Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств,
Изв. РАН. Сер. матем., 2000, том 64, выпуск 1, 95–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 07:37:18

УДК 517.51+517.9

Е. Д. Нурсултанов

О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств

В работе с помощью новых функциональных пространств, интерполяционных методов изучается зависимость свойств суммируемых кратных рядов Фурье и их коэффициентов. Получены теоремы для кратных ортогональных рядов, которые в случае тригонометрических рядов усиливают теорему Харди–Литтлвуда. Доказаны неравенства типа Харди–Литтлвуда–Пэли для кратных ортогональных рядов, уточняющие некоторые известные подобные неравенства.

Библиография: 36 наименований.

Методы функциональных пространств являются одним из мощных инструментов исследования в математике. В данной работе мы хотим продемонстрировать применение новых функциональных пространств в теории ортогональных рядов.

Хорошо известна теорема Харди и Литтлвуда.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$. Если $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно невозрастающая, стремящаяся к нулю последовательность, $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi kx$, то для того, чтобы $f \in L_p[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежала пространству Лоренца $l_{p'p}$.

Этот результат обобщен на пространство Лоренца и более общие симметричные пространства в работах [14], [25]–[27], [30].

В. А. Кокилашвили [15] для тригонометрических рядов ослабил условия монотонности, заменив их на условия квазимонотонности.

Для кратных рядов проводили исследования Ф. Мориц [20], М. И. Дьяченко [7]–[9]. Ф. Мориц показал, что если коэффициенты $a = \{a_{k_1 k_2}\}_{k_1=1, k_2=1}^{\infty, \infty}$ удовлетворяют условиям

$$a_{k_1 k_2} \geq 0, \quad \Delta_{10} a_{k_1 k_2} \geq 0, \quad \Delta_{01} a_{k_1 k_2} \geq 0, \quad \Delta_{11} a_{k_1 k_2} \geq 0, \quad (1)$$

то условие $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2} k_2^{p-2} |a_{k_1 k_2}|^p. \quad (2)$$

Если же коэффициенты $a = \{a_{k_1 k_2}\}_{k_1=1, k_2=1}^{\infty, \infty}$ монотонны по каждому переменному индексу k_1 , k_2 , то, как показал М. И. Дьяченко, сходимость числового ряда (2) эквивалентна $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ лишь при $4/3 < p < \infty$ (в общем случае $2n/(n+1) < p < \infty$).

Утверждение теоремы Харди и Литтлвуда справедливо и для других ортогональных систем: для системы Уолша доказал Ф. Мориц [19], для мультипликативной системы с ограниченными образующими – М. Ф. Тиман и К. Тухлиев [32] (отметим также работы [34], [28], [1]). В данной статье мы будем рассматривать следующие вопросы:

- 1) каким условиям должна удовлетворять ортонормированная система Φ , чтобы имела место теорема Харди–Литтлвуда?
- 2) можно ли расширить класс рядов с квазимонотонными коэффициентами для того, чтобы сохранялось утверждение теоремы Харди–Литтлвуда?
- 3) каков аналог теоремы Харди–Литтлвуда для ортогональных рядов из пространств Лоренца L_{pq} ?
- 4) какие неравенства типа Харди–Литтлвуда–Пэли имеют место в анизотропных пространствах $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$?

В первых двух параграфах исследуются интерполяционные свойства пространств $N_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(M)$, $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\mathbb{R}^m)$, зависящих от векторных параметров $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$.

В §3–6 с помощью результатов из §1, 2 получены утверждения, являющиеся в некотором смысле ответами на выше поставленные вопросы.

§1. Сетевые пространства $N_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(M)$ и пространства $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\mathbb{R}^m)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – векторы такие, что если $0 < q_j < \infty$, то $0 < p_j < \infty$, если же $q_j = \infty$, то $0 < p_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, n$. В дальнейшем будем считать, что векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ удовлетворяют этим условиям.

Определим функционал

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\varphi) = \left(\int_0^\infty \dots \left(\int_0^\infty \left| t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} \varphi(t_1, \dots, t_n) \right|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}. \quad (3)$$

Здесь выражение $(\int_0^\infty (F(t))^q dt/t)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимается как $\sup_{t>0} F(t)$.

Под областью определения функционала $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ будем понимать множество всех определенных на $(0, \infty)^n$, монотонно невозрастающих по каждому аргументу функций $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, для которых конечна величина (3).

ЛЕММА 1. Если $\mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$, т.е. $q_i \leq \bar{q}_i$, $i = 1, \dots, n$, то для каждой функции φ из области определения функционала $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ имеет место неравенство

$$\Phi_{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}(\varphi) \leq c \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ из пересечения областей определения функционалов $\Phi_{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}$ и $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Следовательно, φ – монотонно невозрастающая функция и $\Phi_{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}(\varphi)$,

$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\varphi)$ имеют смысл,

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}(\varphi) &= \left(\int_0^\infty \dots \left(\int_0^\infty \left| t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} \varphi(t_1, \dots, t_n) \right|^{\bar{q}_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{\bar{q}_n}} \\ &\leq \prod_{j=1}^n \left(\frac{q_j}{p_j} + \varepsilon q_j \right)^{\frac{1}{q_j}} \left(\left(\int_0^\infty t_n^{-\varepsilon \bar{q}_n} \left(\int_0^{t_n} s_n^{\frac{1}{p_n} + \varepsilon} \times \dots \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \dots \times \int_0^\infty t_1^{-\varepsilon \bar{q}_1} \left(\int_0^{t_1} \left(s_1^{\frac{1}{p_1} + \varepsilon} \varphi(s_1, \dots, s_n) \right)^{q_1} \frac{ds_1}{s_1} \right)^{\frac{\bar{q}_1}{q_1}} \frac{dt_1}{t_1} \dots \right)^{q_n} \frac{ds_n}{s_n} \right)^{\frac{\bar{q}_n}{q_n}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{\bar{q}_n}}.\end{aligned}$$

Здесь использовано свойство монотонности $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ по каждому аргументу t_j . В каждой паре интегралов применим неравенство Минковского, учитывая при этом, что $\mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$. Получим $\Phi_{\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}}(\varphi) \leq c \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\varphi)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < p_{j_0} < \infty$, $1 \leq j_0 \leq n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной функции φ из области определения функционала $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ имеем

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\varphi \cdot \chi_{(0,N)}) \leq c N^{1/p_{j_0} - 1/(p_{j_0} + \varepsilon)} \Phi_{\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0}(\varphi \cdot \chi_{(0,N)}),$$

где вектор $\mathbf{p}_0 = (p_1, \dots, p_{j_0-1}, p_{j_0} + \varepsilon, p_{j_0+1}, \dots, p_n)$, $\mathbf{q}_0 = (q_1, \dots, q_{j_0-1}, \infty, q_{j_0+1}, \dots, q_n)$, функция $\chi_{(0,N)}(t_{j_0})$ – характеристическая функция интервала $(0, N)$, т.е.

$$\chi_{(0,N)}(t_{j_0}) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_{j_0} \in (0, N), \\ 0 & \text{при } t_{j_0} \notin (0, N). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned}F(t_{j_0}, \dots, t_n) &= \\ &= \left(\int_0^\infty \dots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_{j_0-1}^{\frac{1}{p_{j_0-1}}} \varphi(t_1, \dots, t_n) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_{j_0-1}}{t_{j_0-1}} \right)^{\frac{1}{q_{j_0-1}}}\end{aligned}$$

– монотонная функция по каждому аргументу $t_{j_0}, \dots, t_n$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\varphi \chi_{(0,N)}) &= \\ &= \left(\int_0^\infty \dots \left(\int_0^N \left| t_{j_0}^{\frac{1}{p_{j_0}}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} F(t_{j_0}, \dots, t_n) \right|^{q_{j_0}} \frac{dt_{j_0}}{t_{j_0}} \right)^{\frac{q_{j_0+1}}{q_{j_0}}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\leq \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}_0}(\varphi) \int_0^N t_{j_0}^{\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0} + \varepsilon}} \frac{dt_{j_0}}{t_{j_0}} = c N^{\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0} + \varepsilon}} \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}_0}(\varphi).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть в $\mathbb{R}^m$ задана m -мерная мера Лебега μ , $\mathbb{S}$ – множество всех измеримых подмножеств e из $\mathbb{R}^m$, и пусть $0 < \mu e < \infty$. Фиксированное семейство множеств

$M \subset \mathbb{S}$ назовем *сетью в $\mathbb{R}^m$* . Пусть $M_1, \dots, M_n$ – сети в $\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n}$. Рассмотрим семейство множеств M в $\mathbb{R}^{\mathbf{m}} = (\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n})$ вида

$$M = \left\{ e = e_1 \times \dots \times e_n \subset \mathbb{R}^{|\mathbf{m}|} : e_j \in M_j \right\},$$

которое будем называть *сетью в $\mathbb{R}^{\mathbf{m}} = (\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n})$* , $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $|\mathbf{m}| = m_1 + \dots + m_n$. Для функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, интегрируемой на каждом e из M , определим функцию

$$\bar{f}(t; M) = \bar{f}(t_1, \dots, t_n; M) = \sup_{\substack{|e_j| > t_j \\ e \in M}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) dx \right|.$$

Здесь $|e| = \mu e$, $|e_j| = \mu_j e_j$, μ_j – мера Лебега в $\mathbb{R}^{m_j}$.

Пусть $0 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. Через $N_{\mathbf{pq}}(M)$ обозначим множество всех функций f , для которых

$$\|f\|_{N_{\mathbf{pq}}(M)} = \Phi_{\mathbf{pq}}(\bar{f}(\cdot; M)) < \infty.$$

Число n будем называть *анизотропной размерностью $N_{\mathbf{pq}}(M)$* .

В изотропном случае сетевые пространства были рассмотрены в [21], [22].

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – измеримая функция, заданная в $\mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_n}$, $* = \{j_1, \dots, j_n\}$ – некоторая перестановка последовательности чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Через $f^*(t) = f^{*j_1, \dots, *j_n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ в $\mathbb{R}^{m_{j_1}}, \dots, \mathbb{R}^{m_{j_n}}$, считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию $f^*(t)$ будем называть *невозрастающей перестановкой функции f в $\mathbb{R}^{\mathbf{m}} = (\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n})$* , соответствующей вектору $* = (j_1, \dots, j_n)$. Пространство $L_{\mathbf{pq}}^*(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})$ определяется как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}}^*(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})} = \Phi_{\mathbf{pq}}(f^*(\cdot)) < \infty.$$

Если $* = (1, 2, \dots, n)$, то пространство $L_{\mathbf{pq}}^*(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})$ будем обозначать через $L_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})$.

Пространство $L_{\mathbf{pq}}^*(\Omega)$, где $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, $\Omega_j \subset \mathbb{R}^{m_j}$, определяется нормой

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}}^*(\Omega)} = \|f\Omega\|_{L_{\mathbf{pq}}^*(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})},$$

где $f\Omega$ – нулевое продолжение функции f с области Ω на все $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В отличие от скалярного случая, при $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ пространство $L_{\mathbf{pq}}$ не совпадает с анизотропным пространством Лебега $L_{\mathbf{p}} = (L_{p_1}, \dots, L_{p_n})$.

Из лемм 1 и 2 вытекают следующие свойства пространств $L_{\mathbf{pq}}^*$ и $N_{\mathbf{pq}}(M)$:

- а) если $M_1 \subset M_2$, то $N_{\mathbf{pq}}(M_2) \hookrightarrow N_{\mathbf{pq}}(M_1)$;
- б) при $\mathbf{q} \leq \mathbf{q}_1$ ($q_j \leq q_j^1$, $j = 1, \dots, n$) имеют место вложения

$$N_{\mathbf{pq}}(M) \hookrightarrow N_{\mathbf{pq}_1}(M_1), \quad L_{\mathbf{pq}}^*(\Omega) \hookrightarrow L_{\mathbf{pq}_1}^*(\Omega_1);$$

с) если $\sup_{e \in M} |e| = \alpha < \infty$ и $|\Omega| < \infty$, $p_{j_0} < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$N_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}_1}(M) \hookrightarrow N_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(M), \quad L_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}_1}^*(\Omega) \hookrightarrow L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\Omega),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), \\ \mathbf{p}_\varepsilon &= (p_1, \dots, p_{j_0-1}, p_{j_0} + \varepsilon, p_{j_0+1}, \dots, p_n), \\ \mathbf{q}_1 &= (q_1, \dots, q_{j_0-1}, \infty, q_{j_0+1}, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Аналогично определяются дискретные пространства $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ и $l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*$.

Если W_j – некоторые фиксированные семейства конечных наборов e_j мульти-индексов из $\mathbb{Z}^{m_j}$, $j = 1, \dots, n$, то семейство $W = W_1 \times \dots \times W_n$ подмножеств $\mathbb{Z}^{\mathbf{m}} = (\mathbb{Z}^{m_1}, \dots, \mathbb{Z}^{m_n})$ назовем *анизотропной сетью в $\mathbb{Z}^{\mathbf{m}}$* ,

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W) &= \left\{ \{a_{s_1, \dots, s_n}\}_{s_1 \in \mathbb{Z}^{m_1}, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^{m_n}} : \right. \\ \|a\|_{n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W)} &= \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{q_n-1} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-1} (\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(W))^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &= F_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\{\bar{a}_k(W)\}) < \infty \left. \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(W) = \sup_{\substack{|e_j| > k_j \\ e \in W}} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{k \in e} a_k \right|,$$

где $|e|$ – количество элементов множества $e = e_1 \times \dots \times e_n$, $|e_j|$ – количество элементов e_j , $j = 1, \dots, n$.

Пусть $*$ = $(j_1, \dots, j_n)$. Определим пространство

$$l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* = \left\{ \{a_{s_1 \dots s_n}\}_{s_1 \in \mathbb{Z}^{m_1}, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^{m_n}} : \|a\|_{l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*} = F_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\{a_{\mathbf{k}}^*\}) < \infty \right\},$$

где $a_{\mathbf{k}}^* = a_{k_1 \dots k_n}^{*j_1 \dots j_n}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_{s_1 \dots s_n}\}$, $s_1 \in \mathbb{Z}^{m_1}, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^{m_n}$, взятая последовательно соответственно по переменным $s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_n}$.

Для пространств $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W)$ и $l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*$ также верны следующие свойства:

- а) если $W_1 \subset W_2$, то $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W_2) \hookrightarrow n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W_1)$;
- б) при $\mathbf{q} \leq \mathbf{q}_1$ верно $n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{p}\mathbf{q}_1}(W)$, $l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* \hookrightarrow l_{\mathbf{p}\mathbf{q}_1}^*$;
- с) если $p_{j_0} < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$n_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}_1}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(W), \quad l_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}_1}^* \hookrightarrow l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*,$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1, \dots, p_{j_0-1}, p_{j_0} - \varepsilon, p_{j_0+1}, \dots, p_n)$, $\mathbf{q}_1 = (q_1, \dots, q_{j_0-1}, \infty, q_{j_0+1}, \dots, q_n)$.

Пусть $0 < r, v < \infty$. Рассмотрим преобразования типа Харди и Белмана:

$$H_{rv}f(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{r}}} \left(\int_0^t \left(f^*(s) s^{\frac{1}{r}} \right)^v \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{v}},$$

$$B_{rv}f(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{r}}} \left(\int_t^\infty \left(f^*(s) (s-t)^{\frac{1}{r}} \right)^v \frac{ds}{s-t} \right)^{\frac{1}{v}}.$$

Преобразования типа Харди и Белмана для последовательности $a = \{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ определяются следующим образом:

$$h_{rv}(a) = \left\{ \frac{1}{k^{\frac{1}{r}}} \left(\sum_{l=1}^k \left(a_l^* l^{\frac{1}{r}} \right)^v \frac{1}{l} \right)^{\frac{1}{v}} \right\}_{k=1}^\infty,$$

$$b_{rv}(a) = \left\{ \frac{1}{k^{\frac{1}{r}}} \left(\sum_{l=k+1}^\infty \left(a_l^* (l-k)^{\frac{1}{r}} \right)^v \frac{1}{l-k} \right)^{\frac{1}{v}} \right\}_{k=1}^\infty.$$

ЛЕММА 3. Пусть $0 < v \leq q \leq \infty$.

а) Если $0 < p < r \leq \infty$, то преобразование типа Белмана в $L_{pq}(\mathbb{R})$ ограничено, т.е. $\|B_r f\|_{pq} \leq C \|f\|_{pq}$.

б) Если $1 \leq r < p$, то преобразование типа Харди ограничено в $L_{pq}(\mathbb{R})$, т.е. $\|H_r f\|_{pq} \leq C \|f\|_{pq}$.

в) Если $0 < r < p$, то преобразование типа Белмана ограничено в l_{pq} , т.е. $\|b_{rv} a\|_{pq} \leq C \|a\|_{pq}$.

г) Если $0 < p < r \leq \infty$, то преобразование типа Харди ограничено в l_{pq} , т.е. $\|h_{rv} a\|_{pq} \leq C \|a\|_{pq}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично классическому неравенству Харди и Белмана.

§ 2. Интерполяционный метод для анизотропных пространств

В данном параграфе предлагается интерполяционный метод для анизотропных пространств, который основан на идеях работ Спара Г. [29], Фернандеса Д. Л. [11]–[13] и других [6], [17], [18].

Пусть

$$\|f\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} = \left(\int_0^\infty \dots \left(\int_0^\infty |f(t_1, \dots, t_n)|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Если $q_j = \infty$, то выражение $(\int_0^\infty (\cdot)^{q_j} dt_j / t_j)^{1/q_j}$ понимается как $\sup_{t_j > 0} (\cdot)$.

Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $\underline{A} = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1 -значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$. Пространство $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ определяется индуктивно. Его назовем *анизотропным пространством размерности n* .

Пусть $\mathbf{A}_0 = (A_1^0, \dots, A_n^0)$, $\mathbf{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ – два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}} = \|\dots \|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}} \dots \|a\|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A}_0 = (A_1^0, \dots, A_n^0)$, $\mathbf{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ назовем *совместимой*, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Пусть $*$ – $(j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1, 2, \dots, n)$, вектору $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ сопоставим $\varepsilon^* = (\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_n}) \in E$. Определим K^* -функционал:

$$K^*(t, a; \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \inf \left\{ \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} : a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, a_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon \right\},$$

где $t^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. Через $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}^* = (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta\mathbf{q}}^*$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, для элементов которых верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}^*} = \|t^{-\theta} K^*(t, a)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} < \infty.$$

Если $*$ – $(1, \dots, n)$, то через $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}$ будем обозначать пространство $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}^*$.

ЛЕММА 4. Пусть $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$ – совместимая пара анизотропных пространств, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_j = 0 \text{ или } \varepsilon_j = 1, j = 1, \dots, n\}$.

а) Если $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in E$ такие, что $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = 1$ ($\varepsilon_j^0 + \varepsilon_j^1 = 1$), то $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta\mathbf{q}}^* = (\mathbf{A}_{\varepsilon_0}, \mathbf{A}_{\varepsilon_1})_{\eta\mathbf{q}}^*$, где $\eta = (1 - \theta)\varepsilon_0 + \theta\varepsilon_1$ ($\eta_j = (1 - \theta_j)\varepsilon_j^0 + \theta_j\varepsilon_j^1$, $j = 1, \dots, n$).

б) Если $\mathbf{q}_1 \leq \mathbf{q}$, то $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta\mathbf{q}_1}^* \hookrightarrow (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta\mathbf{q}}^*$.

в) Пусть $*$ – $(j_1, \dots, j_n)$, $*_1 = (r_1, \dots, r_n)$ – некоторые перестановки последовательности $(1, \dots, n)$; тогда выражение $* \circ *_1 = (r_{j_1}, \dots, r_{j_n})$ определяет перестановку последовательности $(r_1, \dots, r_n)$, соответствующую вектору $*$ – $(j_1, \dots, j_n)$. Если T – линейный оператор такой, что $T : \mathbf{A}_{\varepsilon^*} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$, с нормой M_ε для любого $\varepsilon \in E$, то

$$T : \mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}^{*\circ*_1} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta\mathbf{q}}^{*_1}, \quad \mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}, \quad \mathbf{0} < \mathbf{q} \leq \infty,$$

с нормой $\|T\| \leq \max_{\varepsilon \in E} M_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Не уменьшая общности, можно считать, что $*$ – $(1, \dots, n)$. Пусть $a \in (\mathbf{A}_{\varepsilon_0}, \mathbf{A}_{\varepsilon_1})_{\theta\mathbf{q}}$; тогда

$$\begin{aligned} \|a\|_{(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta\mathbf{q}}} &= \left\| t^{-\theta} \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \\ &= \left\| t^{(1-\theta)\varepsilon_0 - \theta\varepsilon_1} \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \left(\sum_{\varepsilon \in E} t^{-(1-\varepsilon)\varepsilon_0 + \varepsilon\varepsilon_1} \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} \right) \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})}. \end{aligned}$$

Сделаем замену $t^{\varepsilon_0} \rightarrow t^{-\varepsilon_0}$, т.е. если $\varepsilon_j^0 = 1$, то $t_j \rightarrow 1/t_j$; если $\varepsilon_j = 0$, замену не делаем. Тогда

$$\begin{aligned} \|a\|_{(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta \mathbf{q}}} &= \left\| t^{-(1-\theta)\varepsilon_0 - \theta\varepsilon_1} \inf_{a=\sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^{(1-\varepsilon)\varepsilon_0 + \varepsilon\varepsilon_1} \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \\ &= \left\| t^{-\eta} \inf_{a=\sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \left(\sum_{\varepsilon' \in E} t^{\varepsilon'} \|a_{\varepsilon'}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon'}} \right) \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} = \|a\|_{(\mathbf{A}_{\varepsilon_0}, \mathbf{A}_{\varepsilon_1})_{\theta \mathbf{q}}}. \end{aligned}$$

Утверждение б) следует из леммы 1.

Докажем пункт в). Пусть $*_2 = * \circ *_1$; тогда

$$\begin{aligned} \|Ta\|_{(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1)_{\theta \mathbf{q}}^{*1}} &= \left\| t^{-\theta} \inf_{Ta=\sum_{\varepsilon \in E} b_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|b_{\varepsilon^{*1}}\|_{\mathbf{B}_{\varepsilon^{*1}}} \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \\ &\leq \left\| t^{-\theta} \inf_{a=\sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon M_\varepsilon \|a_{\varepsilon^{*2}}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^{*2}}} \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \leq \max_{\varepsilon \in E} M_\varepsilon \|a\|_{\mathbf{A}_{\theta \mathbf{q}}^{*2}}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{0} < \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1 \leq \infty$, $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$ ($p_j^0 \neq p_j^1$, $j = 1, \dots, n$), $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $*$ = $(j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $\{1, 2, \dots, n\}$, $1/\mathbf{p} = 1 - \theta/\mathbf{p}_0 + \theta/\mathbf{p}_1$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} \leq \infty$. Тогда:

- а) $(N_{\mathbf{p}_0 \infty}(M), N_{\mathbf{p}_1 \infty}(M))_{\theta \mathbf{q}} \hookrightarrow N_{\mathbf{p} \mathbf{q}}(M)$;
- б) $(L_{\mathbf{p}_0 \infty}^*, L_{\mathbf{p}_1 \infty}^*)_{\theta \mathbf{q}}^* \hookrightarrow L_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = (v_1, \dots, v_n)$, где $v_i = t_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i = \frac{p_i^0 p_i^1}{p_i^1 - p_i^0}$, $0 < t_i < \infty$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 1 \text{ или } \varepsilon_i = 0, i = 1, \dots, n\}$. Для функции $f \in \sum_{\varepsilon \in E} N_{\mathbf{p}_\varepsilon \infty}(M)$ рассмотрим представление $f = \sum_{\varepsilon \in E} f_\varepsilon$, $f_\varepsilon \in N_{\mathbf{p}_\varepsilon \infty}$. Учитывая свойства усреднения по сети $M(\sum_{\varepsilon \in E} f_\varepsilon)(t; M) \leq \sum_{\varepsilon \in E} f_\varepsilon(t; M)$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{v \geq s > 0} s^{\frac{1}{\mathbf{p}_0}} \bar{f}(s, M) &\leq \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{v \geq s > 0} s^{\frac{1}{\mathbf{p}_0}} \bar{f}_\varepsilon(s, M) \\ &= \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{v \geq s > 0} s^{\frac{1}{\mathbf{p}_0} - \frac{1}{\mathbf{p}_\varepsilon} + \frac{1}{\mathbf{p}_\varepsilon}} \bar{f}_\varepsilon(s, M) \leq \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \sup_{s > 0} s^{\frac{1}{\mathbf{p}_\varepsilon}} \bar{f}_\varepsilon(s, M). \end{aligned}$$

Из произвольности представления $f = \sum_{\varepsilon \in E} f_\varepsilon$ имеем

$$\sup_{v \geq s > 0} s^{\frac{1}{\mathbf{p}_0}} \bar{f}(s, M) \leq K(t, f; N_{\mathbf{p}_0 \infty}, N_{\mathbf{p}_1 \infty}). \quad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{N_{\mathbf{p} \mathbf{q}}(M)} &= \left\| t^{\frac{1}{\mathbf{p}}} \bar{f}(t, M) \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \leq \left\| t^{-\theta(\frac{1}{\mathbf{p}_0} - \frac{1}{\mathbf{p}_1})} \sup_{t \geq s > 0} s^{\frac{1}{\mathbf{p}_0}} \bar{f}(s, M) \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \\ &= C \left\| t^{-\theta} \sup_{v \geq s > 0} s^{\frac{1}{\mathbf{p}_0}} \bar{f}(s, M) \right\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})}. \end{aligned}$$

Используя (5), получим

$$\|f\|_{N_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \leq C_1 \|t^{-\theta} K(t, f; N_{\mathbf{p}_0\infty}, N_{\mathbf{p}_1\infty})\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} = C_1 \|f\|_{(N_{\mathbf{p}_0\infty}, N_{\mathbf{p}_1\infty})_{\theta\mathbf{q}}}.$$

Вложение (4) доказано.

Пункт б) доказывается так же. Пусть $v = (v_1, \dots, v_n)$, где $v_{j_i} = t_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i = \frac{p_i^0 p_i^1}{p_i^1 - p_i^0}$, $0 < t_i < \infty$. Для функции $f \in \sum_{\varepsilon \in E} L_{\mathbf{p}_\varepsilon\infty}^*(M)$ рассмотрим представление $f = \sum_{\varepsilon \in E} f_\varepsilon$, $f_\varepsilon \in L_{\mathbf{p}_\varepsilon\infty}^*$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sup_{v \geq s > 0} s_{j_1}^{\frac{1}{p_1^0}} \dots s_{j_n}^{\frac{1}{p_n^0}} f^*(s) &\leq \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{v \geq s > 0} s_{j_1}^{\frac{1}{p_1^0}} \dots s_{j_n}^{\frac{1}{p_n^0}} f_\varepsilon^*\left(\frac{s}{2^n}\right) \\ &\leq \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \sup_{s > 0} s_{j_1}^{\frac{1}{p_1^{\varepsilon_1}}} \dots s_{j_n}^{\frac{1}{p_n^{\varepsilon_n}}} f_\varepsilon^*\left(\frac{s}{2^n}\right). \end{aligned}$$

В последнем соотношении использовалось

$$s_{j_i}^{\frac{1}{p_i^0} - \frac{1}{p_i^{\varepsilon_i}}} \leq t_i^{\varepsilon_i} \quad \text{при} \quad s_{j_i} \leq v_{j_i} = t_i^{\gamma_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из произвольности представления $f = \sum_{\varepsilon \in E} f_\varepsilon$ имеем

$$\sup_{v \geq s > 0} s_{j_1}^{\frac{1}{p_1^0}} \dots s_{j_n}^{\frac{1}{p_n^0}} f^*(s) \leq C_1 K^*\left(\frac{t}{2^n}, f; L_{\mathbf{p}_0\infty}^*, L_{\mathbf{p}_1\infty}^*\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}}^* &= \|t^{\frac{1}{\mathbf{p}}} f^*(t)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \leq C_2 \|t^{-\theta} \sup_{v \geq s > 0} s_{j_1}^{\frac{1}{p_1^0}} \dots s_{j_n}^{\frac{1}{p_n^0}} f^*(s)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \\ &\leq C_3 \|t^{-\theta} K^*(t, f; L_{\mathbf{p}_0\infty}^*, L_{\mathbf{p}_1\infty}^*)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} = C_3 \|f\|_{(L_{\mathbf{p}_0\infty}^*, L_{\mathbf{p}_1\infty}^*)_{\theta\mathbf{q}}}^*. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbf{0} < \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$, $0 < \sigma$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$, $\mathbf{A}_\varepsilon = (L_{p_1^{\varepsilon_1}\sigma}, \dots, L_{p_n^{\varepsilon_n}\sigma})$. Если $f \in \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, то для любого $w = (w_1, \dots, w_n) > \mathbf{0}$ найдется такое представление функции

$$f = \sum_{\varepsilon \in E} f_\varepsilon, \quad f_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon,$$

что

$$\|f_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = w^{\frac{1}{\mathbf{p}_\varepsilon}} (T_\varepsilon f)(w),$$

где $T_\varepsilon = T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_2} \dots T_{\varepsilon_n}$ — композиция операций, удовлетворяющих условиям:

- при $\varepsilon_i = 0$, $T_{\varepsilon_i} = H_{p_i^0\sigma}$ — преобразование типа Харди;
- при $\varepsilon_i = 1$, $T_{\varepsilon_i} = B_{p_i^1\sigma}$ — преобразование типа Белмана.

Доказательство проведем индуктивно. Пусть $n = 2$, $w = (w_1, w_2) > 0$. Рассмотрим представление $f = f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11}$, зависящее от параметров t_1, t_2 и строящееся следующим образом.

Пусть $w_1 = \frac{p_1^0 p_1^1}{p_1^1 - p_1^0}$, $w_2 = \frac{p_2^0 p_2^1}{p_2^1 - p_2^0}$, $\varphi_{\Omega_{x_2}}(x_1)$ – характеристическая функция множества $\Omega_{x_2} = \{(x_1, x_2): |f(x_1, x_2)| > f^{*1}(w_1, x_2)\} \cup e_{x_2}$, где e_{x_2} – измеримое подмножество $\{(x_1, x_2): |f(x_1, x_2)| = f^{*1}(w_1, x_2)\}$ такое, что $\mu_1(\Omega_{x_2}) = w_1$. Такое множество всегда можно подобрать, так как при фиксированном x_2

$$\begin{aligned} \mu_1\{(x_1, x_2): |f(x_1, x_2)| > f^{*1}(w_1, x_2)\} &\leq w_1 \\ &\leq \mu_1\{(x_1, x_2): |f(x_1, x_2)| \geq f^*(w_1, x_2)\}. \end{aligned}$$

Через g_0 и g_1 обозначим функции

$$\begin{aligned} g_0(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2)\varphi_{\Omega_{x_2}}(x_1), \\ g_1(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2) - g_0(x_1, x_2). \end{aligned}$$

В свою очередь каждую функцию g_0, g_1 представим в виде

$$g_0 = f_{00} + f_{01}, \quad g_1 = f_{10} + f_{11}.$$

Пусть

$$W_0 = \{x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}: \|g_0(\cdot, x_2)\|_{p_1^0} > (\|g_0(\cdot, x_2)\|_{p_1^0})^{*2}(w_2)\} \cup e_0,$$

где $e_0 \subset \{x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}: \|g_0(\cdot, x_2)\|_{p_1^0} = (\|g_0(\cdot, x_2)\|_{p_1^0})^{*2}(w_2)\}$, $\mu_2(W_0) = w_2$, и

$$W_1 = \{x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}: \|g_1(\cdot, x_2)\|_{p_1^1} > (\|g_1(\cdot, x_2)\|_{p_1^1})^{*2}(w_2)\} \cup e_1,$$

где $e_1 \subset \{x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}: \|g_1(\cdot, x_2)\|_{p_1^1} = \|g_1(\cdot, x_2)\|_{p_1^1}\}$, $\mu_2(W_2) = w_2$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{00}(x_1, x_2) &= g_0(x_1, x_2)\varphi_{W_0}(x_2), \quad f_{01}(x_1, x_2) = g_0(x_1, x_2) - f_{00}(x_1, x_2), \\ f_{10}(x_1, x_2) &= g_1(x_1, x_2)\varphi_{W_1}(x_2), \quad f_{11}(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2) - f_{10}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Таким образом, построено представление

$$f = f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11}$$

такое, что

$$\|f_{kj}\|_{kj} = w_2^{\frac{1}{p_j^j}} T_j^2 \left(w_1^{\frac{1}{p_1^k}} T_k^1 f \right),$$

где

$$T_j^i = \begin{cases} H_{p_i^j} & - \text{преобразование Харди при } j = 0, \\ B_{p_i^j} & - \text{преобразование Белмана при } j = 1, \\ i = 1, 2, & j = 0, 1. \end{cases}$$

Предположим, что утверждение леммы верно для $n - 1$, т.е. при каждом фиксированном x_n имеет место

$$f(y, x_n) = \sum_{\varepsilon' \in E'} f_{\varepsilon'}(y, x_n),$$

$$E' = \{\varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) : \varepsilon_i = 1 \text{ или } \varepsilon_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1\}.$$

Пусть $\varepsilon \in E$, $\varepsilon = (\varepsilon', \varepsilon_n)$, $p_{\varepsilon'} = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}})$,

$$W_{(\varepsilon', 0)} = \{x_n \in \mathbb{R}^{m_n} : \|f_{\varepsilon'}(\cdot, x_n)\|_{L_{p_{\varepsilon'}\sigma}} > (\|f_{\varepsilon'}(\cdot, x_n)\|_{L_{p_{\varepsilon'}\sigma}})^*(w_n)\} \cup e_0,$$

где $e_0 \subset \{x_n \in \mathbb{R}^{m_n} : \|f_{\varepsilon'}(\cdot, x_n)\|_{L_{p_{\varepsilon'}\sigma}} = (\|f_{\varepsilon'}(\cdot, x_n)\|_{L_{p_{\varepsilon'}\sigma}})^*(w_n)\}$ такое, что $\mu_n(W_{(\varepsilon', 0)}) = w_n$,

$$f_{(\varepsilon', 0)}(x) = f_{\varepsilon'}(x) \chi_{W_{(\varepsilon', 0)}}(x_n), \quad f_{(\varepsilon', 1)} = f_{\varepsilon'} - f_{(\varepsilon', 0)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f_{(\varepsilon', 0)}\|_{L_{p_{\varepsilon}\sigma}} &= \left(\int_0^{w_n} \left(t_n^{\frac{1}{p_n^0}} (\|f_{\varepsilon'}(\cdot, x_n)\|_{L_{p_{\varepsilon'}\sigma}})^{*n}(t_n) \right)^{\sigma} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= w_n^{\frac{1}{p_n^0}} H_{p_n^0 \sigma} (\|f_{\varepsilon'}(\cdot, x_n)\|_{L_{p_{\varepsilon'}\sigma}}) \\ &= w^{\frac{1}{p_{\varepsilon}}} H_{p_n^0 \sigma} T_{\varepsilon'}(f) = w^{\frac{1}{p_{\varepsilon}}} T_{\varepsilon}(f) \end{aligned}$$

и

$$\|f_{(\varepsilon', 1)}\|_{L_{p_{\varepsilon}\sigma}} = w^{\frac{1}{p_{\varepsilon}}} B_{p_n' r} T_{\varepsilon'}(f) = w^{\frac{1}{p_{\varepsilon}}} T_{\varepsilon}(f).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{0} < \mathbf{p}_i = (p_1^i, \dots, p_n^i) < \infty$, $i = 0, 1$, $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$, $\mathbf{0} < \theta = (\theta_0, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $0 < \sigma \leq 1$, $*$ = $(j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $\{1, \dots, n\}$, $\mathbf{A}_0 = (L_{p_{j_1}^0 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_1}}), \dots, L_{p_{j_n}^0 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_n}}))$, $\mathbf{A}_1 = (L_{p_{j_1}^1 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_1}}), \dots, L_{p_{j_n}^1 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_n}}))$. Тогда

$$L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* \hookrightarrow (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta\mathbf{q}}^*,$$

где $\frac{1}{\mathbf{p}} = \frac{1-\theta}{\mathbf{p}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{p}_1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя утверждение а) из леммы 4, можем считать $\mathbf{p}_0 < \mathbf{p}_1$, а так как пространства $\mathbf{A}_i$, $i = 0, 1$, расширяются при возрастании параметра σ , то также можно считать, что $\sigma < \min_{1 \leq j \leq n} q_j$.

Пусть $0 < t < \infty$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_{j_i} = t_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i = p_i^0 p_i^1 / (p_i^1 - p_i^0)$. Из леммы 5 следует, что для любой функции $f \in (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta\mathbf{q}}$ имеет место представление

$$f = \sum_{\varepsilon \in E} f_{\varepsilon}, \quad \|f_{\varepsilon}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon}} = v^{\frac{1}{\mathbf{p}_{\varepsilon}}} (T_{\varepsilon}^* f)(v),$$

где $T_{\varepsilon^*} = T_{\varepsilon_{j_1}} \dots T_{\varepsilon_{j_n}}$ – композиция операторов, удовлетворяющих условиям:

- при $\varepsilon_i = 0$ $T_{\varepsilon_i} = H_{p_i^0 \sigma}$ – преобразование типа Харди;
- при $\varepsilon_i = 1$ $T_{\varepsilon_i} = B_{p_i^1 \sigma}$ – преобразование типа Белмана.

Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{(L_{\mathbf{p}_0 \sigma}, L_{\mathbf{p}_1 \sigma})_{\theta \mathbf{q}}} &= \|t^{-\theta} K^*(t, f; \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \\ &\leq \sum_{\varepsilon \in E} \|t^{\varepsilon - \theta} \|f_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}}\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} = \sum_{\varepsilon \in E} I_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon} &= \|t^{\varepsilon - \theta} \|f_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}}\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} = \|t^{\varepsilon - \theta} v^{\frac{1}{\mathbf{p}_{\varepsilon}}} T_{\varepsilon^*}(f)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \\ &= C \|t^{(\varepsilon - \theta)(\frac{1}{\mathbf{p}_0} - \frac{1}{\mathbf{p}_1})} t^{\frac{1}{\mathbf{p}_{\varepsilon}}} T_{\varepsilon^*}(f)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})}. \end{aligned}$$

Так как для любого $\varepsilon \in E$ верно

$$(\varepsilon - \theta) \left(\frac{1}{\mathbf{p}_0} - \frac{1}{\mathbf{p}_1} \right) + \frac{1}{\mathbf{p}_{\varepsilon}} = \frac{1 - \theta}{\mathbf{p}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{p}_1} = \frac{1}{\mathbf{p}},$$

то

$$I_{\varepsilon} = C \|t^{\frac{1}{\mathbf{p}}} T_{\varepsilon}(f)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})} \leq C \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}}^*.$$

В последнем соотношении n раз использовалось неравенство Минковского (учитываем при этом, что $\sigma \leq q_j$) и утверждение леммы 3. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2 для дискретных пространств, также имеют место. Доказательство их проводится по той же схеме.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $L_{\mathbf{p}_0}$, $L_{\mathbf{p}_1}$, $l_{\mathbf{p}_0}$, $l_{\mathbf{p}_1}$ – анизотропные пространства Лебега (со смешанной метрикой) [3] и $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$. Тогда

$$(L_{\mathbf{p}_0}, L_{\mathbf{p}_1})_{\theta \mathbf{q}} = L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}, \quad (l_{\mathbf{p}_0}, l_{\mathbf{p}_1})_{\theta \mathbf{q}} = l_{\mathbf{p}\mathbf{q}},$$

где $\frac{1}{\mathbf{p}} = \frac{1 - \theta}{\mathbf{p}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{p}_1}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть символ Z принимает значение из множества $\{L, l\}$, а символ $\mathbf{B}$ – из $\{L, l, N, n\}$. Пусть $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}_1$, $*$ – $\{j_1, \dots, j_n\}$ – некоторая перестановка последовательности $\{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbf{A}_0 = (Z_{p_{j_1}^0 1}, \dots, Z_{p_{j_n}^0 1})$, $\mathbf{A}_1 = (Z_{p_{j_1}^1 1}, \dots, Z_{p_{j_n}^1 1})$. Если T – линейный оператор такой, что для любого $\varepsilon \in E$

$$T: \mathbf{A}_{\varepsilon^*} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{p}_{\varepsilon} \infty}.$$

Тогда

$$T: Z_{\mathbf{p}\mathbf{r}}^* \rightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

где $\frac{1}{\mathbf{p}} = \frac{1 - \theta}{\mathbf{p}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{p}_1}$, $\frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{1 - \theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1}$, $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, $0 < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$.

§ 3. Теорема Харди–Литтлвуда для ортогональных рядов

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная в $L_2[0, 1]$ система функций. Для $f \in L_1[0, 1]$ определим коэффициенты Фурье по системе $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$a_k = \int_0^1 f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $2 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $0 < q < \infty$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$.

а) Если $M_0 = \{e \subset [0, 1]: |\int_e \varphi_k(x) dx| \leq B \min(|e|, 1/k)\}$, M_1 – множество всех компактов из $[0, 1]$, то

$$(Bc)^{-1} \|f\|_{N_{p'q}(M_0)} \leq \|a\|_{l_{pq}} \leq c \|f\|_{N_{p'q}(M_1)}, \quad (6)$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

б) Если $W_0 = \{w \subset \mathbb{N}: (\sum_{k \in w} \varphi_k(\cdot))^*(t) \leq B \min(|w|, 1/t)\}$, W_1 – семейство всех подмножеств $\mathbb{N}$, то

$$(cB)^{-1} \|a\|_{n_{p'q}(W_0)} \leq \|f\|_{L_{pq}[0,1]} \leq c \|a\|_{n_{p'q}(W_1)},$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Используя то, что невозрастающая перестановка последовательности $\{|e|^{-1/p} \min(|e|, 1/k)\}_{k=1}^{\infty}$ оценивается последовательностью $\{k^{-1/p'}\}_{k=1}^{\infty}$, для произвольного $e \in M_0$ получим

$$\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_e f(x) dx \right| \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{\min(|e|, \frac{1}{k})}{|e|^{\frac{1}{p}}} \leq B \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* k^{-\frac{1}{p'}} = B \|a\|_{l_{p1}},$$

следовательно,

$$\|f\|_{N_{p'\infty}(M_0)} \leq B \|a\|_{l_{p1}}.$$

Учитывая произвольность выбора параметра $1 < p < \infty$ и используя интерполяционную теорему 1, получим левое соотношение (3). Правое соотношение (3) следует из неравенства Харди–Литтлвуда и свойства $N_{pq}(M_1) = L_{pq}[0, 1]$ при $1 < p < \infty$ [22].

Пункт б) доказывается аналогично. Здесь используется то, что невозрастающая перестановка функции $|w|^{-1/p} \min(|w|, 1/x)$ оценивается через $t^{1/p'}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 носит несколько априорный характер, так как нет конструктивного описания сетей M_0 и W_0 . Очевидно, сети M_0 , W_0 зависят от выбора ортогональной системы Φ , и чем шире эти семейства множеств, тем шире класс функций, для которых имеет место теорема Харди и Литтлвуда. Далее выделим класс ортонормированных систем таких, что соответствующие им сети M_0 и W_0 содержат в себе все отрезки соответственно из $[0, 1]$ и из $\mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ортонормированную систему $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *регулярной*, если существует такая константа B , что:

1) для любого отрезка e из $[0, 1]$ и $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\left| \int_e \varphi_k(x) dx \right| \leq B \min(|e|, 1/k);$$

2) для любого отрезка w из $\mathbb{N}$ и $t \in (0, 1]$

$$\left(\sum_{k \in w} \varphi_k(\cdot) \right)^*(t) \leq B \min(|w|, 1/t),$$

где $(\sum_{k \in w} \varphi_k(\cdot))^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $\sum_{k \in w} \varphi_k(x)$.

Тригонометрические системы, мультипликативные системы с ограниченными образующими и, в частности, система Уолша являются регулярными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задана некоторая сеть W в $\mathbb{N}^n$. Будем говорить, что *последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ имеет доминирующие по сети W осцилляции*, если найдутся числа $D, d \in \mathbb{N}$ такие, что для любых $k \in \mathbb{N}^n$ верно неравенство

$$a_{dk}^* \leq D \bar{a}_k(W),$$

где $a_{dk}^* = a_{dk_1 \dots dk_n}^{*1 \dots *n}$.

Множество всех функций, коэффициенты Фурье которых имеют доминирующие по сети W осцилляции, обозначим через $\lambda(W)$.

Заметим, что чем шире сеть W , тем шире множество $\lambda(W)$. Если M – множество всех отрезков в $\mathbb{N}^n$, то класс $\lambda(W)$ содержит в себе функции с монотонными [35], [7], [20], квазимонотонными [15] и обобщенно монотонными коэффициентами [22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задана некоторая сеть W в $[0, 1]^n$. Будем говорить, что *функция $f(x)$ имеет доминирующие по сети W осцилляции*, если найдутся числа $D, d \in \mathbb{N}$ такие, что верно неравенство

$$f^{*1 \dots *n}(dx_1, \dots, dx_n) \leq D \bar{f}(x, M).$$

Множество всех таких функций обозначим через $\Lambda(M)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ регулярная.

а) Если $1 < p < 2$, M – множество всех отрезков в $[0, 1]$ и функция f принадлежит $\Lambda(M)$, то для того, чтобы $f \in L_{pq}[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность ее коэффициентов Фурье $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежала $l_{p'q}$.

б) Если $2 < p < \infty$, W – множество всех отрезков в $\mathbb{N}$ и функция f принадлежит $\lambda(W)$ по системе Φ , то для того, чтобы $f \in L_{pq}[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность ее коэффициентов Фурье $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежала $l_{p'q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения классов $\lambda(W)$, $\Lambda(M)$ и теоремы 3.

В теореме 4, в отличие от классической теоремы Харди–Литтлвуда, при $1 < p < 2$ условия накладываются на функцию ($f \in \lambda(M)$), а не на коэффициенты Фурье. Такого типа теорему, где условия накладываются на функцию для тригонометрических рядов, в одномерном случае доказал Боас, в многомерном случае – Дьяченко [9].

Заметим также, что для косинус-рядов условие $f \in \Lambda(M)$ более слабое, чем условие монотонности коэффициентов Фурье. Это следует из следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in L_1[0, \pi]$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ и $a_k \downarrow 0$. Тогда найдется константа C такая, что

$$|f(x)| \leq C \sup_{y \geq \frac{\pi}{2}} \frac{1}{y} \left| \int_0^y f(x) dx \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства данного утверждения заимствована из доказательства теоремы Харди–Литтлвуда. Так как $f \in L_1[0, \pi]$, то по теореме о почленном интегрировании имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

Учитывая периодичность функции $\sin x$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x) dx &= \sum_{k=1}^{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{k+2mn}}{k+2mn} \\ &= \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_{k+2mn}}{k+2mn} - \frac{a_{k+(2m+1)n}}{k+(2m+1)n} \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{k}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_{k+2mn}(k+(2m+1)n) - a_{k+(2m+1)n}(k+2mn)}{(k+2mn)(k+(2m+1)n)} \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_{k+2mn}k}{(k+2mn)(k+(2m+1)n)} \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{ka_k}{k(k+n)} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k, \end{aligned}$$

или $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k \leq 2n \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x) dx$.

С другой стороны, при $\pi/n \leq x \leq \pi/(n-1)$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{k=1}^n a_k + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \left| \sum_{m=1}^k \cos mx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k + \frac{\pi}{|x|} a_{n+1} \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|f(x)| \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k \leq 16n \left| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(x) dx \right|.$$

Лемма доказана.

Тригонометрическая система, мультипликативные системы с ограниченными образующими являются регулярными, и, следовательно, для них верны утверждения теоремы 4. Эти утверждения при $2 < p < \infty$ являются более сильными, чем соответствующие теоремы Харди–Литтлвуда [35], Кокилашвили [15], Морица [19], Тимана и Тухлиева [32].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Утверждения теоремы 4 распространяются на пространства $L_{p\vec{q}}[0, 1]$, $l_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$, являющиеся обобщением пространств Лоренца [23].

§ 4. Теорема Харди–Литтлвуда для кратных ортогональных рядов

Пусть $\Psi_1 = \{\psi_k^1(x)\}_{k=1}^\infty, \dots, \Psi_n = \{\psi_k^n(x)\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированные в $L_2[0, 1]$, регулярные системы функций. Определим $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ следующим образом:

$$\varphi_k(x) = \varphi_{k_1 \dots k_n}(x_1, \dots, x_n) = \psi_{k_1}^1(x_1) \dots \psi_{k_n}^n(x_n).$$

Назовем ее *регулярной системой* в $[0, 1]^n$.

Пусть $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, – отрезки в $[0, 1]$. Множество вида $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ назовем *отрезком* в $[0, 1]^n$. Аналогично определяются отрезки в $\mathbb{N}^n$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $2 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $0 < q < \infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ – регулярная система в $[0, 1]^n$, $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \varphi_k(x)$.

а) Если M_0 – множество всех отрезков в $[0, 1]^n$, то

$$\|f\|_{N_{p'q}(M_0)} \leq c \|a\|_{l_{pq}},$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

б) Если W_0 – множество всех отрезков в $\mathbb{N}^n$, то

$$\|a\|_{n_{p'q}(W_0)} \leq c \|f\|_{L_{pq}[0, 1]^n},$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала истинность следующего неравенства:

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \int_Q f(x) dx \leq c \|f\|_{L_p[0, 1]^n}, \quad (7)$$

где Q – произвольный отрезок в $[0, 1]^n$. Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ неравенство (7) следует из теоремы 3. Предположим теперь, что (7) верно для размерности $n - 1$. Покажем, что оно верно для n .

Пусть Q – произвольный отрезок в $[0, 1]^n$. Тогда найдутся отрезки Q^1 из $[0, 1]$ и Q^2 из $[0, 1]^{n-1}$ такие, что $Q = Q^1 \times Q^2$. Если $f \sim \sum_{r \in \mathbb{N}^n} a_r \varphi_r(x)$, то функции

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{|Q^2|^{\frac{1}{p}}} \int_{Q^2} f(x_1, y) dy$$

будет соответствовать ряд Фурье

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} d_{r_1} \psi_{r_1}^1(x_1),$$

где

$$d_{r_1} = \frac{1}{|Q^2|^{\frac{1}{p}}} \int_{Q^2} \sum_{r \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{r_1, r} \varphi_r(y) dy, \quad \varphi_r = \psi_{r_2}^2(y_2) \dots \psi_{r_n}^n(y_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_Q f(x) dx \right| &= \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{Q^1} \frac{1}{|Q^2|^{\frac{1}{p}}} \int_{Q^2} f(x_1, y) dy dx_1 \right| \\ &= \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{Q^1} \varphi(x_1) dx_1 \right| \leq C \|d\|_{l_p} = C \left(\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} d_{r_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left(\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q^2|^{\frac{1}{p}}} \int_{Q^2} \sum_{r \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{r_1, r} \varphi_r(y) dy \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

но в силу предположения индукции для произвольного целого r_1

$$\frac{1}{|Q^2|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{Q^2} \sum_{r \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{r_1, r} \varphi_r(y) dy \right| \leq c_p \left(\sum_{r \in \mathbb{N}^{n-1}} |a_{r_1, r}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда имеем

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_Q f(x) dx \right| \leq c_p \left(\sum_{r \in \mathbb{N}^n} |a_r|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом соотношение (7) доказано. Из (7) следует, что оператор $Ta = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \varphi_k(x)$ ограничен из l_p в $N_{p'}(M)$ для любого $p \in (1, \infty)$. Применяя теорему 1 в случае анизотропной размерности $n = 1$ и интерполяционные свойства пространств Лоренца l_{pq} , завершаем доказательство п. а) теоремы.

Утверждение б) доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $2 \leq \mathbf{p} < \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p} - 1)$, Φ – регулярная система, $\mathbf{m} = (1, 1, \dots, 1)$, $f \sim \sum_{r \in \mathbb{N}^n} a_r \varphi_r(x)$.

а) Если W_0 – множество всех отрезков в $\mathbb{N}^n$, то верно неравенство

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}(W_0)} \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}([0,1]^{\mathbf{m}})}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{p_n-2} \left(\dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \bar{a}_k^{p_1}(W_0) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{p_n}} \\ &\leq c \left(\int_0^1 \left(\dots \left(\int_0^1 (f^{*1 \dots *n}(t_1, \dots, t_n))^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}}. \end{aligned}$$

б) Если M_0 – множество всех отрезков в $[0, 1]^n$, то верно неравенство

$$\|f\|_{N_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}(M_0)} \leq c \|a\|_{l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть Q – произвольный отрезок из W_0 ; тогда его можно представить в виде $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$, где Q_i , $i = 1, \dots, n$, – отрезки в $\mathbb{Z}$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| |Q_1|^{-\frac{1}{p_1}} \dots |Q_n|^{-\frac{1}{p_n}} \sum_{k_1 \in Q_1} \dots \sum_{k_n \in Q_n} a_{k_1 \dots k_n} \right| \\ & \leq \int_0^1 \dots \int_0^1 |f(x_1, \dots, x_n)| |Q|^{-\frac{1}{p}} \left| \sum_{k \in Q} \varphi_k(x) \right| dx_1 \dots dx_n \\ & = \int_0^1 \dots \int_0^1 |f(x)| |Q_1|^{-\frac{1}{p_1}} \left| \sum_{k_1 \in Q_1} \psi_{k_1}^1(x_1) \right| \times \dots \\ & \quad \dots \times |Q_n|^{-\frac{1}{p_n}} \left| \sum_{k_n \in Q_n} \psi_{k_n}^n(x_n) \right| dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Применяя по каждой переменной $x_1, \dots, x_n$ известное неравенство о перестановках

$$\int f(x)y(x) dx \leq \int f^*(t)y^*(t) dt$$

и определение регулярности Φ , а также то, что $|Q_j|^{-1/p_j} \min(|Q_j|, t^{-1}) \leq t^{-1/p'}$, получим

$$\begin{aligned} & \left| |Q_1|^{-\frac{1}{p_1}} \dots |Q_n|^{-\frac{1}{p_n}} \sum_{r_1 \in Q_1} \dots \sum_{r_n \in Q_n} a_{r_1 \dots r_n} \right| \\ & \leq B \int_0^1 t_n^{-\frac{1}{p'_n}} \left(\dots \left(\int_0^1 t_1^{-\frac{1}{p'_1}} f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_n) dt_1 \right)_{t_2}^{*2} \dots \right)_{t_n}^{*n} dt_n \\ & = \|\dots \|f\|_{L_{p_1}} \dots \|_{L_{p_n}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого вектора $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ имеет место слабая оценка

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}'\infty}} \leq c \|f\|_{(L_{p_1}, \dots, L_{p_n})},$$

но тогда из следствия 2 следует, что верно и сильное неравенство

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}'q}} \leq \|f\|_{L_{\mathbf{p}q}}.$$

Утверждение п. а) доказано.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае кратных тригонометрических рядов утверждение теоремы 6 можно усилить, заменив семейства W_0 , M_0 на более широкие сети [22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Последовательность комплексных чисел $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ назовем *обобщенно-монотонной (невозрастающей)* в $\mathbb{N}^n$, если для любого $k \in \mathbb{N}^n$ имеет место неравенство

$$|a_k| \leq c(|k_1| \dots |k_n|)^{-1} \left| \sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} a_{m_1 \dots m_n} \right|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функцию f назовем *обобщенно-монотонной* (невозрастающей) в $[0, 1]^n$, если для любого $x \in (0, 1]^n$ имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq c(|x_1| \dots |x_n|)^{-1} \left| \int_{[0, x]} f(y) dy \right|.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ регулярна в $[0, 1]^n$.

а) Если $1 < p < 2$, M_0 – множество всех отрезков в $[0, 1]^n$ и f – обобщенно-монотонная функция, то для того, чтобы f принадлежала $L_p[0, 1]^n$, необходимо и достаточно, чтобы для ее коэффициентов Фурье сходиллся ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} |a_{k_1 \dots k_n}|^p. \quad (8)$$

б) Если $2 < p < \infty$, W_0 – множество всех отрезков в $\mathbb{N}^n$ и коэффициенты Фурье функции f ($a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$) обобщенно-монотонны, то для того, чтобы f принадлежала $L_p[0, 1]^n$, необходимо и достаточно, чтобы сходиллся ряд (8).

Из теоремы 6 и следствия 3 следуют соответствующие результаты работ Ф. Морица [20], М. И. Дьяченко [7], [8].

Следствие 3 в отличие от аналогичного одномерного утверждения (теоремы 4) приведено для более узких множеств функций, чем соответствующие классы $\lambda(W_0)$, $\Lambda(M_0)$. Для того чтобы для функций из семейств $\lambda(W_0)$, $\Lambda(M_0)$ получить утверждение, аналогичное следствию 3, требуются более точные и общие неравенства типа Харди–Литтлвуда–Пэли.

§ 5. Неравенства Харди–Литтлвуда–Пэли в пространствах $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}([0, 1]^n)$

Везде в этом параграфе будем считать, что $\mathbf{m} = (1, 1, \dots, 1)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $2 < \mathbf{p} < \infty$, $\mathbf{p}' = (p'_1, \dots, p'_n)$, $1/p_i + 1/p'_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, $\ast = (n, n-1, \dots, 1)$. Если последовательность $a = \{a_r\}_{r \in \mathbb{N}^n}$ принадлежит $l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^*$, т.е.

$$A = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{\frac{q_n}{p'_1}-1} \left(\dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{\frac{q_1}{p'_1}-1} (a_{k_1 \dots k_n}^{\ast \dots \ast})^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{q_n}{q_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty,$$

то ряд $\sum_{r \in \mathbb{N}^n} a_r \varphi_r(x)$ является рядом Фурье некоторой функции f из $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}[0, 1]^n$ и $\|f\|_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \leq cA$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) = (2, \dots, 2)$, $\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) = (\infty, \dots, \infty)$, $\mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i / (\mathbf{p}_i - 1)$, $i = 0, 1$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n})$. Покажем, что для оператора

$$Ta = S_N(x) = \sum_{r_1=1}^N \dots \sum_{r_n=1}^N a_{r_1 \dots r_n} \psi_{r_1}^1(x_1) \dots \psi_{r_n}^n(x_n)$$

и для любого $\varepsilon \in E$ верно неравенство

$$\|Ta\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}} \leq \| \dots \| \|a\|_{l_{p'_{\varepsilon_n}}} \|l_{p'_{\varepsilon_{n-1}}} \dots \|l_{p'_{\varepsilon_1}}. \quad (9)$$

Для $n = 1$ неравенство (9) следует из равенства Парсеваля и определения коэффициентов Фурье. Предположим, что неравенство (9) справедливо для n . Покажем, что оно верно для $n + 1$. Пусть $\varepsilon_{n+1} = 0$, т.е. $p_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} = 2$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$. Используя предположение индукции, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \|Ta\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}}^2 dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left(\int_0^1 \left\| \sum_{r_1=1}^N \dots \sum_{r_n=1}^N \left(\sum_{r_{n+1}=1}^N a_{rr_{n+1}} \psi_{r_{n+1}}^{n+1}(x_{n+1}) \right) \varphi_r(x) \right\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}([0,1]^n)}^2 dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\int_0^1 \left(\sum_{r_1=1}^\infty \dots \left(\sum_{r_n=1}^\infty \left(\sum_{r_{n+1}=1}^N a_{rr_{n+1}} \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \times \psi_{r_{n+1}}^{n+1}(x_{n+1}) \right)^{p'_n} \right)^{\frac{p'_n-1}{p'_n}} \dots \right)^{\frac{2}{p_1}} dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Так как $p'_j \leq 2$, $j = 1, \dots, n$, из неравенства Минковского мы получим неравенство (9).

Если $\varepsilon_{n+1} = 1$, т.е. $p_{\varepsilon_{n+1}} = \infty$, то, сначала применяя неравенство Минковского, а затем предположение индукции, получим неравенство (9).

Таким образом, используя интерполяционные свойства пространств $l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*$ и $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, получим нужное утверждение.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \mathbf{2}$, $\mathbf{p}' = (p'_1, \dots, p'_n)$, $1/p_i + 1/p'_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, $\ast = (n, n-1, \dots, 1)$. Если $f \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}([0, 1]^n)$, то последовательность его коэффициентов Фурье $a = \{a_r\}_{r \in \mathbb{N}^n}$ принадлежит $l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^*$ и верно неравенство

$$\left(\sum_{k_n=1}^\infty k_n^{\frac{q_n}{p'_n}-1} \left(\dots \left(\sum_{k_1=1}^\infty k_1^{\frac{q_1}{p'_1}-1} (a_{k_1 \dots k_n}^{\ast_n \dots \ast_1})^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{q_n}{q_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{q_n}} < c \|f\|_{\mathbf{p}\mathbf{q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение является двойственным к теореме 7 и доказывается аналогично ей.

Утверждения теорем 7 и 8 являются новыми результатами и в изотропном случае. Так, например, из теоремы 8 следует

$$\|f\|_{L_p([0,1]^n)} \leq c \left(\sum_{k_n=1}^\infty k_n^{p-2} \dots \sum_{k_1=1}^\infty k_1^{p-2} (a_{k_1 \dots k_n}^{\ast_n \dots \ast_1})^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Это неравенство более точное, чем неравенство Харди–Литтлвуда для кратных тригонометрических рядов, так как

$$\begin{aligned} & \sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{p-2} \dots \sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p-2} (a_{k_1 \dots k_n}^{*_{n-1} \dots *_1})^p \\ & \leq \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} (|k_n| + 1)^{p-2} \dots \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} (|k_1| + 1)^{p-2} |a_{k_1 \dots k_n}|^p. \end{aligned}$$

Неравенства, доказанные в теоремах 7 и 8, являются более точными, чем соответствующие результаты из [5].

Действительно, применяя последовательно неравенство Минковского (учитывая при этом, что $1 < p_n \leq p_{n-1} \leq \dots \leq p_1 < 2$), получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \left(\dots \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{p_n-2} |a_{k_1 \dots k_n}|^{p_n} \right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}} \dots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ & \leq \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{p_n-2} \left(\dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} |a_{k_1 \dots k_n}|^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{p_n}} \\ & \leq \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{p_n-2} \left(\dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} |a_{k_1 \dots k_n}^{*_{n-1} \dots *_1}|^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \right)^{\frac{1}{p_n}} \\ & \leq \left(\int_0^{2\pi} \left(\dots \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть система Φ регулярна, $f \sim \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \varphi_k(x)$, $* = (n, n-1, \dots, 1)$.

а) Если $2 < \mathbf{p} < \infty$, W_0 – множество всех отрезков $\mathbb{N}^n$, $f \in \lambda(W_0)$, то для того, чтобы $f \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*([0, 1]^n)$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}$.

б) Если $1 < \mathbf{p} < 2$, M_0 – множество всех отрезков $[0, 1]^n$, $f \in \Lambda(M_0)$, то для того, чтобы $f \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}([0, 1]^n)$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 6–8.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n); \varepsilon_j = 0 \text{ или } \varepsilon_j = 1, j = 1, \dots, n\}$.

Для вектора $\varepsilon \in E$ и последовательности комплексных чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ определим разность:

$$\Delta_{\varepsilon} a_k = \Delta_{\varepsilon_1} (\Delta_{\varepsilon_2} \dots (\Delta_{\varepsilon_n} a_{k_1 \dots k_n}) \dots),$$

где

$$\Delta_{\varepsilon_j} b_k = \begin{cases} b_k & \text{для } \varepsilon_j = 0, \\ b_{k_1 \dots k_j+1 \dots k_n} - b_k & \text{для } \varepsilon_j = 1, \end{cases}$$

и $\Delta a_k = \Delta_{\varepsilon} a_k$ для $\varepsilon = (1, \dots, 1)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{p}' = (p'_1, \dots, p'_n)$, $p'_j = p_j/(p_j - 1)$, $j = 1, \dots, n$, и $\{a_{k_1 \dots k_n}\}_{k_1=1, \dots, k_n=1}^\infty$ – последовательность комплексных чисел такие, что для каждого $\varepsilon \in E$ и $N \in \mathbb{N}$ величина

$$\left(\sum_{k_n=(1-\varepsilon_n)N+\varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n} k_n^{(p_n-1)(1+\varepsilon_n)} \times \dots \right. \\ \left. \dots \times \left(\sum_{k_1=(1-\varepsilon_1)N+\varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1} k_1^{(p_1-1)(1+\varepsilon_1)} |\Delta_\varepsilon a_k|^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

не превосходит некоторого числа B .

Тогда ряд $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \varphi_k(x)$ является рядом Фурье некоторой функции $f \in L_{\mathbf{p}}([0, 1]^n)$ и верна оценка

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq cB, \quad (10)$$

где константа c зависит только от $\mathbf{p}$ и размерности n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – произвольная функция из $L_{\mathbf{p}'}([0, 1]^n)$ с рядом Фурье $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} b_k \varphi_k$. Применяя равенство Парсеваля к $S_N(x) = \sum_{1 \leq k_j \leq N} a_k \varphi_k$, получим

$$\int_{[0,1]^n} S_N(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{1 \leq k_j \leq N} a_k \overline{b_k}.$$

Используя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{1 \leq k \leq N} a_k \overline{b_k} = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{k_n=(1-\varepsilon_n)N+\varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n} \dots \sum_{k_1=(1-\varepsilon_1)N+\varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1} \left(\Delta_\varepsilon a_k \overline{\sum_{1 \leq r \leq k} b_r} \right) = \sum_{\varepsilon \in E} I_\varepsilon.$$

Применим неравенство Гёльдера к каждой сумме:

$$I_\varepsilon \leq \sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon} k^{\frac{1+\varepsilon}{\mathbf{p}'}} |\Delta_\varepsilon a_k| \cdot k^{-\frac{1+\varepsilon}{\mathbf{p}'}} \left| \sum_{1 \leq r \leq k} b_r \right| \\ \leq \left(\sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon} \left(k^{\frac{1+\varepsilon}{\mathbf{p}'}} |\Delta_\varepsilon a_k| \right)^{\mathbf{p}} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}}} \left(\sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon} \left(k^{-\frac{1+\varepsilon}{\mathbf{p}'}} \left| \sum_{1 \leq r \leq k} b_r \right| \right)^{\mathbf{p}'}} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}'}} \\ = \left(\sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon} k^{(\mathbf{p}-1)(1+\varepsilon)} |\Delta_\varepsilon a_k|^{\mathbf{p}} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}}} \left(\sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon} k^{-(1+\varepsilon)} \left| \sum_{1 \leq r \leq k} b_r \right|^{\mathbf{p}'} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}'}}.$$

Здесь

$$\left(\sum_k (k^s c_k)^{\mathbf{p}} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}}} = \left(\sum_{k_n} \dots \left(\sum_{k_1} (k_1^{s_1} \dots k_n^{s_n} c_{k_1 \dots k_n})^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Учитывая, что $(1/k) |\sum_{1 \leq r \leq k} b_r| \leq \bar{b}_k(M)$, где M является множеством всех параллелепипедов из $\mathbb{R}^n$, и также свойства сетевых пространств $n_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(M)$, получим

$$\left(\sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon} k^{-(1+\varepsilon)} \left| \sum_{1 \leq r \leq k} b_r \right|^{\mathbf{p}' \cdot} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}' \cdot}} \leq c_1 \|b\|_{n_{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \cdot \varepsilon^{-1}}(M)} \leq c \|b\|_{n_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(M)}.$$

Из теоремы 6 имеем

$$I_\varepsilon \leq cB \|g\|_{L_{\mathbf{p}'}([0,1]^n)}.$$

Таким образом теорема доказана.

В одномерном случае для тригонометрических рядов оценки, подобные (10), были исследованы в работе [33].

§ 6. О коэффициентах рядов Фурье по регулярным системам в пространстве $L_{2\infty}$

Неравенства Харди–Литтлвуда охватывают случай пространств L_{pq} при $p \neq 2$. Возникает вопрос об оценках в пространствах Лоренца L_{2q} .

В данном параграфе мы рассматриваем эту задачу для регулярных ортогональных рядов из пространств $L_{2\infty}$.

ЛЕММА 7. Пусть $1 < q \leq 2$, Φ – регулярная система, $f \sim \sum \hat{f}(m) \varphi_m(x)$. Тогда для любого конечного подмножества A из $\mathbb{Z}$ имеет место

$$\frac{1}{|A|^{\frac{1}{q}}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq B \left(\frac{q}{2-q} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{2q-1}{q-1} \right) \|f\|_{L_{q\infty}},$$

где B – константа, фигурирующая в определении регулярной системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что регулярные системы ограничены в совокупности, $\varphi_m(x) \leq C$:

$$\sum_{m \in A} \hat{f}(m) \leq \sup_{m \in A} |\hat{f}(m)| \cdot |A| \leq \sup_m \int_0^1 |f(x)| |\varphi_m(x)| dx |A| \leq B|A| \|f\|_{L_1},$$

и из равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| &\leq |A|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}^2(m) \right|^{\frac{1}{2}} \leq |A|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2}, \\ f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq f^*(\tau), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ f_0(x) &= f(x) - f_1(x). \end{aligned}$$

Тогда для произвольного $0 < \tau < 1$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| &\leq \left| \sum_{m \in A} \hat{f}_0(m) \right| + \left| \sum_{m \in A} \hat{f}_1(m) \right| \\
&\leq B \left(|A| \int_0^\tau f^*(s) ds + |A|^{\frac{1}{2}} \left(\int_\tau^1 (f^*(s))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq B \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} f^*(t) \left(\int_0^\tau s^{-\frac{1}{q}} ds + \left(\int_\tau^\infty s^{-\frac{2}{q}} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq B \|f\|_{L_{q\infty}} \left(|A| \tau^{1-\frac{1}{q}} \frac{q}{q-1} + |A|^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \left(\frac{q}{2-q} \right)^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Пусть теперь $\tau = (\frac{q}{2-q})/|A|$. Получим

$$\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq B |A|^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q}{2-q} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{2q-1}{q-1} \right) \|f\|_{L_{q\infty}}.$$

ЛЕММА 8. Пусть $2 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, Φ – регулярная система, $f \sim \sum \hat{f}(m) \varphi_m(x)$, $A = \bigcup_{k=1}^N I_k$, где I_k – отрезки из $\mathbb{Z}$. Тогда

$$\frac{1}{|A|^{\frac{1}{p} N^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq (p+1) \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p\infty}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства регулярности имеем

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| &= \left| \int_0^1 f(x) D_A(x) dx \right| \leq \sum_{k=1}^N \int_0^1 |f(x)| |D_{I_k}(x)| dx \\
&\leq B \sum_{k=1}^N \int_0^1 |f(x)| \min \left(|I_k|, \frac{1}{|x|} \right) dx.
\end{aligned}$$

Из равенства Парсеваля следует

$$\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq |A|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2}.$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq f^*(\tau), \quad x \in [\tau, 1], \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\
f_0(x) &= f(x) - f_1(x).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq \left| \sum_{m \in A} \hat{f}_0(m) \right| + \left| \sum_{m \in A} \hat{f}_1(m) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |A|^{\frac{1}{2}} \|f_0\|_{L_2} + \sum_{k=1}^N \int_0^1 |f_1(x)| \min\left(|I_k|, \frac{1}{x}\right) dx \\
&\leq |A|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\tau} (f^*(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^N \int_{\tau}^1 f^*(t) \frac{1}{t} dt \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \left(|A| \left(\int_0^{2\tau} t^{-\frac{2}{p}} dt \right)^{\frac{1}{2}} + N \int_{\tau}^1 t^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \right) \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p\infty}} \left(|A| \frac{(2\tau)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}{\sqrt{1-\frac{2}{p}}} + N \frac{(2\tau)^{-\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} \right).
\end{aligned}$$

Пусть теперь $2\tau = \frac{N^2}{|A|^2(\frac{p-2}{p})}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| &\leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p\infty}} \left(|A|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} + p |A|^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \|f\|_{L_{p2}} |A|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} (1+p).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$, где I_k – отрезки, Φ – регулярная система, $f \sim \sum \hat{f}(m) \varphi_m(x)$. Тогда для любого $2 < p < \infty$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq C_p \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{2\infty}},$$

где C_p – константа, зависящая от p , но ограниченная в окрестности точки $p = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leq f^*(\tau), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\
f_0(x) &= f(x) - f_1(x).
\end{aligned}$$

Тогда, применяя лемму 7 и лемму 8, получим

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| &\leq \left| \sum_{m \in A} \hat{f}_0(m) \right| + \left| \sum_{m \in A} \hat{f}_1(m) \right| \\
&\leq |A|^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{p'}{p'-2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2p'-1}{p'-1} \right) \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p'}} f_0^*(t) \\
&\quad + |A|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} (p+1) \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_1^*(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |A|^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} C_1 \sup_{0 \leq t \leq \tau} t^{\frac{1}{p'}} f_0^*(t) \\
&\quad + |A|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} C_2 N^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t + \tau) \\
&\leq \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{2}} f^*(t) \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|A|^{\frac{1}{p'}} C_1 \tau^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + |A|^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} (t + \tau)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq \|f\|_{L_{2\infty}} \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} C_2 \left(|A|^{\frac{1}{p'}} \tau^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}} + |A|^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}} \tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Взяв $\tau = N/|A|$, имеем

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| &\leq \|f\|_{L_{2\infty}} \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} C_1 \left(|A|^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}} + |A|^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}} \right) \\
&= C_2 \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} |A|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_{2\infty}}.
\end{aligned}$$

Пусть M – некоторая фиксированная сеть в $\mathbb{Z}$, содержащая все одноточечные множества. Для конечного множества A из $\mathbb{Z}$ определим число $[A]_M$ следующим образом:

$$[A]_M = \min \left\{ l : A = \bigcup_{k=1}^l I_k, \quad I_k \in M \right\}.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{Z}$. Для любой функции $f \in L_{2\infty}$ имеет место неравенство

$$\sup_A \frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}} \ln(1 + [A]_M)^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq C \|f\|_{L_{2\infty}},$$

где C не зависит от выбора функции f из $L_{2\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 9 следует

$$\frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq C_2 \left(\frac{2p}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} N^{\frac{p-2}{2p}} \|f\|_{L_{2\infty}},$$

где константа C_p хотя и зависит от параметра p , но в окрестности $p = 2$ ограничена. Так как это неравенство выполняется для всех $2 < p < \infty$, то, взяв $p = \frac{2 \ln N}{(\ln N) - 2}$,

т.е. $\frac{p-2}{2p} = \frac{1}{\ln N}$, получим

$$\frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq C_2 (\ln[A]_M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln N}} \|f\|_{L_{2\infty}} \leq C (\ln[A]_M)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_{2\infty}}.$$

Взяв верхнюю точную грань по всем конечным множествам A из $\mathbb{Z}$, получим утверждение теоремы.

С.В. Бочкарев [36] для функций из $L_{2q}[0, 1]$, $2 < q \leq \infty$, получил верхнюю оценку коэффициентов Фурье по ортонормированной системе Φ ограниченных в совокупности функций:

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} (a_k^*)^q \left(\frac{k}{\ln k} \right)^{\frac{q}{2}-1} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|f\|_{L_{2q}},$$

в частности,

$$\sup_{k>1} \left(\frac{k}{\ln k} \right)^{\frac{1}{2}} a_k^* \leq c \|f\|_{L_{2\infty}}. \quad (11)$$

Им же доказано, что для некоторого класса мультипликативных систем данные неравенства не улучшаемы по порядку. Отметим, что если Φ – регулярная система, то из (10) следует (11), но обратное не верно.

Список литературы

1. Акишев Г. А. Об условиях сходимости рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам // Деп. в КазНИИТИ. 1991. № 3343. С. 19.
2. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
3. Бессов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. Boas R. P. Jr. Integrability theorems, transforms, ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete. Bd. 38. N. Y.: Springer-Verlag, 1966.
5. Бугров Я. С. Суммируемость преобразования Фурье и абсолютная сходимость кратных рядов Фурье // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 22–30.
6. Cobus F., Peetre J. Interpolation compact operators: The multidimensional case // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 63. № 2. P. 371–400.
7. Дьяченко М. И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. сб. 1986. Т. 129(171). № 1. С. 55–72.
8. Djachenco M. I. Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients // Anal. Math. 1990. V. 16. № 3. P. 173–190.
9. Дьяченко М. И. Кусочно монотонные функции многих переменных и теорема Харди–Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 6. С. 1156–1170.
10. Дьяченко М. И. Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов // УМН. Т. 47. № 5(287). С. 97–162.
11. Fernandez D. L. Lorentz spaces with mixed norms // J. Funct. Anal. 1977. V. 25. № 2. P. 128–146.
12. Fernandez D. L. Interpolation of 2^n Banach spaces // Stud. Math. (PRL). 1979. V. 65. № 2. P. 175–201.
13. Fernandez D. L. Interpolation of 2^n Banach space and the Calderon spaces // Proc. London Math. Soc. 1988. V. 56. P. 143–162.
14. Гулисашвили А. Б. Тригонометрические ряды с монотонно убывающими коэффициентами и функциями распределения // Матем. заметки. 1971. Т. 10. № 1. С. 3–10.
15. Кокिलाшвили В. М. О приближении периодических функций // Тр. Тбилисского матем. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
16. Крепкогорский В. Л. Интерполяционная теорема Марцинкевича для пространств L_p со смешанной нормой // Деп. ВИНТИ, № 2686–79.
17. Крепкогорский В. Л. Контрпримеры к теории операторов в пространствах со смешанной нормой // Деп. ВИНТИ, № 2963–80. Казань, 1980.

18. *Крепкогорский В. Л.* Об интерполяции в пространствах L_p со смешанной нормой // Изв. вузов. Матем. 1980. Т. 10. С. 75–78.
19. *Moricz F.* On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1981. V. 38. P. 183–189.
20. *Moricz F.* On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Sci. 1990. V. 109. № 2. P. 417–435.
21. *Нурсултанов Е. Д.* Сетевые пространства и оценки коэффициентов Фурье по тригонометрической системе // Теория приближения и вложения функциональных пространств. Караганда. 1994. С. 121–126.
22. *Нурсултанов Е. Д.* Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 3. С. 83–102.
23. *Нурсултанов Е. Д.* Многопараметрический интерполяционный функтор и пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ // Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 2. С. 79–82.
24. *Pitt H. R.* Theorems on Fourier series and power series // Duke math. J. 1937. V. 3. P. 747–755.
25. *Родин В. А.* Теорема Харди–Литтлвуда для синус-ряда в симметричном пространстве // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 2. С. 241–246.
26. *Родин В. А.* О принадлежности суммы синус-ряда с монотонными коэффициентами симметричному пространству // Изв. вузов. Матем. 1979. № 8. С. 60–64.
27. *Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье // ДАН СССР. 1967. Т. 176. № 6. С. 1251–1254.
28. *Смаилов Е. С.* Мультипликаторы Фурье, теоремы вложения и смежные с ними вопросы: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Алматы, 1997. С. 250.
29. *Sprarr G.* Interpolation of several Banach spaces // Ann. Mat. Pura Appl. 1974. V. 99. P. 247–316.
30. *Sugber Y.* An application of interpolation theory to Fourier series // Studia mats. 1972. V. 41. № 2. P. 169–181.
31. *Темляков В. Н.* Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
32. *Тиман М. Ф., Тушлиев К.* Свойства некоторых ортонормированных систем // Изв. вузов. Матем. 1983. № 9. С. 65–73.
33. *Вукорова Т. М., Дьяченко М. И.* О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1995. № 3. С. 22–32.
34. *Жантлесов Ж. Х., Смаилов Е. С.* Двумерный аналог теоремы Харди–Литтлвуда по мультипликативной системе // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. № 3; Деп. в ВИНТИ, № 3494.
35. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
36. *Бочкарев В. С.* Теорема Хаусдорфа–Юнга–Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства // Тр. МИРАН. 1997. Т. 219. С. 103–114.

Поступило в редакцию
5.II.1998