Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Коновалов, В. Е. Майоров, Поперечники некоторых классов выпуклых функций и тел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 1, 135–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:56:22

УДК 517.5

В. Н. Коновалов, В. Е. Майоров

Поперечники некоторых классов выпуклых функций и тел

На выпуклых компактных телах из $\mathbb{R}^d$ рассматриваются классы равномерно ограниченных выпуклых функций, удовлетворяющих условию Липшица. Для этих классов устанавливаются в метрике L_1 точные порядки колмогоровских, энтропийных и псевдоразмерностных поперечников. Вводятся также понятия псевдоразмерности и псевдоразмерностных поперечников классов множеств, а затем для некоторых классов выпуклых тел из $\mathbb{R}^d$ устанавливаются точные порядки энтропийных и псевдоразмерностных поперечников относительно псевдометрики, задаваемой как лебегов d -мерный объем симметричной разности двух множеств. Для соответствующих классов характеристических функций устанавливаются точные порядки энтропийных и псевдоразмерностных поперечников в пространствах L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: выпуклые функции, энтропия, псевдоразмерность.

§ 1. Введение и формулировки основных результатов

Пусть K^d – выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^d$. Функцию $f: K^d \mapsto \mathbb{R}$ считаем выпуклой, если надграфик этой функции является выпуклым телом в $\mathbb{R}^{d+1}$. Через $\lambda\widehat{\mathcal{L}}(K^d)$, где $\lambda \geq 0$, обозначим класс всех выпуклых функций f , удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|, \quad x, y \in K^d,$$

с константой λ и ограничению $|f(x)| \leq \lambda$, $x \in K^d$. Здесь и далее $|x|$ – евклидова норма векторов $x \in \mathbb{R}^d$.

Основная цель настоящей работы – установить для классов $\widehat{\mathcal{L}}(K^d)$ точные порядки колмогоровских, энтропийных и псевдоразмерностных n -поперечников в пространствах $L_1(K^d)$, а также решить с использованием этих результатов некоторые смежные аппроксимационные задачи.

Приведем теперь известные определения упомянутых поперечников для пространств, оснащенных метрикой или псевдометрикой. Пусть (X, r) – непустое множество элементов $x \in X$, оснащенное метрикой или псевдометрикой $r(x, y)$

Часть работы была выполнена, когда первый из авторов посещал Израильский институт технологии (Technion), Хайфа, Израиль, в 2006, 2007 гг.

для всех $x, y \in X$. Если X является линейным пространством, а $W \neq \emptyset$ – фиксированное подмножество из X , то для $n \in \mathbb{Z}_+$ *колмогоровским n -поперечником множества W в (X, r)* называется величина

$$d_n(W, X) := \inf_{M^n \subseteq X} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n} r(x, y),$$

где первый инфимум берется по всем таким аффинным многообразиям M^n , что $\dim(M^n) \leq n$.

Для произвольных пространств (X, r) с метрикой или псевдометрикой ρ и $n \in \mathbb{Z}_+$ *энтропийным n -поперечником множества W в (X, r)* называется величина

$$\varepsilon_n(W, X) := \inf_{M^n \subseteq X} \sup_{x \in W} \inf_{y \in M^n} r(x, y),$$

где первый инфимум берется по всем таким наборам $M^n = \{y\}$ элементов $y \in X$, что $\text{card}(M^n) \leq 2^n$. Отметим, что энтропийные n -поперечники нередко называют *энтропийными n -числами*.

Приведем определение псевдоразмерностных поперечников, которое базируется на понятии псевдоразмерности, характеризующей осцилляционные возможности классов вещественнозначных функций.

Пусть $T \neq \emptyset$ – фиксированное множество, а $M = \{f\}$ – непустое множество функций $f: T \mapsto \mathbb{R}$. Если $\text{card}(M) = 1$, то для такого M псевдоразмерность считается равной нулю. Если же $\text{card}(M) > 1$, то псевдоразмерность функционального класса M определяется следующим образом.

Для чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ полагаем

$$\text{sg}(\alpha) := \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha > 0, \\ 0 & \text{для } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Если при некотором $n \in \mathbb{N}$ найдутся набор $T^n = \{t_i\}_{i=1}^n$ точек $t_i \in T$ и вектор $a^n = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ такие, что множество

$$\text{Sg}(M, T^n, a^n) := \{(\text{sg}(f(t_1)) - a_1), \dots, \text{sg}(f(t_n)) - a_n)\}, f \in M\}$$

состоит из 2^n попарно различных векторов, а для любых наборов $\bar{T}^{n+1} = \{\bar{t}_i\}_{i=1}^{n+1}$ точек $\bar{t}_i \in T$ и любых векторов $\bar{a}^{n+1} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ каждое из множеств

$$\text{Sg}(M, \bar{T}^{n+1}, \bar{a}^{n+1}) := \{(\text{sg}(f(\bar{t}_1)) - \bar{a}_1), \dots, \text{sg}(f(\bar{t}_{n+1})) - \bar{a}_{n+1})\}, f \in M\}$$

содержит менее 2^{n+1} попарно различных векторов, то это число n называют *псевдоразмерностью функционального класса M* . Если же такого конечного n не существует, то псевдоразмерность считается равной ∞ . Псевдоразмерность функционального класса M будем обозначать через $\dim_{\text{ps}}(M)$.

Отметим, что понятие псевдоразмерности класса основано на фундаментальном понятии *функции роста*, которое ввели В. Н. Вапник и А. Я. Червоненкис (см. [3]). Поэтому понятие псевдоразмерности класса также называют *размерностью Вапника–Червоненкиса*. Размерность Вапника–Червоненкиса,

наряду с понятием псевдоразмерности функциональных классов, активно используется в различных областях математики (см., например, [3]–[6] и библиографию из этих работ).

Пусть на множестве $T \neq \emptyset$ задано пространство (X, r) функций $f: T \mapsto \mathbb{R}$, оснащенное метрикой или псевдометрикой r , а $W \neq \emptyset$ – фиксированное подмножество из X . Для $n \in \mathbb{Z}_+$ псевдоразмерностным n -поперечником множества W в (X, r) называется величина

$$\rho_n(W, X) := \inf_{M^n \subseteq X} \sup_{f \in W} \inf_{g \in M^n} r(f, g),$$

где первый инфимум берется по всем функциональным классам M^n таким, что $\dim_{\text{ps}}(M^n) \leq n$. Отметим, что впервые псевдоразмерностные поперечники классов функций были введены и исследовались в [1].

Далее, как обычно, через $L_p(\Omega^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, где Ω^d – измеримое по Лебегу подмножество из $\mathbb{R}^d$, будем обозначать линейное пространство функций $f: \Omega^d \mapsto \mathbb{R}$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_p(\Omega^d)} := \begin{cases} \left(\int_{\Omega^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{x \in \Omega^d} |f(x)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Условимся также, что если заданы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ положительных чисел a_n и b_n , то эти последовательности удовлетворяют соотношению $a_n \asymp b_n$, $n \geq 1$, тогда и только тогда, когда существуют не зависящие от n числа $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 \leq a_n/b_n \leq c_2$, $n \geq 1$. Кроме того, если выпуклое компактное тело K^d из $\mathbb{R}^d$ является фиксированным, то ради упрощения записей будем использовать обозначения $\widehat{\mathcal{L}}^d := \widehat{\mathcal{L}}(K^d)$ и $L_1^d := L_1(K^d)$.

Считая, что (X, r) – пространство L_1^d с метрикой $r(f, g) := \|f - g\|_{L_1^d}$, а $W = \widehat{\mathcal{L}}^d$, сформулируем первый из основных результатов.

ТЕОРЕМА 1.1. Если $d \geq 1$ фиксировано, то

$$\rho_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \asymp \varepsilon_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \asymp d_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \asymp n^{-2/d}, \quad n \geq 1. \quad (1.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что в одномерном случае точный порядок колмогоровских n -поперечников классов $\widehat{\mathcal{L}}^1$ в метрике L_1^1 установлен в [2, теорема 4 для $r = 1$, $p = \infty$, $q = 1$ и $\alpha = 0$].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Точные порядки поперечников в (1.1) классов $\widehat{\mathcal{L}}^d$ мы получаем лишь в пространстве L_1 . Для доказательства этих результатов мы пользуемся леммой 2.5, позволяющей получать оценки ε -энтропии класса через заданную псевдоразмерность класса лишь в L_1 -норме. В общем случае, т. е. для получения оценок типа (1.1) в пространстве L_p , $p \geq 1$, необходимы соответствующие оценки для ε -энтропии в L_p -норме.

Прежде чем сформулировать следующий результат, нам необходимо ввести понятие псевдоразмерности для классов множеств и определить соответствующие псевдоразмерностные n -поперечники.

Пусть $\Omega \neq \emptyset$ – фиксированное множество, а $M = \{\omega\}$ – непустая совокупность подмножеств ω из Ω . Если $\text{card}(M) = 1$, то для такого M псевдоразмерность считается равной нулю. Если $\text{card}(M) > 1$, то *псевдоразмерность совокупности множеств* определяется следующим образом.

Пусть

$$\chi_\omega(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \omega, \\ 0, & \text{если } t \in \Omega \setminus \omega, \end{cases}$$

– характеристические функции подмножеств ω из Ω . Если при некотором $n \in \mathbb{N}$ найдется набор $T^n = \{t_i\}_{i=1}^n$ точек $t_i \in \Omega$ такой, что множество

$$\chi(M, T^n) := \{(\chi_\omega(t_1), \dots, \chi_\omega(t_n)), \omega \in M\}$$

состоит из 2^n попарно различных векторов, а для любых наборов $\bar{T}^{n+1} = \{\bar{t}_i\}_{i=1}^{n+1}$ точек $\bar{t}_i \in \Omega$ множество

$$\chi(M, \bar{T}^{n+1}) := \{(\chi_\omega(\bar{t}_1), \dots, \chi_\omega(\bar{t}_{n+1})), \omega \in M\}$$

содержит менее 2^{n+1} попарно различных векторов, то число n будем называть *псевдоразмерностью совокупности M подмножеств из Ω* . Если такого конечного n не существует, то псевдоразмерность будем считать равной ∞ .

Иными словами, псевдоразмерность совокупности $\{\omega\}$ множеств ω – это размерность Вапника–Червоненкиса соответствующего класса $\{\chi_\omega\}$ характеристических функций χ_ω .

Псевдоразмерность заданной совокупности $M = \{\omega\}$ подмножеств ω из Ω мы будем обозначать через $\dim_{\text{ps}}(M)$. На наш взгляд, введенное понятие псевдоразмерности классов множеств характеризует осцилляционные возможности этих классов подобно тому, как для классов функций псевдоразмерность характеризует осцилляционные возможности функциональных классов.

Используя введенное понятие псевдоразмерности классов множеств, определим соответствующие псевдоразмерностные n -поперечники.

Пусть $\Omega \neq \emptyset$ – фиксированное множество, $X = \{\omega\}$ – непустая совокупность подмножеств ω из Ω и на X задана метрика или полуметрика s . Пусть в соответствующем пространстве (X, s) фиксирован некоторый класс $W \neq \emptyset$ множеств w из X . Если $n \in \mathbb{Z}_+$, то псевдоразмерностным n -поперечником W в (X, s) называется величина

$$\rho_n(W, X) := \inf_{M^n \subseteq X} \sup_{w \in W} \inf_{\omega \in M^n} s(w, \omega),$$

где первый инфимум берется по всем совокупностям M^n множеств из X таким, что $\dim_{\text{ps}}(M^n) \leq n$.

Рассмотрим теперь конкретное пространство, элементами которого являются подмножества из $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^d$, $X = \Lambda^d$ – совокупность всех измеримых по Лебегу подмножеств ω из $\mathbb{R}^d$, имеющих конечную лебегову меру $|\omega|$ (d -мерный объем), а $s = s_d$ – псевдометрика на Λ^d , которая задается следующим образом:

$$s_d(w, \omega) := |w \Delta \omega|, \quad w, \omega \in \Lambda^d,$$

где $w \Delta \omega$ – симметричная разность множеств w и ω .

Для каждого класса W множеств из Λ^d через $\varepsilon_n(W, \Lambda^d)$ и $\rho_n(W, \Lambda^d)$ будем обозначать энтропийный и псевдоразмерностный n -поперечники в пространстве (Λ^d, s_d) с указанной псевдометрикой s_d .

Пусть $r \geq 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$, а $B_r^d(\bar{x})$ – замкнутый d -мерный евклидов шар радиуса r с центром в точке $\bar{x}$. Очевидно, что при $r = 0$ шар $B_0^d(\bar{x})$ вырождается в точку $\bar{x}$. Кроме того, пусть $B_r^d := B_r^d(0)$ и $B^d := B_1^d$.

В пространстве (Λ^d, ρ_d) рассмотрим классы $\mathcal{O}_\varepsilon^d = \{\omega\}$, $0 \leq \varepsilon < 1$, замкнутых выпуклых тел ω , каждое из которых содержится в единичном шаре B^d и при этом содержит шар $B_\varepsilon^d(x_\omega)$ с центром в некоторой зависящей от ω точке x_ω .

Теперь можем сформулировать второй из основных результатов.

ТЕОРЕМА 1.2. *Если $d > 1$ и $0 \leq \varepsilon < 1$ фиксированы, то*

$$\rho_n(\mathcal{O}_\varepsilon^d, \Lambda^d) \asymp \varepsilon_n(\mathcal{O}_\varepsilon^d, \Lambda^d) \asymp n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1. \quad (1.2)$$

Обозначим через $\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d)$, $0 \leq \varepsilon < 1$, классы характеристических функций $\chi_\omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, множеств $\omega \in \mathcal{O}_\varepsilon^d$ и положим $L_p^d := L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $r(f, g) = \|f - g\|_{L_p^d}$ для $f, g \in L_p^d$. Сформулируем последний из основных результатов.

ТЕОРЕМА 1.3. *Если $d > 1$, $0 \leq \varepsilon < 1$ и $1 \leq p \leq \infty$ фиксированы, то*

$$\rho_n(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \asymp \varepsilon_n(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \asymp n^{-2/((d-1)p)}, \quad n \geq 1. \quad (1.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. При $d = 2$ и $\varepsilon = 0$ в [7, теорема 5.1] для класса $\chi(\mathcal{O}_0^2)$ найден точный порядок псевдоразмерностных n -поперечников в L_2^2 , а именно доказано, что

$$\rho_n(\chi(\mathcal{O}_0^2), L_2^2) \asymp n^{-1}, \quad n \geq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Оценку сверху для n -колмогоровского поперечника вида $d_n(\chi(\mathcal{O}_0^2), L_2^2) \leq cn^{-2/(dp)}$ нетрудно получить, используя равномерную кусочно постоянную аппроксимацию на кубе. Поэтому для получения оценки снизу нам недостаточно знания оценок (1.3) для псевдоразмерностных n -поперечников.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Утверждение следующей леммы, скорее всего, известно, но мы затрудняемся дать соответствующую ссылку и поэтому приводим ее доказательство.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $Q := [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждой функции $f \in \widehat{\mathcal{L}}(Q)$ ломаные $\sigma_n(x; f, Q)$, $x \in Q$, являющиеся линейными функциями на каждом из отрезков $[(\nu - 1)/n, \nu/n]$, $\nu = 1, \dots, n$, и такие, что $\sigma_n(\nu/n; f, Q) = f(\nu/n)$, $\nu = 0, \dots, n$, будут удовлетворять неравенствам*

$$\|f(\cdot) - \sigma_n(\cdot; f, Q)\|_{L_1(Q)} \leq n^{-2}, \quad n \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующие свойства выпуклых функций хорошо известны и будут использоваться нами в доказательствах.

Если $[a, b]$ – конечный отрезок и функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой на этом отрезке, то в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют односторонние производные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, являющиеся неубывающими функциями на (a, b) (см. [8, гл. I, § 11, теорема В]). Односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ в концах

отрезка $[a, b]$ существуют, однако могут не быть конечными, но при этом $f'_+(x)$ не убывает на $[a, b)$, а $f'_-(x)$ не убывает на $(a, b]$ (см. [8, гл. I, § 11, замечание С]). Множество точек из (a, b) , в которых может не существовать обычная производная f' , не более чем счетно (см. [8, гл. I, § 11, теорема С]). Выпуклая функция f удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица с некоторой константой $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ принимают конечные значения (см. [8, гл. I, § 11, замечание D]). Кроме того, имеем $|f'_+(a)| \leq \lambda$ и $|f'_-(b)| \leq \lambda$.

Приведем теперь краткое доказательство необходимой оценки сверху. Поскольку ломаная $\sigma_n(\cdot; f, Q)$ является линейной функцией на каждом из отрезков $Q_{n,\nu} := [(\nu-1)/n, \nu/n]$, $\nu = 1, \dots, n$, и интерполирует функцию f в концах этих отрезков, то при каждом $x \in Q_{n,\nu}$, $1 \leq \nu \leq n$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_n(x; f, Q) &= n \left(\frac{\nu}{n} - x \right) \int_{(\nu-1)/n}^x f'(t) dt - n \left(x - \frac{\nu-1}{n} \right) \int_x^{\nu/n} f'(t) dt \\ &= n \left(\frac{\nu}{n} - x \right) \int_{(\nu-1)/n}^x \left(f'(t) - f'_+ \left(\frac{\nu-1}{n} \right) \right) dt \\ &\quad - n \left(x - \frac{\nu-1}{n} \right) \int_x^{\nu/n} \left(f'(t) - f'_+ \left(\frac{\nu-1}{n} \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Полагая

$$\omega_{n,\nu}(f') := f'_- \left(\frac{\nu}{n} \right) - f'_+ \left(\frac{\nu-1}{n} \right), \quad \nu = 1, \dots, n,$$

имеем

$$|f(x) - \sigma_n(x; f, Q)| \leq 2n \left| \left(x - \frac{\nu-1}{n} \right) \left(x - \frac{\nu}{n} \right) \right| \omega_{n,\nu}(f') \leq \frac{\omega_{n,\nu}(f')}{2n}, \quad x \in Q_{n,\nu}.$$

Но тогда

$$\|f(\cdot) - \sigma_n(\cdot; f, Q)\|_{L_1(Q_{n,\nu})} \leq \frac{\omega_{n,\nu}(f')}{2n^2},$$

и поэтому

$$\|f(\cdot) - \sigma_n(\cdot; f, Q)\|_{L_1(Q)} \leq \frac{1}{2n^2} \sum_{\nu=1}^n \omega_{n,\nu}(f').$$

Учитывая, что односторонние производные f'_- и f'_+ являются неубывающими функциями на Q , а также то, что $|f'_-(0)| \leq 1$ и $|f'_+(1)| \leq 1$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^n \omega_{n,\nu}(f') \leq f'_-(1) - f'_+(0) \leq 2$$

и, следовательно, $\|f(\cdot) - \sigma_n(\cdot; f, Q)\|_{L_1(Q)} \leq n^{-2}$. Лемма доказана.

Нам также потребуется лемма о продолжении липшицевых выпуклых функций, являющаяся простым следствием леммы 3 из [9].

ЛЕММА 2.2. Пусть $d > 1$, K^d – выпуклое компактное тело из $\mathbb{R}^d$, а f – функция из класса $\widehat{\mathcal{L}}(K^d)$. Тогда для каждого замкнутого d -мерного куба Q^d , содержащего K^d , существуют число $\lambda = \lambda(d, K^d, Q^d) \geq 1$ и функция $\tilde{f} \in \lambda \widehat{\mathcal{L}}(Q^d)$ такие, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ при всех $x \in K^d$.

Следующий результат, устанавливающий связь между энтропийными и колмогоровскими поперечниками, получен в [10, теорема 1] (см. также [11, гл. 15, § 4, теорема 4.1]).

ЛЕММА 2.3. Пусть X – действительное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, а W – фиксированный компакт в X . Тогда для каждого $\alpha > 0$ найдется число $c_\alpha > 0$ такое, что

$$\varepsilon_n(W, X) \leq c_\alpha n^{-\alpha} \max_{1 \leq m \leq n} \{m^\alpha d_{m-1}(W, X)\}, \quad n \geq 1.$$

Пусть l_1^n – линейное пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$, имеющих конечную норму

$$\|x\|_{l_1^n} := \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|,$$

а $V_\pm^n$ – множество векторов $v = (v_1, \dots, v_n)$ таких, что $v_\nu = \pm 1$, $\nu = 1, \dots, n$.

Доказательство следующей леммы имеется в [6, лемма 1], кроме того, эта лемма является следствием леммы 2.2 из [11, гл. 15, § 2].

ЛЕММА 2.4. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $V_\pm^n$ содержит подмножество V_*^n такое, что $\text{card}(V_*^n) \geq 2^{n/16}$, при этом для любых попарно различных векторов $\hat{v}, \check{v} \in V_*^n$ имеет место неравенство

$$\|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^n} \geq \frac{n}{2}.$$

Пусть (X, r) – метрическое пространство элементов x . При заданном $\varepsilon > 0$ элементы $x, y \in X$ называются ε -различимыми относительно метрики r , если $r(x, y) > \varepsilon$. Для каждого фиксированного подмножества $M \neq \emptyset$ из X полагаем

$$\mathcal{N}_\varepsilon(M, X) := \sup_{M_\varepsilon \subseteq M} \{\text{card}(M_\varepsilon)\},$$

где супремум берется по всем наборам $M_\varepsilon = \{x\}$, состоящим из конечного числа ε -различимых элементов $x \in M$.

Следующая лемма есть непосредственное следствие из работы [5].

ЛЕММА 2.5. Пусть $d, n \in \mathbb{N}$, ω – фиксированное множество из $\mathbb{R}^d$ конечной лебеговой меры $|\omega| > 0$, и пусть $\varepsilon > 0$ и $a > 0$ – фиксированные числа. Пусть на ω задано множество $M_a^n(\omega) = \{f\}$ функций f из пространства $L_\infty(\omega)$ таких, что $\|f\|_{L_\infty(\omega)} \leq a$, и при этом $\dim_{\text{ps}}(M_a^n(\omega)) \leq n$. Тогда

$$\mathcal{N}_\varepsilon(M_a^n(\omega), L_1(\omega)) \leq e(n+1) \left(4e|\omega| \frac{a}{\varepsilon} \right)^n,$$

где e – число Эйлера (основание натурального логарифма).

С помощью леммы 2.5 нетрудно убедиться в справедливости утверждения следующей леммы. Мы не приводим доказательство следующей леммы, но отметим, что она доказывается аналогично тому, как в [12] при помощи леммы 4 доказывалась лемма 5 для функций одной переменной.

ЛЕММА 2.6. Пусть $d, n \in \mathbb{N}$, ω – фиксированное множество из $\mathbb{R}^d$ конечной лебеговой меры $|\omega| > 0$, $\varepsilon > 0$ и $a > 0$ – фиксированные числа такие, что $|\omega|a/\varepsilon \geq 1$. Пусть на ω задано множество $\Psi_{a,\varepsilon}^n(\omega) = \{\psi\}$ функций ψ из $L_\infty(\omega)$ таких, что $\|\psi\|_{L_\infty(\omega)} \leq a$, и при этом $\mathcal{N}_\varepsilon(\Psi_{a,\varepsilon}^n(\omega), L_1(\omega)) \geq 2^n$. Тогда при каждом $m \in \mathbb{Z}_+$ таком, что $m \leq n/c_0$, где $c_0 := 2^{12}(8 + \log_2(|\omega|a/\varepsilon))$, будет справедливо неравенство

$$\rho_m(\Psi_{a,\varepsilon}^n(\omega), L_1(\omega)) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}^d$ (при заданном $d > 1$) систему координат в $\mathbb{R}^d$, которая получена путем какого-либо вращения исходной системы координат, и через $x' = (x'_1, \dots, x'_d)$ образы точек $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ при переходе к новой системе координат $\mathcal{R}^d$. Кроме того, полагаем $x' := (\bar{x}', x'_d)$, где $\bar{x}' := (x'_1, \dots, x'_{d-1})$. Пусть $r > 0$ – фиксированное число и $B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d) := \{x' \mid (x'_1)^2 + \dots + (x'_{d-1})^2 \leq r^2, x'_d = 0\}$ – $(d-1)$ -мерный шар в системе координат $\mathcal{R}^d$ радиуса r с центром в начале координат в $\mathbb{R}^d$.

Если ω – выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^d$, а $\partial\omega$ – граница этого множества, то будем считать, что прямая $\mathbb{L}_e$, параллельная вектору $e \neq 0$ из $\mathbb{R}^d$, регулярным образом пересекает границу $\partial\omega$ тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{L}_e \cap \partial\omega$ состоит из двух (разных) точек.

Пусть для выпуклого компактного тела $\omega \subset \mathbb{R}^d$ начало координат в $\mathbb{R}^d$ является внутренней точкой, и в некоторой системе координат $\mathcal{R}^d$ при некоторых $r > 0$ и $\lambda > 0$ выполняются следующие условия:

1) для вектора $e' \neq 0$, ортогонального шару $B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d)$, все прямые $\mathbb{L}_{e'}$, проходящие параллельно e' через точки $(\bar{x}', 0) \in B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d)$, регулярным образом пересекают границу $\partial\omega$;

2) функции $x'_d = f(\bar{x}')$ и $x'_d = g(\bar{x}')$, описывающие для $(\bar{x}', 0) \in B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d)$ две части границы $\partial\omega$, таковы, что $|f(\bar{x}') - g(\bar{x}')| \geq r$, $(\bar{x}', 0) \in B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d)$;

3) функции $x'_d = f(\bar{x}')$ и $x'_d = g(\bar{x}')$, $(\bar{x}', 0) \in B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d)$, удовлетворяют на шару $B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d)$ условию Липшица с константой $\lambda > 0$.

Тогда выпуклое цилиндрическое тело $[\omega; \mathcal{R}^d, r, \lambda]$ из $\mathbb{R}^d$, заключенное между основаниями $\partial\omega_f$ и $\partial\omega_g$, которые описываются функциями $x'_d = f(\bar{x}')$ и $x'_d = g(\bar{x}')$, $(\bar{x}', 0) \in B_r^{d-1}(\mathcal{R}^d)$, будем называть регулярным “мостом” для ω относительно начала координат в $\mathbb{R}^d$. Если $\bar{x} \neq 0$ является внутренней точкой из ω , то регулярный “мостом” для ω относительно $\bar{x}$ будем называть множество $[\omega; \bar{x}, \mathcal{R}^d, r, \lambda] := [\omega - \bar{x}; \mathcal{R}^d, r, \lambda] + \bar{x}$. Отметим, что эта терминология, как и само определение “мостов”, заимствованы из [13] и [14].

Докажем теперь следующую лемму о покрытиях выпуклых компактных тел регулярными “мостами”.

ЛЕММА 2.7. Пусть $d > 1$ и $0 < r < R$. Тогда существуют конечное число $m = m(d, r, R)$ систем координат $\mathcal{R}_\mu^d$, $\mu = 1, \dots, m$, получаемых вращением исходной системы координат в $\mathbb{R}^d$, а также числа $\rho = \rho(d, r, R) > 0$ и $\lambda = \lambda(d, r, R) > 0$ такие, что каждое выпуклое компактное тело ω , удовлетворяющее условию $B_r^d \subseteq \omega \subseteq B_R^d$, можно покрыть регулярными “мостами” $[\omega; \mathcal{R}_\mu^d, \rho, \lambda]$, $\mu = 1, \dots, m$, относительно начала координат в $\mathbb{R}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ω удовлетворяет условию $B_r^d \subseteq \omega \subseteq B_R^d$, то ясно, что для любой точки $x \in B_{r/2}^d$ любая прямая, проходящая через x , регулярным образом пересекает границу $\partial\omega$. При этом расстояние между точками пересечения границы будет не меньше $r/2$. Кроме того, существует $\alpha = \alpha(d, r, R) > 0$ такое, что для любых опорных плоскостей κ ω в точках пересечения границы прямой, проходящей через $x \in B_{r/2}^d$, углы между этими плоскостями и данной прямой будут не меньше α . Но тогда нетрудно убедиться в том, что граница $\partial\omega$ является липшицевой, а константа в соответствующем условии Липшица будет зависеть от d , r и R , но не будет зависеть от ω .

Теперь остается воспользоваться рассуждениями, аналогичными тем, которые применялись в [13] и [14] для покрытия регулярными “мостами” областей с липшицевой границей. С помощью этих рассуждений нетрудно доказать существование конечного числа $m = m(d, r, R)$ систем координат $\mathcal{R}_\mu^d$, $\mu = 1, \dots, m$, а также чисел $\rho = \rho(d, r, R) > 0$ и $\lambda = \lambda(d, r, R) > 0$ таких, что каждое выпуклое компактное тело ω , удовлетворяющее условию $B_r^d \subseteq \omega \subseteq B_R^d$, можно покрыть регулярными “мостами” $[\omega; \mathcal{R}_\mu^d, \rho, \lambda]$, $\mu = 1, \dots, m$, относительно начала координат в $\mathbb{R}^d$. Отметим, что системы координат $\mathcal{R}_\mu^d$, количество этих систем, а также числа ρ и λ не будут зависеть от ω . Лемма доказана.

В заключение данного параграфа приведем следующую лемму, которая несколько обобщает лемму 2 из [15].

ЛЕММА 2.8. Пусть $d > 1$, $0 < \varepsilon < \infty$, ω – выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^d$ и на $\mathbb{R}^d \setminus \omega$ задано отображение в $\mathbb{R}^d$, определяемое как

$$y_{\omega, \varepsilon}(x) := x + \varepsilon e_\omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega,$$

где $e_\omega(x) := |x - x_\omega|^{-1}(x - x_\omega)$, а x_ω – ближайшая к x точка тела ω . Тогда для всех точек $x', x'' \in \mathbb{R}^d \setminus \omega$ справедливо неравенство

$$|y_{\omega, \varepsilon}(x') - y_{\omega, \varepsilon}(x'')|^2 \geq |x' - x''|^2 + \varepsilon^2 |e_\omega(x') - e_\omega(x'')|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x' = x''$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому далее будем считать, что $x' \neq x''$.

Пусть $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$. Учитывая свойства скалярного произведения, легко проверить, что

$$|y_{\omega, \varepsilon}(x') - y_{\omega, \varepsilon}(x'')|^2 = |x' - x''|^2 + \varepsilon^2 |e_\omega(x') - e_\omega(x'')|^2 + 2\varepsilon \langle x' - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно убедиться в справедливости неравенства $\langle x' - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle \geq 0$.

Сначала рассмотрим случай, когда $|x' - x'_\omega| = |x'' - x''_\omega| =: \delta$. Обозначив через

$$u_\delta(\omega) := \{x \mid |x - y| \leq \delta, y \in \omega\}$$

δ -окрестность тела ω , отметим, что множество $u_\delta(\omega)$ является выпуклым компактным телом, на границе которого лежат точки x' и x'' . Отметим также, что

$$\langle x' - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle = \langle x' - x'', e_\omega(x') \rangle + \langle x'' - x', e_\omega(x'') \rangle.$$

Проведем двухмерную плоскость через точки x' , x'' и $x' + e_\omega(x')$, не лежащие на одной прямой. Пересечение этой плоскости с $u_\delta(\omega)$ является двухмерным выпуклым компактным телом, на границе которого лежат точки x' и x'' . Тогда из выпуклости этого тела следует, что $\langle x' - x'', e_\omega(x') \rangle \geq 0$. Проводя двухмерную плоскость через точки x' , x'' и $x'' + e_\omega(x'')$, аналогично устанавливаем, что $\langle x'' - x', e_\omega(x'') \rangle \geq 0$. Тогда неравенство $\langle x' - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle \geq 0$ можно считать доказанным в случае $|x' - x'_\omega| = |x'' - x''_\omega|$.

Теперь рассмотрим случай, когда $|x' - x'_\omega| \neq |x'' - x''_\omega|$. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $|x' - x'_\omega| > |x'' - x''_\omega|$.

Полагая в этом случае $\delta := |x'' - x''_\omega|$, обозначим через x'_* ближайшую к x' точку соответствующей δ -окрестности $u_\delta(\omega)$ множества ω . Если $x'_* = x''$, то $e_\omega(x') = e_\omega(x'')$ и, следовательно, $\langle x' - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle \geq 0$. Если $x'_* \neq x''$, то, представив x' в виде $x' = x'_* + x' - x'_*$, имеем

$$\langle x' - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle = \langle x'_* - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle + \langle x' - x'_*, e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle.$$

Поскольку точки x'_* и x'' находятся на одинаковом расстоянии от ω , для них, как показано выше, выполнено $\langle x'_* - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle \geq 0$. Кроме того, ясно, что вектор $x' - x'_*$ коллинеарен вектору $e_\omega(x')$, и поэтому

$$\langle x' - x'_*, e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle = |x' - x'_*| - \langle x' - x'_*, e_\omega(x'') \rangle \geq 0.$$

Таким образом, и в случае $|x' - x'_\omega| \neq |x'' - x''_\omega|$ мы приходим к неравенству $\langle x' - x'', e_\omega(x') - e_\omega(x'') \rangle \geq 0$. На этом доказательство леммы заканчивается.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Сначала докажем необходимые оценки сверху. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $Q^d := [0, 1]^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, а $\nu := \nu_1, \dots, \nu_d$, где $\nu_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, d$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ разобьем куб Q^d на n^d кубов вида

$$Q_{n,\nu}^d := \left\{ x \mid \frac{\nu_i - 1}{n} \leq x_i \leq \frac{\nu_i}{n}, 1 \leq \nu_i \leq n, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Обозначим через $\Sigma_n(Q^d)$ вещественное линейное пространство всех непрерывных на Q^d кусочно полиномиальных сплайнов $\sigma_n(x)$, $x \in Q^d$, таких, что на каждом из кубов $Q_{n,\nu}^d$ функция σ_n является линейной по каждой переменной x_i при фиксированных других переменных x_j , $j = 1, \dots, d$, $j \neq i$. Нетрудно проверить, что размерность пространства $\Sigma_n(Q^d)$ равна $(n+1)^d$. При этом ясно, что $\dim(\Sigma_n(Q^d)) \asymp n^d$, $n \geq 1$.

Для непрерывных на кубе функций $f: Q^d \mapsto \mathbb{R}$ будем обозначать через $\sigma_n(\cdot; f, Q^d)$ сплайны из пространства $\Sigma_n(Q^d)$, интерполирующие f в вершинах всех кубов $Q_{n,\nu}^d$.

При доказательстве оценок сверху можем считать, не ограничивая общности рассуждений, что выпуклое компактное тело K^d содержится в кубе Q^d . Кроме того, будем считать, что $K^1 = Q^1$.

Если $d = 1$, то из определения сплайнов $\sigma_n(\cdot; f, Q^1)$ и леммы 2.1 следует, что для каждой функции $f \in \hat{\mathcal{L}}(Q^1)$ будет справедливо неравенство

$$\|f(\cdot) - \sigma_n(\cdot; f, Q^1)\|_{L_1(Q^1)} \leq n^{-2}, \quad n \geq 1,$$

а из этого неравенства сразу же следует оценка

$$D_n(\widehat{\mathcal{L}}^1)_{L_1^1}^{\text{kol}} \leq c^* n^{-2}, \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

для колмогоровских n -поперечников класса $\widehat{\mathcal{L}}^1 := \widehat{\mathcal{L}}(Q^1)$ в $L_1^1 := L_1(Q^1)$, где $c^* > 0$ – абсолютная постоянная.

Рассмотрим теперь случай $d > 1$. В этом случае, используя лемму 2.2, продолжим каждую функцию $f \in \widehat{\mathcal{L}}(K^d)$ на куб Q^d так, что продолжающая функция $\tilde{f}$ будет принадлежать классу $\lambda \widehat{\mathcal{L}}(Q^d)$, где $\lambda = \lambda(d, K^d, Q^d) \geq 1$. При этом очевидно, что функции $\tilde{f}_\lambda := \lambda^{-1} \tilde{f}$ принадлежат классу $\widehat{\mathcal{L}}(Q^d)$. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\tilde{f} \in \widehat{\mathcal{L}}(Q^d)$, и перейдем к оценке уклонений в $L_1(Q^d)$ функций $\tilde{f}$ от сплайнов $\sigma_n(\cdot; \tilde{f}, Q^d)$.

Если $1 \leq i \leq d-1$, то полагаем $x := (x^i, x^{d-i})$, где $x^i := x_1, \dots, x_i$ и $x^{d-i} := x_{i+1}, \dots, x_d$. Пусть

$$Q_{n, \nu_1, \dots, \nu_i}^i(x^{d-i}) := \left\{ (x^i, x^{d-i}) \mid \frac{\nu_j - 1}{n} \leq x_j \leq \frac{\nu_j}{n}, \quad j = 1, \dots, i \right\},$$

где $\nu_j = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, i$, $0 \leq x_j \leq 1$, $j = i+1, \dots, d$.

Ясно, что при каждом фиксированном x^{d-i} множества $Q_{n, \nu_1, \dots, \nu_i}^i(x^{d-i})$ являются i -мерными кубами, которые осуществляют разбиение i -мерного куба

$$Q^i(x^{d-i}) := \{(x^i, x^{d-i}) \mid 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, i\}.$$

Обозначим через $\sigma_{n,i}(x; \tilde{f}, Q^d)$, $1 \leq i \leq d-1$, непрерывные на кубе Q^d функции такие, что при каждом фиксированном x^{d-i} эти функции удовлетворяют следующим условиям:

1) на каждом из кубов $Q_{n, \nu_1, \dots, \nu_i}^i(x^{d-i})$, $\nu_j = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, i$, функция $\sigma_{n,i}(x; \tilde{f}, Q^d)$ является линейной по каждой из переменных x_j , $1 \leq j \leq i$, если фиксированы другие переменные x_k , $k = 1, \dots, i$, $k \neq j$;

2) при всех $(\nu_1/n, \dots, \nu_i/n, x_{i+1}, \dots, x_d)$, $\nu_j = 0, 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, i$, имеют место равенства $\sigma_{n,i}(\nu_1/n, \dots, \nu_i/n, x_{i+1}, \dots, x_d; \tilde{f}, Q^d) = \tilde{f}(\nu_1/n, \dots, \nu_i/n, x_{i+1}, \dots, x_d)$.

Полагая $\sigma_{n,d}(x; \tilde{f}, Q^d) := \sigma_n(x; \tilde{f}, Q^d)$, $x \in Q^d$, представим разность $f(x) - \sigma_n(x; \tilde{f}, Q^d)$, $x \in Q^d$, в следующем виде:

$$f(x) - \sigma_n(x; \tilde{f}, Q^d) = f(x) - \sigma_{n,1}(x; \tilde{f}, Q^d) + \sum_{i=1}^{d-1} \delta_{n,i}(x; \tilde{f}, Q^d), \quad (3.2)$$

где

$$\delta_{n,i}(x; \tilde{f}, Q^d) := \sigma_{n,i}(x; \tilde{f}, Q^d) - \sigma_{n,i+1}(x; \tilde{f}, Q^d), \quad i = 1, \dots, d-1. \quad (3.3)$$

Рассмотрим детально случай $d = 2$. Очевидно, что в этом случае

$$f(x) - \sigma_n(x; \tilde{f}, Q^2) = f(x) - \sigma_{n,1}(x; \tilde{f}, Q^2) + \delta_{n,1}(x; \tilde{f}, Q^2), \quad (3.4)$$

где

$$\delta_{n,1}(x; \tilde{f}, Q^2) = \sigma_{n,1}(x; \tilde{f}, Q^2) - \sigma_{n,2}(x; \tilde{f}, Q^2). \quad (3.5)$$

Ясно, что из (3.4) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\cdot) - \sigma_n(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)} &\leq \|\tilde{f}(\cdot) - \sigma_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)} \\ &\quad + \|\delta_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оценим сначала первое слагаемое из правой части (3.6). Неравенство

$$\|\tilde{f}(\cdot) - \sigma_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)} \leq \max_{0 \leq x_2 \leq 1} \|\tilde{f}(\cdot, x_2) - \sigma_{n,1}(\cdot, x_2; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^1(x_2))} \quad (3.7)$$

является очевидным. Поскольку при каждом фиксированном $x_2 \in [0, 1]$ функция $\sigma_{n,1}(x_1, x_2; \tilde{f}, Q^2)$ для $x_1 \in Q_{n,\nu_1}^1(x_2)$, $1 \leq \nu_1 \leq n$, является линейной по x_1 и при этом интерполирует выпуклую функцию $\tilde{f}(\cdot, x_2)$ в точках $((\nu_1 - 1)/n, x_2)$ и $(\nu_1/n, x_2)$, $\nu_1 = 1, \dots, n$, то можем воспользоваться леммой 2.1. Тогда при каждом $x_2 \in [0, 1]$ будет справедливо неравенство

$$\|\tilde{f}(\cdot, x_2) - \sigma_{n,1}(\cdot, x_2; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^1(x_2))} \leq n^{-2},$$

которое согласно (3.7) приводит к неравенству

$$\|\tilde{f}(\cdot) - \sigma_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)} \leq n^{-2}. \quad (3.8)$$

Теперь оценим второе слагаемое из правой части (3.6). Ясно, что функция $\delta_{n,1}(x_1, x_2; \tilde{f}, Q^2)$ вида (3.5) при любом фиксированном $x_2 \in [0, 1]$ является линейной по x_1 для $x_1 \in Q_{n,\nu_1}^1(x_2)$, $1 \leq \nu_1 \leq n$. Поэтому при каждом ν_1 на отрезке $Q_{n,\nu_1}^1(x_2)$ максимальное по модулю значение этой функции будет достигаться в точках $((\nu_1 - 1)/n, x_2)$ или $(\nu_1/n, x_2)$. Следовательно, при всех $x_1 \in Q_{n,\nu_1}^1(x_2)$ будет справедливо неравенство

$$|\delta_{n,1}(x_1, x_2; \tilde{f}, Q^2)| \leq \left| \delta_{n,1}\left(\frac{\nu_1 - 1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right) \right| + \left| \delta_{n,1}\left(\frac{\nu_1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right) \right|.$$

Кроме того, учитывая, что функция $\sigma_{n,1}(x_1, x_2; \tilde{f}, Q^2)$ интерполирует функцию $\tilde{f}(x_1, x_2)$ в точках $((\nu_1 - 1)/n, x_2)$ и $(\nu_1/n, x_2)$, имеем

$$\begin{aligned} \delta_{n,1}\left(\frac{\nu_1 - 1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right) &= \tilde{f}\left(\frac{\nu_1 - 1}{n}, x_2\right) - \sigma_{n,2}\left(\frac{\nu_1 - 1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right), \\ \delta_{n,1}\left(\frac{\nu_1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right) &= \tilde{f}\left(\frac{\nu_1}{n}, x_2\right) - \sigma_{n,2}\left(\frac{\nu_1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right). \end{aligned}$$

В свою очередь, функция $\sigma_{n,2}((\nu_1 - 1)/n, x_2; \tilde{f}, Q^2)$, являясь линейной относительно переменной $x_2 \in [(\nu_2 - 1)/n, \nu_2/n]$, интерполирует $\tilde{f}((\nu_1 - 1)/n, x_2)$ в точках $((\nu_1 - 1)/n, (\nu_2 - 1)/n)$ и $((\nu_1 - 1)/n, \nu_2/n)$. Аналогично, $\sigma_{n,2}(\nu_1/n, x_2; \tilde{f}, Q^2)$, являясь линейной функцией по переменной $x_2 \in [(\nu_2 - 1)/n, \nu_2/n]$, интерполирует $\tilde{f}(\nu_1/n, x_2)$ в точках $(\nu_1/n, (\nu_2 - 1)/n)$ и $(\nu_1/n, \nu_2/n)$.

Обозначив через $\tilde{f}_-^{(0,1)}$ и $\tilde{f}_+^{(0,1)}$ односторонние производные по x_2 , полагаем

$$\begin{aligned} \omega_{n,\nu_1-1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)}) &:= \tilde{f}_-^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1 - 1}{n}, \frac{\nu_2}{n}\right) - \tilde{f}_+^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1 - 1}{n}, \frac{\nu_2 - 1}{n}\right), \\ \omega_{n,\nu_1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)}) &:= \tilde{f}_-^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1}{n}, \frac{\nu_2}{n}\right) - \tilde{f}_+^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1}{n}, \frac{\nu_2 - 1}{n}\right). \end{aligned}$$

Рассуждая, как в начале доказательства леммы 2.1, приходим к неравенствам

$$\left| \tilde{f}\left(\frac{\nu_1-1}{n}, x_2\right) - \sigma_{n,2}\left(\frac{\nu_1-1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right) \right| \leq \frac{\omega_{n,\nu_1-1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)})}{2n},$$

$$\left| \tilde{f}\left(\frac{\nu_1}{n}, x_2\right) - \sigma_{n,2}\left(\frac{\nu_1}{n}, x_2; \tilde{f}, Q^2\right) \right| \leq \frac{\omega_{n,\nu_1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)})}{2n},$$

которые справедливы для всех $x_2 \in [(\nu_2-1)/n, \nu_2/n]$. Поэтому при всех x , принадлежащих квадрату $Q_{n,\nu}^2 = Q_{n,\nu_1,\nu_2}^2$, имеет место неравенство

$$|\delta_{n,1}(x; \tilde{f}, Q^2)| \leq \frac{\omega_{n,\nu_1-1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)})}{2n} + \frac{\omega_{n,\nu_1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)})}{2n}. \quad (3.9)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\|\delta_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)} = \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \|\delta_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q_{n,\nu_1,\nu_2}^2)}. \quad (3.10)$$

Подставляя неравенства (3.9) в правую часть равенства (3.10), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \|\delta_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q_{n,\nu_1,\nu_2}^2)} \\ & \leq \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \frac{\omega_{n,\nu_1-1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)})}{2n^3} + \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \frac{\omega_{n,\nu_1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)})}{2n^3}. \end{aligned}$$

Ясно также, что в силу выпуклости функции $\tilde{f}$ выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_2=1}^n \omega_{n,\nu_1-1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)}) & \leq \tilde{f}_-^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1-1}{n}, 1\right) - \tilde{f}_+^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1-1}{n}, 0\right), \\ \sum_{\nu_2=1}^n \omega_{n,\nu_1,\nu_2}(\tilde{f}^{(0,1)}) & \leq \tilde{f}_-^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1}{n}, 1\right) - \tilde{f}_+^{(0,1)}\left(\frac{\nu_1}{n}, 0\right). \end{aligned}$$

Поскольку $|\tilde{f}_-^{(0,1)}((\nu_1-1)/n, 1)| \leq 1$ и $|\tilde{f}_+^{(0,1)}((\nu_1-1)/n, 0)| \leq 1$, то

$$\|\delta_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)} \leq 2n^{-2}. \quad (3.11)$$

Но тогда из (3.8), (3.11) и (3.6) следует неравенство

$$\|\tilde{f}(\cdot) - \sigma_n(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(Q^2)} \leq 3n^{-2}.$$

Поэтому, учитывая, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in K^2$, имеем

$$\|f(\cdot) - \sigma_n(\cdot; \tilde{f}, Q^2)\|_{L_1(K^2)} \leq 3n^{-2}, \quad n \geq 1. \quad (3.12)$$

Обозначая через $\Sigma_n(K^2)$ сужение пространства $\Sigma_n(Q^2)$ на K^2 и учитывая (3.12), имеем

$$\sup_{f \in \hat{\mathcal{L}}(K^2)} \inf_{\sigma \in \Sigma_n(K^2)} \|f - \sigma\|_{L_1(K^2)} \leq cn^{-2}, \quad n \geq 1,$$

где $c = c(K^2) > 0$. Поскольку $\dim(\Sigma_n(K^2)) \asymp n^2$, $n \geq 1$, то при некотором $c^* = c^*(K^2) > 0$ для колмогоровских n -поперечников класса $\widehat{\mathcal{L}}^2 := \widehat{\mathcal{L}}(K^2)$ в метрике $L_1^2 := L_1(K^2)$ будет справедлива оценка сверху:

$$d_n(\widehat{\mathcal{L}}^2, L_1^2) \leq c^* n^{-1}, \quad n \geq 1. \quad (3.13)$$

Рассмотрим теперь случай $d > 2$. В этом случае, используя представление (3.2), (3.3) и рассуждая аналогично случаю $d = 2$, мы установим неравенства

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\cdot) - \sigma_{n,1}(\cdot; \tilde{f}, Q^d)\|_{L_1(Q^d)} &\leq cn^{-2}, \\ \|\delta_{n,i}(\cdot; \tilde{f}, Q^d)\|_{L_1(Q^d)} &\leq cn^{-2}, \quad i = 1, \dots, d-1, \end{aligned}$$

где $c = c(d, K^d) > 0$, а из этих неравенств сразу же будет следовать, что

$$\|\tilde{f}(\cdot) - \sigma_n(\cdot; \tilde{f}, Q^d)\|_{L_1(Q^d)} \leq c d n^{-2}.$$

Обозначив через $\Sigma_n(K^d)$ сужение пространства $\Sigma_n(Q^d)$ на K^d , имеем

$$\sup_{f \in \widehat{\mathcal{L}}(K^d)} \inf_{\sigma \in \Sigma_n(K^d)} \|f - \sigma\|_{L_1(K^d)} \leq c d n^{-2}, \quad n \geq 1.$$

Поскольку $\dim(\Sigma_n(K^d)) \asymp n^d$, $n \geq 1$, то при $d > 2$ приходим к оценке сверху:

$$d_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \leq c^* n^{-2/d}, \quad n \geq 1, \quad (3.14)$$

для колмогоровских n -поперечников класса $\widehat{\mathcal{L}}^d := \widehat{\mathcal{L}}(K^d)$ в $L_1^d := L_1(K^d)$, где $c^* = c^*(d, K^d) > 0$.

При этом ясно, что в силу (3.1) и (3.13) оценка вида (3.14) будет верна при всех $d \geq 1$, а оценка $d_0(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \leq c^*$ является очевидной.

Теперь с помощью полученных оценок для колмогоровских поперечников легко установить оценки сверху для энтропийных и псевдоразмерностных поперечников. Для этого достаточно воспользоваться леммой 2.3, полагая в ней $X := L_1^d$, $W := \widehat{\mathcal{L}}^d$ и $\alpha := 2/d$. Ясно, что таким образом мы придем к оценке

$$\varepsilon_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \leq c^* n^{-2/d}, \quad n \geq 1, \quad (3.15)$$

где $c^* = c^*(d, K^d) > 0$. Поскольку непосредственно из определений энтропийных и псевдоразмерностных поперечников следует, что псевдоразмерностные поперечники не больше энтропийных, то из (3.15) будет следовать оценка

$$\rho_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \leq c^* n^{-2/d}, \quad n \geq 1. \quad (3.16)$$

Докажем теперь необходимые оценки снизу в соотношениях (1.1), начав с доказательства оценки снизу для псевдоразмерностных поперечников. При доказательстве оценок снизу будем считать, не ограничивая общности рассуждений, что тело K^d содержит d -мерный куб $Q^d := [0, 1]^d$.

Полагая $\bar{n} := 16n$ и $\nu = \nu_1, \dots, \nu_d$, разобьем этот куб на $\bar{n}^d$ кубов

$$Q_{\bar{n}, \nu}^d := \left\{ x \mid \frac{\nu_i - 1}{\bar{n}} \leq x_i \leq \frac{\nu_i}{\bar{n}}, \quad 1 \leq \nu_i \leq \bar{n}, \quad i = 1, \dots, d \right\}, \quad \nu = \nu_1, \dots, \nu_d,$$

которые не имеют общих внутренних точек.

Зафиксируем функцию $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такую, что $\text{supp } \phi = [0, 1]^d$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^d$, и при этом $\phi(x) = 1$, если $1/4 \leq x_i \leq 3/4$, $i = 1, \dots, d$. Считая фиксированным параметр $\alpha > 0$, который будет указан ниже, определим набор $\Phi_{\alpha}^{\bar{n},d} = \{\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha)\}$, состоящий из $\bar{n}^d$ функций $\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha)$ вида

$$\phi_{\bar{n},\nu}(x; \alpha) := \alpha \bar{n}^{-2} \phi(\bar{n}x_1 - \nu_1 + 1, \dots, \bar{n}x_d - \nu_d + 1),$$

где $1 \leq \nu_i \leq \bar{n}$, $i = 1, \dots, d$. Очевидно, что $\text{supp } \phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha) = Q_{\bar{n},\nu}^d$, а максимальное значение функции $\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha)$ равно $\alpha \bar{n}^{-2}$. Кроме того, ясно, что для любого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^d$ и всех $x \in Q_{\bar{n},\nu}^d$ частные производные этих функций первого и второго порядков по направлению e будут удовлетворять неравенствам

$$\left| \frac{\partial}{\partial e} \phi_{\bar{n},\nu}(x; \alpha) \right| \leq \bar{c} \alpha \bar{n}^{-1}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial e^2} \phi_{\bar{n},\nu}(x; \alpha) \right| \leq \bar{c} \alpha, \quad (3.17)$$

где $\bar{c} = \bar{c}(d, \phi) > 0$ не зависит от $\bar{n}$ и α .

Пусть $\beta > 0$ – фиксированный параметр, а $\varphi_{\beta}(x) := \beta \sum_{i=1}^d x_i^2$, $x \in \mathbb{R}^d$. Через $\Phi_{\alpha}^{\bar{n},d} + \varphi_{\beta} = \{\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha) + \varphi_{\beta}\}$ обозначим совокупность из $\bar{n}^d$ функций вида $\phi_{\bar{n},\nu}(x; \alpha) + \varphi_{\beta}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Выберем теперь и зафиксируем параметры $\alpha = \alpha(\phi, d, K^d)$ и $\beta = \beta(\phi, d, K^d)$ так, чтобы для заданного тела K^d при некотором фиксированном $A = A(\phi, d, K^d) \leq 1$, но при всех $\bar{n}$ и ν имели место соотношения

$$\|\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha)\|_{L_{\infty}(Q_{\bar{n},\nu}^d)} = A \bar{n}^{-2}, \quad \|\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha) + \varphi_{\beta}(\cdot)\|_{L_{\infty}(K^d)} \leq 1, \quad (3.18)$$

а кроме того, чтобы для любого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^d$ частные производные функций $\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha) + \varphi_{\beta}(\cdot)$ первого и второго порядков по направлению e удовлетворяли при всех $x \in K^d$ неравенствам

$$\left| \frac{\partial}{\partial e} (\phi_{\bar{n},\nu}(x; \alpha) + \varphi_{\beta}(x)) \right| \leq 1, \quad \frac{\partial^2}{\partial e^2} (\phi_{\bar{n},\nu}(x; \alpha) + \varphi_{\beta}(x)) \geq 0. \quad (3.19)$$

Согласно определениям функций $\phi_{\bar{n},\nu}(\cdot; \alpha)$ и φ_{β} , а также неравенствам (3.17) такие параметры α и β существуют. Ясно, что при условиях (3.18) и (3.19) все функции из набора $\Phi_{\alpha}^{\bar{n},d} + \varphi_{\beta}$ принадлежат классу $\widehat{\mathcal{L}}(K^d)$.

Пусть $V_{\pm}^{\bar{n},d}$ – множество, состоящее из $2^{\bar{n}^d}$ векторов $v = (v_1, \dots, v_{\bar{n}^d})$ таких, что $v_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, \bar{n}^d$. Зафиксируем взаимно однозначное соответствие $\nu \leftrightarrow k_{\nu}$ между мультииндексами $\nu = \nu_1, \dots, \nu_d$ и номерами координат векторов v . Затем, воспользовавшись леммой 2.4, выделим из множества $V_{\pm}^{\bar{n},d}$ подмножество $V_{*}^{\bar{n},d}$ такое, что $\text{card}(V_{*}^{\bar{n},d}) \geq 2^{\bar{n}^d/16}$, и при этом для любых попарно различных векторов $\hat{v}, \check{v} \in V_{*}^{\bar{n},d}$ имеет место неравенство $\|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^{\bar{n}^d}} \geq \bar{n}^d/2$.

Каждому вектору $v \in V_{*}^{\bar{n},d}$ поставим в соответствие функцию вида

$$\psi_{\bar{n},v}(x; \alpha) := \sum_{\nu} v_{k_{\nu}} \phi_{\bar{n},\nu}(x; \alpha),$$

где сумма берется по всем $\nu = \nu_1, \dots, \nu_d$ таким, что $1 \leq \nu_i \leq \bar{n}$, $i = 1, \dots, d$. Множество всех функций $\psi_{\bar{n},v}(\cdot; \alpha)$, $v \in V_{*}^{\bar{n},d}$, обозначим через $\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d}$. Согласно равенству из (3.18) при всех $v \in V_{*}^{\bar{n},d}$ верны равенства

$$\|\psi_{\bar{n},v}(\cdot; \alpha)\|_{L_{\infty}(Q^d)} = A \bar{n}^{-2}. \quad (3.20)$$

Кроме того, так как $\|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^{n^d}} \geq \bar{n}^d/2$ для $\hat{v}, \check{v} \in V_*^{\bar{n},d}$ таких, что $\hat{v} \neq \check{v}$, то при некотором $c' = c'(\phi, d, K^d) > 0$ будут справедливы неравенства

$$\|\psi_{\bar{n},\hat{v}}(\cdot; \alpha) - \psi_{\bar{n},\check{v}}(\cdot; \alpha)\|_{L_1(Q^d)} \geq c' \bar{n}^{-2}, \quad \hat{v} \neq \check{v}. \quad (3.21)$$

Полагая $\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d} + \varphi_\beta := \{\psi_{\bar{n},v}(\cdot; \alpha) + \varphi_\beta, v \in V_*^{\bar{n},d}\}$, с помощью соотношений (3.18) и (3.19) нетрудно проверить, что все функции из $\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d} + \varphi_\beta$ принадлежат классу $\widehat{\mathcal{L}}(K^d)$. Но тогда очевидно, что при любом $m \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\rho_m(\widehat{\mathcal{L}}(K^d), L_1(K^d)) \geq \rho_m(\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d} + \varphi_\beta, L_1(Q^d)). \quad (3.22)$$

Поскольку сдвиг любого многообразия заданной псевдоразмерности на любую фиксированную функцию не меняет размерности многообразия (см., например, [4, п. 3.2, теорема 5]), то

$$\rho_m(\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d} + \varphi_\beta, L_1(Q^d)) = \rho_m(\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d}, L_1(Q^d)). \quad (3.23)$$

Теперь воспользуемся леммой 2.6. Полагая в этой лемме $\omega = Q^d$ и рассматривая в качестве $\Psi_{a,\varepsilon}^n(\omega)$ функциональный класс $\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d}$, укажем для этого класса величины $|\omega|$, a , ε и оценку снизу величины $\mathcal{N}_\varepsilon(\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d}, L_1(Q^d))$.

Очевидно, что $|\omega| = |Q^d| = 1$. Кроме того, из (3.20) следует, что $a = A/n^2$, а из (3.21) следует, что $\varepsilon = c'/n^2$. При этом величину c' можно считать такой, что $c' \leq A$. В этом случае будет выполняться условие $|\omega|a/\varepsilon \geq 1$. Ясно, что при указанных $|\omega|$, a и ε будет иметь место оценка $\mathcal{N}_\varepsilon(\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d}, L_1(Q^d)) \geq 2^{\bar{n}^d/16}$.

Поскольку $\bar{n} = 16n$, то из леммы 2.6 следует, что для $m = \lceil 16^{d-1} n^d / c_0 \rceil$, где $c_0 := 2^{12}(8 + \log_2(A/c'))$, будет справедливо неравенство

$$\rho_m(\Psi_{*,\alpha}^{\bar{n},d}, L_1(Q^d)) \geq \frac{c'}{2n^2}. \quad (3.24)$$

Так как $m \asymp n^d$ при $n \rightarrow \infty$, то из (3.22)–(3.24) следует оценка

$$\rho_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \geq c_* n^{-2/d}, \quad n \geq 1, \quad (3.25)$$

где $c_* = c_*(\phi, K^d) > 0$, $\widehat{\mathcal{L}}^d := \widehat{\mathcal{L}}(K^d)$ и $L_1^d := L_1(K^d)$. Кроме того, учитывая, что псевдоразмерностные поперечники не больше энтропийных, получаем

$$\varepsilon_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \geq c_* n^{-2/d}, \quad n \geq 1. \quad (3.26)$$

Известно также (см., например, [4, п. 3.2, теорема 4]), что для линейных конечномерных пространств функций псевдоразмерность совпадает с обычной (алгебраической) размерностью. Поэтому псевдоразмерностные поперечники не больше колмогоровских, и тогда из (3.25) следует оценка

$$d_n(\widehat{\mathcal{L}}^d, L_1^d) \geq c_* n^{-2/d}, \quad n \geq 1. \quad (3.27)$$

Таким образом, доказаны все необходимые оценки снизу. Объединяя оценки сверху (3.14)–(3.16) с оценками снизу (3.25)–(3.27), получаем соотношения (1.1). Теорема 1.1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1.2

Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1$ и получим оценки сверху для энтропийных поперечников.

Учитывая определение класса $\mathcal{O}_\varepsilon^d$, нетрудно проверить, что существуют число $\epsilon = \epsilon(d, \varepsilon) > 0$, натуральное число $k = k(d, \varepsilon)$ и набор точек $x^1, \dots, x^k \in B^d$ такие, что каждое множество $\omega \in \mathcal{O}_\varepsilon^d$ будет содержать хотя бы один шар $B_\epsilon^d(x^j)$ с радиусом ϵ и центром в одной из точек x^j этого набора.

Разобьем весь класс $\mathcal{O}_\varepsilon^d$ на k совокупностей множеств из $\mathcal{O}_\varepsilon^d$, включив в первую совокупность все множества, содержащие шар $B_\epsilon^d(x^1)$, во вторую – все множества, содержащие шар $B_\epsilon^d(x^2)$, но не включенные в первую совокупность, и т. д.

Пусть $\omega \in \mathcal{O}_\varepsilon^d$ – любое из множеств j -й совокупности, содержащее шар $B_\epsilon^d(x^j)$. Сдвигая тела ω из j -й совокупности на вектор $-x^j$, рассмотрим множества $w := \omega - x^j$. Таким образом, мы получаем j -ю совокупность тел w , содержащих шар B_ϵ^d с центром в начале координат. Очевидно, что $B_\epsilon^d \subseteq w \subseteq B_2^d$, где B_ϵ^d и B_2^d – шары с радиусами ϵ и 2 соответственно.

Зафиксировав j -ю совокупность тел w и воспользовавшись леммой 2.7, покроем каждое тело w конечным числом $m = m(d, \varepsilon)$ регулярных “мостов” $[w; \mathcal{R}_\mu^d, r, \lambda]$, $\mu = 1, \dots, m$, относительно начала координат в $\mathbb{R}^d$, где $r = r(d, \varepsilon)$ и $\lambda = \lambda(d, \varepsilon)$. Отметим, что согласно определению каждый из этих “мостов” – выпуклое цилиндрическое множество, основания которого описываются с помощью функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой λ , а расстояния между соответствующими точками этих оснований не меньше r .

Фиксируя μ и вращая систему координат $\mathcal{R}_\mu^d$ вместе с телом w так, чтобы возвратиться к исходной системе координат в $\mathbb{R}^d$, мы получим тело $w(\mathcal{R}_\mu^d)$. При этом “мост” $[w; \mathcal{R}_\mu^d, r, \lambda]$ преобразуется в соответствующий “мост” $[w(\mathcal{R}_\mu^d); \mathbb{R}^d, r, \lambda]$ для тела $w(\mathcal{R}_\mu^d)$. Этот “мост” представляет собой выпуклое цилиндрическое тело, основания которого будут описываться функциями f и g , заданными на шаре $B_r^{d-1} := \{x \mid x_1^2 + \dots + x_{d-1}^2 \leq r^2, x_d = 0\}$. При этом f и g будут удовлетворять на B_r^{d-1} условию Липшица с константой λ , а расстояние в метрике пространства $L_\infty(B_r^{d-1})$ между основаниями f и g будет не меньше r . Кроме того, ясно, что $\|f\|_{L_\infty(B_r^{d-1})} \leq 2$ и $\|g\|_{L_\infty(B_r^{d-1})} \leq 2$.

Тогда из теоремы 1.1 будет следовать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ на B_r^{d-1} существует зависящий лишь от n, d, r и λ набор $H_{r, \lambda}^{n, d-1} = \{h\}$ функций h такой, что $\text{card}(H_{r, \lambda}^{n, d-1}) \leq 2^n$, и при этом для f и g найдутся функции $h_f, h_g \in H_{r, \lambda}^{n, d-1}$, которые при некотором $c = c(d, \varepsilon) > 0$ будут удовлетворять неравенствам

$$\|f - h_f\|_{L_1(B_r^{d-1})} \leq cn^{-2/(d-1)}, \quad \|g - h_g\|_{L_1(B_r^{d-1})} \leq cn^{-2/(d-1)}.$$

Обозначив через $[w(\mathcal{R}_\mu^d); \mathbb{R}^d, r, \lambda]_n$ цилиндрическое тело, заключенное между h_f и h_g , отметим, что в пространстве (Λ^d, ρ_d) расстояние между телами $[w(\mathcal{R}_\mu^d); \mathbb{R}^d, r, \lambda]$ и $[w(\mathcal{R}_\mu^d); \mathbb{R}^d, r, \lambda]_n$ будет не больше $2cn^{-2/(d-1)}$.

Вращая тело $[w(\mathcal{R}_\mu^d); \mathbb{R}^d, r, \lambda]_n$ так, чтобы вернуться к системе координат $\mathcal{R}_\mu^d$, мы преобразуем $[w(\mathcal{R}_\mu^d); \mathbb{R}^d, r, \lambda]_n$ в тело $[w; \mathcal{R}_\mu^d, r, \lambda]_n$. Прделаав такую процедуру для каждого из “мостов” $[w; \mathcal{R}_\mu^d, r, \lambda]$, $\mu = 1, \dots, m$, полагаем

$$w_n := \bigcup_{\mu=1}^m [w; \mathcal{R}_\mu^d, r, \lambda]_n.$$

При этом ясно, что в силу условия $\text{card}(H_{r,\lambda}^{n,d-1}) \leq 2^n$ различных тел w_n будет не более чем $2^n m$ и что для каждого из рассматриваемых в j -совокупности тел w найдется по крайней мере одно тело w_n такое, что $|w\Delta w_n| \leq 2cmn^{-2/(d-1)}$.

Сдвигая на вектор x^j тела w_n , соответствующие j -й совокупности тел w , получаем j -ю совокупность тел $\omega_n := w_n + x^j$. Очевидно, что количество таких тел ω_n не будет превышать $2^n m$ и что для каждого ω из j -й совокупности найдется по крайней мере одно тело ω_n такое, что $|\omega\Delta\omega_n| \leq 2cmn^{-2/(d-1)}$.

Осуществив эту процедуру при каждом $j = 1, \dots, k$, мы получим набор $\{\omega_n\}$, состоящий из не более чем $2^n km$ различных тел ω_n . Кроме того, ясно, что для любого из тел $\omega \in \mathcal{O}_\varepsilon^d$ в полученном наборе $\{\omega_n\}$ найдется по крайней мере одно тело ω_n такое, что $|\omega\Delta\omega_n| \leq 2cmn^{-2/(d-1)}$. Но тогда ясно, что при некотором $c^* = c^*(d, \varepsilon) > 0$ будет справедлива оценка

$$\varepsilon_n(\mathcal{O}_\varepsilon^d, \Lambda^d) \leq c^* n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1. \quad (4.1)$$

Поскольку псевдоразмерностные поперечники не больше энтропийных, то

$$\rho_n(\mathcal{O}_\varepsilon^d, \Lambda^d) \leq c^* n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1. \quad (4.2)$$

Таким образом, для $0 < \varepsilon < 1$ оценки сверху в соотношениях (1.2) доказаны.

Докажем теперь в случае $0 < \varepsilon < 1$ необходимые оценки снизу. Для этого мы вначале оценим снизу псевдоразмерностные поперечники.

Считая d фиксированным и полагая $\bar{n} := 16n$, выберем $\bar{n}^{d-1}$ точек x^ν , $\nu = 1, \dots, \bar{n}^{d-1}$, на единичной сфере $S^{d-1} := \{x \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$ так, чтобы при некотором $\alpha = \alpha(d, \varepsilon) > 0$ шары $B_{\alpha/n}^d(x^\nu)$, $\nu = 1, \dots, \bar{n}^{d-1}$, радиусом α/n не пересекались между собой и чтобы при этом ни один из шаров $B_{\alpha/n}^d(x^\nu)$ не пересекался с шаром B_ε^d . Проводя через $(d-2)$ -мерные сферы $S^{d-1} \cap B_{\alpha/n}^d(x^\nu)$, $\nu = 1, \dots, \bar{n}^{d-1}$, плоскости размерности $d-1$, отсечем от шара B^d соответствующие шаровые $(d-1)$ -мерные сегменты $\varpi_{\bar{n},\nu}$, $\nu = 1, \dots, \bar{n}^{d-1}$, таким образом, чтобы оставшееся после удаления всех этих сегментов тело

$$\theta_{\bar{n}} := B^d \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{\bar{n}^{d-1}} \varpi_{\bar{n},\nu} \right) \quad (4.3)$$

было замкнутым. При этом ясно, что множество $\theta_{\bar{n}}$ является выпуклым, содержится в шаре B^d и содержит шар B_ε^d . Отметим также, что существуют числа $c' = c'(d, \varepsilon) > 0$ и $c'' = c''(d, \varepsilon) > 0$ такие, что

$$c' n^{-d-1} \leq |\varpi_{\bar{n},\nu}| \leq c'' n^{-d-1}, \quad \nu = 1, \dots, \bar{n}^{d-1}. \quad (4.4)$$

Обозначим через $V^{\bar{n},d-1}$ множество векторов $v = (v_1, \dots, v_{\bar{n}^{d-1}})$ таких, что координаты v_ν , $1 \leq \nu \leq \bar{n}^{d-1}$, этих векторов могут принимать лишь значения 0 и 1. При этом очевидно, что $\text{card}(V^{\bar{n},d-1}) = 2^{\bar{n}^{d-1}}$.

Используя лемму 2.4, нетрудно убедиться в том, что $V^{\bar{n},d-1}$ содержит подмножество $V_{\circ}^{n,d-1}$, $\text{card}(V_{\circ}^{n,d-1}) \geq 2^{n^{d-1}}$, и что при этом для векторов $\hat{v}, \check{v} \in V_{\circ}^{n,d-1}$, $\hat{v} \neq \check{v}$, будут справедливы неравенства

$$\|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^{\bar{n}^{d-1}}} \geq n^{d-1}. \quad (4.5)$$

Каждому вектору $v = (v_1, \dots, v_{\bar{n}^{d-1}})$ из $V_{\circ}^{n,d-1}$ поставим в соответствие тело

$$\vartheta_{\bar{n},v} := \theta_{\bar{n}} \cup \left(\bigcup_{\nu=1}^{\bar{n}^{d-1}} v_\nu \varpi_{\bar{n},\nu} \right), \quad (4.6)$$

где

$$v_\nu \varpi_{\bar{n},\nu} := \begin{cases} \varpi_{\bar{n},\nu}, & \text{если } v_\nu = 1, \\ \emptyset, & \text{если } v_\nu = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Совокупность всех тел $\vartheta_{\bar{n},v}$, $v \in V_{\circ}^{n,d-1}$, обозначим через $\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}$.

Очевидно, что каждое тело $\vartheta_{\bar{n},v}$ из $\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}$ является замкнутым и выпуклым, содержится в шаре B^d и содержит шар B_ε^d . Следовательно, класс $\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}$ тел $\vartheta_{\bar{n},v}$ принадлежит классу $\mathcal{O}_\varepsilon^d$, и поэтому

$$\rho_n(\mathcal{O}_\varepsilon^d, \Lambda^d) \geq \rho_n(\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}, \Lambda^d). \quad (4.8)$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, а $M^{m,d} = \{w\}$ – любая фиксированная совокупность множеств $w \in \Lambda^d$, имеющая псевдоразмерность не более m . Поскольку очевидно, что для любых множеств $\omega', \omega'' \in \Lambda^d$ имеет место равенство

$$|\omega' \Delta \omega''| = \|\chi_{\omega'} - \chi_{\omega''}\|_{L_1(\omega' \Delta \omega'')}, \quad (4.9)$$

то, обозначив через $\chi(\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d})$ и $\chi(M^{m,d})$ классы характеристических функций, соответствующие классам множеств $\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}$ и $M^{m,d}$, имеем

$$|\vartheta_{\bar{n},v} \Delta w| = \|\chi_{\vartheta_{\bar{n},v}} - \chi_w\|_{L_1(\vartheta_{\bar{n},v} \Delta w)}, \quad \vartheta_{\bar{n},v} \in \Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}, \quad w \in M^{m,d}.$$

Отметим также, что

$$\dim_{\text{ps}}(\chi(M^{m,d})) = \dim_{\text{ps}}(M^{m,d}). \quad (4.10)$$

Поставив в соответствие каждому множеству $w \in M^{m,d}$ множество

$$w_{\bar{n}} := (w \cap (B^d \setminus \theta_{\bar{n}})) \cup \theta_{\bar{n}},$$

где тело $\theta_{\bar{n}}$ определено в (4.3), нетрудно убедиться, учитывая определение в (4.6) и (4.7) тел $\vartheta_{\bar{n},v} \in \Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}$, что $|\vartheta_{\bar{n},v} \Delta w| \geq |\vartheta_{\bar{n},v} \Delta w_{\bar{n}}|$ для любого $w \in M^{m,d}$. Поэтому

$$\|\chi_{\vartheta_{\bar{n},v}} - \chi_w\|_{L_1(\vartheta_{\bar{n},v} \Delta w)} \geq \|\chi_{\vartheta_{\bar{n},v}} - \chi_w\|_{L_1(\vartheta_{\bar{n},v} \Delta w_{\bar{n}})}.$$

Поскольку каждое из рассматриваемых множеств $\vartheta_{\bar{n},v}$ и $w_{\bar{n}}$ содержит множество $\theta_{\bar{n}}$, то очевидно, что множество $\vartheta_{\bar{n},v} \Delta w_{\bar{n}}$ принадлежит множеству $B^d \setminus \theta_{\bar{n}}$.

При этом ясно, что псевдоразмерность класса сужений на $B^d \setminus \theta_{\bar{n}}$ характеристических функций χ_w , $w \in M^{m,d}$, не превосходит m , следовательно,

$$\sup_{\vartheta_{\bar{n},v} \in \Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}} \inf_{w \in M^{m,d}} \|\chi_{\vartheta_{\bar{n},v}} - \chi_w\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \geq \rho_m(\chi(\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}, L_1(B^d \setminus \theta_{\bar{n}}))). \quad (4.11)$$

Для того чтобы оценить снизу величину поперечника из правой части неравенства (4.11), воспользуемся леммой 2.6. Ясно, что $\text{card}(\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}) \geq 2^{n^{d-1}}$. Очевидно также, что для каждого $\vartheta_{\bar{n},v} \in \Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}$ имеет место неравенство $\|\chi_{\vartheta_{\bar{n},v}}\|_{L_\infty(B^d \setminus \theta_{\bar{n}})} \leq 1$. Кроме того, из (4.3) и (4.4) следует, что

$$|B^d \setminus \theta_{\bar{n}}| = \left| \bigcup_{\nu=1}^{\bar{n}^{d-1}} \varpi_{\bar{n},\nu} \right| = \sum_{\nu=1}^{\bar{n}^{d-1}} |\varpi_{\bar{n},\nu}| \asymp c'' \sum_{\nu=1}^{\bar{n}^{d-1}} \bar{n}^{-d-1} = c'' \bar{n}^{-2} = 256c'' n^{-2}. \quad (4.12)$$

Если $\chi_{\vartheta_{\bar{n},\hat{v}}}$ и $\chi_{\vartheta_{\bar{n},\check{v}}}$ — характеристические функции, соответствующие разным векторам $\hat{v}, \check{v} \in V_{\circ}^{n,d-1}$, то из (4.4)–(4.7) следует, что

$$\|\chi_{\vartheta_{\bar{n},\hat{v}}} - \chi_{\vartheta_{\bar{n},\check{v}}}\|_{L_1(B^d \setminus \theta_{\bar{n}})} = \sum_{\nu=1}^{\bar{n}^{d-1}} |\hat{v}_\nu - \check{v}_\nu| |\varpi_{\bar{n},\nu}| \asymp c' \|\hat{v} - \check{v}\|_{l_1^{\bar{n}^{d-1}}} n^{-d-1} \geq c' n^{-2}.$$

Поэтому, воспользовавшись леммой 2.6, мы устанавливаем, что для натуральных $m = \lfloor n^{d-1}/c_{\circ} \rfloor$, где $c_{\circ} := 2^{12}(16 + \log_2(c''/c'))$, имеет место неравенство

$$\rho_m(\chi(\Theta_{\circ,\varepsilon}^{n,d}, L_1(B^d \setminus \theta_{\bar{n}}))) \geq \frac{c'}{2n^2}. \quad (4.13)$$

Очевидно, что $m \asymp n^{d-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда из (4.8)–(4.13) следует, что при некотором $c_* = c_*(d, \varepsilon) > 0$ будет справедлива оценка

$$\rho_n(\mathcal{O}_{\varepsilon}^d, \Lambda^d) \geq c_* n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1. \quad (4.14)$$

Поскольку энтропийные поперечники не меньше псевдоразмерностных, то

$$\varepsilon_n(\mathcal{O}_{\varepsilon}^d, \Lambda^d) \geq c_* n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1. \quad (4.15)$$

Объединяя оценки сверху (4.1) и (4.2) с оценками снизу (4.14) и (4.15), получаем соотношения (1.2) в случае $0 < \varepsilon < 1$.

Осталось рассмотреть случай $\varepsilon = 0$. Учитывая, что класс $\mathcal{O}_0^d$ шире любого из классов $\mathcal{O}_{\varepsilon}^d$, $0 < \varepsilon < 1$, неравенства

$$\varepsilon_n(\mathcal{O}_0^d, \Lambda^d) \geq \rho(\mathcal{O}_0^d, \Lambda^d) \geq c_* n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1, \quad (4.16)$$

являются очевидными.

Для доказательства оценок сверху в случае $\varepsilon = 0$ мы используем путь, предложенный нам рецензентом.

Обозначая для каждого тела $\omega \in \mathcal{O}_0^d$ через

$$U(\omega) := \{x \mid |x - y| \leq 1, y \in \omega\}$$

1-окрестность этого тела, отметим, что каждое из множеств $U(\omega)$ является выпуклым компактным телом, содержит некоторый шар $B_r^d = B_r^d(\omega)$ радиуса $r \geq 1$, а также принадлежит шару B_2^d с центром в начале координат.

Рассуждая, как при доказательстве оценок сверху энтропийных поперечников для классов $\mathcal{O}_\varepsilon^d$, $0 < \varepsilon < 1$, мы можем утверждать, что при каждом $n \geq 1$ существует некоторый набор $\{U_n\}$ из не более чем 2^n тел U_n таких, что для каждого тела $U(\omega)$, где $\omega \in \mathcal{O}_0^d$, найдется по крайней мере одно тело $U_n = U_n(U(\omega))$, удовлетворяющее неравенству

$$|U(\omega)\Delta U_n| \leq \bar{c}n^{-2/(d-1)},$$

где $\bar{c} = \bar{c}(d) > 0$.

Нетрудно проверить, что тогда существует набор $\{\omega_n\}$, состоящий из не более чем 2^n тел $\omega_n \in \mathcal{O}_0^d$ таких, что для каждого тела $U(\omega)$, где $\omega \in \mathcal{O}_0^d$, найдется по крайней мере одно тело $U(\omega_n)$, удовлетворяющее неравенству

$$|U(\omega)\Delta U(\omega_n)| \leq c^*n^{-2/(d-1)}, \quad (4.17)$$

где $c^* := 2\bar{c}$. Всю совокупность 1-окрестностей $U(\omega_n)$ тел ω_n будем обозначать через $\{U(\omega_n)\}$. Затем воспользуемся неравенством

$$|w'\Delta w''| \leq |U(w')\Delta U(w'')| \quad (4.18)$$

для 1-окрестностей $U(w')$ и $U(w'')$ любых выпуклых компактных тел w' и w'' . В справедливости неравенства (4.18) можно убедиться с помощью следующих рассуждений.

Каждой точке $x \in w' \setminus w''$ сопоставим точку

$$y_{w''}(x) := x + \frac{x - P_{w''}(x)}{|x - P_{w''}(x)|},$$

где $P_{w''}(x)$ – ближайшая к x точка тела w'' . Таким образом, мы получаем отображение $w' \setminus w'' \mapsto U(w') \setminus U(w'')$. Согласно лемме 2.8 это отображение не уменьшает расстояния, а следовательно, не уменьшает меру, и поэтому

$$|w' \setminus w''| \leq |U(w') \setminus U(w'')|.$$

Аналогично устанавливается и неравенство

$$|w'' \setminus w'| \leq |U(w'') \setminus U(w')|.$$

Очевидно, что из этих неравенств сразу же следует неравенство (4.18). Но тогда из (4.17) и (4.18) следует, что

$$|\omega\Delta\omega_n| \leq c^*n^{-2/(d-1)}.$$

Поскольку совокупность $\{\omega_n\}$ содержит не более чем 2^n элементов, то

$$\rho_n(\mathcal{O}_0^d, \Lambda^d) \leq \varepsilon_n(\mathcal{O}_0^d, \Lambda^d) \leq c^*n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1. \quad (4.19)$$

Объединяя оценки снизу (4.16) с оценками сверху (4.19), получаем соотношения (1.2) в случае $\varepsilon = 0$.

В заключение отметим, что точные порядки в соотношениях (1.2) могут реализовывать совокупности из не более чем 2^n выпуклых многогранников, каждый из которых имеет не более чем n вершин.

Действительно, как установлено выше, при каждом $n \geq 1$ существует набор $\{\omega_n\}$ из не более чем 2^n выпуклых компактных тел $\omega_n \in \mathcal{O}_0^d$ таких, что для каждого $\omega \in \mathcal{O}_0^d$ найдется по крайней мере одно тело ω_n из $\{\omega_n\}$, удовлетворяющее неравенству

$$|\omega \Delta \omega_n| \leq c^* n^{-2/(d-1)}.$$

Кроме того, из [16] следует, что для каждого выпуклого компактного тела w найдется выпуклый многогранник $\pi_n(w)$ с не более чем n вершинами такой, что

$$|w \Delta \pi_n(w)| \leq \tilde{c} |w| n^{-2/(d-1)},$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(d) > 0$. Но тогда для соответствующего многогранника $\pi_n(\omega_n)$ будут справедливы неравенства

$$|\omega \Delta \pi_n(\omega_n)| \leq |\omega \Delta \omega_n| + |\omega_n \Delta \pi_n(\omega_n)| \leq \hat{c} n^{-2/(d-1)},$$

где $\hat{c} = c^* + \tilde{c}|B^d|$. При этом очевидно, что совокупность $\{\pi_n(\omega_n)\}$ таких многогранников $\pi_n(\omega_n)$ содержит не более чем 2^n элементов. Этим мы заканчиваем доказательство теоремы 1.2.

§ 5. Доказательство теоремы 1.3

Пусть $0 \leq \varepsilon < 1$. Учитывая доказанные в теореме 1.2 соотношения

$$\varepsilon_n(\mathcal{O}_\varepsilon^d, \Lambda^d) \asymp n^{-2/(d-1)}, \quad n \geq 1, \quad (5.1)$$

легко получить при всех $1 \leq p \leq \infty$ оценки сверху

$$\rho_n(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \leq \varepsilon_n(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \leq c^\circ n^{-2/((d-1)p)}, \quad n \geq 1, \quad (5.2)$$

где $c^\circ = c^\circ(d, \varepsilon, p) > 0$.

Действительно, из (5.1) следует, что при каждом $n \geq 1$ существует набор $\{w_n\}$, состоящий из не более чем 2^n измеримых множеств w_n таких, что для каждого множества $\omega \in \mathcal{O}_\varepsilon^d$ найдется по крайней мере одно множество $w_n = w_n(\omega)$, удовлетворяющее неравенству

$$|\omega \Delta w_n| \leq c^* n^{-2/(d-1)},$$

где $c^* = c^*(d, \varepsilon)$. Но тогда при $1 \leq p < \infty$ мы имеем

$$\begin{aligned} \|\chi_\omega - \chi_{w_n}\|_{L_p^d} &= \left(\int_{\omega \Delta w_n} |\chi_\omega(x) - \chi_{w_n}(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\omega \Delta w_n} |\chi_\omega(x) - \chi_{w_n}(x)| dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\omega \Delta w_n} 1 dx \right)^{1/p} = |\omega \Delta w_n|^{1/p} \leq (c^*)^{1/p} n^{-2/((d-1)p)}, \end{aligned}$$

а при $p = \infty$ очевидно, что $\|\chi_\omega - \chi_{w_n}\|_{L_\infty^d} \leq 1$. Полагая $c^\circ := (c^*)^{1/p}$ для $1 \leq p \leq \infty$, приходим к оценкам (5.2).

Теперь докажем при всех $0 \leq \varepsilon < 1$ и $1 \leq p \leq \infty$ оценки снизу

$$\varepsilon_n(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \geq \rho_n(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \geq c_\circ n^{-2/((d-1)p)}, \quad n \geq 1, \quad (5.3)$$

где $c_\circ = c_\circ(d, \varepsilon, p) > 0$.

Для этого, зафиксировав $0 < \varepsilon < 1$, вновь рассмотрим класс $\Theta_{\circ, \varepsilon}^{n, d}$ всех тел $\vartheta_{\bar{n}, v}$, $v \in V_\circ^{n, d-1}$, определенных согласно (4.7), и обозначим через $\chi(\Theta_{\circ, \varepsilon}^{n, d})$ соответствующий класс характеристических функций $\chi_{\vartheta_{\bar{n}, v}}$ тел $\vartheta_{\bar{n}, v}$. Пусть $\theta_{\bar{n}}$ – подмножество шара B^d , определенное согласно (4.3). Очевидно, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\rho_n(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \geq \rho_m(\chi(\Theta_{\circ, \varepsilon}^{n, d}), L_p(B^d)) \geq \rho_m(\chi(\Theta_{\circ, \varepsilon}^{n, d}), L_p(B^d \setminus \theta_{\bar{n}})). \quad (5.4)$$

Кроме того, воспользовавшись неравенством Гёльдера, имеем

$$\rho_m(\chi(\Theta_{\circ, \varepsilon}^{n, d}), L_p(B^d \setminus \theta_{\bar{n}})) \geq |B^d \setminus \theta_{\bar{n}}|^{-1+1/p} \rho_m(\chi(\Theta_{\circ, \varepsilon}^{n, d}), L_1(B^d \setminus \theta_{\bar{n}})). \quad (5.5)$$

Пусть c' и c'' – постоянные из (4.4), $c_\circ := 2^{12}(16 + \log_2(c''/c'))$, а $m = \lceil n^{d-1}/c_\circ \rceil$. Тогда, учитывая (см. (4.12)), что $|B^d \setminus \theta_{\bar{n}}| \asymp n^{-2}$, а также неравенство (4.13), получаем для таких m следующую оценку:

$$|B^d \setminus \theta_{\bar{n}}|^{-1+1/p} \rho_m(\chi(\Theta_{\circ, \varepsilon}^{n, d}), L_1(B^d \setminus \theta_{\bar{n}})) \geq \check{c} n^{-2/p}, \quad (5.6)$$

где $\check{c} = \check{c}(c', c'', p) > 0$.

Ясно, что из (5.4)–(5.6) следует, что

$$\rho_m(\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d), L_p^d) \geq \check{c} n^{-2/p}.$$

Поскольку $m \asymp n^{d-1}$, то при $0 < \varepsilon < 1$ будут справедливы оценки (5.3). Эти оценки верны и для $\varepsilon = 0$ в силу того, что класс $\chi(\mathcal{O}_0^d)$ шире любого из классов $\chi(\mathcal{O}_\varepsilon^d)$, $0 < \varepsilon < 1$.

Объединяя оценки (5.2) с оценками (5.3), получаем соотношения (1.3).

В заключение отметим, что точные порядки в соотношениях (1.3) могут реализовывать совокупности из не более чем 2^n характеристических функций выпуклых многогранников, каждый из которых имеет не более чем n вершин. Этим мы заканчиваем доказательство теоремы 1.3.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ряд важных замечаний, сделанных к данной работе и, в частности, за предложенный нам путь доказательств теоремы 1.2 и теоремы 1.3 в случае $\varepsilon = 0$.

Список литературы

1. V. Maiorov, J. Ratsaby, “On the degree of approximation by manifolds of finite pseudo-dimension”, *Constr. Approx.*, **15**:2 (1999), 291–300.
2. V.N. Konovalov, D. Leviatan, “Kolmogorov and linear widths of weighted Sobolev-type classes on a finite interval. II”, *J. Approx. Theory*, **113**:2 (2001), 266–297.

3. В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис, “О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **16**:2 (1971), 264–279; англ. пер.: V. N. Vapnik, A. Ya. Chervonenkis, “On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities”, *Theory Probab. Appl.*, **16**:2 (1971), 264–280.
4. D. Haussler, “Decision theoretic generalizations of the PAC model for neural net and other learning applications”, *Inform. and Comput.*, **100**:1 (1992), 78–150.
5. D. Haussler, “Sphere packing numbers for subsets of the Boolean n -cube with bounded Vapnik–Chervonenkis dimension”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **69**:2 (1995), 217–232.
6. V. Maiorov, J. Ratsaby, “The degree of approximation of sets in Euclidean space using sets with bounded Vapnik–Chervonenkis dimension”, *Discrete Appl. Math.*, **86**:1 (1998), 81–93.
7. V. Maiorov, “Optimal non-linear approximation using sets of finite pseudo-dimension”, *East J. Approx.*, **11**:1 (2005), 1–19.
8. A. W. Roberts, D. E. Varberg, *Convex functions*, Academic Press, New York–London, 1973.
9. X. G. Lu, “On multivariate polynomials convex approximation”, *Math. Numer. Sinica*, **12**:2 (1990), 186–193.
10. B. Carl, “Entropy numbers, s -numbers, and eigenvalue problems”, *J. Funct. Anal.*, **41**:3 (1981), 290–306.
11. G. G. Lorentz, M. von Golitschek, Yu. Makovoz, *Constructive approximation. Advanced problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
12. В. Н. Коновалов, “О порядках нелинейных приближений классов функций заданной формы”, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 98–114; англ. пер.: V. N. Konovalov, “On the orders of nonlinear approximations for classes of functions of given form”, *Math. Notes*, **78**:1–2 (2005), 88–104.
13. С. М. Никольский, “Об одном методе покрытия области и неравенства для многочленов от многих переменных”, *Mathematica (Cluj)*, **8**:2 (1966), 345–356.
14. С. М. Никольский, “К вопросу о приближении функций многих переменных многочленами”, *Сиб. матем. журн.*, **10**:5 (1969), 1075–1083; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, “Approximation of functions of several variables by polynomials”, *Siberian Math. J.*, **10**:5 (1969), 792–799.
15. Е. М. Бронштейн, Л. Д. Иванов, “О приближении выпуклых множеств многогранниками”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:5 (1975), 1110–1112; англ. пер.: E. M. Bronshteyn, L. D. Ivanov, “The approximation of convex sets by polyhedra”, *Siberian Math. J.*, **16**:5 (1975), 852–853.
16. Y. Gordon, M. Meyer, Sh. Reisner, “Volume approximation of convex bodies by polytopes – a constructive method”, *Studia Math.*, **111**:1 (1994), 81–95.

В. Н. КОНОВАЛОВ (V. N. KONOVALOV)
 Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: vikono@math.kiev.ua

Поступило в редакцию
 10.01.2008
 29.12.2008

В. Е. МАЙОРОВ (V. E. MAIOROV)
 Department of Mathematics,
 Technion – Israel Institute of Technology, Haifa
E-mail: maiorov@tx.technion.ac.il