Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Краевая задача для нелинейного уравнения с дробной производной, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 6, 101–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:06:22

УДК 517.9+535.5

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв

Краевая задача для нелинейного уравнения с дробной производной

Рассмотрена задача на полупрямой с краевым условием типа Неймана. Доказано глобальное существование решений и найден главный член асимптотического разложения решений при больших значениях времени. Рассмотрен случай больших начальных данных и критической нелинейности, когда нелинейный член уравнения убывает по времени с той же скоростью, что и линейные члены.

Библиография: 30 наименований.

Ключевые слова: краевая задача типа Неймана, нелинейные уравнения, дробные производные, асимптотика.

Введение

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения при больших значениях времени решений краевой задачи на полупрямой для следующего модельного нелинейного нелокального эволюционного уравнения с дробной производной:

$$\begin{aligned} u_t + \lambda |u|^\alpha u + C_\alpha \partial_x^\alpha u &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, & u_x(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda > 0$, $\alpha \in (1, 2)$, $C_\alpha < 0$. Дробная производная ∂_x^α определяется следующим образом:

$$\partial_x^\alpha u = \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ p^\alpha \left(\mathcal{L}_x u - \sum_{j=1}^2 \frac{\lim_{x \rightarrow 0+} \partial_x^{j-1} u}{p^j} \right) \right\}, \quad (2)$$

где $\mathcal{L}_x$ и $\mathcal{L}_x^{-1}$ – прямое и обратное преобразования Лапласа по пространственной переменной x . Здесь и далее p^α – главное значение комплексной аналитической в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$ функции (делаем разрез по отрицательной оси). Краевая задача (1) играет важную роль в современной математической физике. Такие уравнения служат основой для математических моделей, описывающих различные нелинейные волновые явления в физике, биологии, технике и других областях науки. В частности, известные уравнения Отта–Судана–Островского и Кобелева–Островского имеют в линейной части дробные производные порядка $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ (см. [1]–[3]).

Большое число публикаций посвящено изучению асимптотики решений задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений (см., например, [2]–[27]). Как известно, нелинейные уравнения подразделяются на три основных типа: с асимптотически слабой нелинейностью, критической нелинейностью и сильной (или субкритической) нелинейностью. В свою очередь, уравнения с критической и субкритической нелинейностями имеют два типа: конвективный и

неконвективный. Например, уравнение Бюргерса $u_t - u_{xx} + uu_x = 0$ и нелинейное уравнение теплопроводности $u_t - \Delta u + u^p = 0$ имеют соответственно конвективный и неконвективный тип нелинейности. Решения уравнений с конвективным и неконвективным типами нелинейности имеют различное поведение в критическом и субкритическом случаях. Например, асимптотика решения в критическом конвективном случае имеет автомодельный вид и в критическом неконвективном случае имеет дополнительное логарифмическое убывание по времени в сравнении с соответствующим линейным уравнением (см. [28]).

Изучение асимптотического при больших значениях времени поведения решений краевой задачи на полупрямой требует новых подходов. Основная трудность при исследовании краевых задач на полупрямой возникает из-за необходимости доказательства не только глобального существования классических решений, но и получения ряда дополнительных априорных оценок для выявления вклада граничных данных в асимптотику решений. Каждый тип нелинейности и граничных данных должен исследоваться индивидуально, особенно в случае больших значений начальных и граничных данных.

Краевые однородные задачи для нелинейных псевдодифференциальных уравнений в суперкритическом случае были изучены в книге [29]. В настоящей работе мы продолжаем исследование псевдодифференциальных уравнений на полупрямой, рассматривая случай больших значений начальных данных и критический неконвективный тип нелинейности, когда нелинейный член уравнения убывает по времени с той же скоростью, что и линейные члены, и

$$\int_0^{+\infty} |u|^\alpha u \, dx \neq 0.$$

Мы докажем глобальное существование решений для краевой задачи (1) и найдем главный член асимптотического разложения решений при больших значениях времени.

Перед тем как сформулировать полученные результаты, введем некоторые определения, используемые в настоящей работе.

Обозначим преобразование Лапласа $\mathcal{L}_{x \rightarrow \xi}$ формулой

$$\widehat{u}(\xi) \equiv \mathcal{L}_{x \rightarrow \xi} u = \int_0^{+\infty} e^{-\xi x'} u(x') \, dx';$$

тогда обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}_{\xi \rightarrow x}^{-1}$ определяется следующим образом:

$$u(x) \equiv \mathcal{L}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \widehat{u} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi' x} \widehat{u}(\xi') \, d\xi'.$$

Введем пространство Лебега $\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^+) = \{\varphi \in \mathcal{S}' : \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} < \infty\}$, где

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} = \left(\int_0^{+\infty} |\varphi(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

для $1 \leq q < \infty$ и

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^+} |\varphi(x)|,$$

и введем весовое пространство Лебега $\mathbf{L}^{p,a}(\mathbf{R}^+) \equiv \{\varphi \in S': \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} < \infty\}$, где

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \equiv \|\langle x \rangle^a \varphi\|_{\mathbf{L}^p}.$$

Пусть $\mathbf{H}_r^{k,s}$ – весовое пространство Соболева:

$$\mathbf{H}_r^{k,s} \equiv \{f \in \mathbf{L}^r: \|f\|_{\mathbf{H}_r^{k,s}} = \|\langle i\partial_x \rangle^k \langle x \rangle^s f\|_{\mathbf{L}^r} < \infty\},$$

где $\langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}$.

Определим функцию $\Lambda_0(s) \in \mathbf{L}^\infty$ следующим образом:

$$\Lambda_0(s) = \frac{|\Gamma(2-\alpha)C_\alpha|^{1+\frac{1}{\alpha}}}{4\pi^2} (1 - e^{i\frac{2\pi}{\alpha}}) \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sz} z^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-q} \frac{q^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{K(z)-q} dq dz,$$

где

$$K(z) = -|\Gamma(2-\alpha)C_\alpha|z^\alpha, \quad \alpha \in (1, 2).$$

Пусть

$$\mathbf{B}_\mu \equiv \{f(t) \in \mathbf{H}_2^1 \cap \mathbf{L}^{1,\mu}: \|f(t)\|_{\mathbf{B}_\mu} = \|f(t)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} + \|f(t)\|_{\mathbf{H}_2^1} < \infty\}, \quad \mu \geq 0.$$

Обозначим

$$\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{B}_\mu) = \left\{ f(t) \in \mathbf{B}_\mu: \lim_{t_1 \rightarrow t, t_1 \in [0, T]} \|f(t_1) - f(t)\|_{\mathbf{B}_\mu} = 0 \quad \forall t \in [0, T] \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задача (1) называется *корректно поставленной в классическом смысле*, если выполнены следующие условия:

- 1) существует единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{B}_\mu)$ и удовлетворяющее уравнению $u_t + \lambda|u|^\alpha u + C_\alpha \partial_x^\alpha u = 0$;
- 2) граничные и начальные условия удовлетворяются в классическом смысле, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x) \quad \text{в } \mathbf{B}_\mu, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \partial_x u(x, t) = 0 \quad \text{в } \mathbf{C}([0, T]).$$

Функцию $u(x, t)$ будем называть *классическим решением* задачи (1). Если $T = +\infty$, функцию $u(x, t)$ будем называть *классическим глобальным решением*.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in (1, 2)$, $\lambda > 0$ и $u_0 \in \mathbf{B}_\mu$, где $\mu \in [0, 1]$. Тогда задача (1) корректно поставлена в пространстве $\mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{B}_\mu)$. Кроме того, решение u имеет одну из следующих асимптотик:

$$u(t) = \left(\frac{1}{\alpha\eta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda_0(xt^{-\frac{1}{\alpha}}) \log^{-\frac{1}{\alpha}} t + O(t^{-\frac{1}{\alpha}} \log^{-\frac{1}{\alpha}-\gamma} t) \quad (3)$$

или

$$u(t) = O(t^{-\frac{1}{\alpha}} \log^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} t) \quad (4)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^+$, где $\gamma > 0$ достаточно мало и

$$\eta = \lambda^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} |\Lambda_0(s)|^\alpha \Lambda_0(s) ds.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку $\Lambda_0(s) \in \mathbf{L}^\infty$, формула (3) описывает поведение решения при больших значениях времени: $u(t) = O(t^{-\frac{1}{\alpha}} \log^{-\frac{1}{\alpha}} t)$, тогда как вторая асимптотика (4) дает более быстрое убывание по времени (отличие здесь на $\log^{-1} t$).

§ 1. Предварительные оценки

Пусть $K(z) = -|\Gamma(2 - \alpha)C_\alpha|z^\alpha$. Введем функцию

$$k(\xi) = |\Gamma(2 - \alpha)C_\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} \xi^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5)$$

такую, что $\operatorname{Re} k(\xi) > 0$ для всех $\operatorname{Re} \xi \geq 0$ и $K(k(\xi)) = -\xi$. Пусть

$$(\mathcal{G}\varphi)(x, t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} G(x, y, t_1) \varphi(y, t_2) dy$$

– оператор, где функция Грина $G(x, y, t)$ определена для $x > 0$, $y > 0$, $t > 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} G(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-K(p)t+p(x-y)} dp \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t} k(\xi) \xi^{-1} e^{-k(\xi)y} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{px} K(p)}{p(K(p) + \xi)} d\xi dp. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что в формуле (6) интеграл по ξ сходится абсолютно, а интеграл по p сходится условно. Рассмотрим линейную задачу

$$\begin{aligned} u_t + \partial_x^\alpha u &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, & u_x(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где дробная производная ∂_x^α определена по формуле (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u_0(x) \in \mathbf{L}^1$. Тогда существует единственное решение $u(x, t) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^1) \cap \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{C}^1)$ задачи (7), причем $u(x, t) = \mathcal{G}(t)u_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует решение $u(x, t)$ задачи (7), продолженное нулем при $x < 0$: $u(x, t) = 0$ при $x < 0$. Применив преобразование Лапласа по переменной x к задаче (7), получим

$$\widehat{u}_t(p, t) + K(p)\widehat{u}(p, t) = K(p) \sum_{l=1}^2 \partial_x^{l-1} u(0, t) p^{-l},$$

где

$$\widehat{u}(p, t) = \int_0^{+\infty} e^{-px} u(x, t) dx.$$

Интегрируя по времени последнее уравнение, имеем

$$\widehat{u}(p, t) = e^{-K(p)t} \widehat{u}_0(p) + K(p) \sum_{l=1}^2 p^{-l} \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} \partial_x^{l-1} u(0, \tau) d\tau, \quad (8)$$

где для некоторого $\beta > 0$

$$|\widehat{u}(p, t)| \leq C(1 + |p|)^\beta, \quad \operatorname{Re} p \geq a > 0. \quad (9)$$

Легко видеть, что условие (9) выполняется в областях правой комплексной полуплоскости, где $\operatorname{Re} K(p) \geq 0$. В областях левой комплексной полуплоскости, где $\operatorname{Re} K(p) < 0$, запишем формулу (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \widehat{u}(p, t) = e^{-K(p)t} & \left(\widehat{u}_0(p) + K(p) \sum_{l=1}^2 p^{-l} \int_0^{+\infty} e^{K(p)\tau} \partial_x^{l-1} u(0, \tau) d\tau \right) \\ & - K(p) \sum_{l=1}^2 p^{-l} \int_t^{+\infty} e^{K(p)(t-\tau)} \partial_x^{l-1} u(0, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Re} K(p) < 0$, интеграл

$$\int_t^{+\infty} e^{K(p)(t-\tau)} \partial_x^{l-1} u(0, \tau) d\tau$$

удовлетворяет условию (9). Однако первый член суммы, имеющий экспоненциально растущий множитель $e^{-K(p)t}$, не удовлетворяет условию (9), поэтому мы должны потребовать, чтобы выполнялось уравнение

$$\widehat{u}_0(p) + K(p) \sum_{l=1}^2 p^{-l} \int_0^{+\infty} e^{K(p)\tau} \partial_x^{l-1} u(0, \tau) d\tau = 0 \quad (10)$$

для всех $\operatorname{Re} p \geq 0$, где $\operatorname{Re} K(p) < 0$.

Используем условие (10) для того, чтобы найти граничные функции $\partial_x^j u(0, t)$, входящие в (8).

При замене $K(p) = -\xi$ области, где $\operatorname{Re} K(p) < 0$, переходят в правую полуплоскость $\operatorname{Re} \xi > 0$. Уравнение $K(p) = -\xi$ имеет только один корень $k(\xi)$ такой, что $k(\xi)$ является аналитической функцией для $\operatorname{Re} \xi > 0$ и $\operatorname{Re} k(\xi) > 0$. Делая замену переменной $p = k(\xi)$ в (10) и используя $K(p) = -\xi$, получаем для $\operatorname{Re} \xi > 0$ уравнение с двумя неизвестными функциями $u(0, t)$ и $u_x(0, t)$:

$$\widehat{u}_0(k(\xi)) - \xi \sum_{j=1}^2 k^{-j} \int_0^{+\infty} e^{-\xi\tau} u_x^{(j-1)}(0, \tau) d\tau = 0, \quad (11)$$

где

$$\widehat{u}_0(k(\xi)) = \int_0^{+\infty} e^{-k(\xi)y} u_0(y) dy.$$

Поэтому при постановке краевой задачи необходимо задать одно из граничных условий $u(0, t)$ или $u_x(0, t)$. Например, если рассматривается задача (7) с нулевым краевым условием типа Неймана $u_x(0, t) = 0$, преобразование Лапласа по времени от другой неизвестной функции $u(0, t)$, входящей в формулу (8), может быть найдено из уравнения (11):

$$\widehat{u}(0, \xi) = \xi^{-1} k \widehat{u}_0(k(\xi)), \quad (12)$$

где

$$\widehat{u}(0, \xi) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} u(0, t) dt.$$

Взяв обратное преобразование Лапласа, получим

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t} \xi^{-1} k \widehat{u}_0(k(\xi)) d\xi. \quad (13)$$

Подставив (13) в формулу для преобразования Лапласа от решения (8) и взяв обратное преобразование Лапласа от полученной формулы, найдем

$$u(x, t) = \mathcal{G}(t)u_0.$$

Путем прямых вычислений (см. [29, с. 14]) нетрудно доказать, что построенная функция является единственным решением задачи (8). Поскольку $G(x, y, t) \in \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{C} \cap \mathbf{C}^1)$ (см. далее лемму 1), получаем

$$u(x, t) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^1) \cap \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{C}^1).$$

Теорема доказана.

Заметим, что по принципу Дюамеля решение u нелинейной задачи (1) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau, \quad (14)$$

где $\mathcal{N}(u) = \lambda|u|^\alpha u$.

Определим пространства

$$\mathbf{X} \equiv \{ \varphi(x, t) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}_r^{0, \mu}) \cap \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{H}_r^{1, 0}) \mid \|\varphi\|_{\mathbf{X}} < +\infty \},$$

где $\|\varphi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \left(\langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha r} - \frac{\mu}{\alpha}} \|x^\mu u\|_{\mathbf{L}^r} + t^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha r}} \|u_x\|_{\mathbf{L}^r} \right)$, $\mu \in [0, 1]$, и

$$\mathbf{W} \equiv \{ \varphi(x, t) \in \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{L}^{1, \mu} \cap \mathbf{L}^\infty) : \|\varphi\|_{\mathbf{W}} = (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1, \mu}} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}) < \infty \}.$$

Определим непрерывный линейный функционал $f(\varphi) : \mathbf{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$f(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Докажем следующие оценки для оператора $\mathcal{G}$ в пространстве $\mathbf{X}$.

ЛЕММА 1. *Выполнены неравенства*

$$\|\mathcal{G}\varphi\|_{\mathbf{X}} \leq C(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}), \quad (15)$$

$$\sup_{t>1} t^{\frac{1}{\alpha}(1+\mu)} \|\mathcal{G}\varphi - t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda_0(0) f(\varphi)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1, \mu}}, \quad (16)$$

$$\left\| x^\mu \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^r} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha r} + \frac{\mu}{\alpha}} \|\langle t \rangle^{1+\gamma} \varphi\|_{\mathbf{W}}, \quad (17)$$

$$\left\| \partial_x \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^r} \leq C t^{1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha r}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|\langle t \rangle^{1+\gamma} \varphi\|_{\mathbf{W}}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем формулу (6) для функции Грина в виде

$$G(x, y, t) = F_1(x - y, t) + F_2(x, y, t),$$

где

$$F_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-K(p)t+px} dp, \quad (19)$$

$$F_2(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t - k(\xi)y} k(\xi) \xi^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{px} K(p)}{p(K(p) + \xi)} dp d\xi. \quad (20)$$

Докажем сначала оценку

$$t^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha r}} (\|F_1(q, t)\|_{\mathbf{L}^r} + t^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|q^\mu F_1(q, t)\|_{\mathbf{L}^r} + t^{\frac{1}{\alpha}} \|\partial_q F_1(q, t)\|_{\mathbf{L}^r}) \leq C \quad (21)$$

при $t > 0$, где $\mu > 0$ и $1 \leq r \leq \infty$.

Делая замену $p^\alpha t = z^\alpha$ и $\tilde{q} = qt^{-1/\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} |F_1(q, t)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{qp} e^{-K(p)t} dp \right| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \left| \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\tilde{q}z} e^{-K(z)} dz \right|, \\ |q^\mu F_1(q, t)| &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha}} \left| \tilde{q}^\mu \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\tilde{q}z} e^{-K(z)} dz \right| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha}} \langle \tilde{q} \rangle^{\mu-1-\gamma}, \\ |\partial_q F_1(q, t)| &\leq Ct^{-\frac{2}{\alpha}} \left| \int_{-i\infty}^{i\infty} z e^{\tilde{q}z} e^{-K(z)} dz \right| \leq Ct^{-\frac{2}{\alpha}} \langle \tilde{q} \rangle^{-1-\gamma}, \end{aligned}$$

где $0 < \gamma < \alpha$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|F_1(q, t)\|_{\mathbf{L}^r} &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha r}}, \\ \|q^\mu F_1(q, t)\|_{\mathbf{L}^r} &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha} + \frac{1}{\alpha r}} \left(\left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) d\tilde{q} (1 + \tilde{q}^2)^{\frac{(\mu-1-\gamma)r}{2}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha} + \frac{1}{\alpha r}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\|\partial_q F_1(q, t)\|_{\mathbf{L}^r} \leq Ct^{-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha r}}. \quad (23)$$

Тем самым, оценка (21) доказана.

Докажем теперь, что

$$\begin{aligned} \sup_{t>0, y>0} t^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha r} + \mu_1 + \gamma} \langle t \rangle^{-2\gamma} y^{-\mu_1 \alpha} (\|F_2(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^r} + t^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|x^\mu F_2(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^r} \\ + t^{\frac{1}{\alpha}} \|\partial_x F_2(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^r}) \leq C, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\mu \geq 0$, $\gamma > 0$, $0 \leq \mu_1 < \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{r} - \gamma\alpha)$ и $1 \leq r \leq \infty$.

Сделав замену переменных $p^\alpha t = z^\alpha$ и $\xi t = q$ в формуле (20), получим

$$|F_2(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \left| \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\tilde{x}z} K(z) z^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} q^{-1} k(q) \frac{e^{q-k(q)\tilde{y}}}{K(z) + q} dq dz \right|. \quad (25)$$

Ввиду аналитичности подынтегральных функций поменяем контуры интегрирования по теореме Коши: по переменной z – на контур

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ z = \rho e^{\pm i\beta_1}, \rho \geq 0, \beta_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \right\} \quad (26)$$

и по переменной q – на контур

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ q = e^{i\phi_2}, \phi_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} \cup \left\{ q = \rho e^{\pm i\phi_2}, \rho \geq 1, \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 \right\}, \quad (27)$$

где $\varepsilon_2 > 0$ достаточно мало. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |e^q| &\leq C|q|^{-\gamma}, & |K(z) + q|^{-1} &\leq C|z|^{-\nu\alpha}|q|^{\nu-1}, & |e^{z\tilde{x}}| &\leq C|z\tilde{x}|^{-\mu_2}, \\ |e^{-k(q)\tilde{y}}| &\leq C|q^{\frac{1}{\alpha}}\tilde{y}|^{-\alpha\mu_1} \end{aligned} \quad (28)$$

для всех $q \in \mathcal{C}_2$ и $z \in \mathcal{C}_1$, где $\nu \in [0, 1]$, $\gamma \geq 0$ и $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$. Тогда в силу неравенств (28) получим

$$\begin{aligned} |F_2(x, y, t)| &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}}y^{-\mu_1\alpha}\tilde{x}^{-\mu_2} \\ &\times \left(\int_{\mathcal{C}_1, |z| \leq 1} |z|^{\alpha-1-\nu_1\alpha-\mu_2} \int_{\mathcal{C}_2} e^{-C|q|}|q|^{\frac{1}{\alpha}-2+\nu_1-\mu_1-\gamma} |dq| |dz| \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{C}_1, |z| > 1} |z|^{\alpha-1-\nu_2\alpha-\mu_2} \int_{\mathcal{C}_2} e^{-C|q|}|q|^{\frac{1}{\alpha}-2+\nu_2-\mu_1-\gamma} |dq| |dz| \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\frac{1}{\alpha} - 2 + \nu_i - \mu_1 > -1, \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

$$\alpha - 1 - \nu_1\alpha - \mu_2 > -1, \quad \alpha - 1 - \nu_2\alpha - \mu_2 < -1. \quad (31)$$

При условии $\alpha\mu_1 + \mu_2 < 1$ существуют $\nu_1 \geq 0$ и $\nu_2 \geq 0$ такие, что соотношения (31) верны. Поэтому получим

$$|F_2(p, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1-\mu_2}{\alpha}+\mu_1}x^{-\mu_2}y^{-\alpha\mu_1}. \quad (32)$$

Из (32) следует, что

$$\begin{aligned} \|F_2(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^r} &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r\alpha}+\mu_1\pm\gamma}y^{-\alpha\mu_1} \left(\int_0^\infty \{x'\}^{-(1-\gamma)} \langle x' \rangle^{-1-\gamma} dx' \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r\alpha}+\mu_1\pm\gamma}y^{-\alpha\mu_1}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $0 \leq \mu_1 < \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{r})$. Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} |x^\mu F_2(x, y, t)| &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}+\frac{\mu-\mu_2}{\alpha}+\mu_1}x^{\mu-\mu_2}y^{-\alpha\mu_1}, \\ |\partial_x F_2(x, y, t)| &\leq Ct^{-\frac{2-\mu_2}{\alpha}+\mu_1}y^{-\mu_1\alpha}x^{-\mu_2}. \end{aligned}$$

Из последних неравенств найдем, что

$$\|x^\mu F_2(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^r} \leq Ct^{-\frac{1+\mu}{\alpha}+\frac{1}{r\alpha}+\mu_1\pm\gamma}y^{-\mu_1\alpha}, \quad (34)$$

$$\|\partial_x F_2(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^r} \leq Ct^{-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{r\alpha}+\mu_1}y^{-\mu_1\alpha}. \quad (35)$$

Тем самым оценка (24) доказана. Из оценок (21) и (24) легко получается результат (15) леммы 1. Для доказательства (16) сначала установим следующую оценку:

$$G(x, y, t) = t^{-\frac{1}{\alpha}}\Lambda_0(xt^{-\frac{1}{\alpha}}) + y^\mu O(t^{-\frac{1+\mu}{\alpha}}) \quad (36)$$

при $t \rightarrow \infty$, где $x > 0$ и $y > 0$.

Перепишем равенство (19) для функции $F_1(x, t)$ в виде

$$F_1(x - y, t) = F_1(x, t) + [F_1(x - y, t) - F_1(x, t)].$$

Сделаем замену $p^\alpha t = z^\alpha$, найдем, что

$$F_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{xp - K(p)t} dp = t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zs - K(z)} dz. \quad (37)$$

Используя оценку $|e^{-py} - 1| \leq C|py|^\mu$, где $y > 0$, $p \in (-i\infty, i\infty)$, $\mu \in [0, 1]$, для $x > 0$ и $y > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |F_1(x - y, t) - F_1(x, t)| &\leq \left| \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{xp - K(p)t} (e^{-py} - 1) dp \right| \\ &\leq Cy^\mu t^{-\frac{1+\mu}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} |z|^\mu |e^{xt - \frac{1}{\alpha} z - K(z)}| |dz| \leq Cy^\mu t^{-\frac{1+\mu}{\alpha}} = y^\mu O(t^{-\frac{1+\mu}{\alpha}}), \end{aligned} \quad (38)$$

где $p^\alpha t = z^\alpha$. Поэтому из (37) получим

$$F_1(x - y, t) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zs - K(z)} dz + y^\mu O(t^{-\frac{1+\mu}{\alpha}}). \quad (39)$$

Теперь представим равенство (20) для $F_2(x, y, t)$ следующим образом:

$$F_2(x, y, t) = M(x, y, t) + R(x, y, t), \quad (40)$$

где $M(x, t) = F_2(x, 0, t)$, $R = F_2(x, y, t) - F_2(x, 0, t)$. Учитывая соотношение $|e^{-C\xi^{1/\alpha}y} - 1| \leq C|\xi^{1/\alpha}y|^\mu$, после замены переменных $\xi t = q$ и $p^\alpha t = z^\alpha$ для $t > 0$ и $y > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \sup_{x>0} |F_2(x, y, t) - F_2(x, 0, t)| &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{\mu}{\alpha}} y^{\mu_1} \sup_{x>0} \int_{-i\infty}^{i\infty} |e^{xt - \frac{1}{\alpha} z}| |z|^{\alpha-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} |q|^{\frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{\mu}{\alpha}} \frac{|e^q|}{|K(z) + q|} |dz| |dq| \\ &= y^\mu O(t^{-\frac{1+\mu}{\alpha}}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$F_2(x, y, t - \tau) = M(x, t) + y^\mu O(t^{-\frac{1+\mu}{\alpha}}), \quad (41)$$

где функцию $M(x, t)$ запишем в виде

$$M(x, t) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{xt - \frac{1}{\alpha} z} K(z) z^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^q \frac{q^{-1} k(q)}{K(z) + q} dq dz.$$

По теореме Коши найдем

$$\begin{aligned} &\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sz} K(z) z^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^q \frac{q^{-1} k(q)}{K(z) + q} dq dz \\ &= 2\pi i \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sz} e^{-K(z)} dz + \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sz} K(z) z^{-1} \int_{\Gamma} e^q \frac{q^{-1} k(q)}{K(z) + q} dq dz = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где контур Γ определим следующим образом:

$$\Gamma = \{z \in (-\infty e^{-i\pi}, 0e^{-i\pi}) \cup (0e^{i\pi}, -\infty e^{i\pi})\}.$$

Используя тождество

$$\int_{\Gamma} e^q \frac{q^{-1}k(q)}{K(z)+q} dq = |\Gamma(2-\alpha)C_{\alpha}|^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-q} \frac{q^{-1+\frac{1}{\alpha}}(1-e^{i\frac{2\pi}{\alpha}})}{K(z)-q} dq,$$

получаем

$$\begin{aligned} M(x, t) &= -t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sz} e^{-K(z)} dz + t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{|\Gamma(2-\alpha)C_{\alpha}|^{1+\frac{1}{\alpha}}}{4\pi^2} (1 - e^{i\frac{2\pi}{\alpha}}) \\ &\quad \times \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sz} z^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-q} \frac{q^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{K(z)-q} dq dz \\ &= -t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sz} e^{-K(z)} dz + t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda_0(xt^{-\frac{1}{\alpha}}). \end{aligned} \quad (42)$$

Из соотношений (39), (41), (42) нетрудно установить оценку (36) и затем неравенство (16).

Докажем теперь оценки (17) и (18). Пусть $t \in [0, 1]$. Ввиду (35) найдем

$$\|\|\partial_x F_2(x, y, t)\|_{\mathbf{L}_x}\|_{\mathbf{L}_y^1} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha r}} \quad (43)$$

при $t > 0$. Поэтому, используя неравенство (22), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| x^{\mu} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\leq \int_0^t (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^r} \|x^{\mu} F_1\|_{\mathbf{L}^1} + \|x^{\mu}\varphi\|_{\mathbf{L}^r} \|F_1\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau + \int_0^t \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \|x^{\mu} F_2\|_{\mathbf{L}_x^r \mathbf{L}_y^1} d\tau \\ &< C\|\varphi\|_{\mathbf{W}} \end{aligned} \quad (44)$$

при $t \in [0, 1]$. Из (43) и (23) найдем

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^r} &\leq \int_0^t (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^r} \|\partial_x F_1\|_{\mathbf{L}^1} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \|\partial_x F_2\|_{\mathbf{L}_x^r \mathbf{L}_y^1}) d\tau \\ &\leq t^{-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha r}} \|\varphi\|_{\mathbf{W}} \end{aligned} \quad (45)$$

при $t \in [0, 1]$.

Теперь рассмотрим случай $t > 1$. Имеем

$$\begin{aligned} &\left\| x^{\mu} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^r} \leq \int_0^{t/2} (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|x^{\mu} F_1\|_{\mathbf{L}^r} + \|x^{\mu}\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|F_1\|_{\mathbf{L}^r}) d\tau \\ &\quad + \int_{t/2}^t (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^r} \|x^{\mu} F_1\|_{\mathbf{L}^1} + \|x^{\mu}\varphi\|_{\mathbf{L}^r} \|F_1\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &\quad + \int_0^{t/2} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|x^{\mu} F_2\|_{\mathbf{L}_x^r \mathbf{L}_y^{\infty}} d\tau + \int_{t/2}^t \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \|x^{\mu} F_2\|_{\mathbf{L}_x^r \mathbf{L}_y^1} d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому в силу оценок (34), (35), (22) и (23) получим

$$\left\| x^\mu \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^r} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r\alpha} + \frac{\mu}{\alpha}} \|\langle t \rangle^{1+\gamma} \varphi\|_{\mathbf{W}} \quad (46)$$

при $t > 1$. Аналогично оценим $\|\partial_x \mathcal{G} \varphi\|_{\mathbf{L}^r}$:

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^r} &\leq \int_0^{t/2} (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|\partial_x F_1\|_{\mathbf{L}^r} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|\partial_x F_2\|_{\mathbf{L}^r \mathbf{L}^\infty}) d\tau \\ &\quad + \int_{t/2}^t (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^r} \|\partial_x F_1\|_{\mathbf{L}^1} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\partial_x F_2\|_{\mathbf{L}_x^r \mathbf{L}_y^1}) d\tau \\ &\leq C t^{-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{r\alpha}} \|\langle t \rangle^{1+\gamma} \varphi\|_{\mathbf{W}} \end{aligned} \quad (47)$$

при $t > 1$. Следовательно, из (44)–(47) вытекают оценки (17) и (18). Лемма доказана.

Введем пространство

$$\mathbf{Y} = \{\varphi \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,\mu}(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)) \cap \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+)) : \|\varphi\|_{\mathbf{Y}} < \infty\},$$

где $p = 1 + \alpha$, $\mu \geq 0$ и

$$\|\varphi\|_{\mathbf{Y}} = \sup_{t \geq 0} (\langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^{1,1}} + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{p})} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^p}) + \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

Докажем следующий результат.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = 0.$$

Тогда верны следующие оценки для $t > 0$:

$$\left\| g^{1+\frac{1}{\alpha}}(t) \int_0^t g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{Y}} \leq C \|\langle t \rangle f\|_{\mathbf{Y}},$$

где $g(t) = 1 + n \log(2+t)$, $n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки $g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(\tau) \leq C$ и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} + \left\| \int_0^t g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \\ &\leq C \int_0^4 (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \|f(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leq C \|(1+t)f(x, t)\|_{\mathbf{Y}} \int_0^4 (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} (1+\tau)^{-1} d\tau \\ &\leq C g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t) \|(1+t)f\|_{\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

для всех $0 \leq t \leq 4$. Рассмотрим случай $t > 4$. Поскольку

$$g(t) = 1 + n \log(2+t), \quad n > 0,$$

получим, что

$$(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}} \leq Cg^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t),$$

$$\sup_{\tau \in [\sqrt{t}, t]} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(\tau) \leq C(1+n \log(2+\sqrt{t}))^{-1-\frac{1}{\alpha}} \leq C \left(1 + \frac{n}{2} \log(1+t)\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leq Cg^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t).$$

В силу условия $\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = 0$ имеем

$$\mathcal{G}(t)f = \mathcal{G}(t)f - \widehat{f}(0)G_0(t),$$

где $G_0(x, t) = (t+1)^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda_0(x(t+1)^{-\frac{1}{\alpha}})$. Используя вторую оценку леммы 1, для $1 \leq p \leq \infty$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ & \leq C \int_0^{\sqrt{t}} (t-\tau')^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{p}-1)-\frac{\mu}{\alpha}} (\tau')^{\frac{\mu}{\alpha}-1} d\tau' \sup_{\tau>0} (1+\tau)^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|(1+\tau)f(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \\ & \quad + Cg^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t) \int_{\sqrt{t}}^{t/2} (t-\tau')^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{p}-1)-\frac{\mu}{\alpha}} (\tau')^{\frac{\mu}{\alpha}-1} d\tau' \sup_{\tau>0} (1+\tau)^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|(1+\tau)f(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \\ & \quad + Cg^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t) \int_{t/2}^t (\tau')^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{p}-1)-1} d\tau' \sup_{\tau>0} (1+\tau)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{p}-1)} \|(1+\tau)f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \\ & \leq C(t^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{p}-1)-\frac{\mu}{2\alpha}} + g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t)t^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{p}-1)}) \|(1+t)f(t)\|_{\mathbf{Y}} \\ & \leq Cg^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t)t^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{p}-1)} \|(1+t)f(x, t)\|_{\mathbf{Y}}, \\ & \left\| \int_0^t g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(\tau') \mathcal{G}(t-\tau')f(\tau') d\tau' \right\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \\ & \leq C \int_0^{\sqrt{t}} (\tau')^{\frac{\mu}{\alpha}-1} d\tau' \sup_{\tau>0} (1+\tau)^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|f(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \\ & \quad + Cg^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t) \int_{\sqrt{t}}^t (\tau')^{\frac{\mu}{\alpha}-1} d\tau' \sup_{\tau>0} (1+\tau)^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|f(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \\ & \leq C(t^{\frac{\mu}{2\alpha}} + g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t)t^{\frac{\mu}{\alpha}}) \|(1+t)f(t)\|_{\mathbf{Y}} \leq Cg^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t)t^{\frac{\mu}{\alpha}} \|(1+t)f(t)\|_{\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

при $t > 4$. Лемма доказана.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = (1 - |y|^\alpha)y + \varphi. \quad (48)$$

Обозначим $\psi(t) = 4(1 - 2^{-\alpha})^{-1} \sup_{\tau \geq t} |\varphi(\tau)|$. Справедлива следующая лемма [28].

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi \in \mathbf{C}([0, \infty))$ и $e^{\gamma t} \psi(t) \in \mathbf{L}^2(0, \infty)$, $0 < \gamma < 1$. Тогда решение уравнения (48) имеет только одно из двух асимптотических поведений: $|y(t)| \leq \psi(t)$ или $y(t) = 1 + O(e^{-\gamma t})$.

В следующей теореме рассмотрим случай малых начальных данных.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что начальные данные $u_0 \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L}^{1,\mu}(\mathbb{R}^+)$ малы: $\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,1}} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^p} \leq \varepsilon^3$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, $p = 1 + \alpha$, $\mu \geq 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1)*

$$u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L}^{1,\mu}(\mathbb{R}^+)),$$

удовлетворяющее равномерно по $x \in \mathbb{R}^+$ при $t \rightarrow \infty$ одной из следующих двух асимптотик при $0 < \gamma < 1$:

$$u(t) = \left(\frac{1}{\alpha\eta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} G_0(t) \log^{-\frac{1}{\alpha}} t + O(t^{-\frac{1}{\alpha}} \log^{-\frac{1}{\alpha}-\gamma} t), \quad u(t) = O(t^{-\frac{1}{\alpha}} \log^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию

$$w(x, t) = u(x, t) - \theta(t)G_0(x, t),$$

где

$$G_0(x, t) = (t+1)^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda_0(x(t+1)^{-\frac{1}{\alpha}}).$$

Тогда, учитывая, что $\partial_t G_0(x, t) + C_\alpha \partial_x^\alpha G_0(x, t) = 0$, из уравнения (1) получаем, что новая функция w удовлетворяет уравнению

$$w_t + C_\alpha \partial_x^\alpha w = \mathcal{N}(u) - \theta' G_0, \quad (49)$$

где $\mathcal{N}(u) = \lambda|u|^\alpha u$.

Выберем функцию $\theta(t)$ как решение уравнения

$$\theta'(t) = \frac{1}{C_1} \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{N}(u(x, t)) dx \quad (50)$$

с начальным условием $\theta(0) = \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x) dx$ при $C_1 = f(G_0)$. Тогда, поскольку $f(\partial_x^\alpha w) = 0$, получим, что для всех $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^+} w(x, t) dx = 0.$$

В силу (50) уравнение (49) можно переписать в интегральном виде:

$$w(t) = \mathcal{G}(t)w_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \left(\mathcal{N}(u(\tau)) - G_0(\tau) \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{N}(u(\tau)) dx \right) d\tau, \quad (51)$$

где $w_0 = u_0(x) - G_0(x, 0) \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x') dx'$. Так как по определению

$$\lambda^{\alpha+1} \int_{\mathbb{R}^+} G_0^{\alpha+1}(x', t) dx' = \eta(1+t)^{-1},$$

получим

$$\theta'(t) = -\frac{1}{C_1} \eta |\theta|^\alpha \theta(t) (1+t)^{-1} - \frac{1}{C_1} \int_{\mathbb{R}^+} (|u|^\alpha u - |\theta G_0|^\alpha \theta G_0) dx. \quad (52)$$

Будем решать уравнения (51) и (52) последовательными приближениями. Пусть $w_1 = u_1 = \theta_1 = 0$. Тогда для $n \geq 1$ определим

$$w_{n+1}(t) = \mathcal{G}(t)w_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \left(\mathcal{N}(u_n) - G_0(\tau) \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{N}(u_n) dx \right) d\tau, \quad (53)$$

где $u_n(t) = \theta_n(t)G_0(t) + w_n(t)$ и

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(t) = \theta(0) - \frac{1}{C_1} \eta \int_0^t |\theta_{n+1}|^\alpha \theta_{n+1}(\tau) \frac{d\tau}{1+\tau} \\ - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} (|u_n|^\alpha u_n - |\theta_n G_0|^\alpha \theta_n G_0) dx d\tau. \end{aligned} \quad (54)$$

Докажем следующие оценки:

$$\|g^{1+\frac{1}{\alpha}} w_n\|_{\mathbf{Y}} \leq \varepsilon^{1+\alpha}, \quad \|g^{\frac{1}{\alpha}} u_n\|_{\mathbf{Y}} \leq C\varepsilon, \quad (55)$$

где $g = 1 + \varepsilon^\alpha \log(2+t)$. Из леммы 2 получим, что для любой функции $\varphi \in \mathbf{Y}$, удовлетворяющей условию $\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) dx = 0$, верна оценка

$$\left\| g^{\frac{1}{\alpha}+1}(t) \int_0^t g^{-(\frac{1}{\alpha}+1)}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{Y}} \leq C \|\langle t \rangle \varphi\|_{\mathbf{Y}}.$$

Тогда по индукции, используя (53), (55), найдем

$$\begin{aligned} \|g^{\frac{1}{\alpha}+1} w_{n+1}\|_{\mathbf{Y}} &\leq \|g^{\frac{1}{\alpha}+1} \mathcal{G} w_0\|_{\mathbf{Y}} \\ &+ \left\| g^{\frac{1}{\alpha}+1} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \left(\mathcal{N}(u_n) - G_0(\tau) \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{N}(u_n) dx \right) d\tau \right\|_{\mathbf{Y}} \\ &\leq C\varepsilon^3 + C \|\langle t \rangle g^{\frac{1}{\alpha}+1} \mathcal{N}(u_n)\|_{\mathbf{Y}} \leq \varepsilon^{1+\alpha}. \end{aligned} \quad (56)$$

Поскольку $\|g^{\frac{1}{\alpha}} u_n\|_{\mathbf{Y}} \leq \varepsilon$, имеем

$$|\theta_n(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^+} u_n dx \right| \leq \varepsilon g^{-\frac{1}{\alpha}}(t),$$

поэтому получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^+} (|u_n|^\alpha u_n - |\theta_n G_0|^\alpha \theta_n G_0) dx \right| &\leq C \int_{\mathbb{R}^+} |w_n| (|u_n|^\alpha + |\theta_n G_0|^\alpha) dx \\ &\leq C \|w_n\|_{\mathbf{L}^1} (\|u_n\|_{\mathbf{L}^\infty}^\alpha + \varepsilon^\alpha g^{-1}(t) \langle t \rangle^{-1}) \leq C \varepsilon^{1+2\alpha} \langle t \rangle^{-1} g^{-2-\frac{1}{\alpha}}(t). \end{aligned}$$

Дифференцируя равенство (54), получаем

$$\begin{aligned} \theta'_{n+1}(t) &= -\eta |\theta_{n+1}(t)|^\alpha \theta_{n+1}(t) (1+t)^{-1} - \int_{\mathbb{R}^+} (|u_n|^\alpha u_n - |\theta_n G_0|^\alpha \theta_n G_0) dx \\ &= -\eta |\theta_{n+1}(t)|^\alpha \theta_{n+1}(t) (1+t)^{-1} + O(\varepsilon^{1+2\alpha} \langle t \rangle^{-1} g^{-2-\frac{1}{\alpha}}(t)), \end{aligned}$$

откуда после замены переменных $\theta_{n+1}(t) = g^{-\frac{1}{\alpha}}(t) \left(\frac{1}{\eta^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon y(\tau)$, $\tau = \frac{1}{\alpha} \log g(t)$ имеем следующее уравнение:

$$y' = y - |y|^\alpha y + O(\varepsilon^\alpha e^{-\alpha\tau}). \quad (57)$$

Применяя результат леммы 3 к уравнению (57), имеем две возможности для функции $\theta_{n+1}(t)$ при всех $t > 0$:

$$\theta_{n+1}(t) = \varepsilon \left(\frac{1}{\alpha\eta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} g^{-\frac{1}{\alpha}}(t) + O(\varepsilon g^{-\frac{1}{\alpha}(1+\gamma_1)}(t)) \quad (58)$$

или

$$|\theta_{n+1}(t)| \leq \varepsilon^{1+\alpha} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t), \quad (59)$$

где $0 < \gamma_1 < \alpha$. Таким образом, в любом случае

$$|\theta_{n+1}(t)| \leq C\varepsilon g^{-\frac{1}{\alpha}}(t).$$

Поскольку $u_{n+1} = \theta_{n+1}G_0 + w_{n+1}$, в силу (56) получим (55). Поэтому по индукции верны оценки (55) для всех n .

Аналогично можно доказать следующие оценки для разностей:

$$\begin{aligned} \|g^{1+\frac{1}{\alpha}}(w_{n+1} - w_n)\|_{\mathbf{Y}} &\leq \frac{1}{2} \|g^{1+\frac{1}{\alpha}}(w_n - w_{n-1})\|_{\mathbf{Y}}, \\ \|g^{\frac{1}{\alpha}}(u_{n+1} - u_n)\|_{\mathbf{Y}} &\leq \frac{1}{2} \|g^{\frac{1}{\alpha}}(u_n - u_{n-1})\|_{\mathbf{Y}}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательные приближения w_n и u_n сходятся к w и u соответственно при $n \rightarrow \infty$. Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в формулах (58) и (59), получим

$$\theta(t) = \left(\frac{1}{\alpha\eta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \log^{-\frac{1}{\alpha}} t + O(\log^{-\frac{1}{\alpha}(1+\gamma_1)} t) \quad (60)$$

или

$$\theta(t) = O(\log^{-\frac{1}{\alpha}(1+\gamma_1)} t) \quad (61)$$

при $t \rightarrow \infty$. Выражение (60) дает первую асимптотическую формулу теоремы. В случае (61) мы получаем для решения более быструю по времени оценку. Теорема доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Локальное существование решения задачи (1) может быть получено стандартными методами, например при использовании принципа сжатых отображений (см. [29]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u_0 \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^{1,\mu}$, $\mu > 0$. Тогда для некоторого интервала времени $T > 0$ существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^{1,\mu})$ задачи (1).

Из теоремы 4 следует, что глобальное решение (если оно существует) является единственным. Действительно, предположим, что существуют два различных глобальных решения задачи (1). Ввиду непрерывности по времени решений существует максимальный временной интервал $[0, T]$, где решения равны, а для $t > T$ они различны. Тогда, применяя теорему 4 с начальным временем T , получим, что эти решения равны на некотором интервале $[T, T_1]$. Это

противоречит тому, что $[0, T]$ – максимальный интервал времени, на котором решения совпадают.

Поэтому основной целью при доказательстве теоремы 1 является установление глобального по времени существования решений при использовании методов, разработанных в книге [28].

Для получения оценки в норме пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+)$ применим так называемый энергетический метод: умножим уравнение (1) на u и проинтегрируем результат по $x \in \mathbb{R}^+$. Получим

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\lambda \int_0^{+\infty} \|u\|^{\alpha+2} dx = -2C_\alpha \int_0^{+\infty} u \partial_x^\alpha u dx. \quad (62)$$

Применяя теорему Планшереля, для вещественных функций f, g имеем

$$\int_0^{+\infty} fg dx = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{VP} \int_{-i\infty}^{i\infty} \bar{f} \hat{g} dp.$$

Тогда, используя формулу (2), представим левую часть уравнения (62) в виде

$$\begin{aligned} 2C_\alpha \int_0^{+\infty} u \partial_x^\alpha u dx &= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{VP} \int_{-i\infty}^{i\infty} \bar{\hat{u}}(p) C_\alpha p^\alpha \left(\hat{u}(p) - \frac{u(0)}{p} \right) dp \\ &= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{VP} \int_{-i\infty}^{i\infty} C_\alpha p^\alpha \left(\bar{\hat{u}}(p) + \frac{u(0)}{p} \right) \left(\hat{u}(p) - \frac{u(0)}{p} \right) dp \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{VP} \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} C_\alpha p^\alpha \left| \hat{u}(p) - \frac{u(0)}{p} \right|^2 dp \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} u(0) \operatorname{VP} \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} C_\alpha p^{\alpha-1} \left(\hat{u}(p) - \frac{u(0)}{p} \right) dp. \end{aligned} \quad (63)$$

Поскольку функции $\hat{u}(p)$ и $K(p) = C_\alpha p^\alpha$ аналитичны в правой комплексной полуплоскости, по теореме Коши получаем

$$\operatorname{VP} \int_{-i\infty}^{i\infty} C_\alpha p^{\alpha-1} \left(\hat{u}(p) - \frac{u(0)}{p} \right) dp = \frac{1}{2} \operatorname{res}_{p=0} \left[C_\alpha p^{\alpha-1} \left(\hat{u}(p) - \frac{u(0)}{p} \right) \right] = 0.$$

Тогда из (63) и условия диссипации $\operatorname{Re} K(p) \geq 0$ для $\operatorname{Re} p = 0$ имеем

$$\begin{aligned} 2C_\alpha \int_0^{+\infty} u \partial_x^\alpha u dx &= \operatorname{Re} \operatorname{VP} \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} C_\alpha p^\alpha \left| \hat{u}(p) - \frac{u(0)}{p} \right|^2 dp \\ &= 2 \operatorname{VP} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} K(ip) \left| \hat{u}(ip) - \frac{u(0)}{ip} \right|^2 dp > 0, \end{aligned}$$

а также

$$\lambda \int_0^{+\infty} |u|^{\alpha+2} dx > 0,$$

поскольку $\lambda > 0$. Поэтому из уравнения (62) видно, что

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq 0. \quad (64)$$

Следовательно, после интегрирования по времени получаем

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u_0\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (65)$$

Теперь докажем оценку

$$\sup_{t \geq 0} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u_{0x}\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (66)$$

Дифференцируя (1) по переменной x , затем умножая полученное уравнение на u_x и интегрируя по $x \in \mathbb{R}^+$, получаем

$$\frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\alpha\lambda \int_0^{+\infty} |u|^{\alpha-1} |u|_x^2 dx = -2 \int_0^{+\infty} u_x \partial_x^{\alpha+1} u dx. \quad (67)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} u_x \partial_x^{\alpha+1} u dx &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } K(ip) |p|^2 \left| \hat{u}(ip) - \frac{u(0)}{ip} \right|^2 dp > 0, \\ \alpha\lambda \int_0^{+\infty} |u|^{\alpha-1} |u|_x^2 dx &> 0, \end{aligned}$$

интегрируя (67) по времени, получим (66).

Заметим, что оценки убывания по времени (65) и (66) не оптимальны. Для получения оптимальных оценок необходимо показать, что норма решений в $\mathbf{L}^1$ не растет по времени. Так же, как в работах [2], [6], умножим уравнение (1) на $S \equiv \text{sign } u \equiv \frac{u}{|u|}$ и проинтегрируем полученный результат по $x \in \mathbb{R}^+$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\int_0^{+\infty} u_t(x, t) S(x, t) dx + \int_0^{+\infty} \mathcal{N}(u)(x, t) S(x, t) dx = - \int_0^{+\infty} S(x, t) C_\alpha \partial_x^\alpha u dx, \quad (68)$$

где $\mathcal{N}(u) = \lambda |u|^\alpha u$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u_t(x, t) S(x, t) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} |u(x, t)| dx = \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \\ \int_0^{+\infty} \mathcal{N}(u)(x, t) S(x, t) dx &= \lambda \int_0^{+\infty} |u|^{\alpha+1} dx \geq 0. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\int_0^{+\infty} S(x, t) C_\alpha \partial_x^\alpha u dx \geq 0. \quad (69)$$

Ввиду [30] имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} p^{-\nu-1} e^{px} dp = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu.$$

Тогда для $\alpha \in (1, 2)$ представим оператор $\mathcal{L}u$ в виде потенциала Рисса (см. [23]):

$$\mathcal{L}u = -C \partial_x \int_0^x (x-y)^{1-\alpha} \partial_y u(y) dy, \quad C > 0.$$

Запишем $u(x, t) = S(x, t)|u(x, t)|$, где $S(x, t) = \text{sign}(u(x, t))$, и обозначим

$$K_\varepsilon''(x) = \begin{cases} \partial_x^2 x^{1-\alpha} & \text{для } x \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{для } 0 \leq x < \varepsilon, \end{cases}$$

так что $K_\varepsilon''(x) \geq 0$ для всех $x > 0$, а также

$$K_\varepsilon'(x) = - \int_x^{+\infty} K_\varepsilon''(x) dx, \quad K_\varepsilon(x) = - \int_x^{+\infty} K_\varepsilon'(x) dx.$$

Легко видеть, что

$$\partial_x \int_0^x (x-y)^{1-\alpha} u_y(y, t) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_x \int_0^x K_\varepsilon(x-y) u_y(y, t) dy.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} S(x, t) \partial_x \int_0^x K_\varepsilon(x-y) \partial_y u(y, t) dy dx \\ &= \int_0^{+\infty} S(x, t) \partial_x \int_0^x K_\varepsilon(x-y) S(y, t) \partial_y |u(y, t)| dy dx \\ &= K_\varepsilon(0) \int_0^{+\infty} S^2(x, t) \partial_x |u(x, t)| dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^+} \partial_y |u(y, t)| \int_y^{+\infty} S(y, t) S(x, t) \partial_x K_\varepsilon(x-y) dx dy. \end{aligned}$$

Тогда, используя тождество $S(y, t)S(x, t) = 1 - \frac{1}{2}(S(x, t) - S(y, t))^2$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} S(x, t) \partial_x \int_0^x K_\varepsilon(x-y) \partial_y u(y, t) dy dx \\ &= K_\varepsilon(0) \int_0^{+\infty} S^2(x, t) \partial_x |u(x, t)| dx + \int_0^{+\infty} \partial_y |u(y, t)| \int_y^{+\infty} \partial_x K_\varepsilon(x-y) dx dy \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \partial_y |u(y, t)| \int_y^{+\infty} (S(x, t) - S(y, t))^2 \partial_x K_\varepsilon(x-y) dx dy. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^{+\infty} \partial_y |u(y, t)| \int_y^{+\infty} \partial_x K_\varepsilon(x-y) dx dy = -K_\varepsilon(0) \int_0^{+\infty} \partial_y |u(y, t)| dy,$$

нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} S(x, t) \partial_x \int_0^x K_\varepsilon(x-y) \partial_y u(y, t) dy dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \partial_y |u(y, t)| \int_y^{+\infty} (S(x, t) - S(y, t))^2 \partial_x K_\varepsilon(x-y) dx dy. \end{aligned} \quad (70)$$

Тогда интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \partial_y |u(y, t)| \int_y^{+\infty} (S(x, t) - S(y, t))^2 \partial_x K_\varepsilon(x - y) dx dy \\ &= -|u(0, t)| \int_0^{+\infty} (S(x, t) - S(0, t))^2 \partial_x K_\varepsilon(x) dx \\ & \quad + \int_0^{+\infty} |u(y, t)| \int_y^{+\infty} K_\varepsilon''(x - y) (S(x, t) - S(y, t))^2 dx dy. \end{aligned}$$

Поэтому из равенства (70), используя отрицательность производной $K'_\varepsilon(x)$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} S(x, t) \partial_x \int_0^x K_\varepsilon(x - y) \partial_y u(y, t) dy dx \\ & \leq -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} |u(y, t)| \int_y^{+\infty} K_\varepsilon''(x - y) (S(x, t) - S(y, t))^2 dx dy, \end{aligned}$$

следовательно, находим

$$\int_0^{+\infty} S(x, t) \partial_x \int_0^x K_\varepsilon(x - y) \partial_y u(y, t) dy dx \leq 0,$$

поскольку $K''(x) > 0$ для всех $x > 0$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} S(x, t) C_\alpha \partial_x^\alpha u dx \\ & \geq -\frac{C}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} |u(y, t)| \int_y^{+\infty} K_\varepsilon''(x - y) (S(x, t) - S(y, t))^2 dx dy, \end{aligned}$$

и поэтому справедливо неравенство (69). Тогда из (68) имеем

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1} + \lambda \int_{\mathbb{R}^+} |u|^{\alpha+1} dx \leq 0. \quad (71)$$

Интегрируя неравенство (71) по времени, получаем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^1} + \int_0^t \lambda \int_{\mathbb{R}^+} |u|^{\alpha+1} dx d\tau \leq \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}, \quad (72)$$

что означает ограниченность $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}$ для всех $t \geq 0$.

Теперь мы сможем доказать, что $\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$. Действительно, применив теорему Планшереля, аналогично (63) имеем

$$\int_0^{+\infty} u_x \partial_x \mathcal{L} u dx = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } C_\alpha(ip)^\alpha |p|^2 \left| \widehat{u}(ip, t) - \frac{u(0)}{ip} \right|^2 dp.$$

Тогда в силу оценки $\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \leq C\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ для $\varrho \in (0, 1)$ получим

$$\begin{aligned}
 C_\alpha \int_0^{+\infty} u_x \partial_x^{\alpha+1} u \, dx &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } C_\alpha(ip)^\alpha |p|^2 \left| \widehat{u}(ip, t) - \frac{u(0)}{ip} \right|^2 dp \\
 &\geq \int_{|p| \geq \varrho} \text{Re } C_\alpha(ip)^\alpha |\widehat{u}(ip, t)|^2 dp \\
 &\geq C\varrho^\alpha \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - C\varrho^{\alpha+3} \sup_{|p| < \varrho} |\widehat{u}(p, t)|^2 - C\varrho^{\alpha+2} |u(0, t)| \sup_{|p| < \varrho} |\widehat{u}(p, t)| \\
 &\quad - C\varrho^{\alpha+1} |u(0)|^2 \\
 &\geq C\varrho^\alpha \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - C\varrho^{\alpha+3} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}^2 - C\varrho^{\alpha+2} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1} \|u\|_{\mathbf{L}^\infty} - C\varrho^{\alpha+1} \|u\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \\
 &\geq C\varrho^\alpha \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - C\varrho^{\alpha+3} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}^2 - C\varrho^{\alpha+2} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1} \|u\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad - C\varrho^{\alpha+1} \|u\|_{\mathbf{L}^2} \|u_x\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{73}
 \end{aligned}$$

Поскольку нормы $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}$, $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ и $\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ ограничены, то, подставляя последнюю оценку при $\varrho(t) = C^{\frac{1}{\alpha}}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}}$ в формулу (67), имеем

$$\frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq -(1+t)^{-1} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C(1+t)^{-1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Обозначим $\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = h(t)(1+t)^{-2}$. Тогда для $h(t)$ получим $h'(t) \leq C(1+t)^{1-\frac{1}{\alpha}}$ или $h(t) \leq C(1+t)^{2-\frac{1}{\alpha}}$. Таким образом, имеем следующую оценку убывания по времени:

$$\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2\alpha}}, \tag{74}$$

и поэтому

$$\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4\alpha}}.$$

Подставив последнюю оценку в (73), получим

$$\frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq -C(1+t)^{-1} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C(1+t)^{-1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Снова заменяя $\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = h(t)(1+t)^{-2}$ и повторяя выкладки, используемые при получении оценки (74), для всех $t > 0$ имеем

$$\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2\alpha}}. \tag{75}$$

Теперь докажем, что $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Используя формулу (63), для $\varrho \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned}
 C_\alpha \int_0^{+\infty} u \partial_x^\alpha u \, dx &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } C_\alpha(ip)^\alpha \left(\widehat{u}(ip, t) - \frac{u(0)}{ip} \right) \overline{\widehat{u}} dp \\
 &\geq \int_{|p| \geq \varrho} \text{Re } C_\alpha p^\alpha |\widehat{u}(p, t)|^2 dp - u(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } C_\alpha(ip)^{\alpha-1} \overline{\widehat{u}} dp \\
 &\geq C\varrho^\alpha \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - C\varrho^{\alpha+1} \sup_{|p| < \varrho} |\widehat{u}(p, t)|^2 \\
 &\quad - C|u(0)|\varrho^\alpha \sup_{|p| < \varrho} |\widehat{u}(p, t)| - C\varrho^{\alpha-1} |u(0)|^2 \\
 &\geq C\varrho^\alpha \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - C\varrho^{\alpha+1} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}^2 - C|u(0)|\varrho^\alpha \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1} - C\varrho^{\alpha-1} |u(0)|^2. \tag{76}
 \end{aligned}$$

Ввиду ограниченности норм $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}$, $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ и оценки (75) получаем

$$|u(0)| \leq \|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4\alpha}}.$$

Поэтому, подставив оценку (76) в формулу (62) и положив $\varrho(t) = C^{\frac{1}{\alpha}}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}}$, получим

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq -(1+t)^{-1} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C(1+t)^{-1-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Обозначим $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = h(t)(1+t)^{-2}$; тогда $h'(t) \leq C(1+t)^{1-\frac{1}{2\alpha}}$, откуда после интегрирования имеем

$$h(t) \leq C(1+t)^{2-\frac{1}{2\alpha}}.$$

В силу полученной оценки для $h(t) = \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2(1+t)^2$ найдем, что

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4\alpha}}, \quad |u(0)| \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4\alpha}-\frac{1}{8\alpha}}.$$

Повторив эти рассуждения, для всех $t > 0$ получим

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2\alpha}}. \quad (77)$$

Из (75) и (77) видно также, что верна следующая оценка убывания нормы решения в $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$:

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (78)$$

для всех $t > 0$.

Теперь докажем, что

$$\|xu(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C(1+t)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (79)$$

Ввиду леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \left\| x \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \int_0^{t/2} (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|xF_1\|_{\mathbf{L}^1} + \|x\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|F_1\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &+ \int_{t/2}^t (\|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|xF_1\|_{\mathbf{L}^1} + \|x\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|F_1\|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &+ \int_0^{t/2} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^1} \|xF_2\|_{\mathbf{L}_x^1 \mathbf{L}_y^\infty} d\tau + \int_{t/2}^t \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \|xF_2\|_{\mathbf{L}_x^1 \mathbf{L}_y^1} d\tau. \end{aligned}$$

Тогда из интегральной формулы (14) получим

$$\|u\|_{\mathbf{L}^{1,1}} \leq C\langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} + \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,1}} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau.$$

Обозначим $\|u\|_{\mathbf{L}^{1,1}} = \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} h(t)$. В силу последней оценки имеем

$$\begin{aligned} h(t) &\leq C + \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1+\frac{1}{\alpha}} h(\tau) d\tau + \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-1} d\tau \\ &\leq C + \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1+\frac{1}{\alpha}} h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому, применив лемму Гронуола, получим, что $h(t) \leq C$, значит, оценка (79) верна для всех $t > 0$.

В силу априорных оценок (72), (77)–(79) можно продолжить локальное по времени решение, полученное в теореме 4, для всех $t > 0$.

Действительно, предположив от противного, что существует максимальное время $T > 0$ такое, что $u \in \mathbf{X}_1[0, T)$, где

$$\mathbf{X}_1[0, T) \equiv \{\varphi \in \mathbf{C}([0, T); \mathbf{L}^{1,1}(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{H}_2^1(\mathbb{R}^+))\},$$

рассмотрим задачу (1) с начальными данными $u(T_1)$. В силу априорных оценок (72), (77)–(79) норма $\|u(T_1)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u(T_1)\|_{\mathbf{L}^{1,1}}$ ограничена равномерно по $T_1 \in [0, T)$. Тогда время существования решения, гарантированное теоремой 4, ограничено равномерно по $T_1 \in [0, T)$. Поэтому, если выбрать $T_1 > 0$ достаточно близко к максимальному времени T , в силу теоремы 4 можно гарантировать, что существует единственное решение $u \in \mathbf{X}_1[0, T]$. Приняв $u(T)$ в качестве нового начального данного задачи (1) и применив теорему 4, продолжим решение $u(t)$ на интервал $[0, T + T_2]$. Это противоречит предположению, что T – максимальное время существования решения. Полученное противоречие доказывает существование глобального решения $u \in \mathbf{X}_1[0, \infty)$ задачи (1) такое, что

$$\sup_{t>1} t^{\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{q})} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^q} + t^{\frac{1}{\alpha}} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,1}} \leq C, \quad q \geq 1. \quad (80)$$

В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\|x^\mu \varphi\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|x\varphi\|_{\mathbf{L}^1}^{1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\mu}(1-\frac{1}{p})}} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p}^{\frac{1}{1+\frac{1}{1-\mu}(1-\frac{1}{p})}}, \quad (81)$$

где $\mu \in [0, 1)$, $p = \alpha + 1$. Из оценки (72) получим, что существует некоторая последовательность $t_n \rightarrow \infty$ такая, что $t_n \|u(t_n)\|_{\mathbf{L}^{\alpha+1}}^{\alpha+1}$ сколь угодно близко к нулю. Тогда для некоторого $T \geq 1$ имеем

$$T^{\frac{1}{\alpha+1}} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{\alpha+1}} \leq \varepsilon^3, \quad (82)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Следовательно, используя оценки (80) и (81), получим

$$T^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|u(T)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \leq \varepsilon^3, \quad \mu > 0. \quad (83)$$

Отметим, что новая функция

$$w(x, t) = T^{\frac{1}{\alpha}} u(xT^{\frac{1}{\alpha}}, tT)$$

является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} w_t + \lambda |w|^\alpha w + \mathcal{L}w &= 0, & x \in \mathbb{R}^+, & t \geq 1, \\ w(x, 1) = w_1(x) &\equiv T^{\frac{1}{\alpha}} u(xT^{\frac{1}{\alpha}}, T), & x \in \mathbb{R}^+, & w_x(0, t) = 0, & t \geq 1, \end{aligned} \quad (84)$$

где начальные данные w_1 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{\mathbf{L}^{\alpha+1}} &= T^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} |u(xT^{\frac{1}{\alpha}}, T)|^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ &= T^{\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\alpha+1})} \left(\int_0^{+\infty} |u(y, T)|^{\alpha+1} dy \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = T^{\frac{1}{\alpha+1}} \|u(T)\|_{\mathbf{L}^{\alpha+1}}, \\ \|w_1\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} &= T^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} x^\mu |u(xT^{\frac{1}{\alpha}}, T)| dx = T^{-\frac{\mu}{\alpha}} \int_0^{+\infty} y^\mu |u(y, T)| dy \\ &= T^{-\frac{\mu}{\alpha}} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}}, \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

Из оценок (82) и (83) следует, что если взять $T \geq 1$ достаточно большим, то начальные данные w_1 задачи (84) малы, а именно

$$\|w_1\|_{\mathbf{L}^{a+1}} + \|w_1\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \leq \varepsilon^3,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Применив теорему 3 к задаче (84), придем к результату теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. В. А. Зверев, Л. А. Островский, *Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования*, Ин-т прикл. физ. АН СССР, Горький, 1980, 143–160.
2. L. A. Ostrovsky, “Short-wave asymptotics for weak shock waves and solitons in mechanics”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **11**:6 (1976), 401–416.
3. E. Ott, R. N. Sudan, “Nonlinear theory of ion acoustic waves with Landau damping”, *Phys. Fluids*, **12**:11 (1969), 2388–2394.
4. C. J. Amick, J. L. Bona, M. E. Schonbek, “Decay of solutions of some nonlinear wave equations”, *J. Differential Equations*, **81**:1 (1989), 1–49.
5. P. Biler, “Asymptotic behaviour in time of solutions to some equations generalizing the Korteweg-de Vries–Burgers equation”, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **32**:5–6 (1984), 275–282.
6. P. Biler, T. Funaki, W. A. Woźczynski, “Fractal Burgers equations”, *J. Differential Equations*, **148**:1 (1998), 9–46.
7. P. Biler, G. Karch, W. A. Woźczyński, “Multifractal and Lévy conservation laws”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **330**:5 (2000), 343–348.
8. J. L. Bona, F. Demengel, K. Promislow, “Fourier splitting and dissipation of nonlinear dispersive waves”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **129**:3 (1999), 477–502.
9. J. L. Bona, L. Luo, “Asymptotic decomposition of nonlinear, dispersive wave equations with dissipation”, *Phys. D*, **152–153** (2001), 363–383.
10. H. Brezis, F. Browder, “Partial differential equations in the 20th century”, *Adv. Math.*, **135**:1 (1998), 76–144.
11. D. B. Dix, “Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin–Ono–Burgers equation”, *J. Differential Equations*, **90**:2 (1991), 238–287.
12. D. B. Dix, “The dissipation of nonlinear dispersive waves: the case of asymptotically weak nonlinearity”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:9–10 (1992), 1665–1693.
13. M. Escobedo, O. Kaviani, H. Matano, “Large time behavior of solutions of a dissipative semilinear heat equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **20**:7–8 (1995), 1427–1452.
14. M. Escobedo, J. L. Vazquez, E. Zuazua, “Asymptotic behaviour and source-type solutions for a diffusion-convection equation”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124**:1 (1993), 43–65.
15. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
16. Y. Giga, T. Kambe, “Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation”, *Comm. Math. Phys.*, **117**:4 (1988), 549–568.
17. A. Gmira, L. Veron, “Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Differential Equations*, **53**:2 (1984), 258–276.

18. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, “Large-time behaviour of solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **130**:5 (2000), 1029–1043.
19. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, “Large time behavior of solutions to the Landau–Ginzburg type equations”, *Funkcial. Ekvac.*, **44**:1 (2001), 171–200.
20. G. Karch, “Large-time behaviour of solutions to non-linear wave equations: higher-order asymptotics”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **22**:18 (1999), 1671–1697.
21. O. Kavian, “Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **4**:5 (1987), 423–452.
22. P. I. Naumkin, I. A. Shishmarëv, *Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves*, Transl. Math. Monogr., **133**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
23. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
24. M. E. Schonbek, “Uniform decay rates for parabolic conservation laws”, *Nonlinear Anal.*, **10**:9 (1986), 943–956.
25. M. E. Schonbek, “Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier–Stokes equations”, *J. Amer. Math. Soc.*, **4**:3 (1991), 423–449.
26. W. A. Strauss, “Nonlinear scattering at low energy”, *J. Funct. Anal.*, **41**:1 (1981), 110–133.
27. Q. S. Zhang, “A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **333**:2 (2001), 109–114.
28. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
29. N. Hayashi, E. Kaikina, *Nonlinear theory of pseudodifferential equations on a half-line*, North-Holland Math. Stud., **194**, Elsevier, Amsterdam, 2004.
30. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. I, II, Наука, М., 1970; пер. с англ.: А. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, vols. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1954.

Е. И. Кайкина (E. I. KAİKINA)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics

E-mail: ekaikina@matmor.unam.mx

Поступило в редакцию

12.12.2007

П. И. Наумкин (P. I. NAUMKIN)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics

E-mail: pavelni@matmor.unam.mx

И. А. Шишмарёв (I. A. SHISHMAREV)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: shish@voxnet.ru, ilia@shishmarev.msk.su