Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гасников, Асимптотическое по времени поведение решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 6, 39–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:17:50

УДК 519.633

А. В. Гасников

Асимптотическое по времени поведение решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью

Исследуется асимптотическое по времени поведение решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью. Доказано, что если ограниченная измеримая начальная функция имеет пределы на $\pm\infty$, то решение начальной задачи Коши равномерно сходится к системе волн, состоящей из бегущих волн и волн разрежения, причем допускаются зависимости сдвигов фаз бегущих волн от времени. При дополнительных предположениях относительно начальной функции оценена скорость сходимости.

Библиография: 54 наименования.

Ключевые слова: закон сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью, уравнение типа Бюргерса, асимптотика решений, сходимость по форме, сходимость на фазовой плоскости, бегущая волна, волна разрежения, система волн, принцип максимума, принцип сравнения (на фазовой плоскости), неравенства колмогоровского типа.

Введение

Во второй половине 40-х годов прошлого века в СССР и США интенсивно занимались исследованием процессов, возникающих при взрыве бомбы [1], [2]. В частности, большое внимание было уделено изучению начально-краевых задач для уравнения типа закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью (здесь и везде в дальнейшем x – скалярная переменная, y – скалярная функция):

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \nu(y)}{\partial x^2}, \quad (0.1)$$

где $\nu'(y) > 0$; $f(y)$, $\nu(y)$ – достаточно гладкие функции. В течение следующих 50 лет было установлено, что начальная задача Коши (далее з.К.) для уравнения (0.1) возникает также в макроскопической теории транспортных потоков [3], при моделировании конвекционного течения жидкости в пористой среде [4], при изучении устойчивых монотонных разностных аппроксимаций квазилинейных уравнений типа закона сохранения [5], в математической экономике при моделировании научно-технического прогресса (модель Полтеровича–Хенкина [6]–[10]).

Работа выполнена при финансовой поддержки РФФИ (гранты №07-01-00703, №08-07-00158), РГНФ (грант №08-02-00347), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ”(грант №НШ-2982.2008.1). Работа проведена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 г. (мероприятие 1.2.1, НК-15П; мероприятие 1.3.1, НК-215П).

В конце 50-х годов прошлого века И. М. Гельфанд поставил задачу (см. [11, с. 119]): найти асимптотику при $t \rightarrow \infty$ решения $y(t, x)$ уравнения (0.1) при следующих начальных условиях типа Римана:

$$y(0, x) = \begin{cases} y_-, & \text{если } x < x_-, \\ \bar{y}_0(x), & \text{если } x_- \leq x < x_+, \\ y_+, & \text{если } x \geq x_+, \end{cases} \quad (0.2)$$

где $x_- \leq x_+$, $y_- \leq y_+$ и $\bar{y}_0(x)$ – ограниченная измеримая функция при $x \in [x_-, x_+]$.

Интерес к этой задаче был вызван, в первую очередь, качественными вопросами газовой динамики. Также решение задачи Гельфанда дает ответы на следующие вопросы: как распространяется информация о заторе в транспортном потоке, описываемом моделью Лайтхилла–Уизема?; как объяснить наличие нескольких укладов в экономике отрасли, описываемой моделью Полтеровича–Хенкина и ее обобщениями?

А. М. Ильин и О. А. Олейник [12] в 1960 г. исследовали случай сходимости решения з.к. (0.1), (0.2) к бегущей волне (решению уравнения (0.1) вида $\tilde{y}(x - ct)$) или волне разрежения (решению уравнения (0.1) при $\nu(y) \equiv 0$ вида $g(x/t)$). Спустя 30 лет Х. Ф. Вайнбергер [13] изучал асимптотику вида системы бегущих волн и волн разрежения. Ему удалось показать сходимость решения з.к. (0.1), (0.2) к этой системе волн на участках, соответствующих асимптотическому поведению “волна разрежения”. В. М. Полтерович и Г. М. Хенкин [9] в 1994 г. выдвинули гипотезу, согласно которой при определенных условиях асимптотика имеет вид чередующейся системы бегущих волн и волн разрежения, при этом следует допускать зависимость сдвигов фаз бегущих волн от времени [10]. Г. М. Хенкин и А. А. Шананин [14] в 2004 г. доказали справедливость этой гипотезы в важном частном случае, когда асимптотика имеет вид “бегущей волны–волны разрежения–бегущей волны” (см. также [15]). Г. М. Хенкин [16] в 2007 г. полностью доказал сформулированную ранее гипотезу. Заметим, что в гипотезе рассматривалась конкретная вязкость. При этом на функцию потока $f(y)$ налагались условия, которые исключают возможность наличия в системе волн двух и более бегущих волн, идущих подряд. Также на вторую производную функции потока налагались дополнительные требования в окрестностях точек, соответствующих переходу с бегущей волны на волну разрежения, и наоборот.

В последние годы наметилась тенденция другого подхода к решению задачи Гельфанда. Этот подход восходит к пионерской работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [17], в которой изучалась сходимость решения начальной з.к. для уравнения теплопроводности с нелинейным источником к одной бегущей волне. Результаты этой работы в 1977 г. были распространены П. С. Файфом и Дж. Б. МакЛеодом [18] на систему волн, состоящую для этого уравнения только из бегущих волн (см. также [19]). М. Межэ и Вит. А. Вольпертом [20] в 1999 г. подход работы [17] был адаптирован к исследованию задачи Гельфанда. С. Энгельберг и С. Шошет [21] в 2006 г. с помощью “адаптированного” подхода исследовали случай сходимости решения начальной з.к. для уравнения (0.1) к бегущей волне. Возникла задача, подобная той, которую решили П. С. Файф и Дж. Б. МакЛеод [18] для уравнения теплопроводности

с нелинейным источником: с помощью “адаптированного” подхода исследовать сходимость решения начальной з.К. для уравнения (0.1) к системе волн. Актуальность решения этой задачи обусловлена, как минимум, двумя обстоятельствами. Во-первых, новый подход может дать новые результаты в решении задачи Гельфанда, в частности ответить на вопрос, как взаимодействуют две и более бегущие волны, идущие подряд. Во-вторых, появляется возможность единообразно посмотреть на задачи исследования асимптотического поведения решений начальных з.К. для уравнения теплопроводности с нелинейным источником и для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью. Таким образом, появляется гипотеза о достаточной универсальности подхода работы [17].

Основной целью настоящей работы является распространение результатов П. С. Файфа и Дж. Б. МакЛеода [18], касающихся сходимости решения начальной з.К. для уравнения теплопроводности с нелинейным источником к системе волн, на закон сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью.

Предложен новый подход к исследованию задачи Гельфанда, который не требует тонкого анализа поведения решения на участках, соответствующих переходам с одной волны на другую. Опишем вкратце, в чем состоит этот подход.

Действительная ось, отвечающая пространственной переменной, разбивается (в зависимости от времени) на четыре типа участков, соответствующих предполагаемому поведению решения при больших значениях времени:

- 1) бегущая волна;
- 2) волна разрежения;
- 3) переход с одной бегущей волны на другую, переход с бегущей волны на волну разрежения, переход с волны разрежения на бегущую волну;
- 4) окрестности точек $x = \pm\infty$.

При доказательстве равномерной сходимости по времени решения начальной з.К. для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью на участках, соответствующих бегущим волнам, используется конструкция, предложенная С. Энгельбергом и С. Шошетом [21], базирующаяся на результатах М. Межэ и Вит. А. Вольперта [20].

Для доказательства равномерной сходимости по времени решения начальной з.К. для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью на участках, соответствующих волнам разрежения, уточняются результаты Х. Ф. Вайнбергера [13].

Сходимость на оставшихся участках выводится из уже установленных сходимостей. С помощью этого подхода доказана сходимость решения к системе волн в норме $C(\mathbb{R}_x)$ при более общих условиях, налагаемых на функцию потока и на начальную функцию, чем в работах [14]–[16], однако с менее точными оценками. В частности, исследовано взаимодействие двух и более бегущих волн, идущих подряд. Было обнаружено, что, в отличие от закона сохранения (см. [22]), для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью расстояние между центрами соседних бегущих волн в системе волн неограниченно возрастает.

Важным отличием предложенного подхода от подхода, используемого в работах [14]–[16], является способ определения сдвигов фаз бегущих волн. Г. М. Хенкиным и А. А. Шананиным [14] в 2004 г. было предложено определять

сдвиги фаз из открытых ими “локализованных законов сохранения”. В настоящей работе для случая, когда асимптотика имеет вид системы волн, показано, что сдвиги фаз можно определять аналогично тому, как это было сделано в [17].

Опишем структуру работы.

В § 1 приводятся необходимые далее свойства решения начальной з.К. для уравнения (0.1). Исследуется сходимость в норме $L_1(\mathbb{R}_x)$ решения начальной з.К. для уравнения (0.1) к бегущей волне.

В § 2 исследуется поведение при больших значениях времени производной решения начальной з.К. для уравнения (0.1) по пространственной переменной как многозначной функции самого решения и времени. Доказывается сходимость на фазовой плоскости решения начальной з.К. для уравнения (0.1) к системе волн. В п. 2.1 формулируется теорема о сходимости к системе волн на фазовой плоскости, обсуждается экстремальный смысл системы волн. В п. 2.2 приводится принцип максимума, с помощью которого устанавливается утверждение о структуре множества нулей линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами. На основе этого утверждения выводится принцип сравнения на фазовой плоскости (далее – п.с.ф.п.), на котором базируется все последующее изложение в § 2. В п. 2.3 с помощью п.с.ф.п. оценивается сверху производная решения начальной з.К. для уравнения (0.1) по пространственной переменной. В п. 2.4 с помощью п.с.ф.п. оценивается снизу производная решения начальной з.К. для уравнения (0.1) по пространственной переменной. Завершается доказательство теоремы, сформулированной в п. 2.1.

В § 3 доказывается сходимость в норме $C(\mathbb{R}_x)$ решения начальной з.К. для уравнения (0.1) к системе волн. Доказательство базируется на теореме 2.1 и на принципе сравнения. В п. 3.1 формулируется теорема о сходимости к системе волн в норме $C(\mathbb{R}_x)$. В п. 3.2 приводится схема доказательства теоремы 3.1. При предположениях, что уже доказана равномерная сходимость на участках, соответствующих асимптотическому поведению “бегущая волна” и “волна разрежения”, устанавливается равномерная сходимость на оставшихся участках. В п. 3.3 с помощью теоремы 2.1 устанавливается равномерная сходимость на участках, соответствующих асимптотическому поведению “бегущая волна”. В п. 3.4 с помощью принципа максимума устанавливается принцип сравнения, на основе которого показывается равномерная сходимость решения на участках, соответствующих асимптотическому поведению “волна разрежения”.

§ 1. Сходимость в норме $L_1(\mathbb{R}_x)$ решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью к бегущей волне

1.1. Свойства решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью. Рассмотрим начальную задачу Коши

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \nu(y)}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

$$\forall R > 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \|y(t, x) - y_0(x)\|_{L_1([-R, R])} = 0, \quad (1.2)$$

где $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow m \leq y_0(x) \leq M$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y_0(x) = y_{\pm}$ (для определенности пусть $y_- \leq y_+$); $y_0(x)$ – измеримая функция; $f(y), \nu(y) \in C^4([m, M])$; $\forall y \in [m, M] \rightarrow \nu'(y) \geq \bar{\nu} > 0$.

Под решением з.К. (1.1), (1.2) будем понимать ограниченную функцию $y(t, x)$, которая в полуплоскости $t > 0$ удовлетворяет (1.1) и принимает начальные значения $y_0(x)$ в смысле (1.2). Введенные обозначения будут использоваться на протяжении всей работы.

Везде далее мы будем изучать поведение решения з.К. (1.1), (1.2), считая, что справедливы введенные предположения. Заметим, что многие утверждения, приводимые ниже, справедливы при существенно более слабых предположениях о гладкости функций $f(y), \nu(y)$. Чтобы не оговаривать, при каких условиях гладкости справедливо то или иное утверждение (тем самым загромождать изложение дополнительными деталями), было решено сразу наложить настолько сильные условия гладкости, насколько это может потребоваться потом. Заметим также, что условие ограниченности начальной функции везде можно заменить условием существенной ограниченности, т. е. $\|y_0(x)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R})} < \infty$. Однако для большей наглядности мы считаем $y_0(x)$ просто ограниченной функцией.

Ниже приводится теорема, в которой собраны необходимые в дальнейшем свойства решения з.К. (1.1), (1.2).

ТЕОРЕМА 1.1. *Решение $y(t, x) = y(t, x; y_0(x))$ з.К. (1.1), (1.2) при $t > 0$ существует и единственно. Кроме того, функция $y(t, x)$ непрерывна в полуплоскости $t > 0$ вместе с производными, входящими в уравнение (1.1), и справедливы следующие свойства решения:*

- 1) если $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y_0(x) \leq \bar{y}_0(x)$, то $\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$y(t, x; y_0(x)) \leq y(t, x; \bar{y}_0(x));$$

- 2) если $\|y_0(x) - \bar{y}_0(x)\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} < \infty$, то $\forall t > 0$ выполнено

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y(t, x; y_0(x)) - y(t, x; \bar{y}_0(x))) dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (y_0(x) - \bar{y}_0(x)) dx;$$

- 3) если $\|y_0(x) - \bar{y}_0(x)\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} < \infty$, то $\forall t > 0$ выполнено

$$\|y(t, x; y_0(x)) - y(t, x; \bar{y}_0(x))\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} \leq \|y_0(x) - \bar{y}_0(x)\|_{L_1(\mathbb{R}_x)};$$

- 4) $|l_0(b) - l_0(a)| \leq \|b(x) - a(x)\|_{L_1(\mathbb{R}_x)}$, где функционал

$$l_0(c) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x; c(x)) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)}$$

определяется на таких функциях $c(x)$, что $\|c(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} < \infty$;

5) если $\{\bar{y}^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – равномерно ограниченная последовательность гладких функций, сходящаяся почти всюду к функции $y_0(x)$, то $\forall T > t_0 > 0, R > 0$ выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y(t, x; y_0(x)) - y(t, x; \bar{y}^k(x))\|_{C_{t,x}^{1,3}([t_0, T], [-R, R])} = 0;$$

6) $\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$ выполнено $m \leq y(t, x) \leq M$, т. е. $y(t, x)$ не зависит от поведения достаточно гладких функций $f(y), \nu(y), \nu'(y) > 0$, при $y \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$;

7) $\forall t_0 > 0 \exists \{D_{f,\nu}^r(t_0)\}_{r=1}^3 > 0: \forall t \geq t_0, r = 1, 2, 3$ выполнено

$$\left\| \frac{\partial^r y(t, x)}{\partial x^r} \right\|_{C(\mathbb{R}_x)} \leq D_{f,\nu}^r;$$

8) $\forall t > 0$ имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(t, x) = y_{\pm}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y_x(t, x) = 0$;

9) $\forall \delta > 0 \exists T^*(\delta) > 0: \forall t \geq T^*(\delta)$ выполнено

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} y(t, x) \geq y_- - \delta, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} y(t, x) \leq y_+ + \delta;$$

10) если начальная функция $y_0(x)$ имеет равномерно ограниченные производные до второго порядка включительно, третью производную, удовлетворяющую условию Липшица, и

$$q(y_0(\cdot)) = \sup \{k \in \mathbb{R} \mid \exists x_1 < \dots < x_k: \forall i = 2, \dots, k-1 \\ \rightarrow (y_0(x_{i+1}) - y_0(x_i))(y_0(x_i) - y_0(x_{i-1})) < 0\} = N,$$

то $\forall t > 0$ выполнено $q(y(t, \cdot; y_0(x))) \leq N$.

В работе [23] было доказано, что если начальная функция имеет равномерно ограниченные производные до второго порядка включительно и третью производную, удовлетворяющую условию Липшица, то решение з.К. (1.1), (1.2) (при этом в равенстве (1.2) можно заменить норму $L_1([-R, R])$ на норму $C^2(\mathbb{R}_x)$) при $t > 0$ существует и единственно. Кроме того, $y(t, x)$ непрерывна в полуплоскости $t \geq 0$ вместе с производными, входящими в уравнение (1.1) (в случае произвольной ограниченной измеримой начальной функции см. [24]). Также в работе [23] был доказан п. 6) и частично п. 7) теоремы 1.1. Более точно, был предложен метод, обобщающий метод Бернштейна априорных оценок старших производных решения линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами [25], который позволил получить оценки, приведенные в п. 7) (см. также [26]–[28]; по поводу равномерности оценок по времени см. [29]). В работе [24] было сформулировано утверждение, схожее п. 5). В работе [30] было указано, что п. 5) вытекает из результатов работы [28]. Аналог п. 3) встречался в работе [24]. Его доказательство легко вытекает из результатов работы [30]. Оригинальный способ доказательства п. 3) содержится в работе [31] (см. также [32], [33]). Оказывается, что п. 3) является простым следствием пп. 1), 2). Пункты 1), 2), 8) обосновывались и интенсивно использовались в работе [12] при условии, что $\nu(y) = y$. Доказательство пп. 1), 2), 8) при $\nu'(y) > 0$ аналогично доказательству, приведенному в работе [12] (о п. 1) см. также [34]). Заметим, что второе соотношение в п. 8) легко вытекает из первого соотношения и п. 7). В работе [13] было показано, что п. 9) справедлив, если $f(y)$ не имеет точек сгущения нулей второй производной на отрезке $[m, M]$. В п. 1.2 мы избавимся от этого требования, следуя работе [35] (см. ниже замечание 1.9). Пункт 4) вытекает из п. 3) и неравенства треугольника (см. [32]). Наконец, справедливость п. 10) вытекает из [36, теорема 1, замечание 2.3] и [23, теорема 1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из работы [24] следует, что если $y_0(x)$ – непрерывная функция, то равенство (1.2) можно понимать в обычном смысле:

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+, x_1 \rightarrow x} y(t, x_1) = y_0(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из п. 5) теоремы 1.1 следует, что можно ограничиться рассмотрением только непрерывных (достаточно гладких) начальных условий $y_0(x)$. Действительно, по произвольной ограниченной измеримой начальной функции $y_0(x)$ построим последовательность функций

$$y_0^h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(x - \xi) \omega^h(\xi) d\xi, \quad h > 0,$$

где $\omega^h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\omega^h(x) \geq 0$, $\omega^h(x) \equiv 0$ при $|x| \geq h$, $\exists C > 0$: $\omega^h(x) \leq C/h$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^h(x) dx \equiv 1$. Из [37, гл. 9, § 4] следует, что ограниченная последовательность функций $y_0^h(x)$, имеющих ограниченные производные, сходится при $h \rightarrow 0+$ почти всюду к $y_0(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Из работ [12], [23] следует, что если начальная функция $y_0(x)$ имеет равномерно ограниченные производные до второго порядка включительно и третью производную, удовлетворяющую условию Липшица, то пп. 7), 8) можно уточнить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \exists \{D_{f,\nu}^r\}_{r=1}^3 > 0, \quad D_{f,\nu} > 0: \quad \forall t \geq 0, \quad r = 1, 2, 3 \\ & \rightarrow \left\| \frac{\partial^r y(t, x)}{\partial x^r} \right\|_{C(\mathbb{R}_x)} \leq D_{f,\nu}^r, \quad \left\| \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} \right\|_{C(\mathbb{R}_t^+)} \leq D_{f,\nu}, \\ & \forall t \geq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(t, x) = y_{\pm}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(t, x) = 0. \end{aligned}$$

1.2. Сходимость в норме $L_1(\mathbb{R}_x)$ решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью к константе и к бегущей волне. Здесь устанавливается сходимость в норме $L_1(\mathbb{R}_x)$ решения з.К. (1.1), (1.2) к бегущей волне. Как следствие, получается, что сходимость имеет место и в норме $C(\mathbb{R}_x)$.

Введем определение решения уравнения (1.1) вида бегущей волны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Под *волновым решением* (решением вида бегущей волны) уравнения (1.1) будем понимать функцию $\tilde{y}(x - ct)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\exists \lim_{s \rightarrow -\infty} \tilde{y}(s)$, $\exists \lim_{s \rightarrow +\infty} \tilde{y}(s)$;
- 2) $\tilde{y}(x - ct)$ является решением уравнения (1.1).

Необходимые и достаточные условия существования волнового решения дает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть $y_1 < y_2$ и $f(y), \nu(y) \in C^4([y_1, y_2])$, $\nu'(y) > 0$ на отрезке $[y_1, y_2]$. Тогда для того, чтобы существовало волновое решение $\tilde{y}(x - ct)$ уравнения (1.1) такое, что

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \tilde{y}(s) = y_1, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \tilde{y}(s) = y_2,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $c = \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}$ – (R–H)-условие, или условие Ранкина–Гюгоннио [2];
- 2) $\forall y \in (y_1, y_2) \rightarrow \frac{f(y) - f(y_1)}{y - y_1} > \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}$ – E-условие, или энтропийное условие Гельфанда–Олейник [11], [12], [38].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Пусть существует решение уравнения (1.1) вида бегущей волны; тогда это решение единственно с точностью до сдвига аргумента (если $\tilde{y}(x - ct)$ – волновое решение, то $\tilde{y}(x - ct + \text{const})$ также будет волновым решением).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. В условиях утверждения 1.1 функция $\tilde{y}(s)$ будет возрастающей, имеющей непрерывные равномерно ограниченные производные до третьего порядка включительно ($\tilde{y}(s) \in C^3(\mathbb{R})$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. При предположениях утверждения 1.1 условие 2) определения 1.1 равносильно следующему:

$$\frac{\partial \nu(\tilde{y})}{\partial s} = f(\tilde{y}) - c\tilde{y} - (f(y_1) - cy_1). \quad (1.3)$$

Поэтому если $\tilde{y}(0) = y^*$, то

$$s = \int_{y^*}^{\tilde{y}} \frac{\nu'(y)}{f(y) - cy - (f(y_1) - cy_1)} dy. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Е-условие имеет наглядную геометрическую интерпретацию: график функции $f(y)$ при $y \in (y_1, y_2)$ лежит строго выше прямой, проходящей через точки $(y_1, f(y_1))$ и $(y_2, f(y_2))$. При этом скорость c бегущей волны равна наклону этой прямой.

Доказательства утверждения 1.1 и замечаний 1.4–1.7 содержатся, например, в работах [11]–[13], [39].

Основным результатом настоящего параграфа является теорема о сходимости решения з.К. (1.1), (1.2) к бегущей волне.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполняются условия 1), 2) утверждения 1.1 для $y_1 = y_-$, $y_2 = y_+$ и

$$\forall d \in \mathbb{R} \rightarrow \|y_0(x) - \tilde{y}(x + d)\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x) - \tilde{y}(x - ct + d)\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} = 0, \quad (1.5)$$

где константа d (сдвиг фазы) определяется из условия (см. п. 2) теоремы 1.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y_0(x) - \tilde{y}(x + d)) dx = 0.$$

А. М. Ильиным и О. А. Олейник [12] в 1960 г. было установлено при $\nu(y) = y$, что если в условиях теоремы 1.2 дополнительно потребовать справедливость следующих соотношений (условия Лакса [40]):

$$f'(y_-) \neq c, \quad f'(y_+) \neq c,$$

то справедлива формула

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x) - \tilde{y}(x - ct + d)\|_{C(\mathbb{R}_x)} = 0. \quad (1.6)$$

С. Ошер и Дж. Ралстон [39] в 1982 г. показали, что если в теореме 1.2 дополнительно потребовать выполнения следующего условия:

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y_- \leq y_0(x) \leq y_+,$$

то справедлива формула (1.5) (см. также [41]).

Х. Фрейстахлер и Д. Серр [32], [35] в 1998 г., базируясь на результатах работы [39], свели доказательство теоремы 1.2 к доказательству следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть $y_- = y_+$, $\int_{-\infty}^{+\infty} (y_0(x) - y_-) dx = 0$, и пусть $\|y_0(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} < \infty$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} = 0. \quad (1.7)$$

В работах [32], [35] утверждение 1.2 было доказано при $\nu(y) = y$ двумя различными способами. Ниже мы распространим подход работы [35] на случай $\nu'(y) > 0$. Тем самым докажем теорему 1.2.

Прежде чем приступать к доказательству утверждения 1.2, сформулируем известные результаты о неравенствах для производных колмогоровского типа [42], которые нам понадобятся при доказательстве утверждений 1.2, 1.3.

Неравенствами для производных колмогоровского типа будем называть неравенства следующего вида:

$$\exists K > 0: \forall z(x) \in W_{p,r}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \|z^{(k)}(x)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq K \|z(x)\|_{L_p(\mathbb{R})}^\alpha \|z^{(n)}(x)\|_{L_r(\mathbb{R})}^\beta,$$

где $0 \leq k < n$ – целые числа, $0 < p, q, r \leq \infty$, $\alpha, \beta \geq 0$, $W_{p,r}^n(\mathbb{R})$ – пространство таких функций $z(x) \in L_p(\mathbb{R})$, у которых $n-1$ производная локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $z^{(n)}(x) \in L_r(\mathbb{R})$. Константа K зависит от пяти параметров n, k, p, q, r . Величины α и β однозначно ими определяются:

$$\alpha = \frac{n-k-1/r+1/q}{n-1/r+1/p}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

В работах [43], [44] было показано, что если $q \neq p$ при $k = 0$, то

$$K(n, k, p, q, r) < \infty \Leftrightarrow \frac{n-k}{p} + \frac{k}{r} \geq \frac{n}{q}, \quad r \geq 1.$$

Кроме того, в важных для нас случаях было получено наилучшее значение константы $K(n, k, p, q, r) < \infty$ (см. табл. 1).

Таблица 1

n	k	q	p	r	Авторы
1	0	$\geq p$	> 0	≥ 1	Б. Секефальви-Надь
2	1	$2p$	$\geq 1/2$	∞	В. Н. Габушин, А. П. Буслаев
2	0; 1	∞	> 0	∞	В.Н. Габушин

Более подробно те случаи, в которых удалось вычислить наилучшие (точные) значения константы K , рассмотрены в работах [42], [45].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.2. Без ограничения общности будем считать, что

$$\nu(y_-) = f(y_-) = f'(y_-) = 0. \quad (1.8)$$

Обозначим через $\tilde{C}$ множество функций $y(x)$, определенных на оси $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y(x) &\in C_{y_-}^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (y(x) - y_-) dx = 0, \\ q(y(\cdot)) &= \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \exists x_1 < \dots < x_k: \forall i = 2, \dots, k-1 \\ &\rightarrow (y(x_{i+1}) - y(x_i))(y(x_i) - y(x_{i-1})) < 0\} < \infty, \end{aligned}$$

где $C_{y_-}^\infty(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, принимающих вне некоторого интервала постоянное значение y_- .

Заметим, что $\tilde{C}$ будет L_1 -плотно в банаховом пространстве

$$\left\{ y(x): \int_{-\infty}^{+\infty} (y(x) - y_-) dx = 0, \|y(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} < \infty \right\}.$$

Поэтому (см. п. 3) теоремы 1.1) достаточно доказать формулу (1.7) для $y_0(x) \in \tilde{C}$.

Более того, из п. 4) теоремы 1.1 вытекает, что достаточно доказать утверждение для

$$y_0(x) \in \tilde{C} \cap B_{L_1}(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

где $B_{L_1}(\lambda) = \{y(x): \|y(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \lambda\}$. Действительно, пусть

$$l_0(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x; z(x)) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} \equiv 0, \quad z(x) \in \tilde{C} \cap B_{L_1}(\lambda). \quad (1.9)$$

Согласно п. 4) теоремы 1.1 функционал $l_0(y): L_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывен на $\tilde{C}$. Поэтому из (1.9) имеем, что

$$\exists \delta > 0: \forall y(x) \in \tilde{C} \cap B_{L_1}(\lambda + \delta) \rightarrow l_0(y) \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Однако $l_0(y(0, \cdot)) \leq \lambda/2$ означает, что

$$\exists \tau > 0: \|y(\tau, \cdot) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} \leq \lambda.$$

Следовательно (см. (1.9)), $l_0(y) = 0$ при $y \in \tilde{C} \cap B_{L_1}(\lambda + \delta)$. Легко заметить, что приведенные выше рассуждения суть обоснование шага индукции: если $l_0(y) = 0$ при $y \in \tilde{C} \cap B_{L_1}(\lambda + k\delta)$, то $l_0(y) = 0$ при $y \in \tilde{C} \cap B_{L_1}(\lambda + (k+1)\delta)$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, по аксиоме индукции (базой индукции является соотношение (1.9)) приходим к тому, что $l_0(y) = 0$ при $y \in \tilde{C}$.

Согласно п. 3) теоремы 1.1, замечанию 1.3, неравенствам Секефальви-Надя и Габушина-Буслаева (см. табл. 1) имеем

$$\begin{aligned} &\exists C_{y_0} > 0, C_{y_0}^1 > 0: \forall t \geq 0 \\ &\rightarrow \|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq C_{y_0}, \|y_x(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq C_{y_0}^1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Умножим уравнение (1.1) на $y(t, x) - y_-$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}$ с учетом замечания 1.3 и соотношений (1.10). Получим так называемое энергетическое неравенство

$$\frac{d\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^2}{dt} = -2\|\nu'(y(t, x))y_x^2(t, x)\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} \leq -2\bar{\nu}\|y_x(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^2. \quad (1.11)$$

Введем обозначение $V(t, x) = \int_{-\infty}^x (y(t, \xi) - y_-) d\xi$. Не ограничивая общности, можно считать $\|V(0, x)\|_{C(\mathbb{R}_x)} \leq \lambda$. Тогда из п. 3) теоремы 1.1 вытекает, что $\forall t \geq 0 \rightarrow \|V(t, x)\|_{C(\mathbb{R}_x)} \leq \lambda$. Из п. 2) теоремы 1.1 и замечания 1.3 имеем, что $\forall t \geq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(t, x) = 0$. Используя эти факты, проинтегрируем уравнение (1.1) от $-\infty$ до x , затем умножим полученное уравнение на $V(t, x)$ и снова проинтегрируем по x , но на этот раз по всей действительной оси $\mathbb{R}$. Учитывая замечание 1.3 и соотношения (1.8), (1.10), получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} V^2(t, x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, x) (f(y(t, x)) - f(y_-)) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (y(t, x) - y_-) (\nu(y(t, x)) - \nu(y_-)) dx \leq -\bar{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} (y(t, x) - y_-)^2 dx \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} V^2(t, x) dx - \frac{\lambda M_2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (y(t, x) - y_-)^2 dx \\ &\leq -\bar{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} (y(t, x) - y_-)^2 dx, \end{aligned}$$

где $\bar{\nu} = \min_{y \in [m, M]} \nu'(y)$, $M_2 = \max_{y \in [m, M]} |f''(y)|$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \exists \lambda_0 = \frac{2\bar{\nu}}{M_2} : \forall \lambda_0 > \lambda > 0 \exists \tilde{K} = 2\bar{\nu} - \lambda M_2 : \forall t \geq t_0 > 0 \\ & \rightarrow \frac{d\|V(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^2}{dt} \leq -\tilde{K}\|V_x(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^2 = -\tilde{K}\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^2. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Из неравенств (1.11), (1.12) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x) - \bar{y}\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} = 0, \quad \|V(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq \|V(0, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}.$$

Поскольку по неравенству Коши–Буняковского

$$V^2(t, x) = 2 \int_{-\infty}^x (y(t, \xi) - y_-) V(t, \xi) d\xi \leq 2\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \|V(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)},$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t, x)\|_{C(\mathbb{R}_x)} = 0.$$

Из п. 10) теоремы 1.1 следует, что $\forall t \geq 0 \rightarrow q(y(t, \cdot)) \leq q(y_0(\cdot))$. Таким образом,

$$\forall t \geq 0 \exists q(t) = q(y(t, \cdot)) \leq q(y_0(\cdot)), \quad -\infty = x_1 < \dots < x_{q(t)+1} = +\infty:$$

$$\begin{aligned} \|y(t, x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} &\leq \sum_{i=1}^{q(t)} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(t, x) dx \right| = \sum_{i=1}^{q(t)} |V(t, x_{i+1}) - V(t, x_i)| \\ &\leq 2q(0) \|V(t, x)\|_{C(\mathbb{R}_x)}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Из теоремы 1.2 с помощью п. 7) теоремы 1.1 выводится формула (1.6). Рассуждения дословно повторяют доказательство следствия 1 из работы [35].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Из утверждения 1.1 с помощью п. 7) теоремы 1.1 устанавливается справедливость п. 9) теоремы 1.1. Рассуждения дословно повторяют доказательство следствия 2 работы [35].

В следующем параграфе (см. доказательство леммы 2.3) нам потребуется уточнение утверждения 1.2 в случае, когда $y_- = y_+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть $y_- = y_+$, $\|y_0(x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} < \infty$. Тогда для любого $t \geq t_0 > 0$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|y(t, x) - y_-\|_{C(\mathbb{R}_x)} &\leq C^1(\bar{\nu}, D_{f,\nu}^2) \|y_0(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)}^{4/5} t^{-1/5}, \\ \|y_x(t, x)\|_{C(\mathbb{R}_x)} &\leq C^2(\bar{\nu}, D_{f,\nu}^2) \|y_0(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)}^{2/5} t^{-1/10}. \end{aligned}$$

Заметим, что полученные неравенства аналогичны дисперсионному неравенству из работы [46] (см. также [32]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.3. Согласно неравенству Секефальви-Надя (см. табл. 1) имеем

$$\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq \text{SN} \|y(t, x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)}^{2/3} \left\| \frac{\partial(y(t, x) - y_-)}{\partial x} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^{1/3}.$$

Отсюда в силу п. 3) теоремы 1.1 имеем

$$\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq \text{SN} \|y_0(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)}^{2/3} \|y_x(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^{1/3}.$$

Из неравенства (1.11) вытекает, что

$$2K \|y_0(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)}^4 \frac{d\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^2}{dt} + (\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^2)^3 \leq 0,$$

где $K = \text{SN}^6 / (4\bar{\nu})$. Отсюда имеем

$$\|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq \|y_0(x) - y_-\|_{L_1(\mathbb{R}_x)} \sqrt[4]{\frac{K}{t}}.$$

Воспользовавшись неравенствами Габушина (см. табл. 1):

$$\begin{aligned} \|y(t, x) - y_-\|_{C(\mathbb{R}_x)} &= \|y(t, x) - y_-\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x)} \\ &\leq G_1 \|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^{4/5} \left\| \frac{\partial^2(y(t, x) - y_-)}{\partial x^2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x)}^{1/5}, \\ \| (y(t, x) - y_-)_x \|_{C(\mathbb{R}_x)} &= \left\| \frac{\partial(y(t, x) - y_-)}{\partial x} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x)} \\ &\leq G_2 \|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^{2/5} \left\| \frac{\partial^2(y(t, x) - y_-)}{\partial x^2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x)}^{3/5} \\ &= G_2 \|y(t, x) - y_-\|_{L_2(\mathbb{R}_x)}^{4/5} \|y_{xx}(t, x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x)}^{1/5}, \end{aligned}$$

получим справедливость утверждения.

Заметим, что равенства

$$\begin{aligned}\|y(t, x) - y_-\|_{C(\mathbb{R}_x)} &= \|y(t, x) - y_-\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x)}, \\ \|(y(t, x) - y_-)_x\|_{C(\mathbb{R}_x)} &= \|(y(t, x) - y_-)_x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x)}\end{aligned}$$

справедливы по теореме 1.1.

§ 2. Сходимость на фазовой плоскости решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью к системе волн

2.1. Обобщение теоремы Межэ–Вольперта. Экстремальный смысл системы волн. Для того чтобы сформулировать основной результат настоящего параграфа, нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем называть $H(y)$ *нижней границей выпуклой оболочки множества* $\{(y, v): y \in Y, v \geq f(y)\}$, где $Y = [y_-, y_+]$.

Таким образом, на множестве Y определена функция $H(y)$. Положим

$$S = \{y \in Y: f(y) > H(y)\}.$$

Все последующие основные результаты работы будут установлены при условии, что справедливы следующие два предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.1. *Множество S можно записать в виде*

$$S = (\alpha_0, \beta_0) \cup (\alpha_1, \beta_1) \cup (\alpha_2, \beta_2) \cup \dots \cup (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) \cup (\alpha_n, \beta_n),$$

где

$$y_- = \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} \leq \alpha_n \leq \beta_n = y_+, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. число интервалов в представлении множества S конечно.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.2. *Граничные точки множества S , кроме двух крайних точек y_- , y_+ , не являются точками сгущения нулей $f''(y)$. При этом y_- не является точкой сгущения нулей $f''(y)$, если $\alpha_0 < \beta_0$ и выполнено $H'(y_- + 0) = f'(y_-)$, а y_+ не является точкой сгущения нулей $f''(y)$, если $\alpha_n < \beta_n$ и выполнено $H'(y_+ - 0) = f'(y_+)$.*

Положим

$$y_x(y, t) = \left\{ \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} : y(t, x) = y \right\},$$

где $y(t, x)$ – решение з.К. (1.1), (1.2). Заметим, что при фиксированном t одному значению y может соответствовать несколько значений $y_x(y, t)$.

Далее нам будут встречаться неравенства вида $a \leq y_x(y, t) \leq b$, где a , b – некоторые числа, но, возможно, $a, b = \pm\infty$. Такие неравенства мы будем понимать так, что все значения многозначной функции $y_x(y, t)$ принадлежат отрезку $[a, b]$. В частности, неравенство $y_x(y, t) \geq 0$, $y \in [y_1, y_2]$, означает, что $\exists x_1, x_2: x_1 \leq x_2$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, такие, что:

- 1) $y(t, x)$ – однозначная функция x при $x \in [x_1, x_2]$ и фиксированном t ;
- 2) при $x \notin [x_1, x_2]$ значения $y(t, x)$ лежат вне интервала (y_1, y_2) .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть справедливы предположения 2.1, 2.2. Тогда имеет место равномерная по $y \in (y_-, y_+)$ сходимость при $t \rightarrow \infty$ графика многозначной функции $y_x(t, x)$ к графику функции $R_0(y)/\nu'(y)$, где $R_0(y) = f(y) - H(y)$, т. е.

$$\begin{aligned} \exists \sigma_0 > 0: \forall \sigma_0 > \sigma > 0 \exists T(\sigma) > 0: \forall t \geq T(\sigma), y \in (y_-, y_+) \\ \rightarrow \left| y_x(y, t) - \frac{R_0(y)}{\nu'(y)} \right| \leq \sigma. \end{aligned}$$

При $\nu(y) = y$ и $y_0(x)$, “зажатой” между двумя монотонными функциями, имеющими одинаковые пределы на $x = \pm\infty$ и $y_{\pm}$ соответственно, теорема 2.1 была установлена М. Межэ и Вит. А. Вольпертом в работе [20]. Сходимость в теореме 2.1 была названа в [20] *сходимостью на фазовой плоскости*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Предположение 2.2 существенным образом используется при доказательстве теоремы 2.1 (см. вывод формулы (2.8)). Однако немного более громоздкие рассуждения в п. 2.4 позволяют освободиться от требования справедливости предположения 2.2 в теореме 2.1.

Полагая $u(t, x) = \nu(y(t, x))$, перепишем з.К. (1.1), (1.2) следующим образом:

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(u)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (2.2)$$

где $y(t, x) = \eta(u(t, x))$, $\psi(\eta^{-1}(y)) = f(y)$, $u_0(x) = \nu(y_0(x))$. При этом, не ограничивая общности, можно считать (см. замечание 1.2), что $u_0(x)$ – непрерывная функция. Поэтому равенство (2.2) можно понимать в обычном смысле (см. замечание 1.1).

Новые обозначения позволяют переформулировать теорему 2.1:

$$\begin{aligned} \exists \sigma_0 > 0: \forall \sigma_0 > \sigma > 0 \exists T(\sigma): \forall t \geq T(\sigma), y \in (y_-, y_+) \\ \rightarrow R_0(y) - \sigma \leq u_x(y, t) \leq R_0(y) + \sigma, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$u_x(y, t) = \left\{ \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} : \eta(u(t, x)) = y \right\}.$$

Пусть $w(x - ct)$ – решение уравнения (2.1) вида бегущей волны, а $v(x - ct)$ – соответствующее волновое решение уравнения (1.1), т. е. $v = \eta(w)$. Положим $p = w'$. Тогда

$$\begin{aligned} -c\eta'(w)w' + \psi'(w)w' = w'' &\Leftrightarrow \frac{dp}{dw} = \psi'(w) - c\eta'(w) \\ \Leftrightarrow \frac{dp}{dv} \frac{dv}{dw} = \left(\frac{\psi'(w)}{\eta'(w)} - c \right) \eta'(w) &\Leftrightarrow p'(v) = f'(v) - c. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Легко понять (см. формулу (1.3)), что для существования волнового решения $v(x - ct)$ уравнения (1.1) с пределами $v_{\pm}$ на $\pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2.4) имело решение $p(v)$ при $v \in [v_-, v_+]$, удовлетворяющее условиям

$$p(v_-) = p(v_+) = 0, \quad \forall v \in (v_-, v_+) \rightarrow p(v) > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем называть функцию $R(y)$ *фазовой системой волн*, если:

- 1) $R(y_-) = R(y_+) = 0$;
- 2) $\forall y \in (y_-, y_+) \rightarrow R(y) \geq 0$;
- 3) на интервалах, где функция $R(y)$ отлична от нуля, она совпадает с траекторией (2.4) для некоторого s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Фазовая система волн $R^0(y)$ называется *максимальной*, если для любой другой фазовой системы волн $R(y)$ выполняется

$$\forall y \in (y_-, y_+) \rightarrow R^0(y) \geq R(y).$$

Приводимое ниже утверждение поясняет экстремальный смысл функции $R^0(y)$, встречающейся в теореме 2.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Максимальная фазовая система волн $R^0(y)$ существует. Кроме того,*

$$R^0(y) = R_0(y) = f(y) - H(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R(y)$ – произвольная фазовая система волн, т. е.

$$R(y_-) = R(y_+) = 0, \quad \forall y \in (y_-, y_+) \rightarrow R(y) \geq 0,$$

и на интервалах, где функция $R(y)$ отлична от нуля, она должна совпадать с траекторией (2.4) для некоторого s . Пусть

$$R(y_1) = R(y_2) = 0, \quad \forall y \in (y_1, y_2) \rightarrow R(y) > 0,$$

где $(y_1, y_2) \subseteq Y$. Тогда из (2.4) следует, что $R(y)$ при $y \in [y_1, y_2]$ есть разность между функцией $f(y)$ и прямой, проходящей через точки $(y_1, f(y_1))$ и $(y_2, f(y_2))$. Поэтому справедливость утверждения следует из определения 2.1 функции $H(y)$ и замечания 1.7.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $y_1 = \alpha_k$ в формуле (1.4), то

$$s = \int_{y^*}^{\tilde{y}} \frac{\nu'(y)}{R_0(y)} dy.$$

2.2. Принцип сравнения на фазовой плоскости. Важную роль при исследовании уравнений параболического типа играют различные модификации принципа максимума (см., например, [12], [13], [17], [19], [23], [25]–[28], [34], [36]). Следуя работе [19], сформулируем принцип максимума и установим с его помощью принцип сравнения на фазовой плоскости (п.с.ф.п.), на основе которого в последующих двух пунктах будет доказано неравенство (2.3).

Обозначим через Z_T класс непрерывных ограниченных в полосе $0 \leq t \leq T$ функций $z(t, x)$, имеющих при $0 < t \leq T$ непрерывные частные производные $\partial z(t, x)/\partial x$, $\partial^2 z(t, x)/\partial x^2$, $\partial z(t, x)/\partial t$. Определим при $0 < t \leq T$ действие линейного оператора L на классе функций Z_T следующим образом:

$$Lz(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(t, x) \frac{\partial z(t, x)}{\partial x} \right) - \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} - a(t, x) \frac{\partial z(t, x)}{\partial x} - b(t, x) z(t, x),$$

где $\varepsilon(t, x) > 0$, $a(t, x)$, $b(t, x)$, $\partial\varepsilon(t, x)/\partial x$, $\partial a(t, x)/\partial x$ – ограниченные непрерывные функции в полосе $0 < t \leq T$.

Пусть область (открытое связное множество) D лежит в полосе $0 \leq t \leq T$. Обозначим через Γ_D часть ∂D (границы области D), лежащую в полосе $0 \leq t < T$, а через Γ_D^T – часть ∂D , лежащую на прямой $t = T$.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА. Пусть $Lz(t, x) \leq 0$ ($Lz(t, x) \geq 0$) в области D , где $z(t, x) \in Z_T$. Тогда если $z(t, x) \geq 0$ ($z(t, x) \leq 0$) на Γ_D , то $z(t, x) \geq 0$ ($z(t, x) \leq 0$) в $\bar{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим, следуя [23, лемма 1], $\tilde{z}(t, x) = z(t, x)e^{-t\mu}$, где $\mu = 2 + \sup_{0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}}(-b(t, x)) < \infty$, и $\tilde{L}\tilde{z} \stackrel{\text{def}}{=} L\tilde{z} - \mu\tilde{z} = e^{t\mu}Lz$. По условию $\tilde{L}\tilde{z} \leq 0$ в D .

Допустим противное, т.е. предположим, что условие $z(t, x) \geq 0$ в $\bar{D}$ не выполняется. Тогда найдется такая точка $(t_0, x_0) \in \bar{D} \setminus \bar{\Gamma}_D$, что $\tilde{z}(t_0, x_0) < 0$.

Обозначим $M_{\tilde{z}} = \sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}}(-\tilde{z}(t, x)) > 0$. Выберем $\omega > 0$ настолько маленьким, что

$$\begin{aligned} \forall (t, x) \in D \cup \Gamma_D^T \rightarrow \varepsilon(t, x)(M_{\tilde{z}} + t)\omega^2 - 1 \\ + (\varepsilon_x(t, x) - a(t, x))(M_{\tilde{z}} + t)\text{th}(\omega(x - x_0))\omega \leq 0. \end{aligned}$$

Выберем $\rho > 0$ настолько большим, что

$$\text{ch}(\omega\rho) \geq \rho, \quad \frac{M_{\tilde{z}} + T}{\rho} + \tilde{z}(t_0, x_0) < 0.$$

Введем, следуя [12, лемма 1], вспомогательные функции

$$w(t, x) = (M_{\tilde{z}} + t) \frac{\text{ch}(\omega(x - x_0))}{\rho}, \quad \tilde{v}(t, x) = w(t, x) + \tilde{z}(t, x).$$

Параметры $\omega > 0$ и $\rho > 0$ выбирались так, чтобы

$$\begin{aligned} \tilde{L}w(t, x) \leq -(\mu + b(t, x))w(t, x) \leq -2w(t, x) < 0 \quad \text{в } D, \\ \tilde{v}(t_0, x_0) < 0, \quad \tilde{v}(t, x) \geq 0 \quad \text{на } \Gamma_{\Pi \cap D}, \end{aligned}$$

где $\Pi = \{(t, x) : 0 < t < T, x_0 - \rho < x < x_0 + \rho\}$. Отсюда следует, что существует такая точка $(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \in (\bar{\Pi} \cap \bar{D}) \setminus \Gamma_{\Pi \cap D}$, в которой функция $\tilde{v}(t, x)$ достигает минимума (отрицательного) на множестве $\bar{\Pi} \cap \bar{D}$, т.е.

$$\tilde{v}_x(\bar{t}_0, \bar{x}_0) = 0, \quad \tilde{v}_{xx}(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \geq 0, \quad \tilde{v}_t(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \leq 0.$$

Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $t \in (\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_0 + \varepsilon) \cap (0, T]$, $x \in (\bar{x}_0 - \varepsilon, \bar{x}_0 + \varepsilon)$ выполнено

$$\tilde{L}\tilde{v}(t, x) \geq -\tilde{v}(\bar{t}_0, \bar{x}_0) > 0.$$

Поскольку $\tilde{L}\tilde{z} \leq 0$ в D , то $\tilde{L}\tilde{v}(t, x) = \tilde{L}(w(t, x) + \tilde{z}(t, x)) < 0$ в D . Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $Lz(t, x) = 0$ в области D , где $z(t, x) \in Z_T$. Тогда если $z(t, x) = 0$ на Γ_D , то $z(t, x) = 0$ в $\bar{D}$.

Запись $D \in \Upsilon$ далее будет означать, что область D имеет вид $\{(t, x): 0 < t < T, \gamma_-(t) < x < \gamma_+(t)\}$, где $\gamma_{\pm}(t)$ – непрерывная кривая при $0 \leq t \leq T$ или равна $\pm\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $Lz(t, x) \leq 0$ ($Lz(t, x) \geq 0$) в области $D \in \Upsilon$, где $z(t, x) \in Z_T$. Тогда если $z(t, x) \geq 0$ ($z(t, x) \leq 0$) на Γ_D и существует точка $(t^*, x^*) \in \Gamma_D$ такая, что $z(t^*, x^*) > 0$ ($z(t^*, x^*) < 0$), то

$$\forall (t, x) \in \overline{D} \setminus \overline{\Gamma}_D \rightarrow z(t, x) > 0 \quad (z(t, x) < 0).$$

В работе [19] принцип максимума и следствия 2.1, 2.2 установлены при $\varepsilon(t, x) \equiv 1$ (см., соответственно, [19, гл. 1, теоремы 4.6–4.8]). Доказательство принципа максимума и следствий 2.1, 2.2 при $\varepsilon(t, x) > 0$ можно провести аналогично работе [19] (см. также [28, гл. 2]).

Определим два класса функций A и A_0 :

$$\begin{aligned} a(s) \in A &\Leftrightarrow \{\forall s_0 \in \mathbb{R} \rightarrow a(s_0) > 0 \Rightarrow \{\forall s > s_0 \rightarrow a(s) > 0\}\} \\ &\quad \wedge \{a(s_0) < 0 \Rightarrow \{\forall s < s_0 \rightarrow a(s) < 0\}\}, \\ a(s) \in A_0 &\Leftrightarrow \{\forall s_0 \in \mathbb{R} \rightarrow a(s_0) > 0 \Rightarrow \{\forall s > s_0 \rightarrow a(s) \geq 0\}\} \\ &\quad \wedge \{a(s_0) < 0 \Rightarrow \{\forall s < s_0 \rightarrow a(s) \leq 0\}\}. \end{aligned}$$

Доказательство п.с.ф.п. существенным образом базируется на утверждении о структуре множества нулей решения линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами [19, гл. 1, теорема 4.9].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $Lz(t, x) = 0$ при $0 < t \leq T$, где $z(t, x) \in Z_T$. Тогда

$$z(0, \cdot) \in A_0 \Rightarrow \{\forall 0 < t \leq T \rightarrow z(t, \cdot) \in A\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z(t_0, x_0) > 0$, где $P_0 = (t_0, x_0) \in \{(t, x): 0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$. Обозначим через $S_+(P_0)$ множество всех таких точек $Q \in \overline{D} = \{(t, x): 0 \leq t \leq t_0, x \in \mathbb{R}\}$, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в $\overline{D}$, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0 , и $z(t, x) > 0$. Множество всех таких кривых обозначим через Λ .

Покажем, что $S_+(P_0) \cap D$ – область (для этого достаточно установить, что $S_+(P_0) \cap D$ – открытое множество). Пусть $P_1 = (t_1, x_1) \in S_+(P_0) \cap D$. Рассмотрим прямоугольник

$$\Pi_\varepsilon(t_1, x_1) = \{(t, x): t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon, x_1 - \varepsilon < x < x_1 + \varepsilon\}.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\varepsilon < \min\{t_1, t_0 - t_1\}$ и $z(t, x) > 0$ при $(t, x) \in \overline{\Pi}_\varepsilon(t_1, x_1)$. Если кривая $l \in \Lambda$, соединяющая P_0 с P_1 , имеет общие точки с верхней границей прямоугольника $\Pi_\varepsilon(t_1, x_1)$, то $\Pi_\varepsilon(t_1, x_1) \subset S_+(P_0) \cap D$. В противном случае рассмотрим область D_1 , ограниченную кривой l и прямыми $t = t_1 + \varepsilon, x = x_1$ (при этом, не ограничивая общности, считаем, что внутри $\Pi_\varepsilon(t_1, x_1)$ кривая l – прямая линия). Поскольку $z(t, x) > 0$ на Γ_{D_1} , то согласно принципу максимума $z(t, x) \geq 0$ в $\overline{D}_1$. Поэтому найдется такая область $\tilde{D}_1 \subseteq D_1$, что $\tilde{D}_1 \in \Upsilon$, $z(t, x) \geq 0$ на $\Gamma_{\tilde{D}_1}$, $P_1 \in \Gamma_{\tilde{D}_1}$, $\Gamma_{\tilde{D}_1}^{t_1+\varepsilon} = \Gamma_{D_1}^{t_1+\varepsilon}$. Отсюда по следствию 2.2 имеем, что $z(t, x) > 0$ на $\Gamma_{D_1}^{t_1+\varepsilon}$. Значит, $\Pi_\varepsilon(t_1, x_1) \subset S_+(P_0) \cap D$.

Заметим, что, доказав открытость множества $S_+(P_0) \cap D$, мы попутно установили, что $z(t, x) = 0$ на $\Gamma_{S_+(P_0)} \cap D$ (где $\Gamma_{S_+(P_0)}$ – часть границы множества $S_+(P_0)$, лежащая в полосе $0 \leq t < t_0$).

Если $z(t, x) = 0$ на множестве $\Gamma_{S_+(P_0)}$, то согласно следствию 2.1 выполнено $z(t, x) = 0$ в $S_+(P_0)$. Поэтому найдутся такие точка $P^* = (0, x^*)$ и кривая $l^* \in \Lambda$, соединяющая P_0 и P^* , что $z(t, x) > 0$ на l^* (при этом, не ограничивая общности, считаем, что кривая l^* пересекается с прямой $t = t_0$ в одной точке P^*). Поскольку по условию имеем $z(0, \cdot) \in A_0$, то $z(t, x) \geq 0$ для любого $x > x^*$. Рассмотрим область D_2 , лежащую в полосе $0 \leq t \leq t_0$ справа от кривой l^* . Из принципа максимума имеем, что $z(t, x) \geq 0$ в $\bar{D}_2$. Поэтому найдется такая область $\tilde{D}_2 \subseteq D_2$, что $\tilde{D}_2 \in \Upsilon$, $z(t, x) \geq 0$ на $\Gamma_{\tilde{D}_2}$, $P^* \in \Gamma_{\tilde{D}_2}$, $\Gamma_{\tilde{D}_2}^{t_0} = \Gamma_{D_2}^{t_0}$. Отсюда по следствию 2.2 имеем, что $z(t, x) > 0$ на $\Gamma_{D_2}^{t_0}$, т.е.

$$z(t_0, x_0) > 0 \Rightarrow \forall x > x_0 \rightarrow z(t_0, x) > 0.$$

Аналогично показывается, что

$$z(t_0, x_0) < 0 \Rightarrow \forall x < x_0 \rightarrow z(t_0, x) < 0.$$

Таким образом, утверждение доказано.

ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ. Пусть $u^i(t, x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют в полуплоскости $t > 0$ уравнению (2.1), и пусть $y^i(t, x) = \eta(u^i(t, x))$, $i = 1, 2$, – такие непрерывные ограниченные в полуплоскости $t \geq 0$ функции, что

$$y^1(0, x) - y^2(0, x) \in A_0, \quad y^1(0, x), y^2(0, x) \in C^3(\mathbb{R}).$$

Тогда

$$\forall t > 0, x(t) \in \{x: y^1(t, x) = y^2(t, x)\} \rightarrow u_x^1(t, x(t)) \geq u_x^2(t, x(t)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x)$. Тогда $Lz(t, x) = 0$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, x) &= \frac{1}{\eta'(u^1(t, x))}, \quad a(t, x) = \frac{\psi'(u^1(t, x))}{\eta'(u^1(t, x))} - \frac{\eta''(u^1(t, x))}{(\eta'(u^1(t, x)))^2} \frac{\partial u^1(t, x)}{\partial x}, \\ b(t, x) &= \frac{1}{\eta'(u^1(t, x))} \left(\frac{\partial u^2(t, x)}{\partial x} \frac{\psi'(u^1(t, x)) - \psi'(u^2(t, x))}{u^1(t, x) - u^2(t, x)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u^2(t, x)}{\partial t} \frac{\eta'(u^1(t, x)) - \eta'(u^2(t, x))}{u^1(t, x) - u^2(t, x)} \right); \end{aligned}$$

в точках $\{(t, x): u^1(t, x) = u^2(t, x)\}$ доопределим $b(t, x)$ по непрерывности, полагая

$$b(t, x) = \frac{1}{\eta'(u^2(t, x))} \left(\frac{\partial u^2(t, x)}{\partial x} \psi''(u^2(t, x)) + \frac{\partial u^2(t, x)}{\partial t} \eta''(u^2(t, x)) \right).$$

Из замечания 1.3 и утверждения 2.2 следует, что

$$\forall t > 0 \rightarrow u^1(t, \cdot) - u^2(t, \cdot) \in A. \quad (2.5)$$

По теореме 1.1 из (2.5) вытекает справедливость принципа сравнения на фазовой плоскости.

2.3. Оценка сверху производной по пространственной переменной решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью. Пусть фиксировано достаточно малое $\sigma > 0$. В этом и в следующем пунктах будем считать, что время начинает течь не от нуля, а от $T^*(\delta(\sigma))$. Это равносильно тому, что начальное условие при $t = 0$ есть $y_0(x) := y(T^*(\delta(\sigma)), x)$. Заметим, что тогда согласно пп. 7)–9) теоремы 1.1 имеем $y_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y_0(x) = y_{\pm}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y'_0(x) = 0$; $y_0(x)$ не может принимать значения вне отрезка $[y_- - \delta(\sigma), y_+ + \delta(\sigma)]$. Зависимость $\delta(\sigma)$ будет выбрана ниже.

Используя п.с.ф.п., докажем правое неравенство (2.3). Определим при $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} P(\lambda, C) &= \{p(y) : \forall y \in [y_- - \delta(\sigma), y_+ + \delta(\sigma)] \rightarrow p'(y) = f'(y) - C, p(y) \geq \lambda\}, \\ x_-(\lambda) &= \sup\{x : \forall x_1 < x \rightarrow y'_0(x_1) \leq \lambda\} > -\infty, \\ x_+(\lambda) &= \inf\{x : \forall x_1 > x \rightarrow y'_0(x_1) \leq \lambda\} < +\infty. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $p_1(y) \in P(\lambda, C_1)$, $p_2(y) \in P(\lambda, C_2)$, $C_1 > C_2$. Тогда существует

$$T^* = \frac{1}{C_1 - C_2} \left(\int_{y_-}^{y_+ + \delta(\sigma)} \frac{dy}{p_1(y)} + x_+(\lambda) - x_-(\lambda) + \int_{y_- - \delta(\sigma)}^{y_+} \frac{dy}{p_2(y)} \right)$$

такое, что

$$\forall t \geq T^*, y \in (y_-, y_+) \rightarrow u_x(y, t) \leq \max_{i=1,2} p_i(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_1(x - C_1 t)$, $v_2(x - C_2 t)$ – такие волновые решения уравнения (1.1), соответствующие $p_1(y)$, $p_2(y)$, что

$$v_1(x_-(\lambda)) = y_+ + \delta(\sigma), \quad v_2(x_+(\lambda)) = y_- - \delta(\sigma).$$

Отметим, что для существования $v_1(x - C_1 t)$, $v_2(x - C_2 t)$, нам, возможно, придется определенным образом продолжить $f(y)$, $\nu(y)$ за отрезок $[m, M]$ (см. п. 6) теоремы 1.1). Положим

$$\zeta_1^{k_1}(t, x) = v_1(x - C_1 t - k_1) - y(t, x), \quad \zeta_2^{k_2}(t, x) = v_2(x - C_2 t - k_2) - y(t, x).$$

По построению

$$\forall k_1 \leq 0, k_2 \geq 0 \rightarrow \zeta_1^{k_1}(0, x) \in A, \zeta_2^{k_2}(0, x) \in A.$$

Кроме того, по истечении времени T^* точка с ординатой y_- волны $v_1(x - C_1 t)$ догонит точку с ординатой y_+ волны $v_2(x - C_2 t)$, это означает, что семейства функций $\{v_1(x - C_1 t - k_1)\}_{k_1 \leq 0}$, $\{v_2(x - C_2 t - k_2)\}_{k_2 \geq 0}$ замостят при $t \geq T^*$ всю полосу $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (y_-, y_+)\}$. Из замечания 1.5 и отмеченных двух фактов по п.с.ф.п. имеем, что справедливо утверждение леммы.

Для произвольного $\bar{y} \in (y_-, y_+)$ положим

$$\begin{aligned} p_1^{\bar{y}} &= f(y) - \left(H'(\bar{y}) + \frac{\sigma}{\mu} \right) (y - \bar{y}) - H(\bar{y}) + \sigma, \quad \mu = 3(y_+ - y_- + \delta(\sigma)), \\ p_2^{\bar{y}} &= f(y) - H'(\bar{y})(y - \bar{y}) - H(\bar{y}) + \sigma. \end{aligned}$$

Заметим, что $p_1^{\bar{y}}(y)$ и $p_2^{\bar{y}}(y)$ удовлетворяют уравнению (2.4) соответственно при $c = C_1 = H'(\bar{y}) + \sigma/\mu$ и $c = C_2 = H'(\bar{y})$. Выберем $\delta(\sigma)$ настолько малым, что $\delta(\sigma)D_1 \leq \sigma/3$, где $D_r \stackrel{\text{def}}{=} D_{f,\nu}^r(T^*(\delta(\sigma)))$ (см. пп. 7), 9) теоремы 1.1). Тогда

$$\exists \lambda = \frac{\sigma}{3} : \forall \bar{y} \in (y_-, y_+), y \in [y_- - \delta(\sigma), y_+ + \delta(\sigma)], i = 1, 2 \rightarrow p_i^{\bar{y}}(y) \geq \lambda.$$

Из леммы 2.1 получаем справедливость правого неравенства (2.3).

2.4. Оценка снизу производной по пространственной переменной решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью. Используя п.с.ф.п., докажем левое неравенство (2.3). Тем самым завершим доказательство теоремы 2.1.

Если считать, что $\delta(\sigma) < \sigma$, то $\exists y_1(x), y_2(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $\{M_i^j\}_{i,j=1}^{2,3} > 0$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\begin{aligned} 0 < y_i'(x) &\leq M_i^1, \quad |y_i''(x)| \leq M_i^2, \quad |y_i'''(x)| \leq M_i^3, \quad i = 1, 2, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y_1(x) &= y_{\pm} - \frac{\sigma}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y_2(x) = y_{\pm} + \frac{\sigma}{2}, \\ y_1(x) &< y_0(x) < y_2(x). \end{aligned}$$

Для произвольного $x_0 \in \mathbb{R}$ положим

$$y_{x_0}(x) = \begin{cases} y_2(x), & \text{если } x < x_0, \\ -D_1(x - x_0) + y_2(x_0), & \text{если } x_0 \leq x < \rho(x_0), \\ y_1(x), & \text{если } x \geq \rho(x_0), \end{cases}$$

где $\rho(x_0)$ находится из уравнения

$$-D_1(\rho(x_0) - x_0) + y_2(x_0) = y_1(\rho(x_0)),$$

а D_1 было определено в п. 2.3: $D_1 = D_{f,\nu}^1(T^*(\delta(\sigma)))$.

Пусть $y_1(\rho(x_m)) = y_+ - \sigma$ и $y_2(x_m) = y_- + \sigma$. При произвольном $x_0 \in \mathbb{R}$ “сгладим” функцию $y_{x_0}(x)$ в малых окрестностях точек x_0 и $\rho(x_0)$ так, чтобы:

- 1) x_0 и $\rho(x_0)$ были экстремумами функции $y_{x_0}(x)$, $y_2(x_0) = y_{x_0}(x_0)$, $y_1(\rho(x_0)) = y_{x_0}(\rho(x_0))$ при $x_0 \in [x_m, x_M]$;
- 2) семейство функций $\{y_{x_0}(x)\}_{x_0 \in \mathbb{R}}$, непрерывно зависящих от $x_0 \in \mathbb{R}$ в норме $C(\mathbb{R}_x)$, полностью замошало множество $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$;
- 3) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow y_{x_0}(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $y_0(x) - y_{x_0}(x) \in A_0$;
- 4) $\exists \{M^j(\sigma)\}_{j=1}^3 > 0 : \forall x_0 \in [x_m, x_M], x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3 \rightarrow |y_{x_0}^{(j)}(x)| \leq M^j(\sigma)$;
- 5) $\forall x_0 \in [x_m, x_M] \rightarrow q(y_{x_0}(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \exists x_1 < \dots < x_k : \forall i = 2, \dots, k-1 \rightarrow (y_{x_0}(x_{i+1}) - y_{x_0}(x_i))(y_{x_0}(x_i) - y_{x_0}(x_{i-1})) < 0\} = 3$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $f(y), \nu(y) \in C^4([y_- - \sigma, y_+ + \sigma])$ и $\nu'(y) > 0$ при $y \in [y_- - \sigma, y_+ + \sigma]$.

Из п. 10) теоремы 1.1 следует (мы сглаживали $y_{x_0}(x)$ для того, чтобы находиться в условиях п. 10) теоремы 1.1 и п.с.ф.п.), что

$$\forall x_0 \in [x_m, x_M], t \geq 0 \rightarrow q(y(t, x; y_{x_0}(x))) \leq 3. \quad (2.6)$$

Напомним (см. п. 2.3), что $y(t, x; y_{x_0}(x))$ – решение з.К. (1.1), (1.2) с начальной функцией $y_{x_0}(x)$, а не $y_0(x)$.

Из п.с.ф.п. по построению $y_{x_0}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \forall t > 0, x_0 \in \mathbb{R}, x \in \{x: y(t, x) = y(t, x; y_{x_0}(x))\} \\ \rightarrow u_x(t, x) \geq u_x(t, x; u_{x_0}(x)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $u = \nu(y)$; $u_x(t, x; u_{x_0}(x))$ – частная производная по пространственной переменной решения з.К. (2.1), (2.2) с начальной функцией $u_{x_0}(x) = \nu(y_{x_0}(x))$, а не $u_0(x) = \nu(y_0(x))$.

Важную роль в доказательстве левого неравенства (2.3) играют две приводимые ниже леммы.

ЛЕММА 2.2. *Для любых $x_0 \in \mathbb{R}$, $t > 0$ имеем $u_x(t, x; u_{x_0}(x)) \geq 0$ при $y_1(\rho(x_0)) \geq y(t, x; y_{x_0}(x))$ и $y_2(x_0) \leq y(t, x; y_{x_0}(x))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы в условиях п.с.ф.п. нужно взять

$$y^1(t, x) = y(t, x; y_{x_0}(x)), \quad y^2(t, x) \equiv \text{const} \in (-\infty, y_1(\rho(x_0))] \cup [y_2(x_0), +\infty).$$

Лемма доказана.

Положим

$$u_x(y, t; u_{x_0}(x)) = \left\{ \frac{\partial u(t, x; u_{x_0}(x))}{\partial x} : \eta(u(t, x; u_{x_0}(x))) = y \right\}.$$

ЛЕММА 2.3. *Для любого $x_0 \in [x_m, x_M]$ существуют $\bar{y}_{x_0} \in (y_1(\rho(x_0)), y_2(x_0))$ и $\tilde{T}(x_0, \sigma) > 0$ такие, что для любого $t \geq \tilde{T}(x_0, \sigma)$ выполнено:*

- 1) $\forall y \in (y_- + \sigma/2, y_+ - \sigma/2) \rightarrow u_x(y, t; u_{x_0}(x)) \geq -\sigma$;
- 2) $\forall y \in (y_- + \sigma/2, y_+ - \sigma/2) \setminus (\bar{y}_{x_0} - \sigma, \bar{y}_{x_0} + \sigma) \rightarrow u_x(y, t; u_{x_0}(x)) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$y^1(t, x) = y(t, x; y_{x_0}(x)), \quad y^2(t, x) = \begin{cases} \tilde{y}, & \text{если } x < x_1, \\ y(t, x; y_{x_0}(x)), & \text{если } x_1 \leq x < x_2, \\ \tilde{y}, & \text{если } x \geq x_2, \end{cases}$$

где x_1 – минимальный, а x_2 – максимальный корень уравнения

$$y(t, x; y_{x_0}(x)) = \tilde{y},$$

и $\tilde{y} \in (y_1(\rho(x_0)), y_2(x_0))$. Тогда п. 1) леммы вытекает из п.с.ф.п. и утверждения 1.3, которое описывает поведение $y^2(t, x)$ при больших значениях времени.

Докажем п. 2). Допустим противное. Тогда согласно лемме 2.2, формуле (2.6) и п. 8) теоремы 1.1 имеем

$$\begin{aligned} \exists \sigma_0 > 0, T_0 > 0: \forall t \geq T_0 \exists \check{x}_-(t), \check{x}_+(t) (\check{x}_-(t) < \check{x}_+(t)): \\ \forall x \in (-\infty, \check{x}_-(t)] \cup [\check{x}_+(t), +\infty) \rightarrow y_x^1(t, x) \geq 0, \\ \forall x \in [\check{x}_-(t), \check{x}_+(t)] \rightarrow y_x^1(t, x) \leq 0, \\ y_1(\rho(x_0)) \leq y^1(t, \check{x}_+(t)) < y^1(t, \check{x}_-(t)) \leq y_2(x_0), \\ y^1(t, \check{x}_-(t)) - y^1(t, \check{x}_+(t)) \geq 2\sigma_0. \end{aligned}$$

Из утверждения 1.3 получаем

$$\exists \tilde{T}(\sigma_0) > 0: \forall t \geq \tilde{T}(\sigma_0), \tilde{y} \in (y_1(\rho(x_0)), y_2(x_0)) \rightarrow \|y^2(t, x) - \tilde{y}\|_{C(\mathbb{R}_x)} < \sigma_0.$$

Поэтому множество $\{x: y^1(t, x) = y^2(t, x)\} \neq \emptyset$ при $t \geq \tilde{T}(\sigma_0)$, $\tilde{y} \in [y_1(\rho(x_0)) + \sigma_0, y_2(x_0) - \sigma_0]$ будет несвязным. Однако из утверждения 2.2 следует, что при $t > 0$ это множество обязательно связно. Противоречие.

Если справедливы предположения 2.1, 2.2, то можно выбрать σ настолько малым, что

$$\begin{aligned} \forall k = 0, \dots, n: \alpha_k < \beta_k, \quad \forall 0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 5\sigma \\ \exists p(y): \forall y \in (\alpha_k + \sigma_1, \beta_k - \sigma_2) \rightarrow p(y) > 0, \end{aligned}$$

$p(\alpha_k + \sigma_1) = p(\beta_k - \sigma_2) = 0$, $p(y)$ удовлетворяет (2.4) при $y \in [\alpha_k + \sigma_1, \beta_k - \sigma_2]$. Пусть $\alpha_k < \beta_k$, $x_0 \in [x_m, x_M]$. Из п. 2) леммы 2.3 следует, что если $\bar{y}_{x_0} \notin (\alpha_k, \alpha_k + 3\sigma] \cup [\beta_k - 3\sigma, \beta_k)$, то

$$\exists \frac{3}{2}\sigma \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 2\sigma: u_x(\alpha_k + \sigma_1, \tilde{T}(x_0, \sigma)) > 0, \quad u_x(\beta_k - \sigma_2, \tilde{T}(x_0, \sigma)) > 0;$$

иначе

$$\exists \frac{9}{2}\sigma \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 5\sigma: u_x(\alpha_k + \sigma_1, \tilde{T}(x_0, \sigma)) > 0, \quad u_x(\beta_k - \sigma_2, \tilde{T}(x_0, \sigma)) > 0.$$

Построим следующие решения уравнения (2.4):

$$\begin{aligned} p_1\left(\alpha_k + \sigma_1 - \frac{\sigma}{2}\right) &= 0, \quad p_1(\beta_k - \sigma_2) = 0, \\ \forall y \in \left(\alpha_k + \sigma_1 - \frac{\sigma}{2}, \beta_k - \sigma_2\right) &\rightarrow p_1(y) > 0, \\ p_2(\alpha_k + \sigma_1) &= 0, \quad p_2\left(\beta_k - \sigma_2 + \frac{\sigma}{2}\right) = 0, \\ \forall y \in \left(\alpha_k + \sigma_1, \beta_k - \sigma_2 + \frac{\sigma}{2}\right) &\rightarrow p_2(y) > 0. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 2.1, получим

$$\begin{aligned} \forall k = 0, \dots, n: \alpha_k < \beta_k, \quad \forall x_0 \in [x_m, x_M] \exists \bar{T}(x_0, \sigma) \geq \tilde{T}(x_0, \sigma): \\ \forall y \in [\alpha_k + 5\sigma, \beta_k - 5\sigma], \quad t \geq \bar{T}(x_0, \sigma) \rightarrow u_x(y, t; u_{x_0}(x)) \geq \min_{i=1,2} p_i(y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Действительно, пусть $v_1(x - C_1 t)$, $v_2(x - C_2 t)$ – такие волновые решения уравнения (1.1), соответствующие $p_1(y)$, $p_2(y)$, что

$$\forall k_1 \leq 0, \quad k_2 \geq 0 \rightarrow \zeta_1^{k_1}(\tilde{T}(x_0, \sigma), x) \in A, \quad \zeta_2^{k_2}(\tilde{T}(x_0, \sigma), x) \in A,$$

где

$$\zeta_1^{k_1}(t, x) = y(t, x) - v_1(x - C_1 t - k_1), \quad \zeta_2^{k_2}(t, x) = y(t, x) - v_2(x - C_2 t - k_2).$$

Поскольку $C_1 > C_2$, существует такое $\bar{T}(x_0, \sigma) \geq \tilde{T}(x_0, \sigma)$, что семейства функций $\{v_1(x - C_1 t - k_1)\}_{k_1 \leq 0}$, $\{v_2(x - C_2 t - k_2)\}_{k_2 \geq 0}$ замостят при $t \geq \bar{T}(x_0, \sigma)$ всю полосу $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (\alpha_k + \sigma_1, \beta_k - \sigma_2)\}$. Из замечания 1.5 и отмеченных двух фактов по п.с.ф.п. имеем, что справедлива формула (2.8).

Из формулы (2.8) следует, что

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in [x_m, x_M] \exists T(x_0, \sigma) > 0 : \forall t \geq T(x_0, \sigma), y \in [y_- + \sigma, y_+ - \sigma] \\ \rightarrow u_x(y, t; u_{x_0}(x)) \geq R_0(y) - \sigma. \end{aligned}$$

Используя лемму 2.2, аналогично покажем, что

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus (x_m, x_M), t \geq \max\{T(x_m, \sigma), T(x_M, \sigma)\}, y \in [y_- + \sigma, y_+ - \sigma] \\ \rightarrow u_x(y, t; u_{x_0}(x)) \geq R_0(y) - \sigma. \end{aligned}$$

Из п. 5) теоремы 1.1 следует, что

$$\forall x_0 \in [x_m, x_M] \exists \varepsilon(\tilde{x}_0) > 0 : \forall \tilde{x}_0 \geq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow T(\tilde{x}_0, \sigma) \leq T(x_0, \sigma) + 1.$$

Отсюда, с учетом (2.7), получаем

$$\exists \widehat{T}(\sigma) > 0 : \forall t \geq \widehat{T}(\sigma), y \in [y_- + \sigma, y_+ - \sigma] \rightarrow u_x(y, t) \geq R_0(y) - \sigma. \quad (2.9)$$

Осталось заметить, что

$$\forall y \in (y_-, y_- + \sigma] \cup [y_+ - \sigma, y_+), t \geq \widehat{T}(\sigma) \rightarrow u_x(y, t) \geq -\sqrt{8D_2\sigma}.$$

Этот факт вытекает из формулы (2.9) и того, что (см. п. 2.3)

$$\forall t \geq 0, x \in \mathbb{R} \rightarrow y_- - \sigma < y(t, x) < y_+ + \sigma, \|y_{xx}(t, x)\|_{C(\mathbb{R}_x)} \leq D_2.$$

§ 3. Сходимость в норме $C(\mathbb{R}_x)$ решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью к системе волн

3.1. Теорема о равномерной сходимости к системе волн. Везде далее будем считать, что справедливо предположение 2.1. Чтобы сформулировать основной результат работы, нам потребуется дать определения волн разрежения и системы волн, а также сделать еще одно дополнительное предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.1. Для любого $y \in (\beta_0, \alpha_1) \cup (\beta_1, \alpha_2) \cup \dots \cup (\beta_{n-1}, \alpha_n)$ выполнено $f''(y) > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Под волнами разрежения для з.К. (1.1), (1.2) будем понимать следующую систему функций:

$$g_k(x/t) = \begin{cases} \beta_k, & \text{если } x < f'(\beta_k)t, \\ (f')^{-1}(x/t), & \text{если } f'(\beta_k)t \leq x < f'(\alpha_{k+1})t, \quad k = 0, \dots, n-1, \\ \alpha_{k+1}, & \text{если } x \geq f'(\alpha_{k+1})t, \end{cases}$$

где $(f')^{-1}(\cdot)$ – обратная функция к $f'(y)$. Если $\beta_k = \alpha_{k+1}$, то полагаем $g_k(x/t) \equiv \beta_k$.

Согласно предположению 3.1 на интервалах (β_k, α_{k+1}) при $\beta_k < \alpha_{k+1}$, $k = 0, \dots, n-1$, функция $f'(y)$ монотонно возрастает, следовательно, волны разрежения $g_k(x/t)$, $k = 0, \dots, n-1$, корректно определены.

Из определения 1.1, предположения 2.1 и замечания 1.7 вытекает, что существуют решения уравнения (1.1) вида бегущей волны $\{\tilde{y}_k(x - c_k t + d_k)\}_{k=0}^n$, где $\tilde{y}_k(s) \rightarrow \alpha_k$ при $s \rightarrow -\infty$ и $\tilde{y}_k(s) \rightarrow \beta_k$ при $s \rightarrow +\infty$, $c_k = \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$, $k = 0, \dots, n$, при $\alpha_k < \beta_k$. Если $\alpha_k = \beta_k$, то полагаем $\tilde{y}_k(x - c_k t + d_k) \equiv \alpha_k$.

Определим $d_k(t)$ (сдвиг фазы k -й бегущей волны) и $\tilde{y}_k(0)$, $k = 0, \dots, n$, из условия

$$\forall t \geq t_0^* > 0 \rightarrow y(t, c_k t - d_k(t)) \equiv \tilde{y}_k(0) = y_k^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}. \quad (3.1)$$

Напомним, что $y(t, x)$ – решение з.К. (1.1), (1.2). Как будет видно далее, в формуле (3.1) вместо условия $y_k^* = (\alpha_k + \beta_k)/2$ можно было считать, что y_k^* – внутренняя точка интервала (α_k, β_k) , не обязательно средняя.

Из теоремы 2.1 и теоремы о неявной функции имеем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть справедливы предположения 2.1, 2.2 и $\alpha_k < \beta_k$. Тогда существует такое $t_0^* > 0$, не зависящее от $k = 0, \dots, n$, что формула (3.1) однозначно определяет при $t \geq t_0^*$ гладкую функцию $d_k(t)$.

Определим при $t \geq t_0^*$ систему волн $\tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)$ формулой

$$\tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^n (\tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t)) - \alpha_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(g_k\left(\frac{x}{t}\right) - \beta_k \right). \quad (3.2)$$

Основным результатом работы является теорема о равномерной сходимости решения з.К. (1.1), (1.2) к системе волн.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть справедливы предположения 2.1, 2.2, 3.1. Тогда:

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |y(t, x) - \tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| = 0$;
- 2) $\forall k = 0, \dots, n \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d_k'(t) = 0$;
- 3) если $\alpha_k < \beta_k = \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}$, то $d_k(t) - d_{k+1}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Поскольку $d_k(t) = o(t)$, $k = 0, \dots, n$, согласно п. 2) теоремы 3.1, то ввиду теоремы 2.1 функция $y(t, x)$ сходится на фазовой плоскости к системе волн $\tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)$, т. е.

$$y_x(y, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_\infty(Y)} \frac{R_0(y)}{\nu'(y)} \xleftarrow[t \rightarrow \infty]{L_\infty(Y)} \tilde{y}_x(y, t, \{d_k(t)\}_{k=0}^n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В [16] сформулирован следующий результат. Пусть $f(y) \in C^3([m, M])$, $f''(y)$ не имеет точек сгущения нулей на отрезке $[m, M]$ и справедливо:

- 1) предположения 2.1, 3.1;
- 2) $\alpha_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n \leq \beta_n$ (равенство $\beta_0 = \alpha_1$ возможно только при $n = 1$, когда $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1$);
- 3) $f''(\beta_{k-1}) > 0$, $f''(\alpha_k) > 0$, $k = 1, \dots, n$; $f''(\alpha_0) > 0$, если $\alpha_0 < \beta_0$ и $f'(\alpha_0) = H'(\alpha_0 + 0)$; $f''(\beta_n) > 0$, если $\alpha_n < \beta_n$ и $f'(\beta_n) = H'(\beta_n - 0)$ (условия общего положения);

4) $\nu(y) = \varepsilon y$, $\varepsilon > 0$;

5) начальная функция $y_0(x)$ имеет вид (0.2).

Тогда существуют такие $d_k(t) = C(\alpha_k, \beta_k, f'(\alpha_k), f'(\beta_k))\varepsilon \ln t + o(\ln t)$ (если $\alpha_k < \beta_k$), $k = 0, \dots, n$, что справедливо утверждение 1) теоремы 3.1. Заметим, что явно был выписан вид функции $C(\cdot)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пусть справедливы предположения 2.1, 3.1, условия общего положения, и пусть монотонная начальная функция $y_0(x)$ имеет вид (0.2). Тогда (см. [47], [48]) имеем:

1) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |y(t, x) - \tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| = O(1/\sqrt[3]{t})$;

2) если $\{(\beta_k < \alpha_{k+1}, k < n) \vee (k = n)\} \wedge \{(\beta_{k-1} < \alpha_k, k > 1) \vee (k = 0)\}$, то $|d'_k(t)| = O(1/t)$;

3) если $\alpha_k < \beta_k = \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}$, то $\exists \chi_2 > \chi_1 > 0$, $T > 0$: $\forall t \geq T \rightarrow \chi_1 \sqrt[3]{t} \leq d_k(t) - d_{k+1}(t) \leq \chi_2 \sqrt[3]{t}$, $|d_k(t)| = O(\sqrt[3]{t})$, $|d_{k+1}(t)| = O(\sqrt[3]{t})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Требование справедливости предположения 2.2 в условиях теоремы 3.1 нужно только для того, чтобы можно было воспользоваться результатом теоремы 2.1 (см. п. 2.3). Поэтому ввиду замечания 2.1 можно не требовать справедливости предположения 2.2 в условиях теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Аналогичное теореме 3.1 утверждение имеет место для безвязкостного случая¹: $\nu(y) = \varepsilon y$, $\varepsilon \rightarrow 0+$. Пусть справедливы предположения 2.1, 3.1 и функция $f''(y)$ не имеет точек сгущения нулей на отрезке $[m, M]$. Положим в формуле (3.2) для системы волн

$$\tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t)) = \begin{cases} \beta_k, & \text{если } x - c_k t + d_k(t) < 0, \\ \alpha_k, & \text{если } x - c_k t + d_k(t) \geq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

причем $d_k(t) = o(t)$, и если $\exists r \geq k$: $\beta_r < \alpha_{r+1}$ и $\exists l \leq k$: $\beta_{l-1} < \alpha_l$, то $d_k(t) \equiv \text{const}_k$. Тогда решение задачи Коши (1.1), (0.2) (или (1.1), (1.2), но $y_0(x)$ – монотонная функция) с $\nu(y) = \varepsilon y$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, сходится при больших значениях времени к системе волн (3.2), состоящей из ударных волн (3.3) (причем $d_k(t) \equiv \text{const}_k$, $k = 0, \dots, n$, если начальное условие вида (0.2)) и волн разрежения, равномерно по x , кроме сколь угодно малых окрестностей ударных волн в системе волн (если начальное условие имеет вид (0.2), то сходимост ь имеет место также в норме $L_1(\mathbb{R}_x)$); см. [11], [12], [16], [22], [33], [51]–[53]. В работе [11] решалась задача о распаде разрыва (начальное условие типа Римана (0.2) имело вид скачка: $x_- = x_+$) и по-видимому впервые была введена система волн (3.2), состоящая из ударных волн (3.3) с $d_k(t) \equiv 0$ и волн разрежения. Причем система волн возникла не как асимптотика, а как точное решение задачи. В работах [12], [16], [51]–[53] было показано, что решение задачи (1.1), (0.2) при $\nu(y) = \varepsilon y$, $\varepsilon \rightarrow 0+$ имеет асимптотику (3.2), состоящую из

¹Обоснованием этого предельного перехода (метод исчезающей вязкости) при произвольных ограниченных измеримых начальных условиях интенсивно занимались в СССР и США в 50-е годы прошлого века (О. А. Олейник, О. А. Ладыженская; Е. Хопф, П. Д. Лакс). В работе С. Н. Кружкова [30] метод исчезающей вязкости был обоснован при наиболее общих условиях. Заметим, что хотя в [30] рассматривалась вязкость частного вида $\nu(\cdot) = \varepsilon y$, легко показать, что все результаты останутся верными и в случае $\nu(y) = \varepsilon \tilde{\nu}(y)$, когда $\tilde{\nu}'(y) > 0$ – достаточно гладкая функция. Дальнейшее развитие и обобщение этого метода отражены, например, в монографиях [33], [49], [50].

ударных волн (3.3) с $d_k(t) \equiv \text{const}_k$ и волн разрежения. В статье [54] было отмечено (исследовалась асимптотика вида одной ударной волны), что из-за недостаточно быстрого стремления начальной функции $y_0(x)$ к своим предельным значениям на $x = \pm\infty$ следует допускать зависимость сдвигов фаз ударных волн для $k = 0$ и $k = n$ от времени². В работе [22] результаты статей [53], [54] были перенесены на случай произвольной монотонной ограниченной начальной функции $y_0(x)$.

3.2. Схема доказательства. Разобьем множество $X^\sigma(t) = \{x: y(t, x) \in [\alpha_0 + \sigma, \beta_n - \sigma]\}$, в зависимости от $t \geq 0$ и $\sigma_0 \geq \sigma > 0$, на конечное число непересекающихся подмножеств:

$$X^\sigma(t) = \Xi_0^\sigma(t) \cup \Theta_1^\sigma(t) \cup \Delta_0^\sigma(t) \cup \Theta_2^\sigma(t) \cup \Xi_1^\sigma(t) \cup \Theta_3^\sigma(t) \cup \Delta_1^\sigma(t) \cup \dots \\ \dots \cup \Theta_{2n-2}^\sigma(t) \cup \Xi_{n-1}^\sigma(t) \cup \Theta_{2n-1}^\sigma(t) \cup \Delta_{n-1}^\sigma(t) \cup \Theta_{2n}^\sigma(t) \cup \Xi_n^\sigma(t),$$

где

$$\Xi_k^\sigma(t) = \begin{cases} \{x: y(t, x) \in [\alpha_k + \sigma, \beta_k - \sigma]\}, & \text{если } \alpha_k < \beta_k, \\ \emptyset, & \text{если } \alpha_k = \beta_k, \end{cases}$$

$$\Delta_k^\sigma(t) = \begin{cases} \{x: y(t, x) \in [\beta_k + \sigma, \alpha_{k+1} - \sigma]\}, & \text{если } \alpha_k < \beta_k, \\ \emptyset, & \text{если } \beta_k = \alpha_{k+1}, \end{cases}$$

$$\Theta_{2k+1}^\sigma(t) = \{x: y(t, x) \in (\beta_k - \sigma, \beta_k + \sigma) \cap [\alpha_0 + \sigma, \beta_n - \sigma]\},$$

$$\Theta_{2k}^\sigma(t) = \{x: y(t, x) \in (\alpha_k - \sigma, \alpha_k + \sigma) \cap [\alpha_0 + \sigma, \beta_n - \sigma]\}.$$

Согласно приведенным ниже леммам 3.1, 3.2

$$\forall \sigma_0 > \sigma > 0 \exists \check{T}(\sigma) = \max\{T_\Xi(\sigma), T_\Delta(\sigma)\}: \forall t \geq \check{T}(\sigma), \\ \forall k = 0, \dots, n \rightarrow \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} |y(t, x) - \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t))| \leq \sigma, \quad (3.4)$$

$$\forall k = 0, \dots, n-1 \rightarrow \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} |y(t, x) - g_k(x/t)| \leq \sigma, \quad (3.5)$$

где по определению супремум по пустому множеству равен нулю. Заметим, что:

1) при $n = 1$, $\alpha_0 = \alpha_1$, $f'(\alpha_0) \neq H'(\alpha_0 + 0) = c_1$, $f'(\beta_1) \neq H'(\beta_1 - 0) = c_1$ формула (3.4) была установлена в [21, теорема 8];

2) формула (3.5) обобщает теорему 3.3 работы [13], в которой супремум брался по множеству $\Delta_k^{\sigma_0}$, где $\sigma_0 > 0$ – фиксированное число, и $T_\Delta(\sigma) \sim \sigma^{-2}$.

Из теоремы 2.1 следует, что

$$\forall \sigma_0 > \sigma > 0 \exists \lambda(\sigma) > 0: \forall t \geq T(\lambda(\sigma)), x \in \bigcup_{k=0}^n \Xi_k^\sigma(t) \rightarrow y_x(t, x) > 0. \quad (3.6)$$

²В отличие от безвязкостного случая, зависимости сдвигов фаз бегущих волн возникают не только ввиду недостаточно быстрого стремления к нулю: $|y_0(x) - \tilde{y}_0(x)| \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ или $|y_0(x) - \tilde{y}_n(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ [15], [21], [48] (см. также п. 1.2), но и в силу взаимодействия волн в системе волн между собой [14], [16], [47], [48].

Согласно определению системы волн (см. формулу (3.2)) имеем

$$\begin{aligned}
 & \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} |y(t, x) - \tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| \\
 & \leq \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} |y(t, x) - \tilde{y}(x - c_k t + d_k(t))| + \sum_{\substack{p=0 \\ k \geq 1}}^{k-1} \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} (\beta_p - \tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t))) \\
 & \quad + \sum_{\substack{p=k+1 \\ k \leq n-1}}^n \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} (\tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t)) - \alpha_p) + \sum_{\substack{p=0 \\ k \geq 1}}^{k-1} \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} \left(\alpha_{p+1} - g_p\left(\frac{x}{t}\right) \right) \\
 & \quad + \sum_{\substack{p=k \\ k \leq n-1}}^{n-1} \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} \left(g_p\left(\frac{x}{t}\right) - \beta_p \right). \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Из (3.4), (3.5) имеем, что

$$\begin{aligned}
 & \forall \sigma_0 > \sigma > 0, \quad t \geq \max\{\check{T}(\sigma), T(\lambda(\sigma))\} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{T}(\sigma), \\
 & \forall p = 0, \dots, k-1 \rightarrow \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} (\beta_p - \tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t))) \leq 2\sigma \quad \text{при } k \geq 1, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

$$\forall p = k+1, \dots, n \rightarrow \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} (\tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t)) - \alpha_p) \leq 2\sigma \quad \text{при } k \leq n-1, \tag{3.9}$$

$$\forall p = 0, \dots, k-1 \rightarrow \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} \left(\alpha_{p+1} - g_p\left(\frac{x}{t}\right) \right) \leq 2\sigma \quad \text{при } k \geq 1, \tag{3.10}$$

$$\forall p = k, \dots, n-1 \rightarrow \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} \left(g_p\left(\frac{x}{t}\right) - \beta_p \right) \leq 2\sigma \quad \text{при } k \leq n-1. \tag{3.11}$$

Докажем, например, неравенства (3.8). Неравенства (3.9)–(3.11) доказываются аналогично. Положим $x_{p,\Xi}^{\sigma,+}(t) = \max\{x : x \in \Xi_p^\sigma(t)\}$ при $\Xi_p^\sigma(t) \neq \emptyset$. Из (3.4) следует, что

$$\forall \sigma_0 > \sigma > 0, \quad t \geq T_\Xi(\sigma) \rightarrow |\beta_p - \sigma - \tilde{y}_p(x_{p,\Xi}^{\sigma,+}(t) - c_p t + d_p(t))| \leq \sigma.$$

Согласно замечанию 1.5 имеем, что $\tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t))$ – возрастающая по x функция. Поэтому

$$\forall \sigma_0 > \sigma > 0, \quad t \geq T_\Xi(\sigma), \quad x \geq x_{p,\Xi}^{\sigma,+}(t) \rightarrow \beta_p - \tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t)) \leq 2\sigma.$$

Осталось заметить, что

$$\forall \sigma_0 > \sigma > 0, \quad t \geq \max\{T_\Xi(\sigma), T(\lambda(\sigma))\}, \quad x \in \Xi_k^\sigma(t) \rightarrow x \geq x_{p,\Xi}^{\sigma,+}(t).$$

Таким образом, из (3.8)–(3.11) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \forall \sigma_0 > \sigma > 0, \quad t \geq \tilde{T}(\sigma), \quad \forall k = 0, \dots, n \\
 & \rightarrow \sup_{x \in \Xi_k^\sigma(t)} |y(t, x) - \tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| \leq (4n+1)\sigma. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Аналогично, из неравенства

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} |y(t, x) - \tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| \\
& \leq \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} \left| y(t, x) - g_k\left(\frac{x}{t}\right) \right| + \sum_{p=0}^k \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} (\beta_p - \tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t))) \\
& + \sum_{p=k+1}^k \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} (\tilde{y}_p(x - c_p t + d_p(t)) - \alpha_p) + \sum_{\substack{p=0 \\ k \geq 1}}^{k-1} \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} \left(\alpha_{p+1} - g_p\left(\frac{x}{t}\right) \right) \\
& + \sum_{\substack{p=k+1 \\ k \leq n-1}}^{n-1} \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} \left(g_p\left(\frac{x}{t}\right) - \beta_p \right)
\end{aligned}$$

получим, что

$$\begin{aligned}
& \forall \sigma_0 > \sigma > 0, t \geq \tilde{T}(\sigma), \forall k = 0, \dots, n-1 \\
& \rightarrow \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} |y(t, x) - \tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| \leq (4n+1)\sigma.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Заметим, что система волн $\tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)$, определенная в (3.2), является неубывающей по x функцией, поскольку представляется в виде суммы бегущих волн (возрастающих функций ввиду замечания 1.5), волн разрежения (неубывающих функций по определению 3.1) и константы. Поэтому из (3.12), (3.13) имеем

$$\begin{aligned}
& \forall \sigma_0 > \sigma > 0, t \geq \tilde{T}(\sigma), \forall l = 1, \dots, 2n \\
& \rightarrow \sup_{x \in \Theta_l^\sigma(t)} |y(t, x) - y(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| \leq (4n+3)\sigma.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Из (3.12)–(3.14) и п. 9) теоремы 1.1 вытекает справедливость п. 1) теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Если справедливы предположения 2.1, 2.2, 3.1 и начальное условие монотонно, то из приведенных выше рассуждений следует, что (см. [48])

$$\begin{aligned}
& \forall \sigma_0 > \sigma > 0, t \geq \max\{T_\Xi(\sigma), T_\Delta(\sigma)\} = \check{T}(\sigma) \\
& \rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |y(t, x) - \tilde{y}(t, x, \{d_k(t)\}_{k=0}^n)| \leq (4n+3)\sigma.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы свели доказательство п. 1) теоремы 3.1 к доказательству формул (3.4), (3.5). Устанавливая эти формулы, мы попутно докажем справедливость п. 2) теоремы 3.1 (см. ниже следствие 3.1).

Для доказательства п. 3) теоремы 3.1 достаточно заметить, что согласно формулам (3.1), (3.6) и теореме 2.1 при $\alpha_k < \beta_k = \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}$ для $\sigma_0 > \sigma > 0$, $t \geq T(\lambda(\sigma))$ выполнено

$$\begin{aligned}
d_k(t) - d_{k+1}(t) & > \int_{(\alpha_k + \beta_k)/2}^{\beta_k - \sigma} \frac{dy}{y_x(y, t)} + \int_{\alpha_{k+1} + \sigma}^{(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1})/2} \frac{dy}{y_x(y, t)} \\
& \geq \int_{(\alpha_k + \beta_k)/2}^{\beta_k - \sigma} \frac{dy}{R_0(y)/\nu'(y) + \sigma} + \int_{\alpha_{k+1} + \sigma}^{(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1})/2} \frac{dy}{R_0(y)/\nu'(y) + \sigma}.
\end{aligned}$$

Однако последние два интеграла неограниченно возрастают с уменьшением $\sigma > 0$. Это следует из того, что $\nu'(y) \geq \bar{\nu} > 0$ при $y \in [m, M]$, $R_0(\beta_k) = 0$ и $R_0(y)$ – гладкая неотрицательная функция.

3.3. Исследование равномерной сходимости к системе волн на участках, соответствующих асимптотическому поведению “бегущая волна”. Пользуясь теоремой 2.1, докажем формулу (3.4) и, как следствие, установим справедливость п. 2) теоремы 3.1.

ЛЕММА 3.1. Пусть справедливы предположения 2.1, 2.2. Тогда

$$\begin{aligned} \exists \sigma_0 > 0: \forall k = 0, \dots, n, \sigma_0 > \sigma > 0 \exists \omega_k(\sigma) > 0: \forall t \geq T(\omega_k(\sigma)) \stackrel{\text{def}}{=} T_{\Xi}^k(\sigma) \\ \rightarrow \sup_{x \in \Xi_k^{\sigma}(t)} |y(t, x) - \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t))| \leq \sigma. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_k < \beta_k$. Из теоремы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} \exists \sigma_0 > 0: \forall \sigma_0 > \sigma > 0 \exists \check{\omega}_k(\sigma) > 0: t \geq T(\check{\omega}_k(\sigma)), y \in \left[\alpha_k + \frac{\sigma}{2}, \beta_k - \frac{\sigma}{2} \right] \\ \rightarrow \left(\frac{R_0(y)}{\nu'(y)} + \check{\omega}_k(\sigma) \right)^{-1} y_x(y, t) \leq 1 \leq \left(\frac{R_0(y)}{\nu'(y)} - \check{\omega}_k(\sigma) \right)^{-1} y_x(y, t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Полагая

$$H_{\pm\sigma, k}(y) = \int_{y_k^*}^y \left(\frac{R_0(w)}{\nu'(w)} \pm \check{\omega}_k(\sigma) \right)^{-1} dw,$$

проинтегрируем (3.15) по dx от $c_k t - d_k(t)$ до x , учитывая формулу (3.1). Получим, что для любых $t \geq T(\check{\omega}_k(\sigma))$, $x \in \Xi_k^{\sigma/2}(t)$ таких, что

$$H_{\sigma, k}(y(t, x)) \leq x - (c_k t - d_k(t)) \leq H_{-\sigma, k}(y(t, x)),$$

выполнено

$$\tilde{y}_k^- \stackrel{\text{def}}{=} H_{-\sigma, k}^{-1}(x - c_k t + d_k(t)) \leq y(t, x) \leq H_{\sigma, k}^{-1}(x - c_k t + d_k(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{y}_k^+. \quad (3.16)$$

Согласно замечанию 2.2 имеем

$$H_{0, k}^{-1}(x - c_k t + d_k(t)) = \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{y}_k.$$

Считая для определенности, что $\tilde{y}_k \geq y_k^*$, получим $\tilde{y}_k^+ \geq \tilde{y}_k \geq \tilde{y}_k^- \geq y_k^*$.

Оценим сверху $\tilde{y}_k - \tilde{y}_k^-$ и $\tilde{y}_k^+ - \tilde{y}_k$ на множестве

$$\tilde{\Xi}_k^{\sigma/2}(t) = \left\{ x: \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t)) \in \left[\alpha_k + \frac{\sigma}{2}, \beta_k - \frac{\sigma}{2} \right] \right\}$$

в зависимости от σ . Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{y_k^*}^{\tilde{y}_k^-} \frac{dw}{R_0(w)/\nu'(w) - \check{\omega}_k(\sigma)} &= x - c_k t + d_k(t) \\ &= \int_{y_k^*}^{\tilde{y}_k^-} \frac{dw}{R_0(w)/\nu'(w)} + \int_{\tilde{y}_k^-}^{\tilde{y}_k} \frac{dw}{R_0(w)/\nu'(w)} \\ &\geq \int_{y_k^*}^{\tilde{y}_k^-} \frac{dw}{R_0(w)/\nu'(w)} + \frac{(\tilde{y}_k - \tilde{y}_k^-)}{\max_{y \in [\tilde{y}_k^-, \tilde{y}_k]} (R_0(y)/\nu'(y))}. \end{aligned}$$

Поэтому при $x \in \tilde{\Xi}_k^{\sigma/2}(t)$ (т. е. при $y_k^* \leq \tilde{y}_k^- \leq \tilde{y}_k \leq \beta_k - \sigma/2$) имеем

$$\exists \check{\omega}_k(\sigma) \geq \omega_k(\sigma) > 0:$$

$$\tilde{y}_k - \tilde{y}_k^- \leq \max_{y \in [\tilde{y}_k^-, \tilde{y}_k]} \left(\frac{R_0(y)}{\nu'(y)} \right) \int_{y_k^*}^{\tilde{y}_k^-} \frac{\omega_k(\sigma) dw}{(R_0(w)/\nu'(w) - \omega_k(\sigma))(R_0(w)/\nu'(w))} \leq \frac{\sigma}{2}.$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{aligned} & \exists \check{\omega}_k(\sigma) \geq \omega_k(\sigma) > 0: \quad \forall x \in \tilde{\Xi}_k^{\sigma/2}(t) \\ & \rightarrow \tilde{y}_k^+ - \tilde{y}_k \leq \max_{y \in [\tilde{y}_k, \tilde{y}_k^+]} \left(\frac{R_0(y)}{\nu'(y)} + \omega_k(\sigma) \right) \\ & \quad \times \int_{y_k^*}^{\tilde{y}_k} \frac{\omega_k(\sigma) dw}{(R_0(w)/\nu'(w) + \omega_k(\sigma))(R_0(w)/\nu'(w))} \leq \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Используя эти оценки, перепишем формулу (3.16) в виде

$$\begin{aligned} & \forall t \geq T(\omega_k(\sigma)), \quad x \in \Xi_k^{\sigma/2}(t) \cap \tilde{\Xi}_k^{\sigma/2}(t) \\ & \rightarrow \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t)) - \frac{\sigma}{2} \leq y(t, x) \leq \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t)) + \frac{\sigma}{2} \\ & \Rightarrow y(t, x) - \frac{\sigma}{2} \leq \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t)) \leq y(t, x) + \frac{\sigma}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Следовательно,

$$x \in \Xi_k^{\sigma/2}(t) \cap \tilde{\Xi}_k^{\sigma/2}(t) \Rightarrow x \in \Xi_k^{\sigma/2}(t) \cap \Xi_k^{\sigma}(t). \quad (3.18)$$

Из формул (3.17), (3.18) вытекает справедливость леммы.

Легко видеть, что формула (3.4) при $T_{\Xi}(\sigma) = \max_{k=0, \dots, n} T_{\Xi}^k(\sigma)$ следует из леммы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть справедливы предположения 2.1, 2.2. Тогда

$$\forall k = 0, \dots, n \quad \exists \rho_k > 0: \quad \forall \sigma_0 > \sigma > 0, \quad t \geq T((\omega_k(\rho_k \sigma))^4) \rightarrow |d'_k(t)| \leq \sigma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_k < \beta_k$. Положим $z(t, x) = y(t, x) - \tilde{y}_k(x - c_k t + d_k(t))$. Из леммы 3.1 имеем

$$\forall \sigma_0 > \sigma > 0, \quad t \geq T(\omega_k(\sigma)) \rightarrow \|z(t, x)\|_{C(\Xi_k^{\sigma}(t))} \leq \sigma.$$

Применив к функциям $z(t, x)$ и $z_x(t, x)$ аргумента $x \in \Xi_k^{\sigma}(t)$ неравенство

$$\begin{aligned} & \forall D > 0, \quad b, \quad a: \quad b > a \quad \exists K(b - a, D) > 0: \quad \forall c \leq a, \quad d \geq b, \quad z(x) \in C^2([c, d]): \\ & \|z(x)\|_{C([c, d])} \leq 1, \quad \|z_{xx}(x)\|_{C([c, d])} \leq D \\ & \rightarrow \|z_x(x)\|_{C([c, d])} \leq K(b - a, D) \|z(x)\|_{C([c, d])}^{1/2}, \end{aligned}$$

получим с учетом п. 7) теоремы 1.1, что

$$\begin{aligned} & \exists \check{\rho}_k > 0: \quad \forall t \geq T((\omega_k(\check{\rho}_k \sigma))^4), \quad r = 1, 2 \\ & \rightarrow \max_{x \in \Xi_k^{\sigma}(t)} \left| \frac{\partial^r y(t, x)}{\partial x^r} - \tilde{y}_k^{(r)}(x - c_k t + d_k(t)) \right| \leq \sigma. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Поскольку $y(t, x)$ удовлетворяет (1.1), а $d_k(t)$ определяется (3.1), то

$$\begin{aligned} & -y_x(t, c_k t - d_k(t))(c_k - d'_k(t)) + f'(y(t, c_k t - d_k(t)))y_x(t, c_k t - d_k(t)) \\ & = \nu'(y(t, c_k t - d_k(t)))y_{xx}(t, c_k t - d_k(t)) \\ & \quad + \nu''(y(t, c_k t - d_k(t)))(y_x(t, c_k t - d_k(t)))^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Так как

$$-c_k \tilde{y}'_k(0) + f'(\tilde{y}_k(0))\tilde{y}'_k(0) = \nu'(\tilde{y}_k(0))\tilde{y}''_k(0) + \nu''(\tilde{y}_k(0))(\tilde{y}'_k(0))^2, \quad \tilde{y}'_k(0) > 0,$$

то из (3.19), (3.20) получаем следствие.

3.4. Исследование равномерной сходимости к системе волн на участках, соответствующих асимптотическому поведению “волна разрежения”. Используя принцип сравнения, покажем справедливость формулы (3.5). Тем самым завершим доказательство теоремы 3.1.

В § 1 мы уже встречались с одним из вариантов принципа сравнения (см. п. 1) теоремы 1.1). Однако далее нам потребуется более сильное утверждение [13], [34].

ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ. Пусть $W(t, x)$, $V(t, x)$ – непрерывные ограниченные функции в полосе $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} L_{f,\nu}W(t, x) &= \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(W(t, x))}{\partial x} - \frac{\partial^2 \nu(W(t, x))}{\partial x^2} \geq 0, \\ L_{f,\nu}V(t, x) &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial f(V(t, x))}{\partial x} - \frac{\partial^2 \nu(V(t, x))}{\partial x^2} \leq 0 \end{aligned}$$

всюду в полосе $0 < t \leq T$, за исключением, быть может, конечного числа непрерывных на $[0, T]$ кривых вида $x = x(t)$, причем частные производные функций $W(t, x)$, $V(t, x)$, входящие в $L_{f,\nu}$, равномерно ограничены и непрерывны в полосе $0 < t \leq T$ вне этих кривых и на каждой такой кривой

$$\left. \frac{\partial(W(t, x) - V(t, x))}{\partial x} \right|_{x=x(t)-0} \geq \left. \frac{\partial(W(t, x) - V(t, x))}{\partial x} \right|_{x=x(t)+0}. \quad (3.21)$$

Тогда если $W(0, x) \geq V(0, x)$, то $W(t, x) \geq V(t, x)$ при $0 \leq t \leq T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $z(t, x) = W(t, x) - V(t, x)$, получим

$$\begin{aligned} Lz &\stackrel{\text{def}}{=} L_{f,\nu}V - L_{f,\nu}W = (\nu'(V)z_x)_x + (\nu'(W) - \nu'(V))W_{xx} + \nu''(V)W_x z_x \\ &\quad + (\nu''(W) - \nu''(V))(W_x)^2 - f'(V)z_x - (f'(W) - f'(V))W_x - z_t \\ &= (\nu'(V)z_x)_x - z_t - (f'(V) - \nu''(V)W_x)z_x \\ &\quad - \left(\int_0^1 (f''(V + \theta(W - V)) - \nu''(V + \theta(W - V))W_{xx} \right. \\ &\quad \left. - \nu'''(V + \theta(W - V))(W_x)^2) d\theta \right) z \leq 0 \end{aligned}$$

всюду в полосе $0 \leq t \leq T$, за исключением, быть может, конечного числа непрерывных на $[0, T]$ кривых вида $x = x(t)$. Рассмотрим функцию $\tilde{z}(t, x) = z(t, x)e^{-t\mu}$, где

$$\mu = 2 + \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ x \in \mathbb{R}}} \int_0^1 (\nu''(V + \theta(W - V))W_{xx} + \nu'''(V + \theta(W - V))(W_x)^2 - f''(V + \theta(W - V))) d\theta < \infty.$$

Определим

$$\tilde{L}\tilde{z} \stackrel{\text{def}}{=} L\tilde{z} - \mu\tilde{z} = e^{t\mu}Lz \leq 0, \quad 0 < t \leq T, \quad x \neq x(t). \quad (3.22)$$

Согласно принципу максимума (см. п. 2.2) минимум функции $\tilde{z}(t, x)$ в полосе $0 \leq t \leq T$ достигается либо на прямой $t = 0$, либо на одной из кривых $x = x(t)$.

Допустим противное, т. е. предположим, что условие $z(t, x) \geq 0$ в полосе $0 \leq t \leq T$ не выполняется. Тогда минимум функции $\tilde{z}(t, x)$ достигается в точке $(t_0, x(t_0))$ и $\tilde{z}(t_0, x(t_0)) < 0$ (следовательно, $0 < t_0 \leq T$). Ввиду условия (3.21) имеем $\tilde{z}_x(t_0, x(t_0)) = 0$. Поскольку $(t_0, x(t_0))$ – точка минимума функции $\tilde{z}(t, x)$ в полосе $0 \leq t \leq T$, то

$$\tilde{z}_{xx}(t_0, x(t_0)) \geq 0, \quad \tilde{z}_t(t_0, x(t_0)) \leq 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0: \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap (0, T], \quad x \in (x(t_0) - \varepsilon, x(t_0)) \cup (x(t_0), x(t_0) + \varepsilon) \\ \rightarrow \tilde{L}\tilde{z}(t, x) \geq -\tilde{z}(t_0, x(t_0)) > 0. \end{aligned}$$

Пришли к противоречию с условием (3.22).

ЛЕММА 3.2. Пусть справедливы предположения 2.1, 3.1. Тогда

$$\begin{aligned} \forall k = 0, \dots, n-1 \exists \sigma_0 > 0: \forall \sigma_0 > \sigma > 0 \exists T_\Delta^k(\sigma) > 0: \forall t \geq T_\Delta^k(\sigma) \\ \rightarrow \sup_{x \in \Delta_k^\sigma(t)} \left| y(t, x) - g_k\left(\frac{x}{t}\right) \right| \leq \sigma. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксировано достаточно малое $\sigma > 0$, и пусть $\beta_k < \alpha_{k+1}$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y_- - \delta(\sigma) \leq y_0(x) \leq y_+ + \delta(\sigma)$$

и $y_0(x)$ – непрерывная функция (см. начало п. 2.3). Напомним, что изначально предполагалось (см. п. 1.1)

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow m \leq y_0(x) \leq M.$$

Построим сначала функцию $W_k(t, x)$, которая ограничивает $V(t, x) = y(t, x)$ сверху на промежутке $\tilde{\Delta}_k^{2\sigma}(t) = \{x: g_k(x/t) \in [\beta_k + 2\sigma, \alpha_{k+1} - 2\sigma]\}$. Для этого зададим на отрезке $[\beta_k, \beta_n + 2]$ такую четырежды гладкую функцию $\tilde{f}(y)$, совпадающую с $f(y)$ при $y \in [\beta_k + \sigma, \beta_n + \delta(\sigma)]$, что:

- 1) $f'(y) \geq \tilde{f}'(y)$ при $y \in [\beta_k + \sigma/2, \beta_k + \sigma]$, $\tilde{f}'(y) = f'(y)$ при $y \in [\beta_k, \beta_k + \sigma/2]$;
- 2) $\tilde{f}''(y) > 0$ при $y \in [\beta_k + 2\sigma/3, \beta_k + \sigma]$;
- 3) $\exists 1/2 \geq \chi > 0$, $y_k^-(x - c_k^- t) : \tilde{c}_k^- = \tilde{f}'(\beta_k + 3\sigma/4)$, $L_{\tilde{f}, \nu} y_k^-(x - c_k^- t) \equiv 0$, $y_k^-(0) = \beta_k + 2\sigma/3$, $\tilde{y}_k^-(s) \rightarrow \beta_k + \chi\sigma$ при $s \rightarrow -\infty$ и $\tilde{y}_k^-(s) \rightarrow \beta_n + 2$ при $s \rightarrow +\infty$;
- 4) $\exists y_k^+(x - c_k^+ t) : \tilde{c}_k^+ = \tilde{f}'(\alpha_{k+1} - \sigma)$, $L_{\tilde{f}, \nu} y_k^+(x - c_k^+ t) \equiv 0$, $y_k^+(0) = \alpha_{k+1} - \sigma/2$, $y_k^+(s) \rightarrow \alpha_{k+1} - \sigma$ при $s \rightarrow -\infty$ и $y_k^+(s) \rightarrow \beta_n + 1$ при $s \rightarrow +\infty$.

Если $M < \beta_n + 2$, то для того, чтобы действие оператора $L_{\tilde{f}, \nu}$ было определено на функциях, принимающих значения в отрезке $[m, \beta_n + 2]$, нам еще нужно продолжить четырежды гладким образом $\nu(y)$ на отрезок $[M, \beta_n + 2]$ с сохранением свойства $\nu'(y) > 0$. Функцию $\tilde{f}(y)$, удовлетворяющую свойствам 1)–4), можно построить, полагая, что $\tilde{f}''(y) \gg f''(y) > 0$ при $y \in [\beta_k + 3\sigma/4, \beta_k + 0.99\sigma]$, и выбирая $\delta(\sigma)$ достаточно малым. Это не сложно показать, используя замечание 1.7. Ввиду п. 6) теоремы 1.1 можно без ограничения общности считать, что $\tilde{f}(y) = f(y)$ при $y \in [\beta_n + \delta(\sigma), \beta_n + 2]$.

Определим функцию $H_k(\gamma)$ на отрезке $[\tilde{f}'(\beta_k + \sigma/2), \tilde{f}'(\alpha_{k+1} - \sigma/2)]$ следующим образом:

$$\forall y \in \left[\beta_k + \frac{\sigma}{2}, \alpha_{k+1} - \frac{\sigma}{2} \right] \rightarrow H_k(\tilde{f}'(y)) = y.$$

Положим

$$\check{W}_k(t, x) = \begin{cases} y_k^-(x - c_k^- t), & \text{если } x < x_k^-(t), \\ H_k((x + \theta_k(t))/t), & \text{если } x_k^-(t) \leq x < x_k^+(t), \\ y_k^+(x - c_k^+ t), & \text{если } x \geq x_k^+(t). \end{cases}$$

Функции $(x_k^-(t), x_k^+(t), \theta_k(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(t)$ определяются из условия непрерывности $\check{W}_k(t, x)$ по x и двух неравенств (см. формулу (3.21))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{W}_k(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^-(t)-0} &\geq \frac{\partial \check{W}_k(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^-(t)+0}, \\ \frac{\partial \check{W}_k(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^+(t)-0} &\geq \frac{\partial \check{W}_k(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^+(t)+0}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

причем последнее неравенство мы будем считать равенством (можно показать, что такой выбор обеспечивает более точную оценку $y(t, x)$ сверху). Оказывается (см. [48]), что если $t \geq t_k(\sigma)$, где $t_k(\sigma)$ – достаточно большое, то существует, и притом единственное, решение $\check{\xi}(t)$ трех уравнений

$$\begin{aligned} y_k^-(x_k^- t - c_k^- t) &= H_k\left(\frac{x_k^- t + \theta_k}{t}\right), & H_k\left(\frac{x_k^+ t + \theta_k}{t}\right) &= y_k^+(x_k^+ t - c_k^+ t), \\ \frac{\partial \check{W}_k(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^+-0} &= \frac{\partial \check{W}_k(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k^++0}, \end{aligned}$$

и на этом решении выполняется оставшееся неравенство (3.23). Кроме того, при $t \geq t_k(\sigma)$ имеем:

- а) $y_k^-(x_k^-(t) - c_k^- t) \leq \beta_k + \sigma$;

б) $y_k^+(x_k^+(t) - c_k^+ t) \geq \alpha_{k+1} - \sigma$;

в) $\tilde{\xi}(t)$ – гладкая вектор-функция и справедлива оценка

$$\theta'_k(t) = \frac{\omega_k(\sigma)}{\sqrt{t}} + \rho_k(\sigma) O\left(\frac{1}{t}\right),$$

где $\omega_k(\sigma) > 0$ принимает большие значения при малых σ .

Из свойств 3), 4) функции $\tilde{f}(y)$, свойств а)–в) решения $\tilde{\xi}(t)$ и определения функции $H_k(\cdot)$ легко показать, что если $t_k(\sigma)$ достаточно большое, то

$$\forall t \geq t_k(\sigma), x \neq x_k^-(t), x \neq x_k^+(t) \rightarrow L_{\tilde{f}, \nu} \check{W}_k(t, x) \geq 0.$$

Поскольку $\check{W}_k(t, x)$ – возрастающая функция по x , то из свойства 1) функции $\tilde{f}(y)$ имеем

$$\forall t \geq t_k(\sigma), x \neq x_k^-(t), x \neq x_k^+(t) \rightarrow L_{\tilde{f}, \nu} \check{W}_k(t, x) \geq L_{\tilde{f}, \nu} \check{W}_k(t, x) \geq 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} W_k(t, x) &= \check{W}_k(t + t_k(\sigma), x + b_k(\sigma)), & b_k(\sigma) &= \tilde{x}_k^+(\sigma) - \tilde{x}_k^-(\sigma), \\ \tilde{x}_k^-(\sigma) &= \sup\{x: \forall x' < x \rightarrow y_0(x') < \beta_k + \chi\sigma\} > -\infty, \\ W_k(0, \tilde{x}_k^+(\sigma)) &= \beta_n + \delta(\sigma), & \tilde{x}_k^+(\sigma) &< +\infty. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} &\rightarrow y_0(x) \leq W_k(0, x), \\ \forall t \geq 0, x \neq x_k^-(t + t_k(\sigma)) - b_k(\sigma), x \neq x_k^+(t + t_k(\sigma)) - b_k(\sigma) \\ &\rightarrow L_{\tilde{f}, \nu} W_k(t, x) = L_{\tilde{f}, \nu} \check{W}_k(t + t_k(\sigma), x + b_k(\sigma)) \geq 0. \end{aligned}$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $x \in \check{\Delta}_k^\sigma(t)$, где $\check{\Delta}_k^\sigma(t) = \{x: W_k(t, x) \in [\beta_k + \sigma, \alpha_{k+1} - \sigma]\}$, то последнее неравенство переписывается в следующем виде:

$$L_{\tilde{f}, \nu} H_k(\gamma(t, x, \sigma)) \geq 0,$$

где

$$\gamma(t, x, \sigma) = \frac{x + \theta_k(t + t_k(\sigma)) + b_k(\sigma)}{t + t_k(\sigma)}.$$

По принципу сравнения отсюда имеем

$$\forall t \geq t_k(\sigma), x \in \check{\Delta}_k^\sigma(t) \rightarrow y(t, x) \leq H_k(\gamma(t, x, \sigma)) = g_k(\gamma(t, x, \sigma)). \quad (3.24)$$

Но согласно свойству в) решения $\tilde{\xi}(t)$ существует такое достаточно большое $t_k(\sigma)$, что

$$\forall t \geq t_k(\sigma), x \in \check{\Delta}_k^\sigma(t) \rightarrow g_k\left(\frac{x}{t}\right) - \sigma \leq H_k(\gamma(t, x, \sigma)) \leq g_k\left(\frac{x}{t}\right) + \sigma. \quad (3.25)$$

Из (3.24), (3.25) вытекает окончательная оценка $y(t, x)$ сверху:

$$\forall t \geq t_k(\sigma), x \in \check{\Delta}_k^{2\sigma}(t) \rightarrow y(t, x) \leq g_k\left(\frac{x}{t}\right) + \sigma. \quad (3.26)$$

Для того чтобы оценить снизу функцию $y(t, x)$, нужно (аналогично тому, как это было сделано выше) оценить сверху функцию $\bar{y}(t, x) = -y(t, -x)$, являющуюся решением з.К.

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}(\bar{y})}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{\nu}(\bar{y})}{\partial x^2}, \quad \bar{y}(0, x) = -y_0(-x),$$

где $\bar{f}(\bar{y}) = f(-\bar{y})$, $\bar{\nu}(\bar{y}) = -\nu(-\bar{y})$. В результате получим аналогичное неравенство

$$\forall t \geq t_k(\sigma), x \in \tilde{\Delta}_k^{2\sigma}(t) \rightarrow y(t, x) \geq g_k\left(\frac{x}{t}\right) - \sigma. \quad (3.27)$$

Из (3.26), (3.27) вытекает, что

$$\forall t \geq t_k(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} T_{\Delta}^k(3\sigma) \rightarrow \sup_{x \in \Delta_k^{3\sigma}(t)} \left| y(t, x) - g_k\left(\frac{x}{t}\right) \right| \leq \sigma.$$

Таким образом, лемма доказана.

Легко видеть, что формула (3.5) при $T_{\Delta}(\sigma) = \max_{k=0, \dots, n-1} T_{\Delta}^k(\sigma)$ следует из леммы 3.2.

Автор выражает благодарность доктору физ.-матем. наук, профессору А. А. Шананину за постановку задач и постоянное внимание к работе. Также благодарю Н. С. Петросян, Е. Ю. Панова, О. С. Розанову, Д. Серра и Г. М. Хенкина за ряд полезных замечаний, касающихся соответственно п. 3) теоремы 3.1 и замечания 3.5; теоремы 1.1, § 2 и леммы 3.1; теоремы 1.1 и п. 1.2; замечания 3.2.

Список литературы

1. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, 3-е изд., Физматлит, М., 2008; англ. пер. 1-го изд.: Ya. B. Zeldovich, Yu. P. Raizer, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, Vol. I, II, Academic Press, New York, 1966.
2. Р. Курант, К. Фридрихс, *Сверхзвуковое течение и ударные волны*, ИЛ, М., 1950; пер. с англ.: R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Intersci. Publ., New York, 1948.
3. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, New York–London–Sydney, 1974.
4. L. A. Peletier, “The porous media equation”, *Applications of nonlinear analysis in the physical sciences* (Bielefeld, 1979), *Surveys Reference Works Math.*, **6**, Pitman, Boston, MA–London, 1981, 229–241.
5. A. Harten, J. M. Hyman, P. D. Lax, B. Keyfitz, “On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29**:3 (1976), 297–322.
6. В. М. Полтерович, Г. М. Хенкин, “Математический анализ экономических моделей. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий”, *Экономика и мат. методы*, **24**:6 (1988), 1071–1083.
7. G. M. Henkin, V. M. Polterovich, “Schumpeterian dynamics as a non-linear wave theory”, *J. Math. Econom.*, **20**:6 (1991), 551–590.
8. Л. М. Гельман, М. И. Левин, В. М. Полтерович, В. А. Спивак, “Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии)”, *Экономика и мат. методы*, **29**:3 (1993), 460–469.

9. G. M. Henkin, V. M. Polterovich, "A difference-differential analogue of the burgers equation: Stability of the two-wave behavior", *J. Nonlinear Sci.*, **4**:1 (1994), 497–517.
10. G. M. Henkin, V. M. Polterovich, "A difference-differential analogue of the Burgers equations and some models of economic development", *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **5**:4 (1999), 697–728.
11. И. М. Гельфанд, "Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений", *УМН*, **14**:2 (1959), 87–158; англ. пер.: I. M. Gel'fand, "Some problems in the theory of quasilinear equations", *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **29** (1963), 295–381.
12. А. М. Ильин, О. А. Олейник, "Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени", *Матем. сб.*, **51(93)**:2 (1960), 191–216.
13. H. F. Weinberger, "Long-time behavior for a regularized scalar conservation law in the absence of genuine nonlinearity", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **7**:5 (1990), 407–425.
14. G. M. Henkin, A. A. Shananin, "Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations", *J. Math. Pures Appl.* (9), **83**:12 (2004), 1457–1500.
15. G. M. Henkin, A. A. Shananin, A. E. Tumanov, "Estimates for solutions of Burgers type equations and some applications", *J. Math. Pures Appl.* (9), **84**:6 (2005), 717–752.
16. G. M. Henkin, "Asymptotic structure for solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations", *J. Fixed Point Theory Appl.*, **1**:2 (2007), 239–291.
17. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, "Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме", *Бюл. МГУ. Математика и механика*, **1**:6 (1937), 1–26.
18. P. C. Fife, J. B. McLeod, "The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **65**:4 (1977), 335–361.
19. A. I. Volpert, Vit. A. Volpert, Vl. A. Volpert, *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Transl. Math. Monogr., **140**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
20. M. Mejai, Vit. Volpert, "Convergence to systems of waves for viscous scalar conservation laws", *Asymptot. Anal.*, **20**:3–4 (1999), 351–366.
21. Sh. Engelberg, S. Schochet, "Nonintegrable perturbations of scalar viscous shock profiles", *Asymptot. Anal.*, **48**:1–2 (2006), 121–140.
22. С. Н. Кружков, Н. С. Петросян, "Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка", *УМН*, **42**:5 (1987), 3–40; англ. пер.: S. N. Kruzhkov, N. S. Petrosyan, "Asymptotic behaviour of the solutions of the Cauchy problem for non-linear first order equations", *Russian Math. Surveys*, **42**:5 (1987), 1–47.
23. О. А. Олейник, Т. Д. Вентцель, "Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа", *Матем. сб.*, **41(83)**:1 (1957), 105–128.
24. О. А. Олейник, "Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений", *УМН*, **12**:3 (1957), 3–73; англ. пер.: O. A. Olejnik, "Discontinuous solutions of non-linear differential equations", *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **26** (1963), 95–172.
25. S. N. Bernstein, "Limitation des modules des dérivées successives des solutions des équations du type parabolique", *Докл. АН СССР*, **18**:7 (1938), 385–389.
26. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
27. С. Н. Кружков, "Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными", *Тр. ММО*, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 329–346; англ. пер.:

- S. N. Kruzkov, "Nonlinear parabolic equations in two independent variables", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **16** (1967), 355–373.
28. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, М., 1968; пер.с англ.: А. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.
 29. D. Hoff, J. Smoller, "Solutions in the large for certain nonlinear parabolic systems", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **2** (1985), 213–235.
 30. С. Н. Кружков, "Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными", *Матем. сб.*, **81(123):2** (1970), 228–255; англ. пер.: S. N. Kružkov, "First order quasilinear equations in several independent variables", *Math. USSR-Sb.*, **10:2** (1970), 217–243.
 31. M. G. Crandall, L. Tartar, "Some relations between nonexpansive and order preserving mappings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **78:3** (1980), 385–390.
 32. D. Serre, " L^1 -stability of nonlinear waves in scalar conservation laws", *Evolutionary equations. Vol. I, Handb. Differ. Equ.*, North-Holland, Amsterdam, 2004, 473–553.
 33. C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Grundlehren Math. Wiss., **325**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2005.
 34. M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.
 35. H. Freistühler, D. Serre, " L^1 stability of shock waves in scalar viscous conservation laws", *Comm. Pure Appl. Math.*, **51:3** (1998), 291–301.
 36. H. Matano, "Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semi-linear parabolic equation", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **29:2** (1982), 401–441.
 37. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, 3-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 1-го изд.: I. P. Natanson, *Theory of functions of real variable*, Frederick Ungar, New York, 1955.
 38. О. А. Олейник, "О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения", *УМН*, **14:2** (1959), 165–170; англ. пер.: O. A. Olejnik, "Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation", *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, **33** (1963), 285–290.
 39. S. Osher, J. Ralston, " L^1 stability of travelling waves with applications to convective porous media flow", *Comm. Pure Appl. Math.*, **35:6** (1982), 737–749.
 40. P. D. Lax, "Hyperbolic systems of conservation laws. II", *Comm. Pure and Appl. Math.*, **10:4** (1957), 537–566.
 41. D. Serre, "Stabilité des ondes de choc de viscosité qui peuvent être caractéristiques", *Nonlinear partial differential equations and their applications* (Paris, 1997–1998), Stud. Math. Appl., **31**, North-Holland, Amsterdam, 2002, 647–654.
 42. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
 43. В. Н. Габушин, "Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leq \infty$ ", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40:4** (1976), 869–892; англ. пер.: V. N. Gabušin, "Inequalities between derivatives in L_p -metrics for $0 < p \leq \infty$ ", *Math. USSR-Izv.*, **10:4** (1976), 823–844.
 44. В. Н. Габушин, "Неравенства для производных решений обыкновенных дифференциальных уравнений в метриках L_p ($0 < p \leq \infty$)", *Дифференц. уравнения*, **24:10** (1988), 1662–1670; англ. пер.: V. N. Gabušin, "Inequalities between derivatives in L_p -metrics for $0 < p \leq \infty$ ", *Differential Equations*, **24:10** (1988), 1088–1094.

45. В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51:6** (1996), 89–124; англ. пер.: V. V. Arestov, “Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems”, *Russian Math. Surveys*, **51:6** (1996), 1093–1126.
46. Ch. Abourjaily, Ph. Benilan, “Symmetrization of quasilinear parabolic problems”, *Rev. Un. Mat. Argentina*, **41:1** (1998), 1–13.
47. А. В. Гасников, “О промежуточной асимптотике решения задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа с монотонным начальным условием”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2008, № 3, 154–163; англ. пер.: A. V. Gasnikov, “On the intermediate asymptotic of the solution to the Cauchy problem for a quasilinear equation of parabolic type with a Monotone Initial Condition”, *J. Comput. Systems Sci. Internat.*, **47:3** (2008), 475–484.
48. А. В. Гасников, “Сходимость по форме решения задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа с монотонным начальным условием к системе волн”, *ЖВМ и МФ*, **48:8** (2008), 1376–1405; англ. пер.: A. V. Gasnikov, “Convergence in the form of a solution to the Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a monotone initial condition to a system of waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48:8** (2008), 1376–1405.
49. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978; англ. пер.: B. L. Roždestvenskii, N. N. Janenko, *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*, Transl. Math. Monogr., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
50. D. Serre, *System of conservation laws*. Vol. I, II, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 2000.
51. T. P. Liu, “Admissible solutions of hyperbolic conservation laws”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **30:240** (1981), 1–78.
52. K.-S. Cheng, “Asymptotic behavior of solutions of a conservation law without convexity conditions”, *J. Differential Equations*, **40:3** (1981), 343–376.
53. Н. С. Петросян, “Об асимптотике решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с невыпуклой функцией состояния”, *УМН*, **38:2** (1983), 213–214; англ. пер.: N. S. Petrosyan, “The asymptotic behaviour of the solution to the Cauchy problem for a quasilinear first-order equation with a non-convex state function”, *Russian Math. Surveys*, **38:2** (1983), 194–195.
54. Н. С. Петросян, “Об асимптотических свойствах решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **20:3** (1984), 502–508; англ. пер.: N. S. Petrosyan, “Asymptotic properties of a solution of Cauchy’s problem for a first-order quasilinear equation”, *Differential Equations*, **20:3** (1984), 390–395.

А. В. Гасников (A. V. GASNIKOV)
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет)
 E-mail: gasnikov@yandex.ru

Поступило в редакцию
 10.12.2007
 21.04.2008