – образы соответственно x и y в $V_{(n)}$. Непосредственно из определения произведения T_p и (7.6) следует, что $T_p(x, (\gamma_p - 1)y) = \varprojlim [x_m, (\gamma_p - 1)y_m]_m$ и, следовательно, $T_{p,n}(\tilde{x}_n, (\gamma_p - 1)\tilde{y}_n) = [x_n, y_n]_n$. Вычисляя в элементе $[x_n, (\gamma_p - 1)y_n]_n \in \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_p/\Gamma_n]$ коэффициент при единице, мы получаем

$$\mathfrak{T}_{p,n}(\tilde{x}_n, (\gamma_p - 1)\tilde{y}_n) = (x_n, (\gamma_p - 1)y_n)_n = \text{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}((\log x_n)(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log y_n). \quad (7.9)$$

Таким образом, хотя произведение $\mathfrak{T}_{p,n}$ требует для своего определения некоторой бесконечной конструкции, произведение $V_{(n)} \times (\gamma_p - 1)V_{(n)} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$, полученное из (7.8) ограничением, задается явной формулой (7.9).

Пусть $m > n > p$. Обозначим через $N_{m,n}$ естественную проекцию $N_{m,n}: V_{(m)} \rightarrow V_{(n)}$, а через $i_{n,m}$ – естественное вложение $i_{n,m}: V_{(n)} \rightarrow V_{(m)}$, однозначно определенное тем, что $i_{n,m} \circ N_{m,n}: V_{(m)} \rightarrow V_{(m)}$ совпадает с норменным отображением относительно группы Γ_n/Γ_m . Непосредственно из определений следует, что для любых $a \in V_{(n)}$ и $b \in V_{(m)}$ справедливо соотношение

$$\mathfrak{T}_{p,n}(a, N_{m,n}(b)) = \mathfrak{T}_{p,m}(i_{n,m}(a), b). \quad (7.10)$$

Отметим также одно следствие, которое будет использоваться далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Пусть A, B – Γ_p -подмодули в V_∞ , которые ортогональны друг другу относительно произведения T_p , т.е. $T_p(x, y) = 0$ для любых $x \in A, y \in B$. Пусть $A_{(n)} := A/(\gamma_n - 1)A$ и $B_{(n)} := B/(\gamma_n - 1)B$. Тогда $A_{(n)}$ и $B_{(n)}$ ортогональны друг другу относительно произведений $T_{p,n}$ и $\mathfrak{T}_{p,n}$. Пусть x_n, y_n – проекции соответственно элементов x, y в V_n^0 . Тогда для любых $x \in A, y \in B$ и для любого $n > p$

$$\mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}((\log x_n)(\gamma_p - 1) \log y_n) = 0. \quad (7.11)$$

Наоборот, если равенство (7.11) справедливо при любом $n > p$ для любых $x \in A, y \in B$, то A и B ортогональны относительно T_p .

В частности, если A и B ортогональны относительно T_p , то они ортогональны относительно T_q для любого индекса q , для которого определено произведение T_q .

Следующий результат можно вывести из предложения 4.2, но мы дадим независимое доказательство, опирающееся на предложение 7.2, так как это доказательство хорошо иллюстрирует методы, используемые в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ . Для любого натурального n положим

$$V_{n+1,n} = V(k_{n+1}/k_n) = \{x \in V_{n+1} \mid N_{k_{n+1}/k_n}(x) = 1\},$$

$$R_\ell(V_{n+1,n}) = \det(\mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}(\log u_i \log u_j)) \in \mathbb{Q}_\ell^\times, \quad 1 \leq i, j \leq t,$$

где $u_1, \dots, u_t$ – некоторый $\mathbb{Z}_\ell$ -базис модуля $V_{n+1,n}$ и $t = [k_{n+1} : \mathbb{Q}] - [k_n : \mathbb{Q}]$. Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(R_\ell(V_{n+1,n})) = \begin{cases} (n+1)\ell^n(\ell-1)d + \ell^{n+1}d - 2s & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+4) \cdot 2^n d - 2s & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где $\ell^n d = [k_n : \mathbb{Q}]$ и s – число точек поля k_n , лежащих над ℓ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – некоторое подпространство $\mathbb{Q}_\ell$ -пространства $\mathfrak{K}_{n+1} = \prod_{v|\ell} k_{n+1,v} = k_{n+1} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ такое, что билинейная форма $(x, y) \rightarrow \mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}(xy)$ остается невырожденной при ограничении на M . Если A и B – две полные $\mathbb{Z}_\ell$ -решетки в M , то мы можем определить их взаимный дискриминант

$$D(A, B) = \det(\mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}(g_i h_j)) \in \mathbb{Q}_\ell^\times, \quad 1 \leq i, j \leq r,$$

где $r = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} M$, а $g_1, \dots, g_r$ и $h_1, \dots, h_r$ – некоторые $\mathbb{Z}_\ell$ -базисы решеток A и B соответственно. Очевидно, что $D(A, B)$ определен с точностью до умножения на произвольную ℓ -адическую единицу и $\nu_\ell(D(A, B))$ зависит только от неупорядоченной пары (A, B) , причем $\nu_\ell(D(A, A^\perp)) = 0$, где $A^\perp$ – дуальная к A решетка, определяемая, как и в (6.7). Следовательно,

$$\nu_\ell(D(A)) := \nu_\ell(D(A, A)) = \nu_\ell([A^\perp : A]). \quad (7.12)$$

Для вычисления показателя $\nu_\ell(D(V_{n+1,n}))$ мы воспользуемся существованием внутреннего произведения (7.4). Для упрощения записи формул мы обозначим $\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{k_{n+1}/k_n}(V_{n+1}^\perp)$ через $\tilde{V}_{n+1,n}^\perp$.

Пространство $\mathfrak{K}_{n+1}$ разлагается в ортогональную прямую сумму: $\mathfrak{K}_{n+1} = \mathfrak{K}_n \oplus \mathfrak{K}_{n+1,n}$, где

$$\mathfrak{K}_{n+1,n} = J_{n+1,n} \mathfrak{K}_{n+1} = \{x \in \mathfrak{K}_{n+1} \mid \mathrm{Sp}_{k_{n+1}/k_n}(x) = 0\}.$$

Соответственно, любой $x \in \mathfrak{K}_{n+1}$ представим в виде $x = x' \oplus x''$, где $x' \in \mathfrak{K}_n$ и $x'' \in \mathfrak{K}_{n+1,n}$. Поскольку $\tilde{V}_{n,n+1}^\perp \subset \mathfrak{K}_{n+1,n}$, мы получаем, что для любых $x \in \mathfrak{K}_{n+1,n}$, $y \in \tilde{V}_{n+1,n}^\perp$ элемент $\mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}(xy)$ не зависит от компоненты x' элемента x .

Таким образом, существование внутреннего произведения (7.4) означает, что в пространстве $\mathfrak{K}_{n+1,n}$ полные решетки $\tilde{V}_{n+1,n}^\perp$ и $J_{n+1,n} \log V_{n+1}$ дуальны друг другу. Тогда, учитывая, что $R_\ell(J_{n+1,n} V_{n+1}) = D(J_{n+1,n} \log V_{n+1})$, и используя (7.2) и (7.12), мы получаем

$$\begin{aligned} R_\ell(J_{n+1,n} V_{n+1}) &= [\tilde{V}_{n+1,n}^\perp : J_{n+1,n} \log V_{n+1}] \\ &= [\ell^{-m-1}(\gamma_n - 1) \log V_{n+1} : J_{n+1,n} \log V_{n+1}]. \end{aligned}$$

Применяя к последнему равенству те же рассуждения, которые были использованы при выводе формулы (2.3), мы получаем

$$\begin{aligned} R_\ell(V_{n+1,n}) &= [J_{n+1,n} V_{n+1} : V_{n+1,n}]^2 R_\ell(J_{n+1,n} V_{n+1}) \\ &= [J_{n+1,n} V_{n+1} : V_{n+1,n}]^2 [\ell^{-m-1}(\gamma_n - 1)(V_{n+1}) : J_{n+1,n}(V_{n+1})]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Итак, нам остается только вычислить индексы в (7.13). Для этого заметим, что согласно предложению 7.1

$$\begin{aligned} [(\gamma_n - 1)V_{n+1} : V_{n+1,n}]^{-1} &= |H^{-1}(G(k_{n+1}/k_n), V_{n+1})| \\ &= |H^{-1}(G(k_{n+1}/k_n), V_{n+1}^0)| = \left| H^{-1}\left(G(k_{n+1}/k_n), \prod_{v|\ell} J_{G_{n+1,v}}\right) \right| = \ell^s, \end{aligned}$$

где $G_{n+1,v} = G(k_{n+1,v}/\mathbb{Q}_\ell)$ и s — число точек поля k_n , лежащих над ℓ . Далее,

$$[J_{n+1,n} V_{n+1} : V_{n+1,n}] = [J_{n+1,n} V_{n+1} : (\gamma_n - 1)V_{n+1}][(\gamma_n - 1)V_{n+1} : V_{n+1,n}].$$

Второй индекс мы уже вычислили, а для вычисления первого индекса заметим, что согласно предложению 7.1, (ii) справедлива формула $J_{n+1,n} V_{n+1} \cong J_{n+1,n}^{[k_n:\mathbb{Q}]}$. Поскольку

$$J_{n+1,n}/(\gamma_n - 1)J_{n+1,n} = H^{-1}(G(k_{n+1}/k_n), J_{n+1,n}) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},$$

мы имеем

$$[J_{n+1,n} V_{n+1} : (\gamma_n - 1)V_{n+1}] = \ell^{[k_n:\mathbb{Q}]} = \ell^{d\ell^n}.$$

Наконец, учитывая, что $(\gamma_n - 1)V_{n+1}$ имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг $\ell^{d(\ell-1)\ell^n}$, мы получаем

$$\begin{aligned} \nu_\ell([\ell^{-m-1}(\gamma_n - 1) \log V_{n+1} : (\gamma_n - 1) \log V_{n+1}]) \\ = \begin{cases} (n+2)d(\ell-1)\ell^n & \text{при } \ell \neq 2, \\ (n+3)d \cdot 2^n & \text{при } \ell = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя все вычисленные индексы в (7.13), мы получаем, что при $\ell \neq 2$

$$\nu_\ell(R_\ell(V_{n+1,n})) = (n+1)(\ell-1)d\ell^n + d\ell^{n+1} - 2s,$$

а при $\ell = 2$

$$\nu_\ell(R_\ell(V_{n+1,n})) = (n+4)d \cdot 2^n - 2s.$$

Предложение доказано.

Мы покажем, что предложение 7.5 обобщается на подмодули модуля V_∞ , но для этого нам нужны некоторые предварительные рассуждения.

Итак, пусть снова k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ , и A – некоторый Γ_p -подмодуль в V_∞ , где $\Gamma_p = G(k_\infty/k_p)$. Определим ортогональное дополнение к A стандартной формулой

$$A^\wedge = \{x \in V_\infty \mid T_p(xy) = 0 \text{ для всех } y \in A\}.$$

Очевидно, что $A^\wedge$ также является Γ_p -модулем и $\text{rk}(A) + \text{rk}(A^\wedge) = \text{rk}(V_\infty) = [k_p : \mathbb{Q}]$, где rk означает ранг над кольцом $\Lambda(p) := \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma_p]]$. Если T_p остается невырожденным при ограничении на A , то $A \cap A^\wedge = 0$, и в этом случае T_p остается также невырожденным при ограничении на $A^\wedge$. Очевидно, верно и обратное утверждение.

Мы будем называть $\Lambda(p)$ -подмодуль $A \subseteq V_\infty$ *чистым*, если V_∞/A не имеет кручения как $\Lambda(p)$ -модуль. Эту же терминологию можно применять и к другим кольцам. В частности, если B – свободный нётеров $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль и $A \subset B$, то A является чистым $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодулем тогда и только тогда, когда A выделяется прямым слагаемым в B .

Пусть A – некоторый $\Lambda(p)$ -подмодуль в V_∞ . Для любых индексов $m > n \geq p$ мы обозначим через A_m образ A относительно естественной проекции $\varphi_m : V_\infty \rightarrow V_n^0$ и положим

$$A_{m,n} = \{a \in A_m \mid N_{k_m/k_n}(a) = 1\}.$$

Таким образом, $A_{m,n} \subset A_m \subseteq V_m^0$, причем группы $A_{m,n}$ и A_m определены в терминах вложения $A \hookrightarrow V_\infty$ и представления группы V_∞ в виде проективного предела $V_\infty = \varprojlim V_m^0$.

С другой стороны, для любого $n \geq p$ мы полагаем $A_{(n)} = A/(\gamma_n - 1)A$, где γ_n – некоторая топологическая образующая группы Γ_n , и для пары индексов $m > n$ определяем $A_{(m,n)}$ как ядро естественной проекции $\pi_{m,n} : A_{(m)} \rightarrow A_{(n)}$. Группы $A_{(n)}$ и $A_{(m,n)}$ определены в терминах самого модуля A , и ниже мы изучим их связь с группами A_n и $A_{m,n}$ соответственно.

Если A – чистый $\Lambda(p)$ -подмодуль в V_∞ , то A свободен как $\Lambda(p)$ -модуль. Тогда группы $A_{(n)}$ и $A_{(m,n)}$ являются свободными $\mathbb{Z}_\ell$ -модулями и вложение $A \hookrightarrow V_\infty$ индуцирует для любого $n \geq p$ вложение $A_{(n)} \hookrightarrow V_{(n)}$. Далее, для любых $m > n > p$ имеется естественный эпиморфизм свободных $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $\chi_n : A_{(n)} \rightarrow A_n$ и естественное отображение свободных $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $\chi_{m,n} : A_{(m,n)} \rightarrow A_{m,n}$, совпадающее с ограничением χ_m на $A_{(m,n)}$. Определенное выше отображение φ_n индуцирует эпиморфизм $\psi_n : V_{(n)} \rightarrow V_n^0$. Поскольку

$$V_{(n)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong V_n \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong (\mathbb{Q}_\ell[\Gamma_p/\Gamma_n])^{[k_p : \mathbb{Q}_\ell]}$$

как (Γ_p/Γ_n) -модуль, мы получаем $\text{Ker } \varphi_n \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong (V_n/V_n^0) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell^s$, где s – число точек над ℓ в поле k_p (или в k_∞), и Γ_p действует тривиально на $\mathbb{Q}_\ell^s$. Тогда $\text{Ker } \psi_n \cong \mathbb{Z}_\ell^s$ как Γ_p -модуль. Мы определим для модуля A инвариант $s(A)$, характеризующий вложение A в V_∞ из условия $\text{Ker } \psi_n \cap A_{(n)} \cong \mathbb{Z}_\ell^{s(A)}$ для всех достаточно больших n . (Достаточно, чтобы n обладало тем свойством, что любая точка v поля k_n , лежащая над ℓ , имеет единственное продолжение в поле k_∞ .) Очевидно, что $0 \leq s(A) \leq s$.

ЛЕММА 7.1. Пусть A – чистый Γ_p -подмодуль в V_∞ . Тогда существует индекс n_0 , зависящий только от A и такой, что для всех $t > n \geq n_0$ отображение $\chi_{m,n}: A_{(m,n)} \rightarrow A_{m,n}$ является вложением с конечным коядром, причем $|\text{Coker } \chi_{m,n}| = \ell^{(m-n)s(A)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{(m,n)} & \longrightarrow & A_{(m)} & \xrightarrow{\pi_{m,n}} & A_{(n)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \chi_{m,n} & & \downarrow \chi_m & & \downarrow \chi_n \\ 0 & \longrightarrow & A_{m,n} & \longrightarrow & A_m & \xrightarrow{N_{k_m/k_n}} & A_n \longrightarrow 0 \end{array}$$

Применяя “лемму о змее” и учитывая, что $\text{Coker } \chi_m = 0$, мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } \chi_{m,n} \rightarrow \text{Ker } \chi_m \xrightarrow{f} \text{Ker } \chi_n \rightarrow \text{Coker } \chi_{m,n} \rightarrow 0, \quad (7.14)$$

где f индуцировано проекцией $\pi_{m,n}$. Поскольку $\text{Ker } \chi_n = \text{Ker } \psi_n \cap A_n$, мы получаем, что для всех n , больших некоторого n_0 , $\text{Ker } \chi_n \cong \mathbb{Z}_\ell^{s(A)}$ как Γ_{n_0} -модуль. Если $t > n \geq n_0$, то $A_{(m,n)}^\Gamma = 0$ и, следовательно, $\text{Ker } \chi_{m,n} = A_{(m,n)} \cap \text{Ker } \chi_m = 0$, т. е. $\chi_{m,n}$ является вложением. Этим доказано первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что существует естественное вложение $i_{n,m}: A_{(n)} \hookrightarrow A_{(m)}$, однозначно определенное тем, что отображение $i_{n,m} \circ \pi_{m,n}: A_{(m)} \rightarrow A_{(m)}$ совпадает с нормой относительно группы Γ_n/Γ_m . Поскольку группы $\text{Ker } \chi_n$ и $\text{Ker } \chi_m$ имеют один и тот же $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг (равный $s(A)$) и являются чистыми $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодулями в $A_{(n)}$ и $A_{(m)}$ соответственно, мы получаем, что отображение $i'_{m,n}: \text{Ker } \chi_n \rightarrow \text{Ker } \chi_m$, индуцированное отображением $i_{n,m}$, является изоморфизмом. Следовательно, f в (7.14) совпадает с умножением на ℓ^{m-n} , и тогда $|\text{Coker } f| = \ell^{(m-n)s(A)}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. В условиях леммы 7.1 группа $A_{m,n}$ является свободным $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем ранга $\ell^{a(m-p)} - \ell^{a(n-p)}$, где a – ранг $\Lambda(p)$ -модуля A .

ЛЕММА 7.2. Пусть A и B – чистые $\Lambda(p)$ -подмодули в V_∞ такие, что $A \cap B = 0$. Тогда существует индекс n_1 , зависящий только от A и B и такой, что для любых $t > n \geq n_1$ в группе V_m^0 выполняется соотношение $A_{m,n} \cap B_{m,n} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $D = V_\infty/(A \oplus B)$. В условиях леммы $A \oplus B$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем, поэтому D не содержит нетривиальных конечных подмодулей. Для любого $n \geq p$ точная последовательность $\Lambda(p)$ -модулей

$0 \rightarrow A \oplus B \rightarrow V_\infty \rightarrow D \rightarrow 0$ индуцирует точную гомологическую последовательность (Γ_p/Γ_n) -модулей

$$0 \rightarrow D^{\Gamma_n} \rightarrow A_{(n)} \oplus B_{(n)} \rightarrow V_{(n)} \rightarrow D_{(n)} \rightarrow 0. \quad (7.15)$$

Точные последовательности (7.15) для индексов m и n , где $m > n \geq p$, индуцируют коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D^{\Gamma_m} & \longrightarrow & A_{(m)} \oplus B_{(m)} & \xrightarrow{\alpha} & V_{(m)} & \longrightarrow & D_{(m)} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & D^{\Gamma_n} & \longrightarrow & A_{(n)} \oplus B_{(n)} & \longrightarrow & V_{(n)} & \longrightarrow & D_{(n)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Возрастающая цепочка свободных $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей D^{Γ_n} стабилизируется, начиная с некоторого n_1 , поэтому для $m > n \geq n_1$ группа Γ_n действует тривиально на $D^{\Gamma_m} = D^{\Gamma_n}$. Тогда $D^{\Gamma_m} \cap (A_{(m,n)} \oplus B_{(m,n)}) = 0$, т.е. α индуцирует вложение $A_{(m,n)} \oplus B_{(m,n)} \hookrightarrow V_{(m,n)}$. Другими словами, $A_{(m,n)}$ и $B_{(m,n)}$ не пересекаются в $V_{(m,n)}$. Согласно лемме 7.1, примененной к модулям A, B и V_∞ , модули $A_{(m,n)}, B_{(m,n)}$ и $V_{(m,n)}$ вкладываются как подмодули конечного индекса в $A_{m,n}, B_{m,n}$ и $V_{m,n}$ соответственно. Следовательно, $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ не пересекаются в $V_{m,n}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. В условиях леммы 7.2 пусть $\text{rk}(A) + \text{rk}(B) = \text{rk}(V_\infty)$, где rk означает ранг над кольцом $\Lambda(p)$. Тогда D является периодическим $\Lambda(p)$ -модулем и для всех $m > n \geq n_1$ модуль $A_{m,n} \oplus B_{m,n}$ имеет конечный индекс в $V_{m,n}$.

Действительно, согласно следствию 7.2, примененному к модулям A, B и V_∞ , $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг модуля $V_{m,n}$ равен сумме $\mathbb{Z}_\ell$ -рангов модулей $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$.

Напомним, что для любого n на $\mathbb{Z}_\ell$ -модуле V_n определено невырожденное произведение $S_n: V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, где $S_n(x, y) = \text{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}}(\log x \log y)$ для любых $x, y \in V_n$. Если $m > n$, то группа $V_n \oplus V_{m,n}$ является подгруппой конечного индекса в V_m , а поскольку V_n и $V_{m,n}$ взаимно ортогональны относительно произведения S_m , мы получаем, что S_m не вырождено на $V_{m,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. Пусть A – некоторый чистый $\Lambda(p)$ -подмодуль в V_∞ такой, что произведение T_p остается невырожденным при ограничении на A . Тогда существует индекс n_2 , зависящий только от A и такой, что для любых $m > n \geq n_2$ произведение S_m остается невырожденным при ограничении на $A_{m,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие предложения означает, что $A \cap A^\perp = 0$, где $A^\perp$ – ортогональное дополнение к A относительно произведения T_p . Поэтому, применяя лемму 7.2 к паре подмодулей A и $A^\perp$, мы получаем, что существует индекс $n_2 \geq p$, зависящий только от A и такой, что $A_{m,n} \cap A_{m,n}^\perp = 0$ для любых $m > n \geq n_2$. Согласно следствию 7.3 $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $V_{m,n}$ содержит $A_{m,n} \oplus A_{m,n}^\perp$ в качестве подмодуля конечного индекса. Поэтому, учитывая, что произведение S_m не вырождено на $V_{m,n}$, для доказательства предложения нам достаточно проверить, что $A_{m,n}$ и $A_{m,n}^\perp$ ортогональны друг другу относительно S_m .

Согласно лемме 7.1 группа $\chi_{m,n}(A_{(m,n)})$ является подгруппой конечного индекса в $A_{m,n}$, поэтому нам достаточно доказать, что для любых $x_m \in A_{m,n}^\wedge$ и $y_m \in \chi_{m,n}(A_{(m,n)})$ мы имеем $S_m(x_m, y_m) = 0$.

Пусть $x \in A^\wedge$ – такой элемент, что $\varphi_m(x) = x_m$. Пусть $y'_m \in A_{(m,n)}$ – такой элемент, что $\chi_{m,n}(y'_m) = y_m$. Поскольку $A_{(m)}$ является свободным (Γ_p/Γ_m) -модулем, существует $z'_m \in A_{(m)}$ такой, что $y'_m = (\gamma_p - 1)z'_m$. Тогда $(\gamma_p - 1)\chi_m(z'_m) = \chi_{m,n}((\gamma_p - 1)z'_m) = y_m$. Пусть элемент $z \in A$ таков, что $\varphi_m(z) = z_m$, где $z_m = \chi_m(z'_m)$. Тогда в силу (7.11) имеем $S_m(x_m, y_m) = S_m(x_m, (\gamma_p - 1)z_m) = 0$. Предложение доказано.

Как обычно, для любой пары индексов $m > n$ мы определим ℓ -адический регулятор $R_\ell(A_{m,n})$ следующим образом. Если $u_1, \dots, u_t$ – некоторый $\mathbb{Z}_\ell$ -базис группы $A_{m,n}$, мы полагаем

$$R_\ell(A_{m,n}) = \det(S_m(u_i, u_j)) = \det(\mathrm{Sp}_{k_m/\mathbb{Q}_\ell}(\log u_i \log u_j)), \quad 1 \leq i, j \leq t.$$

Несмотря на то, что число $R_\ell(A_{m,n}) \in \mathbb{Q}_\ell$ зависит от выбора базиса, показатель $\nu_\ell(R_\ell(A_{m,n}))$ не зависит от этого выбора и является инвариантом группы $A_{m,n}$.

Пусть A – чистый подмодуль в V_∞ такой, что произведение T_p не вырождено на A . Тогда согласно предложению 7.5 существует индекс n_2 , зависящий только от A и такой, что $R_\ell(A_{m,n}) \neq 0$ для всех $m > n \geq n_2$.

Положим $\hat{A}_{n+1,n} := \chi_{n+1,n}A_{(n+1,n)}$, где $\chi_{n+1,n}$ – вложение из леммы 7.1. Тогда можно аналогичным образом определить регулятор $R_\ell(\hat{A}_{n+1,n})$, который, очевидно, также отличен от нуля для всех достаточно больших n . Следующая теорема, являющаяся первым основным результатом настоящего параграфа, определяет поведение $\nu_\ell(R_\ell(\hat{A}_{n+1,n}))$ и $\nu_\ell(R_\ell(A_{n+1,n}))$ как функций от n .

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $A \neq V_\infty$ – ненулевой чистый подмодуль в V_∞ такой, что для некоторого индекса p произведение T_p не вырождено на A . Пусть $D = V_\infty/(A \oplus A^\wedge)$, где $A^\wedge$ – ортогональное дополнение к A в V_∞ относительно произведения T_p , и λ_D, μ_D – инварианты Ивасава компактного периодического $\Lambda(p)$ -модуля D . Пусть a – ранг $\Lambda(p)$ -модуля A и $s(A)$ – инвариант, фигурирующий в лемме 7.1. Тогда для всех достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned} \nu_\ell(R_\ell(\hat{A}_{n+1,n})) &= (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1), \\ \nu_\ell(R_\ell(A_{n+1,n})) &= (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1) - 2s(A), \end{aligned}$$

где $m = n+1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n+2$ при $\ell = 2$.

(Отметим, что инварианты a и μ_D зависят от выбора p . Если выбран другой индекс $p' > p$, которому соответствуют инварианты a' и μ'_D , то $a' = a\ell^{p'-p}$ и $\mu'_D = \mu_D\ell^{p'-p}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7.1 существует вложение $\chi_{n+1,n}: A_{(n+1,n)} \hookrightarrow A_{n+1,n}$, коядро которого имеет порядок $\ell^{s(A)}$, поэтому для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(R_\ell(\hat{A}_{n+1,n})) = 2s(A) + \nu_\ell(R_\ell(A_{n+1,n})). \quad (7.16)$$

Таким образом, вторая формула теоремы непосредственно следует из первой. Для вычисления $R_\ell(\hat{A}_{n+1,n})$ мы воспользуемся существованием произведения $\mathfrak{T}_{p,n+1}: V_{(n+1)} \times V_{(n+1)} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$.

Пусть регулятор $R_\ell(\widehat{A}_{n+1,n})$ определен при помощи некоторого базиса $u_1, \dots, u_t$ свободного $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля $\widehat{A}_{n+1,n}$, т. е.

$$R_\ell(\widehat{A}_{n+1,n}) = \det(\mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}(\log u_i \log u_j)), \quad 1 \leq i, j \leq t = a\ell^{n-p}(\ell - 1).$$

Пусть $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_t$ — прообразы элементов $u_1, \dots, u_t$ в группе $A_{(n+1,n)}$, т. е. $\tilde{u}_i = \chi_{n+1,n}^{-1}(u_i)$ для $i = 1, \dots, t$. Поскольку $A_{(n+1,n)}$ является свободным (Γ_p/Γ_{n+1}) -модулем, для любого $i = 1, \dots, t$ существует элемент $\tilde{v}_i \in A_{n+1}$ такой, что $\tilde{u}_i = (\gamma_p - 1)\tilde{v}_i$ и, следовательно, $u_i = (\gamma_p - 1)v_i$, где $v_i = \chi_{n+1}(\tilde{v}_i)$. Тогда, учитывая, что $\Phi_n(p)\tilde{u}_j = \ell^{-m-1}\tilde{u}_j$ и $\Phi_n(p)u_j = \ell^{-m-1}u_j$, и применяя (7.9), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{p,n+1}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) &= \mathfrak{T}_{p,n+1}(\tilde{u}_i, (\gamma_p - 1)\tilde{v}_j) = \mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}((\log u_i)(\gamma_p - 1)\Phi_n(p) \log v_j) \\ &= \ell^{-m-1} \mathrm{Sp}_{k_{n+1}/\mathbb{Q}}(\log u_i \log u_j). \end{aligned}$$

Следовательно, определяя регулятор для модуля $A_{(n+1,n)}$ относительно произведения $\mathfrak{T}_{p,n+1}$ формулой

$$R_{\ell,\mathfrak{T}}(A_{(n+1,n)}) = \det(\mathfrak{T}_{p,n+1}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq t,$$

и учитывая указанное выше явное значение t , мы получаем

$$\nu_\ell(R_\ell(\widehat{A}_{n+1,n})) = (m+1)a\ell^{n-p}(\ell - 1) + \nu_\ell(R_{\ell,\mathfrak{T}}(A_{(n+1,n)})). \quad (7.17)$$

Перейдем теперь к вычислению регулятора $R_{\ell,\mathfrak{T}}(A_{(n+1,n)})$. Для упрощения обозначений и для того, чтобы подчеркнуть симметрию, с которой входят в наши рассуждения модули A и $A^\wedge$, мы обозначим Γ_p -модуль $A^\wedge$ через B . Положим $X := V_\infty/A$ и $Y := V_\infty/B$. Поскольку A и B являются чистыми подмодулями в V_∞ , модули X и Y не имеют $\Lambda(p)$ -кручения и, следовательно, вкладываются в свободные $\Lambda(p)$ -модули $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}(Y)$ соответственно в качестве подмодулей конечного индекса $e(X)$ и $e(Y)$ соответственно.

ЛЕММА 7.3. *Произведение $\mathfrak{T}_{p,n+1}$ индуцирует внутреннее произведение*

$$\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} \times A_{(n+1)} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad (7.18)$$

причем выполняется равенство $e(X) = e(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 7.4 группы $A_{(n+1)}$ и $B_{(n+1)}$ ортогональны друг другу относительно произведения $\mathfrak{T}_{p,n+1}$. Пусть $A'_{(n+1)}$ (соответственно, $B'_{(n+1)}$) — минимальный чистый $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль в $V_{(n+1)}$, содержащий $A_{(n+1)}$ (соответственно, $B_{(n+1)}$). Тогда $\mathfrak{T}_{p,n+1}$ индуцирует внутреннее произведение

$$\mathfrak{T}'_{p,n+1}: V_{(n+1)}/B'_{(n+1)} \times A'_{(n+1)} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell. \quad (7.19)$$

Пусть индекс n настолько велик, что Γ_{n+1} действует тривиально на конечные модули $\mathcal{F}(X)/X$ и $\mathcal{F}(Y)/Y$. Тогда точные последовательности $\Lambda(p)$ -модулей

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow X \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)/X \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow Y \rightarrow \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(Y)/Y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

индуцируют точные гомологические последовательности $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F}(X)/X \rightarrow X_{(n+1)} = V_{(n+1)}/A_{(n+1)} \rightarrow \mathcal{F}(X)_{(n+1)} \rightarrow \mathcal{F}(X)/X \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{F}(Y)/Y \rightarrow Y_{(n+1)} = V_{(n+1)}/B_{(n+1)} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \mathcal{F}(Y)_{(n+1)} \rightarrow \mathcal{F}(Y)/Y \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Таким образом, для любого достаточно большого n

$$A'_{(n+1)}/A_{(n+1)} \cong \mathcal{F}(X)/X, \quad B'_{(n+1)}/B_{(n+1)} \cong \mathcal{F}(Y)/Y.$$

Произведение (7.19) однозначно продолжается по линейности до произведения

$$\mathfrak{T}'_{p,n+1} : \mathcal{F}(Y)_{(n+1)} \times A'_{(n+1)} \rightarrow \mathbb{Q}_\ell,$$

и мы покажем, что это последнее произведение индуцирует произведение (7.18), т.е. для любых $u \in \mathcal{F}(Y)_{(n+1)}$, $v \in A_{(n+1)}$ мы имеем $\mathfrak{T}'_{p,n+1}(u, v) \in \mathbb{Z}_\ell$, причем $\mathcal{F}(Y)_{(n+1)}$ совпадает со всей группой $A_{(n+1)}^\perp = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A_{(n+1)}, \mathbb{Z}_\ell)$.

Пусть индекс m выбран настолько большим, что умножение на ℓ^{m-n-1} аннулирует группу $\mathcal{F}(Y)/Y$. Тогда образ естественного отображения $i_{n+1,m} : \mathcal{F}(Y)_{(n+1)} \rightarrow \mathcal{F}(Y)_{(m)}$ содержится в $\alpha_m(Y_{(m)})$, где α_m определено, как в (7.20). Положим $u' := u^{e(Y)} \in Y_{(n+1)}$. Тогда существует $u_1 \in V_{(n+1)}$ такой, что $u' = u_1 \bmod B_{(n+1)}$. Так как $i_{n+1,m}(u) \in \alpha_m(Y_{(m)})$, мы получаем, что $i_{n+1,m}(u_1) \in \alpha_m(Y_{(m)})^{e(Y)}$. Поскольку $A_{(m)}$ является свободным (Γ_{n+1}/Γ_n) -модулем, существует $v' \in A_{(m)}$ такой, что $N_{m,n+1}(v') = v$. Тогда в силу (7.10) имеем

$$\begin{aligned} e(Y)\mathbb{Z}_\ell \ni \mathfrak{T}_{p,m}(i_{n+1,m}(u_1), v') &= \mathfrak{T}_{p,n+1}(u_1, v) = \mathfrak{T}'_{p,n+1}(u^{e(Y)}, v) \\ &= e(Y)\mathfrak{T}_{p,n+1}(u, v). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathfrak{T}'_{p,n+1}(u, v) \in \mathbb{Z}_\ell$, т.е. произведение (7.18) определено корректно и индуцирует вложение $i : \mathcal{F}(Y)_{n+1} \hookrightarrow A_{(n+1)}^\perp$. Поскольку произведение (7.19) является внутренним, мы получаем

$$[A_{(n+1)}^\perp : V_{(n+1)}/B'_{(n+1)}] = [A'_{(n+1)} : A_{(n+1)}] = e(X).$$

С другой стороны,

$$[\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} : V_{(n+1)}/B'_{(n+1)}] = [\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} : \alpha_{n+1}(Y_{(n+1)})] = e(Y).$$

Поэтому существование вложения i означает, что $e(X) \geq e(Y)$, но, меняя местами A и B и повторяя предыдущее рассуждение, мы получаем, что $e(Y) \geq e(X)$. Следовательно, $e(X) = e(Y)$, и i является изоморфизмом. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Для упрощения обозначений мы для любого (Γ_n/Γ_{n+1}) -модуля C , не имеющего кручения над $\mathbb{Z}_\ell$, будем обозначать модуль $J_{\Gamma_n/\Gamma_{n+1}}(C)$ просто через JC . Учитывая, что $A_{(n+1,n)} = (\gamma_n - 1)A_{(n+1)}$ является чистым $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодулем в $A_{(n+1)}$, мы получаем, что произведение (7.18) индуцирует внутреннее произведение

$$J\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} \times A_{(n+1,n)} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell.$$

Следовательно,

$$\nu_\ell(R_{\ell, \mathfrak{T}}(A_{(n+1, n)})) = \nu_\ell([J\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} : A_{(n+1, n)}]). \quad (7.21)$$

Для вычисления индекса в (7.21) мы заметим, что $A_{(n+1)}$ является свободным $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma_n/\Gamma_{n+1}]$ -модулем ранга $a\ell^{n-p}$, поэтому

$$\nu_\ell([JA_{(n+1)} : A_{(n+1, n)}]) = \nu_\ell([JA_{(n+1)} : (\gamma - 1)A_{(n+1)}]) = a\ell^{n-p}.$$

Таким образом,

$$\nu_\ell([J\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} : A_{(n+1, n)}]) = a\ell^{n-p} + \nu_\ell([J\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} : JA_{(n+1)}]). \quad (7.22)$$

Для вычисления последнего индекса мы положим $D' = \mathcal{F}(Y)/A$. Таким образом, D' не содержит нетривиальных конечных подмодулей, и $D'/D \cong \mathcal{F}(Y)/Y$. Предположим, что n настолько велико, что $(D')^{\Gamma_n} = (D')^{\Gamma_{n+1}}$, и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами, где отображение $i(n)$ имеет тот же смысл, что и в предложении 5.3 (для случая $X = R$):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & JA_{(n+1)} & \xrightarrow{\alpha} & J\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} & \longrightarrow & \text{Coker } i(n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n+1}/(D')^{\Gamma_{n+1}} & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y)_{(n+1)} & \longrightarrow & D'_{(n+1)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow i_{n, n+1} & & \uparrow i_{n, n+1} & & \uparrow i(n) & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{(n)}/(D')^{\Gamma_n} & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y)_n & \longrightarrow & D'_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Из этой диаграммы следует, что

$$[J\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} : JA_{(n+1)}] = |\text{Coker } \alpha| = |\text{Coker } i(n)|.$$

Применяя предложение 5.3 для вычисления $|\text{Coker } i(n)|$ и учитывая, что D и D' имеют одинаковые инварианты Ивасава, мы получаем

$$\nu_\ell([J\mathcal{F}(Y)_{(n+1)} : JA_{(n+1)}]) = \lambda_D + \mu_D \ell^{n-p} (\ell - 1). \quad (7.23)$$

Таким образом, сопоставляя (7.21), (7.22) и (7.23), мы имеем

$$\nu_\ell(R_{\ell, \mathfrak{T}}(A_{(n+1, n)})) = a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D \ell^{n-p} (\ell - 1).$$

Используя теперь формулу (7.17), мы получаем первую формулу теоремы, а применяя (7.16), мы окончательно получаем

$$\nu_\ell(R_\ell(A_{n+1, n})) = (m + 1)a\ell^{n-p}(\ell - 1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D \ell^{n-p}(\ell - 1) - 2s(A).$$

Теорема доказана.

Предположим теперь, что в модуле A , имеющем тот же смысл, что и в теореме 7.1, задан некоторый свободный $\Lambda(p)$ -подмодуль M такой, что модуль $R := A/M$ является периодическим $\Lambda(p)$ -модулем. В частности, это означает, что R не содержит нетривиальных конечных подмодулей. Тогда $M_{(n+1,n)}$ естественно вкладывается в $A_{(n+1,n)}$ и, следовательно, модуль $\widehat{M}_{n+1,n} := \chi_{n+1,n}(M_{(n+1,n)})$ имеет конечный индекс в $\widehat{A}_{n+1,n}$ для всех достаточно больших n . Таким образом, и в этом случае $R_\ell(\widehat{M}_{n+1,n}) \neq 0$ для всех достаточно больших n .

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $A \subset V_\infty$ – подмодуль из теоремы 7.1 и M – свободный $\Lambda(p)$ -подмодуль в A такой, что $\text{rk } M = \text{rk } A = a$, где rk – ранг над $\Lambda(p)$. Тогда для всех достаточно больших n имеем

$$\nu_\ell(R_\ell(\widehat{M}_{n+1,n})) = \nu_\ell(R_\ell(\widehat{A}_{n+1,n})) + 2\lambda_R + 2\mu_R \ell^{n-p}(\ell-1) = (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D \ell^{n-p}(\ell-1) + 2\lambda_R + 2\mu_R \ell^{n-p}(\ell-1),$$

где $m = n+1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n+2$ при $\ell = 2$, а λ_R и μ_R – инварианты Ивасава периодического $\Lambda(p)$ -модуля $R := A/M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n настолько велико, что $R^{\Gamma_n} = R^{\Gamma_m}$ для любого $m > n$. Обозначим R^{Γ_n} через P . Тогда точная последовательность $\Lambda(p)$ -модулей

$$0 \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow R \rightarrow 0$$

индуцирует следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами, в которой две нижние строки являются отрезками точных гомологических последовательностей для индексов $n+1$ и n :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Coker } i_1 & \longrightarrow & \text{Coker } i_2 & \longrightarrow & \text{Coker } i_3 & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_{(n+1)}/P & \longrightarrow & A_{(n+1)} & \longrightarrow & R_{(n+1)} \longrightarrow 0 \\ \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 & & \uparrow i_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & M_{(n)}/P & \longrightarrow & A_{(n)} & \longrightarrow & R_{(n)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Поскольку периодический $\Lambda(p)$ -модуль R не содержит нетривиальных конечных подмодулей, отображение i_3 является мономорфизмом (см. [9, следствие из теоремы 1.2]). Далее, $\text{Coker } i_1 \cong M_{(n+1)}/M_{(n)} \cong JM_{(n+1)}$ и $\text{Coker } i_2 \cong A_{(n+1)}/A_{(n)} \cong JA_{(n+1)}$, где J означает $J_{\Gamma_n/\Gamma_{n+1}}$. Таким образом, применяя к нашей диаграмме “лемму о змее”, мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow JM_{(n+1)} \rightarrow JA_{(n+1)} \rightarrow \text{Coker } i_3 \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $M_{(n+1)}$ и $A_{(n+1)}$ являются свободными (Γ_n/Γ_{n+1}) -модулями, мы получаем, что умножение на $\gamma_n - 1$ изоморфно отображает $JM_{(n+1)}$ и $JA_{(n+1)}$ на $M_{(n+1,n)}$ и $A_{(n+1,n)}$ соответственно. Таким образом,

$$[A_{(n+1,n)} : M_{(n+1,n)}] = [JA_{(n+1)} : JM_{(n+1)}] = |\text{Coker } i_3|.$$

Теперь, учитывая, что

$$\nu_\ell(R_\ell(\widehat{M}_{n+1,n})) = \nu_\ell(R_\ell(\widehat{A}_{n+1,n})) + 2\nu_\ell([A_{(n+1,n)} : M_{(n+1,n)}])$$

и что $\nu_\ell(|\text{Coker } i_3|) = \lambda_R + \mu_R \ell^{n-p}(\ell-1)$ согласно предложению 5.3, мы получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

§ 8. Поля алгебраических чисел, абелевы над ℓ (глобальные результаты)

Как и в § 7, мы предполагаем, что основное поле алгебраических чисел k абелево над ℓ , т. е. имеет абелевы пополнения для всех точек v , лежащих над ℓ . Мы предполагаем также, что для поля k справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе, сформулированная во введении. Следующие две теоремы дают значительный запас полей, для которых справедлива эта гипотеза.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть k' – абсолютно абелево поле алгебраических чисел и k – конечное ℓ -расширение поля k' , абелево над ℓ . Тогда для k справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе.

Для случая $\ell \neq 2$ теорема 8.1 была доказана в [3, теорема 6.3], а для случая $\ell = 2$ доказательство было получено в [11, теорема 7.2].

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть k' – поле CM-типа, абелево над ℓ и содержащее первообразный корень из единицы ζ_0 степени ℓ (степени 4 при $\ell = 2$). Пусть μ -инвариант Ивасава поля k' равен нулю. Пусть k – конечное ℓ -расширение поля k' , абелево над ℓ . Тогда для поля k справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе.

Для случая $\ell \neq 2$ теорема 8.2 была доказана в [3, теорема 6.2], а в случае $\ell = 2$ доказательство было дано в [11, теорема 7.1].

Как было доказано в [5, теорема 6.1], теоремы 8.1 и 8.2 остаются справедливыми и без предположения, что поля k' и k абелевы над ℓ . Доказательство этого результата более сложно и опирается на основную теорему работы [4].

Итак, пусть для k верна слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. Для любого промежуточного подполя k_n кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞/k мы будем обозначать, как и в § 5, через $U_n[\ell]$ про- ℓ -пополнение группы единиц U_n поля k_n , а через $\bar{U}_n[\ell]$ – группу $U_n[\ell]/\mu_\ell(k_n)$, где $\mu_\ell(k_n)$ – ℓ -компонента группы всех корней из единицы в поле k_n . Положим $U_\infty = \varprojlim U_n[\ell]$ и $\bar{U}_\infty = \varprojlim \bar{U}_n[\ell]$, где пределы берутся относительно норменных отображений. Если $\zeta_0 \notin k_\infty$, то группы U_∞ и $\bar{U}_\infty$, очевидно, совпадают. В противном случае они связаны точной последовательностью

$$0 \rightarrow \varprojlim \mu_\ell(k_n) \rightarrow U_\infty \rightarrow \bar{U}_\infty \rightarrow 0.$$

Пусть $\mathcal{A}_n$ – группа, определенная в доказательстве предложения 2.2, и $\bar{\mathcal{A}}_n$ – группа, определенная в (4.2). Положим $\mathcal{A}_\infty = \varprojlim \mathcal{A}_n$ и $\bar{\mathcal{A}}_\infty = \varprojlim \bar{\mathcal{A}}_n$, где пределы берутся относительно норменных отображений. Поскольку $V_\infty/\bar{\mathcal{A}}_\infty \cong \mathbb{Z}_\ell^{s_2}$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, где, как и в § 4, s_2 – число точек v , лежащих над ℓ , для которых поле $k_{\infty,v}$ содержит ζ_0 , мы получаем, что $\bar{\mathcal{A}}_\infty$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем.

Поскольку для расширения k_∞/k справедлива слабая гипотеза Леопольдта, естественные отображения $U_\infty \rightarrow \mathcal{A}_\infty$ и $\bar{U}_\infty \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_\infty$ являются вложениями. С другой стороны, имеется естественное вложение

$$\bar{\mathcal{A}}_\infty \hookrightarrow V_\infty, \text{ причем } V_\infty/\bar{\mathcal{A}}_\infty \cong Y_\infty := \varprojlim Y(k_n), \quad (8.1)$$

где предел берется относительно норменных отображений и $Y(k_n)$ имеет тот же смысл, что и в (4.2). Таким образом, мы можем рассматривать $\bar{U}_\infty$ как подмодуль Галуа модуля V_∞ и предполагать, что V_∞ и $\bar{U}_\infty$ являются $\Lambda(p)$ -модулями для некоторого индекса p .

Как и в [3], через V_∞^+ мы обозначаем минимальный чистый $\Lambda(p)$ -подмодуль модуля V_∞ , содержащий $\bar{U}_\infty$. Таким образом, V_∞^+ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем, и $V_\infty^+/\bar{U}_\infty$ – периодический $\Lambda(p)$ -модуль. Очевидно, что V_∞^+ не зависит от выбора p . Если ρ – ранг группы единиц поля k_p , то V_∞^+ имеет ранг $\rho + 1$ как $\Lambda(p)$ -модуль. В частности, если k_p – чисто мнимое поле, то ранг V_∞^+ равен $\frac{1}{2}[k_p : \mathbb{Q}]$.

Напомним, что согласно предложению 7.3 на V_∞ существует произведение T_p вида (7.3). Пусть V_∞^- – ортогональное дополнение к V_∞^+ относительно произведения T_p . Очевидно, что V_∞^- также не зависит от выбора p . Справедливость слабой гипотезы о ℓ -адическом регуляторе для поля k означает, что произведение T_p не вырождено на V_∞^+ , т.е. что $V_\infty^+ \cap V_\infty^- = 0$ [3, следствие из предложения 5.1 и теорема 5.1]. Таким образом, для V_∞^+ выполнены все предпосылки теоремы 7.1, что дает нам следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ , для которого справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. Пусть V_∞^+ и V_∞^- определены, как выше, и периодический $\Lambda(p)$ -модуль D определен условием $D = V_\infty/(V_\infty^+ \oplus V_\infty^-)$. Пусть a – ранг V_∞^+ как $\Lambda(p)$ -модуля и $z^+ := s(V_\infty^+)$ – инвариант модуля V_∞^+ , фигурирующий в лемме 7.1. Пусть $\hat{V}_{n+1,n}^+$ и $V_{n+1,n}^+$ имеют тот же смысл, что и в теореме 7.1, т.е. отображение $\chi_{n+1,n}$ из леммы 7.1 осуществляет вложение $V_{(n+1,n)}^+$ в $V_{n+1,n}^+$, образ этого вложения совпадает с $\hat{V}_{n+1,n}^+$, а коядро имеет порядок ℓ^{z^+} . Тогда для всех достаточно больших n

$$\begin{aligned}\nu_\ell(R_\ell(\hat{V}_{n+1,n}^+)) &= (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1), \\ \nu_\ell(R_\ell(V_{n+1,n}^+)) &= (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1) - 2z^+, \end{aligned}$$

где $m = n+1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n+2$ при $\ell = 2$, а λ_D и μ_D – инварианты Ивасава $\Lambda(p)$ -модуля D .

Наша ближайшая цель – перейти от V_∞^+ к $\bar{U}_\infty$, но для этого нам потребуются некоторые результаты о строении $\Lambda(p)$ -модулей $\bar{U}_\infty$ и $V_\infty^+/\bar{U}_\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Для любого поля алгебраических чисел k группа $\bar{U}_\infty$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – множество всех точек, лежащих над ℓ , $U_{S,n} = U_S(k_n)$ – группа S -единиц поля k_n , $\bar{U}_{S,n} = U_{S,n}/\mu(K_n)$ и $\bar{U}_{S,n}[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы $\bar{U}_{S,n}$. Положим $\bar{U}_{S,\infty} = \varprojlim \bar{U}_{S,n}[\ell]$, где предел берется относительно норменных отображений. Тогда канонические вложения $U_n \hookrightarrow U_{S,n}$, определенные для всех n , индуцируют вложение $\bar{U}_\infty \rightarrow \bar{U}_{S,\infty}$. При любом n группа $\bar{U}_{S,n}[\ell]/\bar{U}_n[\ell]$ совпадает с про- ℓ -пополнением группы главных дивизоров поля k_n с носителями в S и, следовательно, не имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -кручения, поэтому $\bar{U}_{S,\infty}/\bar{U}_\infty$ также не имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -кручения.

Если $\ell \neq 2$ или $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \in k_\infty$, то согласно [9, теорема 7.2] группа $U_{S,\infty}$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем, поэтому и $\bar{U}_\infty$ – свободный $\Lambda(p)$ -модуль. В случае $\ell = 2$ и $\sqrt{-1} \notin k_\infty$ нужно воспользоваться предложением 10.3, где доказывается, что модуль $\bar{U}_\infty$ свободен над $\Lambda(p)$ и в этом случае. Предложение доказано.

Положим $\bar{\mathcal{A}}_\infty^+ = \bar{\mathcal{A}}_\infty \cap V_\infty^+$. Тогда имеются включения свободных $\Lambda(p)$ -модулей $\bar{U}_\infty \subseteq \bar{\mathcal{A}}_\infty^+ \subseteq V_\infty^+$. Фактормодуль $V_\infty^+/\bar{\mathcal{A}}_\infty^+$ является подмодулем модуля Галуа $V_\infty/\bar{\mathcal{A}}_\infty \cong Y_\infty$, и Y_∞ изоморфен $\mathbb{Z}_\ell^{s_2}$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, где s_2 – число точек v из S , для которых $\zeta_0 \in k_{\infty,v}$. Следовательно, модуль $Y_\infty^+ = V_\infty^+/\bar{\mathcal{A}}_\infty^+$ является свободным $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем некоторого ранга $y^+ \leq s_2$.

Рассмотрим теперь фактормодуль $\bar{\mathcal{A}}_\infty^+/\bar{U}_\infty$. Модуль $\bar{\mathcal{A}}_\infty^+$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем как пересечение свободных $\Lambda(p)$ -модулей $\bar{\mathcal{A}}_\infty$ и V_∞^+ . Поэтому периодический $\Lambda(p)$ -модуль $\bar{\mathcal{A}}_\infty^+/\bar{U}_\infty$ не содержит нетривиальных конечных подмодулей. Для его интерпретации мы воспользуемся теорией полей классов.

Как и в § 4, пусть X – группа Галуа максимального абелева ℓ -расширения, не разветвленного вне S , поля k_∞ . Пусть W – подгруппа в X , порожденная подгруппами инерции всех точек $v \in S$, так что имеется точная последовательность $\Lambda(p)$ -модулей

$$0 \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow \bar{T}_\ell(k) \rightarrow 0,$$

где, как и в § 4, $\bar{T}_\ell(k)$ – группа Галуа максимального абелева неразветвленного ℓ -расширения поля k_∞ . Согласно глобальной теории полей классов существует канонический изоморфизм $W \cong \mathcal{A}_\infty/U_\infty$. Пусть, как и в (8.1), Y_∞ – ядро естественного эпиморфизма $\mathcal{A}_\infty \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_\infty$ и $\bar{Y}_\infty = Y_\infty/(Y_\infty \cap U_\infty)$. Таким образом, модуль W содержится в точной последовательности

$$0 \rightarrow \tilde{Y}_\infty \rightarrow W \rightarrow \bar{W} := \bar{\mathcal{A}}_\infty/\bar{U}_\infty \rightarrow 0, \quad (8.2)$$

и существует канонический изоморфизм

$$\bar{\mathcal{A}}_\infty^+/\bar{U}_\infty \cong \text{Tors } \bar{W}, \quad (8.3)$$

где $\text{Tors } \bar{W}$ – подмодуль $\Lambda(p)$ -крючения в $\bar{W}$ (не зависящий, очевидно, от выбора p).

Применяя теперь теорему 7.2 к паре свободных $\Lambda(p)$ -модулей $\bar{U}_\infty \subseteq V_\infty^+$ модуля V_∞ , мы получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ и не являющееся вполне вещественным, для которого справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. Пусть, как и в теореме 7.2, $\hat{U}_{n+1,n} = \chi_{n+1,n}(\bar{U}_{(n+1,n)})$, где $\chi_{n+1,n}$ имеет тот же смысл, что и в лемме 7.1. Тогда для всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} \nu_\ell(R_\ell(\hat{U}_{n+1,n})) &= (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D \\ &\quad + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1) + 2\lambda_2 + 2\mu_2\ell^{n-p}(\ell-1), \end{aligned}$$

где a , m , λ_D и μ_D имеют тот же смысл, что и в предложении 8.1, а λ_2 и μ_2 – инварианты Ивасава периодического $\Lambda(p)$ -модуля $V_\infty^+/\bar{U}_\infty$, т. е.

$$\lambda_2 = \lambda_{\text{Tors } \bar{W}} + y^+, \quad \mu_2 = \mu_{\text{Tors } \bar{W}}.$$

Для того чтобы охарактеризовать группу $\widehat{U}_{(n+1,n)}$ в терминах группы $\overline{U}_{n+1}[\ell]$, нам потребуются некоторые дополнительные результаты о строении групп $\overline{U}_{S,n}[\ell]$ и $\overline{U}_n[\ell]$.

Для точки $v \in S$ обозначим через $\overline{k}_{n,v}^\times[\ell]$ про- ℓ -пополнение группы $\overline{k}_{n,v}^\times := k_{n,v}^\times / \mu(k_{n,v})$. Положим

$$\widetilde{H}_\infty = \widetilde{H}(k_\infty) = \varprojlim \prod_{v \in S} k_{n,v}^\times[\ell], \quad H_\infty := H(k_\infty) = \varprojlim \prod_{v \in S} \overline{k}_{n,v}^\times[\ell],$$

где пределы берутся относительно норменных отображений, и обозначим через $\widetilde{H}(k_n)$ и $H(k_n)$, или просто через $\widetilde{H}_n$ и H_n , образы естественных проекций

$$\widetilde{\pi}_n: \widetilde{H}(k_\infty) \rightarrow \prod_{v \in S} k_{n,v}^\times[\ell], \quad \pi_n: H(k_\infty) \rightarrow \prod_{v \in S} \overline{k}_{n,v}^\times[\ell]$$

соответственно.

Рассмотрим естественные гомоморфизмы

$$\widetilde{\alpha}_n: U_{S,n}[\ell] \rightarrow \prod_{v \in S} k_{n,v}^\times[\ell], \quad \alpha_n: \overline{U}_{S,n}[\ell] \rightarrow \prod_{v \in S} \overline{k}_{n,v}^\times[\ell].$$

Положим

$$U'_{S,n} = \{x \in U_{S,n}[\ell] \mid \widetilde{\alpha}_n(x) \in \widetilde{H}_n\}, \quad \overline{U}'_{S,n} = \{x \in \overline{U}_{S,n}[\ell] \mid \alpha_n(x) \in H(k_n)\}.$$

Для точек $v \notin S$ норменное отображение на единицах эпиморфно, поэтому $U'_{S,n}$ и $\overline{U}'_{S,n}$ – это подгруппы всюду локальных универсальных норм из поля k_∞ в группах $U_{S,n}[\ell]$ и $\overline{U}_{S,n}[\ell]$ соответственно.

Пусть $U''_{S,n}$ и $\overline{U}''_{S,n}$ – образы естественных проекций $U_{S,\infty} \rightarrow U_{S,n}[\ell]$ и $\overline{U}_{S,\infty} \rightarrow \overline{U}_{S,n}[\ell]$ соответственно, т. е. $U''_{S,n}$ и $\overline{U}''_{S,n}$ – подгруппы глобальных универсальных норм из поля k_∞ . В частности, $U''_{S,n} \subseteq U'_{S,n}$ и $\overline{U}''_{S,n} \subseteq \overline{U}'_{S,n}$.

Следующее утверждение уточняет предложение 7.5 из [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Пусть $T_\ell(k)$ – группа Галуа максимального абелева неразветвленного ℓ -расширения N поля k_∞ такого, что в N/k_∞ вполне распадаются все точки из S . Тогда для всех достаточно больших n существует естественный изоморфизм

$$\delta_n: T_\ell(k)^{\Gamma_n} \cong \overline{U}'_{S,n} / \overline{U}''_{S,n}.$$

Если для $m > n$ отображения $i_{n,m}: T_\ell(k)^{\Gamma_n} \rightarrow T_\ell(k)^{\Gamma_m}$ и $j_{n,m}: \overline{U}'_{S,n} / \overline{U}''_{S,n} \rightarrow \overline{U}'_{S,m} / \overline{U}''_{S,m}$ индуцированы тождественным отображением и вложением $k_n \hookrightarrow k_m$ соответственно, то

$$\delta_m \circ i_{n,m} = j_{n,m} \circ \delta_n. \quad (8.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование δ_n было доказано в [9], но для проверки (8.4) нам необходимо напомнить построение δ_n . Пусть $\widetilde{X}$ – группа Галуа максимального абелева ℓ -расширения поля k_∞ , не разветвленного в архимедовых точках, и $\widetilde{W}$ – подгруппа группы $\widetilde{X}$, которая порождена подгруппами инерции

для всех неархимедовых точек $v \notin S$ и подгруппами разложения всех точек $v \in S$, так что для $\Gamma_n = G(k_\infty/k_n)$ точна последовательность Γ_n -модулей

$$0 \rightarrow \widetilde{W} \rightarrow \widetilde{X} \rightarrow T_\ell(k) \rightarrow 0.$$

В [9] было показано, что $\widetilde{X}^{\Gamma_n} = 0$, поэтому существует точная гомологическая последовательность

$$0 \rightarrow T_\ell(k)^{\Gamma_n} \xrightarrow{\delta'_n} \widetilde{W}_{(n)} \xrightarrow{h_n} \widetilde{X}_{(n)} \rightarrow T_\ell(k)_{(n)} \rightarrow 0. \quad (8.5)$$

Таким образом, группа $T_\ell(k)^{\Gamma_n}$ изоморфна ядру h_n .

Положим $\widetilde{\mathcal{A}}_n = \prod_{v \notin S} U(k_{n,v})[\ell] \times \widetilde{H}(k_n)$. Из теории полей классов легко следует, что образ h_n канонически изоморфен группе $\widetilde{\mathcal{A}}_n/U'_{S,n}$. Снова используя теорию полей классов, получаем, что группа $\widetilde{W}$ содержится в точной последовательности Γ_n -модулей

$$0 \rightarrow U_{S,\infty} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_\infty := \varprojlim \widetilde{\mathcal{A}}_n \rightarrow \widetilde{W} \rightarrow 0,$$

из которой получаем точную гомологическую последовательность

$$0 = \widetilde{W}^{\Gamma_n} \rightarrow (U_{S,\infty})_{(n)} \xrightarrow{\psi_n} (\widetilde{\mathcal{A}}_\infty)_{(n)} \rightarrow \widetilde{W}_{(n)} \rightarrow 0.$$

Для любого $m > n$ (Γ_n/Γ_m) -модуль $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ когомологически тривиален, поэтому $\widetilde{\mathcal{A}}_n$ и $(\widetilde{\mathcal{A}}_\infty)_{(n)}$ канонически изоморфны.

Очевидно, что $\text{Im } \psi_n$ совпадает с образом естественного вложения $U''_{S,n} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_n$, т. е. $\widetilde{W}_{(n)} \cong \widetilde{\mathcal{A}}_n/U''_{S,n}$. Поскольку по предложению 10.1 всегда $\mu_\ell(k_n) \subseteq U''_{S,n}$, мы получаем $\text{Ker } h_n \cong U'_{S,n}/U''_{S,n} \cong \overline{U}'_{S,n}/\overline{U}''_{S,n}$. Изоморфизм δ_n индуцируется связывающим гомоморфизмом δ'_n в (8.5), но для δ'_n справедлив аналог соотношения (8.4), что можно проверить так же, как и в доказательстве теоремы 1.2 из [9]. Следовательно, для изоморфизмов δ_n выполняется (8.4). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. Пусть $\overline{U}''_n$ – образ естественной проекции $\overline{U}_\infty \rightarrow \overline{U}_n[\ell]$. Тогда найдется индекс n_0 такой, что для любого $n > n_0$ справедливо равенство (в аддитивной записи)

$$\overline{U}_n[\ell] = \overline{U}_{n_0}[\ell] + \overline{U}''_n.$$

Для любого $n > n_0$

$$\widehat{U}_{n+1,n} = (\gamma_n - 1)(\overline{U}_{n+1}[\ell]),$$

где $\widehat{U}_{n+1,n}$ имеет тот же смысл, что и в предложении 8.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{\mathcal{A}}_n^0$ – образ естественной проекции $\overline{\mathcal{A}}_\infty \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_n$. Пусть $\overline{U}'_n = \overline{U}_n[\ell] \cap \overline{U}'_{S,n}$, т. е. $\overline{U}'_n$ – подгруппа тех элементов в $\overline{U}_n[\ell]$, которые являются универсальными нормами всюду локально. Тогда $\overline{U}''_n = \alpha_n^{-1}(\overline{\mathcal{A}}_n^0)$, где α_n – естественное отображение $\alpha_n: \overline{U}_n[\ell] \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_n$. Таким образом, существует вложение $i_n: \overline{U}_n[\ell]/\overline{U}'_n \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_n/\overline{\mathcal{A}}_n^0$. Согласно локальной теории полей классов для всех достаточно больших n и $m > n$ естественное вложение $\overline{\mathcal{A}}_n \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_m$

индуцирует изоморфизм $\bar{\mathcal{A}}_n/\bar{\mathcal{A}}_n^0 \cong \bar{\mathcal{A}}_m/\bar{\mathcal{A}}_m^0$. При таком отождествлении этих групп группы $\text{Im } i_n$ образуют (нестрого) возрастающую цепочку, которая стабилизируется, начиная с некоторого индекса n_1 , и тогда для всех $n \geq n_1$

$$\bar{U}_n[\ell] = \bar{U}_{n_1}[\ell] + \bar{U}'_n. \quad (8.6)$$

Пусть n таково, что все точки из S чисто разветвлены в k_∞/k_n . Тогда, очевидно, $\bar{U}''_n = \bar{U}''_{S,n} \cap \bar{U}_n[\ell]$, т. е. $\bar{U}'_n/\bar{U}''_n$ можно рассматривать как подгруппу в $\bar{U}'_{S,n}/\bar{U}''_{S,n}$. Начиная с некоторого r , группы $T_\ell(k)^{\Gamma_n}$ стабилизируются. Тогда для $n \geq r$ группы $C_n := \delta_n^{-1}(\bar{U}'_n/\bar{U}''_n)$ образуют (нестрого) возрастающую цепочку подгрупп в $T_\ell(k)^{\Gamma_r}$, которая также стабилизируется, начиная с некоторого n_2 . Тогда для всех $n \geq n_2$ и $m > n$ отображения $j_{n,m}$ из (8.4) индуцируют изоморфизмы $\bar{U}'_n/\bar{U}''_n \cong \bar{U}'_m/\bar{U}''_m$, т. е. $\bar{U}'_m = \bar{U}'_n + \bar{U}''_m$. Полагая $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и используя (8.6), для $n > n_0$ мы получаем

$$\bar{U}_n[\ell] = \bar{U}_{n_0}[\ell] + \bar{U}'_n = \bar{U}_{n_0}[\ell] + (\bar{U}'_{n_0} + \bar{U}''_n) = \bar{U}_{n_0}[\ell] + \bar{U}''_n,$$

что доказывает первое утверждение предложения.

Для доказательства второго утверждения заметим, что $\hat{U}_{n+1,n}$ — это образ группы $\bar{U}_{(n+1,n)} = (\gamma_n - 1)(\bar{U}_\infty/(\gamma_{n+1} - 1)\bar{U}_\infty)$ в группе $\bar{U}_{n+1}[\ell]$ относительно естественной проекции $\bar{U}_{(n+1)} \rightarrow \bar{U}_{n+1}[\ell]$. Этот образ, очевидно, совпадает с образом естественного отображения $\varphi_n: (\gamma_n - 1)\bar{U}_\infty \rightarrow \bar{U}_{n+1}[\ell]$, индуцированного проекцией $\bar{U}_\infty \rightarrow \bar{U}_{n+1}[\ell]$, но $\text{Im } \varphi_n = (\gamma_n - 1)\bar{U}''_{n+1}$. Предложение доказано.

Теперь мы можем доказать основной результат параграфа.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть k — поле алгебраических чисел, абелево над ℓ и не являющееся вполне вещественным, для которого справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. Пусть k_∞ — круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение k и $R_\ell(k_{n+1}/k_n)$, $\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)$ — относительный регулятор и нормированный относительный регулятор расширения k_{n+1}/k_n (см. определения 2.2 и 2.3). Тогда существует индекс p такой, что для всех $n \geq p$

$$\begin{aligned} \nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}/k_n)) &= (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + a\ell^{n-p} + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1) \\ &\quad + 2\lambda_2 + 2\mu_2\ell^{n-p}(\ell-1) - 2\nu_\ell(|H^{-1}(G, \bar{U}_{n+1})|), \\ \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) &= (m+1)a\ell^{n-p}(\ell-1) + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1) \\ &\quad + 2\lambda_2 + 2\mu_2\ell^{n-p}(\ell-1), \end{aligned}$$

где $m = n+1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n+2$ при $\ell = 2$, a — ранг $\Lambda(p)$ -модуля V_∞^+ (совпадающий с числом архимедовых точек поля k_p), инварианты λ_D и μ_D имеют тот же смысл, что и в предложении 8.1, инварианты λ_2 и μ_2 имеют тот же смысл, что и в предложении 8.3, и $G = G(k_{n+1}/k_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула для $\nu_\ell(R_\ell(\hat{U}_{n+1,n}))$ была получена в предложении 8.3. Согласно предложению 8.5 группа $\hat{U}_{n+1,n}$ совпадает с $(\gamma_n - 1)(\bar{U}_{n+1}[\ell])$, а так как $\bar{U}_{n+1,n}[\ell]$ совпадает с ядром норменного отображения $N: \bar{U}_{n+1}[\ell] \rightarrow \bar{U}_n[\ell]$, мы получаем, что

$$\bar{U}_{n+1,n}[\ell]/(\gamma_n - 1)(\bar{U}_{n+1}[\ell]) = H^{-1}(G, \bar{U}_{n+1}[\ell]) = H^{-1}(G, \bar{U}_{n+1}),$$

откуда следует первая формула теоремы.

Для доказательства второй формулы заметим, что по определению 2.3

$$\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n) = \ell^{1-r} |H^0(G, \bar{U}_{n+1})|^2 R_\ell(k_{n+1}/k_n), \quad (8.7)$$

где r – ранг группы единиц в поле k_n . Поскольку все архимедовы точки распадаются в расширении k_{n+1}/k_n , из теоремы Дирихле следует, что $|H^{-1}(G, \bar{U}_{n+1})| = \ell |H^0(G, \bar{U}_{n+1})|$. Далее, $r + 1$ – это число архимедовых точек в поле k_n , т.е. $r + 1 = a\ell^{n-p}$. Таким образом, вторая формула теоремы следует из первой и из (8.7). Теорема доказана.

Предположим теперь, что k – чисто мнимое поле СМ-типа, абелево над ℓ . Тогда без труда проверяется, что теоремы 5.2 и 8.3 дают один и тот же результат. Действительно, в этом случае $a = [k_p : \mathbb{Q}]/2 = \ell^p d/2$, $\lambda_D = 0$, $\mu_D = 0$ при $\ell \neq 2$, $\mu_D = \ell^p d/2$ при $\ell = 2$ и λ_2, μ_2 имеют один и тот же смысл в этих теоремах.

Что можно сказать об инвариантах, входящих в формулировку теоремы 8.3? Предположим, что выполняются условия теоремы 8.1 или 8.2, т.е. k – абелево над ℓ поле, которое является конечным ℓ -расширением поля k' , где k' – либо абелево поле, либо поле СМ-типа, содержащее ζ_0 и имеющее нулевой μ -инвариант Ивасава. Тогда $\mu_D = 0$ при $\ell \neq 2$ [8, теорема 6.1] и $\mu_D = [k_p : \mathbb{Q}]/2$ при $\ell = 2$ [11, теоремы 7.1 и 7.2]. Инвариант λ_D может быть отличен от нуля. Соответствующие примеры содержатся в [8, § 6].

Из справедливости известной гипотезы о тривиальности μ -инварианта Ивасава для поля $k(\zeta_0)$ следует, что $\mu_2 = 0$ для поля k .

Чтобы обсудить свойства инварианта λ_2 из теоремы 8.3, мы введем некоторые дополнительные определения (см. также [8]). В оставшейся части параграфа мы предположим, что k содержит первообразный корень из единицы ζ_0 степени ℓ при $\ell \neq 2$ (степени 4 при $\ell = 2$). В этом случае k – чисто мнимое поле, поэтому $a\ell^{n-p} = \ell^n d/2$.

Для интерпретации инвариантов λ_2 и μ_2 мы напомним следующие определения из [8]. Пусть, как и выше, X – группа Галуа максимального абелева ℓ -расширения поля k_∞ , не разветвленного вне S . Тогда X является $\Lambda(p)$ -модулем и содержится в точной последовательности $\Lambda(p)$ -модулей (не зависящей от выбора p)

$$0 \rightarrow X' := \text{Tors } X \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0,$$

где $\text{Tors } X$ – подмодуль $\Lambda(p)$ -крючения в X и X'' – $\Lambda(p)$ -модуль без кручения. Пусть $\bar{T}_\ell(k)$ – группа Галуа максимального абелева неразветвленного ℓ -расширения поля k_∞ и $T_\ell(k)$ – группа Галуа максимального абелева неразветвленного ℓ -расширения N поля k_∞ такого, что в N/k_∞ вполне распадаются все точки над ℓ . Тогда существуют канонические эпиморфизмы $\alpha: X \rightarrow \bar{T}_\ell(k)$ и $\beta: X \rightarrow T_\ell(k)$ и мы полагаем

$$\begin{aligned} \bar{T}'_\ell(k) &= \alpha(X'), & T'_\ell(k) &= \beta(X'), \\ \bar{T}''_\ell(k) &= \bar{T}_\ell(k)/\bar{T}'_\ell(k), & T''_\ell(k) &= T_\ell(k)/T'_\ell(k). \end{aligned}$$

Таким образом, α и β индуцируют канонические эпиморфизмы $\alpha'': X'' \rightarrow \bar{T}''_\ell(k)$ и $\beta'': X'' \rightarrow T''_\ell(k)$. Пусть λ, μ – инварианты Ивасава $\Lambda(p)$ -модуля $T_\ell(k)$.

Обозначим через λ' , μ' и λ'' , μ'' инварианты Ивасава $\Lambda(p)$ -модулей $T'_\ell(k)$ и $T''_\ell(k)$ соответственно. Тогда, очевидно, $\lambda = \lambda' + \lambda''$ и $\mu = \mu' + \mu''$. Пусть $R(k)$ – подгруппа в $\overline{T}_\ell(k)$, порожденная подгруппами разложения всех точек из S . Положим $R'(k) = \overline{T}'_\ell(k) \cap R(k)$, $R''(k) = R(k)/R'(k)$ и обозначим через r , r' и r'' λ -инварианты модулей $R(k)$, $R'(k)$ и $R''(k)$ соответственно. Их μ -инварианты, очевидно, равны нулю.

Согласно [8, теорема 3.1] в случае, когда k абелево над ℓ и k_∞ содержит ζ_0 ($\sqrt{-1} \in k_\infty$ при $\ell = 2$), выполняется равенство

$$\lambda(V_\infty^+/\mathcal{A}_\infty^+) = r'' \quad (8.8)$$

(более простое доказательство этого факта содержится в [11, § 7]). Таким образом, в случае $\zeta_0 \in k_\infty$ инвариант r'' совпадает с определенным выше инвариантом y^+ .

Для интерпретации инвариантов Ивасава $\Lambda(p)$ -модуля $\text{Tors } \overline{W}$ из (8.3) мы воспользуемся теорией Куммера. В [9, § 5, формула (5.1)] была построена точная последовательность

$$0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0,$$

где X имеет тот же смысл, что и выше, A – группа Галуа расширения поля k_∞ , полученного извлечением корней всех ℓ -примарных степеней из всех S -единиц всех промежуточных полей k_n и $B = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\text{Cl}_{S,\infty}, \mu(\ell^\infty))$, где $\mu(\ell^\infty) = \varinjlim \mu_\ell(k_n)$, $\text{Cl}_{S,\infty} = \varinjlim \text{Cl}_S(k_n)$ и $\text{Cl}_S(k_n)$ – факторгруппа ℓ -компоненты группы классов дивизоров поля k_n по подгруппе, порожденной простыми дивизорами из S . Тогда легко проверяется, что B имеет те же инварианты Ивасава, что и $T_\ell(k)$, т. е.

$$\lambda_B = \lambda, \quad \mu_B = \mu. \quad (8.9)$$

Далее, в [9, теорема 8.1] было доказано, что подмодуль $\Lambda(p)$ -крючения A_2 модуля A изоморфен $\mathbb{Z}_\ell^{s-1}$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, где $s = |S|$ (в [9] это число обозначалось через r). Из этого и равенств (8.9) следует, что модуль $\text{Tors } X$ имеет инварианты Ивасава

$$\lambda_{\text{Tors } X} = \lambda + s - 1, \quad \mu_{\text{Tors } X} = \mu.$$

Поскольку отображение β индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Tors } W \rightarrow \text{Tors } X \rightarrow T'_\ell(k) \rightarrow 0,$$

мы, учитывая, что $\lambda = \lambda' + \lambda''$, получаем

$$\lambda_{\text{Tors } W} = \lambda'' + s - 1, \quad \mu_{\text{Tors } W} = \mu''.$$

Наконец, из (8.2) получаем

$$\lambda_{\text{Tors } \overline{W}} = \lambda'', \quad \mu_{\text{Tors } \overline{W}} = \mu. \quad (8.10)$$

Используя (8.8) и (8.10), мы можем в случае $\zeta_0 \in k_\infty$ переформулировать теорему 8.3 следующим образом.

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть k – поле алгебраических чисел, абелево над ℓ , для которого справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе, и такое, что

$\zeta_0 \in k_\infty$. Тогда для всех достаточно больших n справедлива каждая из следующих трех эквивалентных формул:

$$\begin{aligned} \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) &= (m+1)d\ell^n(\ell-1)/2 \\ &\quad + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1) + 2\lambda'' + 2r'' + 2\mu''\ell^{n-p}(\ell-1), \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) &= (m+1)d\ell^n(\ell-1)/2 \\ &\quad + \lambda_D + \mu_D\ell^{n-p}(\ell-1) + 2\bar{\lambda}'' + 2\mu''\ell^{n-p}(\ell-1), \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) &= (m+1)d\ell^n(\ell-1)/2 \\ &\quad + \lambda_D + \lambda'' + r'' + \lambda_{\text{Tors } \overline{W}} + y^+ + (\mu_D + \mu'' + \mu_{\text{Tors } \overline{W}})\ell^{n-p}(\ell-1), \end{aligned} \quad (8.13)$$

где $m = n+1$ при $\ell \neq 2$, $m = n+2$ при $\ell = 2$, $d = [k_\infty : \mathbb{Q}_\infty]$, λ'' , μ'' – инварианты Ивасава $\Lambda(p)$ -модуля $T_\ell''(k)$, r'' – λ -инвариант модуля $R''(k)$, $\bar{\lambda}'' = \lambda'' + r''$ – λ -инвариант модуля $\overline{T}_\ell(k)''$ и y^+ – λ -инвариант модуля Y_∞^+ .

Пусть q – такой индекс, что теорема 8.4 справедлива для всех $n \geq q$. Тогда, учитывая предложения 2.4 и 3.7, мы получаем непосредственно из теоремы 8.4 следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.5. В условиях теоремы 8.4 существуют индекс q и целые неотрицательные $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, не зависящие от n и такие, что для всех $n > q$

$$\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_n/k_q)) = \frac{1}{2}\nu_\ell(D(k_n)/D(k_q)) + \tilde{\lambda}(n-q) + \tilde{\mu}(\ell^n - \ell^q), \quad (8.14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda_D + 2\lambda'' + r'' = \lambda_D + 2\bar{\lambda}'' = \lambda_D + \lambda'' + r'' + \lambda_{\text{Tors } \overline{W}} + y^+, \\ \tilde{\mu} &= \mu_D + \mu'' + \mu_{\text{Tors } \overline{W}}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть $R_\ell \neq 0$ для всех n . Тогда существует целое $\tilde{\nu}$, не зависящее от n и такое, что для всех $n > q$

$$\nu_\ell(R_\ell(k_n)/\sqrt{D(k_n)}) = \tilde{\lambda}n + \tilde{\mu}\ell^n + \tilde{\nu}. \quad (8.15)$$

Проводя аналогичные рассуждения для вполне вещественного поля k и используя теорему 4.2 и предложения 2.1, 2.3 и 3.7, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.6. Пусть k – вполне вещественное поле такое, что $\mathbf{R}_\ell(k_n) \neq 0$ для всех n , где $\mathbf{R}_\ell(k_n)$ имеет тот же смысл, что и в предложении 2.1. Тогда существуют индекс q и целые неотрицательные λ_2 , μ_2 и $\hat{\nu}_2$, не зависящие от n и такие, что для всех $n > q$

$$\nu_\ell(\mathbf{R}_\ell(k_n)/\sqrt{D(k_n)}) = (\lambda_2 - 1)n + \mu_2\ell^n + \hat{\nu}_2, \quad (8.16)$$

где λ_2 и μ_2 имеют тот же смысл, что и в теореме 4.2.

В заключение мы отметим взаимосвязь между теоремой 8.4 и аналогом формулы Римана–Гурвица [8]. Пусть K/k – конечное ℓ -расширение полей алгебраических чисел такое, что поля K и k удовлетворяют условиям теоремы 8.1

или 8.2, и $\zeta_0 \in k_\infty$. Тогда согласно [8] справедлива формула

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\lambda_{D(K)} + \lambda'(K_\infty) + 2\lambda''(K_\infty) + 2r''(K_\infty) - 2 \\ &= [K_\infty : k_\infty] \left[\frac{1}{2}\lambda_{D(k)} + \lambda'(k_\infty) + 2\lambda''(k_\infty) + 2r''(k_\infty) - 2 \right] + \sum_{v \nmid \ell} (e_v - 1). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Эта формула была доказана в [8, теорема 1] для случая $\ell \neq 2$. Случай $\ell = 2$ был рассмотрен в [11, § 7]. В (8.17) $\lambda_{D(K)}$ и $\lambda_{D(k)}$ – это λ -инварианты модулей $D(K)$ и $D(k)$ соответственно (в [8] эти инварианты обозначались через $d(K_\infty)$ и $d(k_\infty)$), а $\lambda'(K_\infty)$, $\lambda''(K_\infty)$ и $r''(K_\infty)$ – λ -инварианты модулей $T'_\ell(K)$, $T''_\ell(K)$ и $R''(K)$ соответственно. Аналогичный смысл имеют $\lambda'(k_\infty)$, $\lambda''(k_\infty)$ и $r''(k_\infty)$. Через e_v обозначается индекс ветвления точки v поля K_∞ в расширении K_∞/k_∞ , где v пробегает все точки поля K_∞ , не лежащие над ℓ .

ТЕОРЕМА 8.7. Пусть K/k – конечное ℓ -расширение полей алгебраических чисел таких, что K и k удовлетворяют условиям теоремы 8.1 или 8.2, и $\zeta_0 \in k_\infty$. Тогда для всех достаточно больших n справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(K_{n+1}/K_n)) - \frac{1}{2}\lambda_{D(K)} + \lambda'(K_\infty) - 2 = [K_\infty : k_\infty] \\ & \times \left[\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) - \frac{1}{2}\lambda_{D(k)} + \lambda'(k_\infty) - 2 \right] + \sum_{v \nmid \ell} (e_v - 1). \end{aligned} \quad (8.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} A(k_{n+1}/k_n) &= \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) - (m+1)d\ell^n \frac{\ell-1}{2}, \\ B(k_{n+1}/k_n) &= A(k_{n+1}/k_n) - (\mu_{D(k)} + 2\mu''(k))\ell^{n-p}(\ell-1), \end{aligned}$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и в (8.12). Аналогичным образом определим $A(K_{n+1}/K_n)$ и $B(K_{n+1}/K_n)$.

Как было отмечено выше, в нашем случае $\mu_{D(k)} = \mu_{D(K)} = 0$ при $\ell \neq 2$ и $\mu_{D(k)} = [k_p : \mathbb{Q}]/2$, $\mu_{D(K)} = [K_p : \mathbb{Q}]/2$ при $\ell = 2$, где p – такой индекс, что при $n > p$ теорема 8.3 справедлива и для расширения k_∞/k , и для расширения K_∞/K . Далее, в нашем случае $\mu''(k) = \mu''(K) = 0$ при любом ℓ . Таким образом, при любом $n > p$ и любом ℓ

$$\begin{aligned} B(K_{n+1}/K_n) - [K_\infty : k_\infty]B(k_{n+1}/k_n) &= A(K_{n+1}/K_n) - [K_\infty : k_\infty]A(k_{n+1}/k_n) \\ &= \nu_\ell(\mathcal{R}(K_{n+1}/K_n)) - [K_\infty : k_\infty]\nu_\ell(\mathcal{R}(k_{n+1}/k_n)). \end{aligned} \quad (8.19)$$

В силу (8.11) имеем

$$\begin{aligned} B(k_{n+1}/k_n) &= \lambda_{D(k)} + 2\lambda''(k_\infty) + 2r''(k_\infty), \\ B(K_{n+1}/K_n) &= \lambda_{D(K)} + 2\lambda''(K_\infty) + 2r''(K_\infty). \end{aligned}$$

Тогда из (8.14) следует

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\lambda_{D(K)} + \lambda'(K_\infty) + B(K_{n+1}/K_n) - 2 \\ &= [K_\infty : k_\infty] \left[-\frac{1}{2}\lambda_{D(k)} + \lambda'(k_\infty) + B(k_{n+1}/k_n) - 2 \right] + \sum_{v \nmid \ell} (e_v - 1). \end{aligned}$$

Применяя к последней формуле формулу (8.19), мы получаем (8.18). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. *В условиях теоремы 8.7 пусть K/k – расширение полей CM-типа. Тогда для всех достаточно больших n*

$$\begin{aligned} & \nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(K_{n+1}/K_n)) + \lambda'(K_\infty) - 2 \\ &= [K_\infty : k_\infty] [\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) + \lambda'(k_\infty) - 2] + \sum_{v \nmid \ell} (e_v - 1). \end{aligned}$$

Действительно, для полей CM-типа $\lambda_{D(k)} = \lambda_{D(K)} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. *В условиях теоремы 8.7 и следствия 8.2 предположим, что для расширений k_∞/k и K_∞/K справедлива гипотеза Гринберга (эта гипотеза эквивалентна утверждению, что $\lambda'(k_\infty) = \lambda'(K_\infty) = 0$). Тогда для всех достаточно больших n*

$$\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(K_{n+1}/K_n)) - 2 = [K_\infty : k_\infty] [\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) - 2] + \sum_{v \nmid \ell} (e_v - 1). \quad (8.20)$$

Предположим дополнительно, что расширение K/k не разветвлено вне ℓ и для всех полей K_n справедлива гипотеза Леопольдта. Пусть K_{n+1}^+ , K_n^+ , k_{n+1}^+ и k_n^+ – максимальные вещественные подполя полей K_{n+1} , K_n , k_{n+1} и k_n соответственно. Тогда для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(\mathbf{R}_\ell(K_{n+1}^+)/\mathbf{R}_\ell(K_n^+)) = [K_\infty : k_\infty] \nu_\ell(\mathbf{R}_\ell(k_{n+1}^+)/\mathbf{R}_\ell(k_n^+)), \quad (8.21)$$

где $\mathbf{R}(\cdot)$ имеет тот же смысл, что и в предложении 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, непосредственно из определения 2.1 следует, что $R_\ell(K_n) = 2^{[K_n^+:\mathbb{Q}]} R_\ell(K_n^+)$ и аналогичные соотношения имеют место для полей K_{n+1} , k_{n+1} и k_n . Тогда из (8.20), учитывая, что все e_v равны 1 и

$$\mathcal{R}(K_{n+1}/K_n) = R_\ell(K_{n+1})/R_\ell(K_n), \quad \mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n) = R_\ell(k_{n+1})/R_\ell(k_n),$$

мы получаем

$$\frac{1}{2} \nu_\ell(R_\ell(K_{n+1}^+)/R_\ell(K_n^+)) - 1 = \frac{1}{2} [K_\infty : k_\infty] [\nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}^+)/R_\ell(k_n^+)) - 1].$$

Однако согласно предложению 2.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nu_\ell(R_\ell(K_{n+1}^+)/R_\ell(K_n^+)) - 1 &= \nu_\ell(\mathbf{R}_\ell(K_{n+1}^+)/\mathbf{R}_\ell(K_n^+)), \\ \frac{1}{2} \nu_\ell(R_\ell(k_{n+1}^+)/R_\ell(k_n^+)) - 1 &= \nu_\ell(\mathbf{R}_\ell(k_{n+1}^+)/\mathbf{R}_\ell(k_n^+)). \end{aligned}$$

Этим следствие доказано полностью.

§ 9. Заключительные замечания

1. Наиболее важный вопрос, возникающий в связи с полученными результатами, – это вопрос о возможности их обобщения на произвольное поле алгебраических чисел.

ВОПРОС 9.1. Пусть k – произвольное чисто мнимое поле алгебраических чисел. Верно ли, что для всех достаточно больших n

$$\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)) = (m+1)d\ell^n \frac{\ell-1}{2} + \lambda_1 + \mu_1 \ell^n (\ell-1)$$

для некоторых λ_1 и μ_1 , не зависящих от n ?

Автор думает, что ответ на вопрос 9.1 положителен, но доказательство этого факта потребует совсем новых соображений.

2. Другой вопрос связан с интерпретацией инвариантов Ивасава, входящих в наши формулы. Рассмотрим, например, формулу (8.15).

ВОПРОС 9.2. Существует ли естественно определенный модуль Галуа A с инвариантами Ивасава $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, входящими в (8.15)?

Предположим, что такой модуль A существует. Тогда модуль A , кроме инвариантов $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$, имеет еще инвариант ν . Если бы удалось доказать, что $\nu = \tilde{\nu}$, или по крайней мере доказать, что существует простая и явная формула для $\tilde{\nu} - \nu$, можно было бы сказать, что модуль A управляет поведением $\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n)$.

3. Интересной особенностью наших формул для $\nu_\ell(\mathcal{R}_\ell(k_{n+1}/k_n))$ является то, что в них никак не участвует инвариант λ' . Напомним, что для поля k СМ-типа, содержащего ζ_0 , условие $\lambda' = 0$ равносильно гипотезе Гринберга, утверждающей, что $\overline{T}_\ell(k^+)$ является конечным модулем, где k^+ – максимальное вещественное подполе поля k . Известно обобщение этой гипотезы для произвольных полей алгебраических чисел, формулируемое в терминах кратных $\mathbb{Z}_\ell$ -расширений. Однако возможно и более непосредственное обобщение. Таким образом, возникает

ВОПРОС 9.3. Существуют ли поля алгебраических чисел k , для которых $\lambda' \neq 0$?

В пользу отрицательного ответа на вопрос 9.3 говорит то, что в случае $\lambda' = 0$ многие формулировки приобретают более простой вид. Однако отрицательный ответ означал бы, что с точки зрения теории Куммера между неразветвленными расширениями числовых и функциональных полей существует принципиальное различие. Действительно, при этом предположении любое циклическое неразветвленное ℓ -расширение поля k такого, что $\zeta_0 \in k$, содержалось бы в поле вида $k_n(\sqrt[n]{u_n})$ для некоторого n , где u_n – некоторая S -единица поля k_n , что, очевидно, неверно для функциональных полей.

Отметим, что в [8, § 6] были построены бесконечные серии примеров полей k , содержащих ζ_0 , для которых либо $\lambda' \neq 0$, либо $\overline{T}_\ell(k)$ является конечной группой. Было показано, что поля второго типа действительно существуют, однако вопрос о существовании среди этих примеров полей с $\lambda' \neq 0$ остается открытым.

Пусть k – поле СМ-типа, содержащее ζ_0 , и предположим, что $\lambda' = 0$. Тогда при $\ell \neq 2$ модуль Галуа $A = X^+ \oplus \overline{T}_\ell(k)^-$, где для модуля Галуа B через B^+ и B^- обозначаются компоненты, на которые автоморфизм комплексного сопряжения действует умножением на $+1$ и -1 соответственно, дает положительный ответ на вопрос 9.2.

4. Хотелось бы также отметить сходство формул (8.15) и (8.16) с теоремой Брауэра–Зигеля. Действительно, пусть $|\cdot|$ – метрика поля $\mathbb{Q}_\ell$ или любого его конечного расширения, однозначно определенная условием $|\ell| = \ell^{-1}$. Пусть $\mathbf{h}_n = \ell^{x_n}$, где $x_n = \tilde{\lambda}n + \tilde{\mu}\ell^n + \tilde{\nu}$. Тогда (8.15) принимает вид (равенство вещественных чисел)

$$\frac{|R_\ell(k_n)|\mathbf{h}_n}{|\sqrt{D(k_n)}|} = 1$$

для всех достаточно больших n , что удивительно похоже на формулу теоремы Брауэра–Зигеля. Но не менее очевидны и различия. Так, $R_\ell(k_n)$ – это аналог квадрата вещественного регулятора, $\mathbf{h}_n$ – это не ℓ -число классов и тем более не все число классов h , которое фигурирует в теореме Брауэра–Зигеля. Кроме того, наши результаты существенно зависят от сигнатуры k .

Чтобы интерпретировать формулу (8.16), мы рассмотрим ее для случая, когда k является максимальным вещественным подполем поля CM-типа K , содержащего ζ_0 . Пусть $\mathbf{h}_n = \ell^{y_n}$, где $y_n = \lambda_2 n + \mu_2 \ell^n + \hat{\nu}$. Тогда при больших n имеем $\mathbf{h}_n = ch_n^-$, где h_n^- – относительное ℓ -число классов поля K_n и c – некоторая константа, не зависящая от n . Таким образом, (8.16) принимает вид

$$\frac{|\mathbf{R}_\ell(k_n)|h_n^- c \ell^{-n}}{|\sqrt{D(k_n)}|} = 1, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathbf{R}_\ell(k_n)|h_n^-)}{\log(|\sqrt{D(k_n)}|)} = 1,$$

где $\log$ – вещественный логарифм.

5. Наконец, мы обсудим инвариант $z^+ = z^+(V_\infty^+)$, фигурирующий в предположении 8.1. Пусть $Z = \mathbb{Z}_\ell[S]$ – свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, порожденный всеми точками поля k_∞ (или поля k_n для достаточно большого n), лежащими над ℓ . Тогда, очевидно, существует естественная точная последовательность

$$0 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(k_\infty) \rightarrow H(k_\infty) \xrightarrow{\pi} Z \rightarrow 0, \quad (9.1)$$

где группы $\bar{\mathcal{A}}(k_\infty)$ и $H(k_\infty)$ были определены в § 8. Действительно, пусть $x \in H(k_n)$. Тогда $x = \varprojlim x_n$, где $x_n \in \prod_{v \in S} \bar{k}_{n,v}^\times[\ell]$. Элементу x_n можно сопоставить его “главный дивизор” $(x_n) = \sum_{v \in S} \nu_v(x_n)v \in Z$. Если n_0 – индекс такой, что любая точка $v \in S$ чисто разветвлена в расширении k_∞/k_{n_0} , то для всех $n > n_0$ элемент (x_n) не зависит от n и, следовательно, определяет зависящий только от x элемент $\pi(x)$ группы Z .

Пусть, как и в [9], $H^+(k_\infty)$ – минимальный чистый подмодуль $\Lambda(p)$ -модуля $H(k_\infty)$, содержащий $\bar{\mathcal{A}}_\infty^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Пусть $Z^+ \subseteq Z$ – образ проекции $\pi: H^+(k_\infty) \rightarrow Z$, определенной в (9.1). Тогда z^+ совпадает с рангом $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля Z^+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения z^+ следует, что образ естественной проекции $V_\infty^+ \rightarrow V_n$ имеет ранг $r\ell^{n-p} - z^+$, где r – ранг $\Lambda(p)$ -модуля V_∞^+ . Очевидно, что такой же ранг имеют и образы естественных проекций $\bar{\mathcal{A}}^+(k_\infty) \rightarrow V_n^+$ и $f: \bar{\mathcal{A}}^+(k_\infty) \rightarrow H^+(k_n)$, где $H^+(k_n)$ – образ естественной проекции $H^+(k_\infty) \rightarrow H(k_n)$. Поскольку $H^+(k_\infty)$ имеет ранг r как $\Lambda(p)$ -модуль, свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $H^+(k_n)$ имеет ранг $r\ell^{n-p}$. Следовательно, $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $Z^+ \cong H^+(k_n)/f(\bar{\mathcal{A}}^+(k_\infty))$ имеет ранг z^+ . Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Для любого поля алгебраических чисел k справедливо равенство $z^+ + y^+ = s$, где $s = |S|$ – число точек, лежащих над ℓ в поле k_∞ .

Если поле k абелево над ℓ и не является вполне вещественным, то определен ненулевой модуль V_∞^- . Для этого модуля можно аналогичным образом определить инвариант z^- , для которого также справедлив аналог предложения 9.1.

Вычисление инвариантов z^+ и z^- представляет интересную задачу, важную для понимания арифметики круговых $\mathbb{Z}_\ell$ -расширений.

§ 10. Дополнение

В этом параграфе мы предполагаем, что $\ell = 2$ и k – поле алгебраических чисел такое, что его круговое $\mathbb{Z}_2$ -расширение k_∞ не содержит $\zeta_0 = \sqrt{-1}$. Как и в § 8, через S мы обозначаем множество всех простых делителей 2 в рассматриваемом поле и определяем группы $\bar{U}(k)[\ell]$, $\bar{U}_S(k)[\ell]$, $\bar{U}(k_\infty)$, $\bar{U}_S(k_\infty)$, $\mathcal{A}(k_\infty)$, $\bar{\mathcal{A}}(k_\infty)$ и $H(k_\infty)$ так же, как в § 8.

Следующее утверждение хорошо известно и легко выводится из того факта, что над полем $\mathbb{Q}_\infty$ нет нетривиальных 2-расширений, не разветвленных вне 2, поэтому его доказывать мы не будем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Пусть $\mathbb{Q}_\infty$ – круговое $\mathbb{Z}_2$ -расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда

$$U(\mathbb{Q}_\infty) = \bar{U}(\mathbb{Q}_\infty) = \mathcal{A}(\mathbb{Q}_\infty) = \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}_\infty), \quad U_S(\mathbb{Q}_\infty) = \bar{U}_S(\mathbb{Q}_\infty) = H(\mathbb{Q}_\infty).$$

Пусть $\Gamma = G(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ и $\Lambda = \mathbb{Z}_2[[\Gamma]]$. Тогда $\bar{U}(\mathbb{Q}_\infty) \cong \Lambda$ как модуль Галуа и $\bar{U}_S(\mathbb{Q}_\infty)$ канонически вкладывается в качестве подмодуля индекса 2 в свободный Λ -модуль $\mathcal{F}(\bar{U}_S(\mathbb{Q}_\infty)) \cong \Lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. Пусть k – поле алгебраических чисел и k_∞ – его круговое $\mathbb{Z}_2$ -расширение. Естественное вложение $\bar{U}_S(\mathbb{Q}_\infty) \hookrightarrow \bar{U}_S(k_\infty)$ продолжается до вложения $\mathcal{F}(\bar{U}_S(\mathbb{Q}_\infty)) \hookrightarrow \bar{U}_S(k_\infty)$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{-1} \in k_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи обозначим $\mathcal{F}(\bar{U}_S(\mathbb{Q}_\infty))$ через A , а $\bar{U}_S(\mathbb{Q}_\infty)$ – через B . Если x – некоторая образующая Λ -модуля A , то B порождается (в аддитивной записи) двумя образующими $2x$ и $(\gamma - 1)x$. Для произвольного n существует естественное отображение $\varphi_n: B_{(n)} \rightarrow \bar{U}_S(\mathbb{Q}_n)[\ell]$, где $B_{(n)} = B/(\gamma_n - 1)B$ и $\gamma_n = \gamma^{2^n}$. Можно показать, что φ_n – изоморфизм, но мы не будем использовать этот факт. Пусть x_n – проекция x в $A_{(n)}$. Тогда $2x_n \in B_{(n)}$. Обозначим $\varphi_n(2x_n)$ через y_n . Поскольку $2x$ не делится на 2 в B , мы получаем, что y_n не является квадратом в $\bar{U}_S(\mathbb{Q}_n)[\ell]$ для всех достаточно больших n . Пусть i_n и j_n – естественные отображения $B_{(n)} \rightarrow B_{(n+1)}$ и $\bar{U}_S(\mathbb{Q}_n)[\ell] \hookrightarrow \bar{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1})[\ell]$ соответственно. Тогда $\varphi_{n+1} \circ i_n = j_n \circ \varphi_n$, поэтому $2x_n$ делится на 2 в $B_{(n+1)}$ для таких n и, следовательно, $j_n(y_n)$ становится квадратом в $\bar{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1})[\ell]$, т. е. существует $z_{n+1} \in \bar{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1})[\ell]$ такой, что

$$z_{n+1}^2 = j_n(y_n), \quad z_{n+1} \notin j_n(\bar{U}_S(\mathbb{Q}_n)[\ell]). \quad (10.1)$$

Пусть теперь $u_{n+1} \in \overline{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1}) - S$ -единица, образ которой в $\overline{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1})$ представляет z_{n+1} по модулю 2^m -х степеней для достаточно большого m . Тогда, домножая u_{n+1} на квадрат некоторой подходящей S -единицы, мы можем считать, что образ u_{n+1} в группе $\overline{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1})$ инвариантен относительно действия γ_n , но сама единица u_n не инвариантна относительно действия γ_n , т.е. умножается на -1 . Таким образом, в $\mathbb{Q}_n$ существует S -единица v_n такая, что $u_{n+1}^2 = v_n$ и $\mathbb{Q}_{n+1} = \mathbb{Q}_n(\sqrt{v_n})$, причем отображение $j_n \circ \varphi_n: B_{(n)} \rightarrow \overline{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1})[\ell]$ продолжается до отображения $h_n: A_{(n)} \rightarrow \overline{U}_S(\mathbb{Q}_{n+1})[\ell]$, при котором $h_n(x)$ с точностью до квадрата совпадает с $u_{n+1} \bmod \{\pm 1\}$.

Предположим теперь, что для некоторого поля k естественное вложение $B \hookrightarrow \overline{U}_S(k_\infty)$ продолжается до вложения $A \hookrightarrow \overline{U}_S(k_\infty)$. Это означает, что $\varphi_n(2x)$ становится квадратом в $\overline{U}_S(k_n)[\ell]$ для всех достаточно больших n , но тогда и v_n становится квадратом некоторого $u'_n \in \overline{U}_S(k_n)$, а поскольку $\overline{U}_S(k_n)$ не имеет кручения, мы получаем, что $u_{n+1} = \zeta u'_n$ для некоторого корня из единицы ζ , который можно считать корнем 2-примарной степени.

Если $\zeta = \pm 1$, то $\mathbb{Q}_{n+1} \subseteq k_n$, что невозможно для больших n . Следовательно, $\zeta \in k_{n+1} -$ первообразный корень из единицы степени 2^m с $m \geq 2$. В обратную сторону утверждение предложения следует из [9, теорема 7.2]. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3. Пусть k – произвольное поле алгебраических чисел и $\ell = 2$. Пусть p – такой индекс, что $\overline{U}(k_\infty)$ и $\overline{U}_S(k_\infty)$ являются $\Lambda(p)$ -модулями, где $\Lambda(p) = \mathbb{Z}_2[[G(k_\infty/k_p)]]$. Если $\sqrt{-1} \in k_\infty$, то группа $\overline{U}_S(k_\infty)$ – свободный $\Lambda(p)$ -модуль. Если $\sqrt{-1} \notin k_\infty$, то группа $\overline{U}_S(k_\infty)$ изоморфна подмодулю индекса 2 в некотором свободном $\Lambda(p)$ -модуле, причем в качестве такого модуля можно взять $\Lambda(p)$ -модуль (в аддитивной записи) $\mathcal{F}(\overline{U}_S(\mathbb{Q}_\infty)) + \overline{U}_S(k_\infty)$. Группа $\overline{U}(k_\infty)$ всегда является свободным $\Lambda(p)$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sqrt{-1} \in k_\infty$, то согласно [9, теорема 7.2] группа $\overline{U}_S(k_\infty)$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем. Если $\sqrt{-1} \notin k_\infty$, то согласно предложению 10.2 имеем $\overline{U}_S(k_\infty) \neq \mathcal{F}(\overline{U}_S(k_\infty))$, т.е. $\overline{U}_S(k_\infty)$ не является свободным $\Lambda(p)$ -модулем. Таким образом, нам нужно проверить, что в случае $\sqrt{-1} \notin k_\infty$ выполняется неравенство $[\mathcal{F}(\overline{U}_S(k_\infty)) : \overline{U}_S(k_\infty)] \leq 2$.

Если $\sqrt{-1} \notin k_\infty$, положим $K = k(\sqrt{-1})$. Тогда имеем $K_n = k_n(\sqrt{-1})$ и $[K_n : k_n] = 2$ для всех $n \geq p$. Сквозное естественное отображение

$$\mathcal{F}(\overline{U}_S(k_\infty)) \xrightarrow{i} \overline{U}_S(K_\infty) \xrightarrow{N} \overline{U}_S(k_\infty)$$

индуцирует на подмодуле $\overline{U}_S(k_\infty)$ модуля $\mathcal{F}(\overline{U}_S(k_\infty))$ умножение на 2. Следовательно, группа $C := \mathcal{F}(\overline{U}_S(k_\infty))/\overline{U}_S(k_\infty)$ имеет период 2. Пусть x', y' – два различных ненулевых элемента группы C и x, y – некоторые их представители в группе $\mathcal{F}(\overline{U}_S(k_\infty))$. Тогда, рассуждая, как и в доказательстве предложения 10.2, мы получаем, что для всех достаточно больших n в группе $\overline{U}_S(k_n)$ существуют элементы a_n и b_n , которые не являются квадратами в k_n и независимы по модулю квадратов, но становятся квадратами в K_n (совпадающими с x_n и y_n соответственно по модулю квадратов в K_n). Другими словами, $k_n(\sqrt{a_n}, \sqrt{b_n}) \subseteq K_n$, что противоречит условию $[K_n : k_n] = 2$. Это доказывает ту часть предложения, которая относится к модулю $\overline{U}_S(k_\infty)$.

Поскольку группа $\overline{U}_S(k_n)[\ell]/\overline{U}(k_n)[\ell]$ является свободным $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем (как подмодуль свободного $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля, порожденного простыми делителями 2 в поле k_n), мы получаем, что $\overline{U}_S(k_\infty)/\overline{U}(k_\infty)$ является свободным $\mathbb{Z}_\ell$ -модулем, поэтому в случае $\sqrt{-1} \in k_\infty$ группа $\overline{U}(k_\infty)$ является свободным $\Lambda(p)$ -модулем. Если $\sqrt{-1} \notin k_\infty$, то предыдущее рассуждение следует повторить для вложения $\overline{U}(k_\infty)$ в свободный $\Lambda(p)$ -модуль $\mathcal{F}(\overline{U}_S(\mathbb{Q}_\infty)) + \overline{U}_S(k_\infty)$. Предложение доказано.

Список литературы

1. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о l -адической теореме Дирихле и l -адическом регуляторе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:6 (1981), 1203–1240; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the l -adic Dirichlet theorem and the l -adic regulator”, *Math. USSR-Izv.*, **19**:3 (1982), 445–478.
2. S. Lang, *Cyclotomic fields*. I, II, Grad. Texts in Math., **121**, Springer-Verlag, New York, 1990.
3. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о l -адическом регуляторе. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:4 (1989), 782–813; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the l -adic regulator. II”, *Math. USSR-Izv.*, **35**:1 (1990), 113–144.
4. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. III”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 29–82; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the ℓ -adic regulator. III”, *Math. USSR-Izv.*, **63**:6 (1999), 1089–1138.
5. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. IV”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:2 (2000), 43–88; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the ℓ -adic regulator. IV”, *Izv. Math.*, **64**:2 (2000), 265–310.
6. J.-P. Wintenberger, “Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **16**:1 (1983), 59–89.
7. Л. В. Кузьмин, “Новое доказательство одной теоремы двойственности о ℓ -адических логарифмах локальных единиц”, *Алгебраическая геометрия – 8, Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил.*, **45**, ВИНТИ, М., 1997, 72–81; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “A new proof of some duality theorem on the ℓ -adic logarithms of local units”, *J. Math. Sci. (New York)*, **95**:1 (1999), 1996–2005.
8. Л. В. Кузьмин, “Аналог формулы Римана–Гурвица для одного типа l -расширений полей алгебраических чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 316–338; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “An analog of the Riemann–Hurwitz formula for one type of l -extension of algebraic number fields”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:2 (1991), 325–347.
9. Л. В. Кузьмин, “Модуль Тэйта полей алгебраических чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:2 (1972), 267–327; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “The Tate module for algebraic number fields”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:2 (1972), 263–321.
10. Дж. Тэйт, “ p -делимые группы”, *Математика. Сб. пер.*, **13**:2 (1969), 3–25; пер. с англ.: J. T. Tate, “ p -divisible groups”, *Proc. of Conference on local Fields* (Driebergen, 1966), Springer-Verlag, Berlin, 1967, 158–183.
11. Л. В. Кузьмин, “Новые явные формулы для символа норменного вычета и их приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:6 (1990), 1196–1228; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “New explicit formulas for the norm residue symbol, and their applications”, *Math. USSR-Izv.*, **37**:3 (1991), 555–586.