Общероссийский математический портал

Н. Н. Пустовойтов, Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 1, 123–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:35:10

УДК 517.518.8

Н. Н. Пустовойтов

Ортоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности

В работе рассматриваются ортоперечники классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности порядка l , содержащей, кроме степенных, также и логарифмические множители. В ряде случаев найдены точные порядки ортоперечников указанных классов функций.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Введение. Формулировки теорем

В настоящей работе изучаются ортоперечники, определяемые для класса функций $F \subset L_p$ равенством

$$d_M^{\perp}(F, L_p) = \inf_{\{u_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^M (f(\cdot), u_i(\cdot)) u_i(\mathbf{x}) \right\|_p,$$

где $\inf$ берется по ортонормированным системам $\{u_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^M$ ограниченных функций.

Впервые ортоперечники для классов Соболева и Никольского были рассмотрены В. Н. Темляковым в [1]. Затем они изучались В. Н. Темляковым [2]–[4], Динь Зунгом [5] и Э. М. Галеевым [6].

Мы рассмотрим классы периодических функций двух действительных переменных с мажорантой смешанных модулей непрерывности более общего вида, чем для классов Никольского. Мы используем методы, аналогичные методам, примененным в работах [1]–[3].

Как видно из определения ортоперечников, приближением функции служит ее ортогональная проекция на подпространство размерности M .

Как и в работах [2], [3], рассмотрим тесно связанные с ортоперечниками величины

$$d_M^B(F, L_p) = \inf_{G \in \mathcal{L}_M(B)_p} \sup_{f \in F} \|f(\mathbf{x}) - Gf(\mathbf{x})\|_p,$$

где $B \geq 1$, $\mathcal{L}_M(B)_p$ – множество линейных операторов G , в область определения $D(G)$ которых входят все тригонометрические полиномы, а множество значений имеет размерность не выше M и содержится в пространстве $L_p([-\pi; \pi]^2)$ и для всех $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ (k_j целые) выполнено неравенство

$$\|Ge^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\|_2 \leq B.$$

Операторы ортогонального проектирования на подпространства размерности M содержатся в $\mathcal{L}_M(1)_2$.

Из определения величин $d_M^B(F, L_p)$ и $d_M^\perp(F, L_p)$ следует неравенство

$$d_M^B(F, L_p) \leq d_M^\perp(F, L_p). \quad (1)$$

Очевидно, что эти величины не меньше, чем поперечники по Колмогорову. Однако в отличие от поперечников по Колмогорову для ортопоперечников в ряде случаев легче указать подпространства, дающие наилучшие (в смысле ортопоперечников) приближения. Кроме того, даже в том случае, когда известно оптимальное (в смысле поперечника по Колмогорову) подпространство, довольно трудно указать элемент наилучшего приближения. В случае же ортопоперечника, если известно оптимальное подпространство, элемент наилучшего приближения определяется явно как ортогональная проекция на это подпространство.

Будем рассматривать функции двух действительных переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$, имеющие период 2π по каждой переменной.

Для рассматриваемых функций введем разности порядка l :

$$\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}) = \Delta_{(h_1, h_2)}^l f(x_1, x_2) = \Delta_{h_1}^l \Delta_{h_2}^l f(x_1, x_2),$$

т.е. берется разность порядка l с шагом h_j по переменной x_j , $j = 1, 2$.

Эти разности порождают модуль непрерывности порядка l :

$$\Omega(f; \mathbf{t})_q = \Omega(f; (t_1, t_2))_q = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1,2}} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x})\|_q.$$

Функция $\Omega(f; \mathbf{t})_q$ по каждой переменной t_j обладает всеми свойствами одномерного модуля непрерывности порядка l .

Рассмотрим классы функций

$$H_q^\Omega = \{f(\mathbf{x}) \in L_q^0([-\pi, \pi]^2) : \Omega(f; \mathbf{t})_q \leq \Omega(\mathbf{t})\}.$$

Здесь условие $f(\mathbf{x}) \in L_q^0([-\pi, \pi]^2)$ означает, что $f(\mathbf{x}) \in L_q([-\pi, \pi]^2)$ и, кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Функция $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, t_2)$ – заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l . Это означает, что она обладает свойствами:

- 1) $\Omega(t_1, t_2)$ непрерывна при $t_j \geq 0$, $j = 1, 2$;
- 2) $\Omega(t_1, t_2)$ возрастает по каждой переменной;
- 3) $\Omega(0, 0) = \Omega(t_1, 0) = \Omega(0, t_2) = 0$;
- 4) $\Omega(k_1 t_1, k_2 t_2) \leq k_1^l k_2^l \Omega(t_1, t_2)$, k_j целые, $j = 1, 2$.

В работах [3], [4] исследованы ортопоперечники классов Никольского, т.е. классов H_q^Ω с мажорантой $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$.

Мы же рассмотрим функцию $\Omega(\mathbf{t})$ вида

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{t}) &= \Omega(t_1, t_2) = \frac{t_1^r}{\left(\log \frac{1}{t_1}\right)^{b_1}} \cdot \frac{t_2^r}{\left(\log \frac{1}{t_2}\right)^{b_2}}, \quad 0 < t < 1, \\ \Omega(0, 0) &= \Omega(t_1, 0) = \Omega(0, t_2) = 0, \quad 0 < r < l.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь и дальше рассматриваются логарифмы по основанию 2. Так как $r < l$, то $\Omega(\mathbf{t})$ обладает всеми свойствами смешанного модуля непрерывности порядка l (указанные выше свойства 1)–4)). В отличие от классов Никольского, здесь вводятся логарифмические множители. При $b_1 < r$ и $b_2 < r$ влияние этих множителей невелико и они “не нарушают” изотропность классов H_q^Ω , т.е. параметры b_1 и b_2 равноправны (см. теоремы 1 и 2). В случаях же $b_1 \leq r$, $b_2 > r$; $b_1 > r$, $b_2 \leq r$; $b_j > r$, $j = 1, 2$, влияние логарифмических множителей велико и возникает анизотропность. Эта анизотропность порождает эффект “не своих” гиперболических крестов. Впервые этот эффект отметил С. А. Теляковский [7]. Для анизотропных классов Никольского $H_q^{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} = (r, \dots, r, r_{\nu+1}, \dots, r_d)$, $r < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$, вместо “своих” гиперболических крестов (определение $\rho(\mathbf{s})$ см. ниже)

$$Q_n^{\mathbf{r}} = \bigcup_{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) \leq n} \rho(\mathbf{s}), \quad \mathbf{r} = r\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} = (1, \dots, 1, \gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_d),$$

лучше брать “не свои” гиперболические кресты $Q_n^{\mathbf{r}'} = \bigcup_{(\boldsymbol{\gamma}', \mathbf{s}) \leq n} \rho(\mathbf{s})$, где $\mathbf{r}' = r\boldsymbol{\gamma}'$, $\boldsymbol{\gamma}' = (1, \dots, 1, \gamma'_{\nu+1}, \dots, \gamma'_d)$, причем $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \nu + 1, \dots, d$.

Дело в том, что хотя $Q_n^{\mathbf{r}'}$ шире, чем $Q_n^{\mathbf{r}}$, количество элементов “своего” гиперболического креста по порядку совпадает с количеством элементов “не своего” гиперболического креста, однако приближение функции тригонометрическими полиномами с гармониками из “не своих” гиперболических крестов по порядку лучше. Такой же эффект наблюдается и в нашем случае (см. теоремы 5–8), т.е. не только различие степенных порядков дает эффект “не своих” гиперболических крестов, но и определенное различие в показателях логарифмов.

Функция, заданная равенством (2), удовлетворяет условиям (S) и (S_l) (см. [8], [9]). Определим эти свойства. Функция одного переменного $h(\tau)$ обладает свойством (S), если существует $0 < \alpha < 1$, при котором $h(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает, т.е. существует $C > 0$, не зависящее от τ , такое, что

$$\frac{h(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C \frac{h(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 < 1.$$

Будем говорить, что функция $\Omega(\mathbf{t})$ обладает свойством (S), если она обладает этим свойством по каждой переменной при условии, что другая переменная фиксирована.

Функция одной переменной $h(\tau)$ обладает свойством (S_l) , если существует $0 < \beta < l$, при котором отношение $h(\tau)/\tau^\beta$ почти убывает, т.е. существует $C > 0$, не зависящее от τ , при котором

$$\frac{h(\tau_1)}{\tau_1^\beta} \geq C \frac{h(\tau_2)}{\tau_2^\beta}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 < 1.$$

Свойство (S_l) для функции $\Omega(\mathbf{t})$ определяется аналогично свойству (S).

Так как $\Omega(\mathbf{t})$ из (2) обладает свойствами (S) и (S_l) , то для рассматриваемого класса H_q^Ω верна следующая теорема о представлении [9].

ТЕОРЕМА А. *Периодическая функция $f(\mathbf{x})$ из пространства $L_q^0([-\pi; \pi]^2)$ принадлежит классу H_q^Ω с $\Omega(\mathbf{t})$ из (2) в том и только том случае, если для векторов $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ с натуральными компонентами справедливы неравенства*

$$\|\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q \ll \Omega(2^{-\mathbf{s}}), \quad 1 < q < \infty; \quad (3)$$

$$\|A_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q \ll \Omega(2^{-\mathbf{s}}), \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (4)$$

При $1 < q < \infty$ эти условия эквивалентны, $2^{-\mathbf{s}} = (2^{-s_1}, 2^{-s_2})$. Здесь

$$\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

— двоичная пачка ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ (определение $\rho(\mathbf{s})$ см. ниже); $A_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})$ обозначает свертку $\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})$ с ядром

$$A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = 4 \prod_{j=1}^2 (V_{2^{s_j-1}}(x_j) - V_{2^{s_j-2}}(x_j)), \quad (5)$$

порожденным ядрами Валле-Пуссена $V_m(\tau)$ порядка $2m-1$ (считаем $V_{2^{-1}}(\tau) \equiv 1$), т.е.

$$A_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x}) = \delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x}) * A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточность в теореме А означает, что если для функции $f(\mathbf{x})$ верны неравенства (3) либо (4), то существует число $B > 0$, при котором $f_1(\mathbf{x}) = Bf(\mathbf{x}) \in H_q^\Omega$.

Нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА (Литтлвуда–Пэли). *Если $f(\mathbf{x}) \in L_p^0([-\pi; \pi]^2)$, то для $1 < p < \infty$*

$$\|f(\mathbf{x})\|_p \ll \left\| \left(\sum_{\mathbf{s}} |\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \ll \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

Здесь сумма берется по всем векторам $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ с натуральными s_1 и s_2 .

Из теоремы Литтлвуда–Пэли вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Для $f(\mathbf{x}) \in L_p^0([-\pi; \pi]^2)$ при $1 < p < \infty$ верно неравенство*

$$\|f(\mathbf{x})\|_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0}, \quad p_0 = \min\{p, 2\}.$$

При доказательстве оценок сверху нам понадобится следующая лемма, доказанная В. Н. Темляковым в [2, с. 25].

ЛЕММА А. Для $1 \leq q < p < \infty$ и для $f(\mathbf{x}) \in L_q^0([-\pi; \pi]^2)$ верно неравенство

$$\|f(\mathbf{x})\|_p^p \leq \sum_{\mathbf{s}} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x})\|_q 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/q-1/p)} \right)^p.$$

Здесь сумма берется по всем векторам $\mathbf{s}$ с натуральными координатами, $\|\mathbf{s}\|_1$ равна сумме координат вектора. Определим некоторые множества, порожденные линиями уровня функции $\Omega(\mathbf{t})$.

Для вектора $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ с натуральными компонентами определим двоичную пачку

$$\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2) : k_j \text{ целые, } 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = 1, 2\}.$$

Для натурального N положим

$$\varkappa(N) = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, s_2) : s_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \quad \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

где $2^{-\mathbf{s}} = (2^{-s_1}, 2^{-s_2})$. Далее, пусть

$$\varkappa^\perp(N) = \mathbb{N}^2 \setminus \varkappa(N).$$

В качестве приближающих подпространств возьмем множества тригонометрических полиномов, спектр которых лежит во множествах

$$Q(N) = \bigcup_{\mathbf{s} \in \varkappa(N)} \rho(\mathbf{s}).$$

В этой работе речь идет о порядковых равенствах и порядковых неравенствах. Так, запись $A(N) \ll B(N)$ означает, что существует величина $C > 0$, не зависящая от N и такая, что $A(N) \leq CB(N)$. Порядковое равенство $A(N) \asymp B(N)$ означает, что $C^{-1}A(N) \leq B(N) \leq CA(N)$, где $C > 0$ не зависит от N .

Наряду с множествами $Q(N)$ рассмотрим также множества

$$\Gamma(N) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, k_2) : |k_j| \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \quad \Omega\left(\frac{1}{|k_1|}, \frac{1}{|k_2|}\right) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

т.е.

$$\Gamma(N) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, k_2) : |k_j| \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \quad |k_1|^r (\log |k_1|)_+^{b_1} |k_2| (\log |k_2|)_+^{b_2} \leq N \right\},$$

где

$$(\log \tau)_+ = \begin{cases} \log \tau, & \tau = 2, 3, \dots, \\ 1, & \tau = 1. \end{cases}$$

Множества $Q(N)$ и $\Gamma(N)$ эквивалентны, а именно из неравенств

$$\Omega(|k_1|^{-1}, |k_2|^{-1}) \leq \Omega(2^{1-s_1}, 2^{1-s_2}) \leq 2^{2l} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \leq 2^{2l} \Omega(|k_1|^{-1}, |k_2|^{-1}),$$

справедливых для $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \rho(\mathbf{s})$, вытекает, что

$$\Gamma(N) \subset Q(2^{2l}N) \subset \Gamma(2^{2l}N).$$

Далее будет показано, что число элементов $|\Gamma(N)|$ множества $\Gamma(N)$ имеет степенной порядок роста (см. утверждение 1). В силу этого, а также вышеуказанного вложения имеем $|Q(N)| \asymp |\Gamma(N)|$.

Для числа элементов множества $\Gamma(N)$ справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Число элементов множества $\Gamma(N)$ по порядку равно:

$$|\Gamma(N)| \asymp N^{1/r} \Phi(b_1, b_2, r, N), \quad (7)$$

где

$$\Phi(b_1, b_2, r, N) = \begin{cases} (\log N)^{-b_1/r - b_2/r + 1}, & b_1 < r, \quad b_2 < r; \\ (\log N)^{-b_2/r} \log \log N, & b_1 = r, \quad b_2 \leq r; \\ (\log N)^{-b_1/r} \log \log N, & b_1 < r, \quad b_2 = r; \\ (\log N)^{-b_1/r}, & b_1 \leq r, \quad b_2 > r; \\ (\log N)^{-b_2/r}, & b_1 > r, \quad b_2 \leq r; \\ (\log N)^{-b/r}, & b_1 > r, \quad b_2 > r, \quad b = \min\{b_1, b_2\}. \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобятся множества

$$\theta(N) = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, s_2) : s_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \quad \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-\mathbf{s}}) < \frac{1}{N} \right\}. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множество $\theta(N)$ непусто. Действительно, пусть $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ такое, что $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, $\mathbf{s} \in \varkappa(N)$, а $(s_1, s_2 + 1) \notin \varkappa(N)$. Предположим, что $(s_1, s_2 + 1) \notin \theta(N)$, т.е. $\Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) < 1/(2^l N)$. Тогда, учитывая то, что $\mathbf{s} \in \varkappa(N)$, и свойство 4) функции $\Omega(\mathbf{t})$, получим

$$\frac{1}{N} \leq \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \leq 2^l \Omega(2^{-s_1}, 2^{-(s_2+1)}) < \frac{1}{N}.$$

Противоречие. Это показывает, что $\theta(N)$ непусто, а именно для каждого s_1 такого, что $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \varkappa(N)$, существует $\tilde{s}_2 \in \mathbb{N}$, при котором $(s_1, \tilde{s}_2) \in \theta(N)$.

Для числа элементов множества $\theta(N)$ верно

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Имеем

$$|\theta(N)| \asymp \log N. \quad (9)$$

Сформулируем теоремы об ортопоперечниках и величинах $d_M^B(H_q^\Omega, L_p)$. Рассмотрим вначале случай $b_1 < r$, $b_2 < r$. В этом случае положим $M = |Q(N)|$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} M &\asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - b_2/r + 1}, \\ N &\asymp M^r (\log M)^{b_1 + b_2 - r}, \quad \log M \asymp \log N. \end{aligned} \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\Omega(t)$ задана формулой (2) с

$$r > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ \equiv \max \left\{ 0; \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right\}.$$

Пусть, далее, $b_j < r$, $j = 1, 2$. Предположим, что $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, и при $1 \leq q < p < \infty$ будем считать, что $b_j < \frac{r}{p(1/q-1/p)}$. Тогда

$$d_M^B(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)+} (\log M)^{-b_1-b_2+r+h(p,q)}.$$

Здесь

$$h(p, q) = \begin{cases} 1 - 1/q, & p = \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \\ 2/p - 1/q, & 1 \leq q < p < \infty, \\ 1/p, & 1 < q = p \leq 2, \\ 1/2, & 1 \leq p \leq q, \quad q \geq 2, \quad p < \infty, \\ 1/q, & 1 \leq p \leq q \leq 2. \end{cases} \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega(t)$ определена равенством (2), $r > (1/q - 1/p)_+$, $1 \leq q$, $p \leq \infty$, $(p, q) \neq (1, 1), (\infty, \infty)$; b_j удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда

$$d_M^\perp(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)+} (\log M)^{-b_1-b_2+r+h(p,q)},$$

где величина $h(p, q)$ определена (11).

В теоремах 1 и 2 оптимальными (в смысле порядка) подпространствами являются подпространства тригонометрических полиномов с гармониками из множеств $Q(N)$.

Пусть, далее, $b_1 > r$, $b_2 = r$. В этом случае результаты не такие полные, как в теоремах 1 и 2. При таких b_1 и b_2 будет ($M = |Q(N)|$)

$$\begin{aligned} M &\asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r} \log \log N, \\ N &\asymp M^r (\log M)^{b_1} (\log \log M)^{-r}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\Omega(t)$ задается равенством (2) с $r > (1/q - 1/p)_+$ и $b_1 < r$, $b_2 = r$. Предположим также, что параметры p и q удовлетворяют одному из соотношений: $p = \infty$, $q = 1$; $p = 2$, $q = 1$; $1 \leq p \leq q$, $q \geq 2$, $p < \infty$; $1 \leq p \leq q \leq 2$. Тогда

$$d_M^B(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)+} (\log M)^{-b_1+h(p,q)} (\log \log M)^r,$$

где величина $h(p, q)$ определена (11).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Omega(\mathbf{t})$ и параметры p, q и $b_j, j = 1, 2$, удовлетворяют условиям теоремы 3, $(p, q) \neq (1, 1)$. Тогда

$$d_M^\perp(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)+} (\log M)^{-b_1+h(p,q)} (\log \log M)^r$$

с величиной $h(p, q)$, определенной в (11).

В теоремах 3 и 4 оптимальные (в смысле порядка) подпространства – это подпространства тригонометрических полиномов с гармониками из $Q(N)$.

Далее перейдем к случаю $b_1 \leq r, b_2 > r$. В этом случае будет $(M = |Q(N)|)$

$$M \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r}, \quad N \asymp M^r (\log M)^{b_1}.$$

Рассмотрим здесь, кроме множеств $Q(N)$, также множества $Q'(N) = \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}'(N)} \rho(\mathbf{s})$, где $\mathcal{K}'(N) = \{\mathbf{s} = (s_1, s_2) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 2^{rs_1} s_1^{b_1} 2^{rs_2} s_2^{b_2'} \leq N\}$, причем $r < b_2' < b_2$. Множества $Q'(N)$ играют роль “не своих” гиперболических крестов. Как видно из утверждения 1,

$$|Q'(N)| \asymp |Q(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r}.$$

Как легко убедиться, множество $Q'(N)$ шире, чем $Q(N)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $\Omega(\mathbf{t})$ задана равенством (2) с $r > (1/q - 1/p)_+$ и $b_1 \leq r, b_2 > r$. Пусть $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$. Предположим, что при $p = \infty, 1 \leq q < \infty$

$$\frac{b_2}{r} \left(\frac{2}{q} - 1 \right) > 1, \quad \frac{b_2}{r} \cdot \frac{1}{q} > 1. \quad (12)$$

Пусть, далее, при $1 \leq q < p < \infty$

$$\frac{b_2}{r} \cdot \frac{1}{q} > 1, \quad \frac{b_2}{r} \left(\frac{2}{q} - 1 \right) > 1, \quad \frac{b_2}{r} (p' - 1) > 1, \quad \frac{b_2}{r} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) > 1. \quad (13)$$

Предположим также, что $b_2 > r + 1/q_0$ ($q_0 = \min\{q, 2\}$) при $1 \leq p \leq q < \infty$, а $b_2 > r + 1$ в случае $q = \infty$. Тогда

$$d_M^B(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)+} (\log M)^{-b_1}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия теоремы 5, $(p, q) \neq (1, 1), (\infty, \infty)$. Тогда

$$d_M^\perp(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)+} (\log M)^{-b_1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Фактически теоремы 5 и 6 не охватывают все пары (p, q) , $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Так, из первого неравенства (12) следует, что $1 \leq q < 2$. Вообще говоря, с учетом $1 \leq q < 2$ из первого неравенства (12) следует второе. Что касается неравенств (13), то пара $p = 2$, $q = 1$, очевидно, удовлетворяет им. И чем больше b_2 , тем шире диапазон допустимых пар (p, q) .

Оптимальными в смысле порядка подпространствами являются подпространства тригонометрических полиномов со спектром из $Q(N)$ при $q < p$ и из $Q'(N)$ при $p \leq q$.

Положим, далее, $b_1 > r$, $b_2 > r$, $b = \min\{b_1, b_2\}$. Тогда $(M = |Q(N)|)$

$$M \asymp N^{1/r}(\log N)^{-b/r}, \quad N \asymp M^r(\log M)^b.$$

Предположим для определенности, что $b = b_1$. В теоремах 7 и 8 роль “не своих” гиперболических крестов будут играть множества $Q'(N) \bigcup_{s \in \mathcal{K}'(N)} \rho(s)$, где $\mathcal{K}'(N) = \{s = (s_1, s_2): s_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 2^{rs_1}s_1^{b_1}2^{rs_2}s_2^{b'_2} \leq N\}$, причем $b_1 < b'_2 < b_2$. Из утверждения 1 следует, что

$$|Q'(N)| \asymp |Q(N)| \asymp N^{1/r}(\log N)^{-b_1/r}.$$

Как легко убедиться, множество $Q'(N)$ шире, чем $Q(N)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\Omega(t)$ задано равенством (2) с $r > (1/q - 1/p)_+$. Пусть, кроме того, $r < b_1 \leq b_2$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Предположим, что при $p = \infty$, $1 \leq q < \infty$ для b_2 верны неравенства (12), а при $1 \leq q < p < \infty$ — неравенства (13). Пусть, далее, при $1 \leq p \leq q < \infty$ будет $b_2 > b_1 + 1/q_0$, $q_0 = \min\{q, 2\}$, а при $q = \infty$ будет $b_2 > b_1 + 1$. Тогда

$$d_M^B(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)_+}(\log M)^{-b_1}.$$

ТЕОРЕМА 8. В условиях теоремы 7, $(p, q) \neq (1, 1), (\infty, \infty)$, верны порядковые равенства

$$d_M^\perp(H_q^\Omega, L_p) \asymp M^{-r+(1/q-1/p)_+}(\log M)^{-b_1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. К теоремам 7 и 8 также применимо замечание 3. В теоремах 7 и 8 оптимальными (в смысле порядка) подпространствами являются тригонометрические полиномы со спектром из $Q(N)$ при $q < p$ и из $Q'(N)$ при $q \geq p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Понятно, что в теоремах 3–8 можно параметры b_1 и b_2 поменять местами (т.е., например, в теореме 8 взять $r < b_2 \leq b_1$) с очевидными изменениями в формулировках.

§ 2. Доказательство утверждений и теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Положим $M = N \log^{-b_1} N$, $m = [\log M]$ (целая часть). Если $k_1 > (M/2)^{1/r}$, то можно показать, что для больших N

$$|k_2|^r (\log |k_2|)_+^{b_2} < 4r^{b_1}.$$

Пусть

$$k_1(r, b_1, b_2) = \max\{k \in \mathbb{N} : k^r (\log k)_+^{b_2} \leq 4r^{b_1}\}.$$

Если нет натуральных k , удовлетворяющих этому неравенству, то положим $k_1(r, b_1, b_2) = 1$. Аналогично пусть

$$k_2(r, b_1, b_2) = \max\{k \in \mathbb{N} : k^r (\log k)_+^{b_1} \leq 4r^{b_2}\}.$$

В случае отсутствия таких k положим $k_2(r, b_1, b_2) = 1$.

Пусть теперь

$$k(r, b_1, b_2) = \max\{k_1(r, b_1, b_2); k_2(r, b_1, b_2)\}.$$

С учетом вышесказанного будем иметь

$$\begin{aligned} |\Gamma(N)| &\asymp \int_1^{(N \log^{-b_1} N)^{1/r}} dk_1 \int_1^{\left(\frac{N}{k_1^r (\log k_1)_+^{b_1}} \left(\log \frac{N}{k_1^r (\log k_1)_+^{b_1}}\right)_+^{-b_2}\right)^{1/r}} dk_2 \\ &\asymp k(r, b_1, b_2) N^{1/r} (\log^{-b_1/r} N + \log^{-b_2/r} N) \\ &\quad + N^{1/r} \sum_{k=1}^{[m/2]} \int_{(M/(2^{k+1}))^{1/r}}^{(M/(2^k))^{1/r}} \frac{1}{k_1 (\log k_1)^{b_1/r}} \left(\log \frac{N}{k_1^r (\log k_1)^{b_1}}\right)_+^{-b_2/r} dk_1 \\ &\quad + N^{1/r} \int_{k(r, b_1, b_2)}^{M^{1/(2r)}} \frac{1}{k_1 (\log k_1)^{b_1/r}} \log^{-b_2/r} \frac{N}{k_1^r (\log k_1)^{b_1}} dk_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим второе слагаемое из правой части (14). Легко видеть, что для $k_1 \in [(M/(2^{k+1}))^{1/r}; (M/(2^k))^{1/r}]$ будет $\log k_1 \asymp m - k$. Кроме того, для этих k_1 при достаточно больших N будет ($k \leq [m/2]$)

$$\log \frac{N}{k_1^r (\log k_1)^{b_1}} \asymp \log \frac{r \cdot 2^k}{(1 - b_1 \frac{\log \log N}{\log N} - \frac{k}{\log N})^{b_1}} \asymp k.$$

В силу этого получим

$$\begin{aligned} &N^{1/r} \sum_{k=1}^{[m/2]} \int_{(M/(2^{k+1}))^{1/r}}^{(M/(2^k))^{1/r}} \frac{1}{k_1 (\log k_1)^{b_1/r}} \left(\log \frac{N}{k_1^r (\log k_1)^{b_1}}\right)_+^{-b_2/r} dk_1 \\ &\asymp N^{1/r} \sum_{k=1}^{[m/2]} (m - k)^{-b_1/r} k^{-b_2/r} \int_{(M/(2^{k+1}))^{1/r}}^{(M/(2^k))^{1/r}} \frac{dk_1}{k_1} \\ &\asymp N^{1/r} m^{-b_1/r} \sum_{k=1}^{[m/2]} k^{-b_2/r} \asymp N^{1/r} \begin{cases} m^{-b_1/r - b_2/r + 1}, & b_2 < r, \\ m^{-b_1/r} \log m, & b_2 = r, \\ m^{-b_1/r}, & b_2 > r. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее оценим третье слагаемое из правой части (14):

$$\begin{aligned}
& N^{1/r} \int_{k(r, b_1, b_2)}^{M^{1/(2r)}} \frac{1}{k_1 (\log k_1)_+^{b_1/r}} \log^{-b_2/r} \frac{N}{k_1^r (\log k_1)_+^{b_1}} dk_1 \\
& \asymp N^{1/r} \log^{-b_2/r} N \int_{k(r, b_1, b_2)}^{M^{1/(2r)}} \frac{1}{k_1 (\log k_1)_+^{b_1/r}} dk_1 \\
& \asymp N^{1/r} \log^{-b_2/r} N \cdot \begin{cases} (\log M)^{-b_1/r+1}, & b_1 < r, \\ \log \log M, & b_1 = r, \\ 1, & b_1 > r. \end{cases}
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\log M \asymp \log N$, собирая воедино все полученные оценки и выбирая наибольшее по порядку слагаемое, получаем утверждение 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Сначала докажем оценку сверху

$$|\theta(N)| \ll \log N.$$

Прежде всего докажем, что для любого $s_1 \in \mathbb{N}$ такого, что $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \theta(N)$, существует лишь конечное число $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $(s_1, s_2 + n_2) \in \theta(N)$.

Действительно, если $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \theta(N)$ и $(s_1, s_2 + n_2) \in \theta(N)$, то в силу (8)

$$1 \leq \frac{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}{\Omega(2^{-s_1}; 2^{-(s_2+n_2)})} \leq 2^l. \quad (15)$$

Из (2) следует, что функция

$$y(\mathbf{t}) = \frac{\Omega(\mathbf{t})}{(t_1 t_2)^{r/2}} \quad (16)$$

почти возрастает, т.е. для векторов

$$\mathbf{t}^{(1)} = (t_1^{(1)}; t_2^{(1)}), \quad \mathbf{t}^{(2)} = (t_1^{(2)}; t_2^{(2)}), \quad t_j^{(1)} \leq t_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

верно неравенство

$$y(\mathbf{t}^{(1)}) \leq C_1 y(\mathbf{t}^{(2)}),$$

где число $C_1 > 0$ не зависит от $\mathbf{t}$ (можно считать $C_1 > 1$). Следовательно,

$$\frac{\Omega(2^{-s_1}; 2^{-(s_2+n_2)})}{2^{-r(s_2+n_2)/2}} \leq C_1 \frac{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}{2^{-rs_2/2}}.$$

Учитывая это неравенство, а также (15), для $\mathbf{s}$ и $(s_1, s_2 + n_2)$ из $\theta(N)$ получим $2^{rn_2/2} \leq C_1 \cdot 2^l$, т.е.

$$n_2 \leq \frac{2l + 2 \log C_1}{r} \equiv m_2. \quad (18)$$

Итак, мы доказали ограниченность n_2 .

Далее, учитывая почти возрастание функции (16), мы получаем

$$\Omega(\mathbf{t}) = \frac{\Omega(\mathbf{t})}{(t_1 t_2)^{r/2}} (t_1 t_2)^{r/2} \leq C_1 \Omega(1, 1) (t_1 t_2)^{r/2},$$

т.е.

$$\Omega(\mathbf{t}) \leq C_2(t_1 t_2)^{r/2}. \quad (19)$$

Рассмотрим функцию

$$z(\mathbf{t}) = \frac{\Omega(\mathbf{t})}{(t_1 t_2)^l}.$$

Так как $\Omega(\mathbf{t})$ определено в (2) и $r < l$, то функция $z(\mathbf{t})$ почти убывает, т.е. для векторов $\mathbf{t}^{(1)}$ и $\mathbf{t}^{(2)}$ из (17) верно неравенство

$$z(\mathbf{t}^{(1)}) \geq C_3 z(\mathbf{t}^{(2)}),$$

где $C_3 > 0$ не зависит от $\mathbf{t}$.

Аналогично неравенству (19) получаем неравенство

$$\Omega(\mathbf{t}) \geq C_4(t_1 t_2)^l, \quad (20)$$

причем мы можем считать $0 < C_4 < C_2$. Из (8), (19), (20) следует, что

$$\frac{1}{l} \log(C_4 N) < s_1 + s_2 \leq \frac{2}{r} \log(C_2 2^l N). \quad (21)$$

Пусть для натурального n

$$\theta_n = \{\mathbf{s} = (s_1, s_2) : s_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2; \quad s_1 + s_2 = n\}.$$

Очевидно, $|\theta_n| = n$. В силу замечания 2 и (21) множество $\theta(N)$ можно взаимно однозначно отобразить на некоторое подмножество множества

$$A_N = \bigcup_{n=m_1}^{m_1+m_2} \theta_n, \quad (22)$$

где $m_1 = [(2/r) \log(C_2 2^l N)] + 1$, m_2 определено в (18). Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа. Из (22) мы получаем оценку сверху.

Далее, для $\mathbf{s} \in \theta(N)$ верно неравенство

$$\log N < s_1 r + b_1 \log s_1 + s_2 r + b_2 \log s_2 \leq l + \log N,$$

из которого следует, что $1 \ll s_1 \ll \log N$. Учитывая это неравенство и замечание 2, мы получим, что $|\theta(N)| \gg \log N$. Следовательно, $|\theta(N)| \asymp \log N$. Утверждение 2 доказано.

Из того факта, что $\Omega(\mathbf{t})$, заданная равенством (2), удовлетворяет условию (S), можно вывести следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Для функции $\Omega(\mathbf{t})$, определенной равенством (2), при $0 < p < \infty$ верно неравенство*

$$\sum_{\mathbf{s} \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p \ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^p.$$

ЛЕММА 2. Пусть $\Omega(\mathbf{t})$ определено формулой (2), причем $r > \beta > 0$. Тогда при $0 < p < \infty$

$$\sum_{\mathbf{s} \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) \cdot 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p \ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) \cdot 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2. Сначала докажем оценки сверху. В силу неравенства (1) их достаточно доказать для $d_M^\perp(H_q^\Omega, L_p)$ в случаях, охваченных теоремой 2. При $(p, q) = (1, 1), (\infty, \infty)$ оценки сверху будут верны лишь для $d_M^B(H_q^\Omega, L_p)$.

1) $1 \leq p \leq q < \infty$, $q > 1$. Используя возрастание L_p -нормы по параметру p , теорему А и следствие из теоремы Литтлвуда–Пэли, получим

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \leq E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{q_0} \right)^{1/q_0}.$$

Здесь через $E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p$ обозначена величина

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p = \sup_{f \in H_q^\Omega} E_{Q(N)}(f)_p,$$

где $E_{Q(N)}(f)_p$ – наилучшее приближение функции $f(\mathbf{x})$ тригонометрическими полиномами с гармониками из множества $Q(N)$ в норме L_p .

Далее используем лемму 1, (9) и (10) и приходим к оценке

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \ll \frac{1}{N} |\theta(N)|^{1/q_0} \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - b_2 + r + 1/q_0}.$$

2) $1 \leq p < q = \infty$. В этом случае имеем

$$E_{Q(N)}(H_\infty^\Omega)_p \ll E_{Q(N)}(H_{p+1}^\Omega)_{p+1} \ll \frac{1}{N} (\log N)^{1/2} \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - b_2 + r + 1/2}.$$

Здесь мы использовали то, что $p + 1 \geq 2$.

3) $1 \leq q < p < \infty$, $\beta = 1/q - 1/p$. По лемме А и лемме 2 имеем

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}) \cdot 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \beta})^p \right)^{1/p} \ll \frac{1}{N} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1 (p/q - 1)} \right)^{1/p}.$$

Оценим сумму, стоящую в скобках. Для этого разобьем ее на три суммы, соответствующие множествам (см. (21))

$$\begin{aligned} \theta_1(N) &= \left\{ \mathbf{s} \in \theta(N) : s_j \geq \frac{1}{4l} \log(C_4 N), \quad j = 1, 2 \right\}, \\ \theta_2(N) &= \left\{ \mathbf{s} \in \theta(N) : s_1 < \frac{1}{4l} \log(C_4 N), \quad s_2 > \frac{3}{4l} \log(C_4 N) \right\}, \\ \theta_3(N) &= \left\{ \mathbf{s} \in \theta(N) : s_2 < \frac{1}{4l} \log(C_4 N), \quad s_1 > \frac{3}{4l} \log(C_4 N) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Оценим каждую сумму отдельно.

Рассмотрим первую сумму, соответствующую множеству $\theta_1(N)$. Из соотношения (21) с учетом замечания 2 следует, что множество

$$\theta'_N = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, s_2) : s_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \quad s_1 + s_2 = \left\lceil \frac{1}{l} \log(C_4 N) \right\rceil, \right. \\ \left. s_j \geq \frac{1}{4l} \log(C_4 N), \quad j = 1, 2 \right\}$$

можно взаимно однозначно отобразить на некоторое подмножество множества $\theta_1(N)$, откуда следует, что $|\theta_1(N)| \asymp \log N$. Для $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \theta_1(N)$ будет $s_j \asymp \log N$ и $2^{rs_1} s_1^{b_1} 2^{rs_2} s_2^{b_2} \asymp N$, откуда в свою очередь следует, что

$$2^{\|\mathbf{s}\|_1} \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - b_2/r}. \quad (24)$$

Далее имеем

$$\sum_{\mathbf{s} \in \theta_1(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p/q-1)} \asymp (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - b_2/r})^{p/q-1} \log N.$$

Возьмем вторую сумму, соответствующую множеству $\theta_2(N)$.

Пусть

$$n_1 = \left\lceil \log(\max\{s_1 \in \mathbb{N} : (s_1, s_2) \in \theta(N)\}) \right\rceil \asymp \log \log N.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{s} \in \theta_2(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p/q-1)} &\asymp \sum_{t=1}^{n_1} \sum_{s_1=2^{t-1}}^{2^t-1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p/q-1)} \\ &\asymp \sum_{t=1}^{n_1} \sum_{s_1=2^{t-1}}^{2^t-1} (N^{1/r} (\log N)^{-b_2/r} 2^{-tb_1/r})^{p/q-1} \\ &\asymp (N^{1/r} (\log N)^{-b_2/r})^{p/q-1} \sum_{t=1}^{n_1} 2^{t(1-b_1(p/q-1)/r)} \\ &\asymp (N^{1/r} (\log N)^{-b_2/r})^{p/q-1} \cdot \begin{cases} (\log N)^{1-b_1(p/q-1)/r}, & \frac{b_1}{r} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) < 1, \\ \log \log N, & \frac{b_1}{r} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) = 1, \\ 1, & \frac{b_1}{r} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично для третьей суммы, соответствующей $\theta_3(N)$, будет справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{s} \in \theta_3(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p/q-1)} &\asymp \\ &\asymp (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r})^{p/q-1} \cdot \begin{cases} (\log N)^{1-b_2(p/q-1)/r}, & \frac{b_2}{r} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) < 1, \\ \log \log N, & \frac{b_2}{r} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) = 1, \\ 1, & \frac{b_2}{r} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В итоге с учетом $b_j < \frac{r}{p(1/q-1/p)}$ получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p &\ll \frac{1}{N} (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r-b_2/r})^{1/q-1/p} (\log N)^{1/p} \\ &\asymp M^{-r+1/q-1/p} (\log M)^{-b_1-b_2+r+2/p-1/q}. \end{aligned}$$

4) $p = \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\beta = 1/q$. Легко видеть, что оператор взятия двоичной пачки $\delta_s(f; \mathbf{x})$ как оператор из L_q в L_∞ имеет норму, по порядку не превосходящую $2^{\|s\|_1/q}$. В качестве ортопроектора рассмотрим

$$S_{Q(N)}(f; \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \varkappa(N)} \delta_s(f; \mathbf{x}).$$

С учетом теоремы А и леммы 2 для $f \in H_q^\Omega$ получим

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - S_{Q(N)}(f; \mathbf{x})\|_\infty &\leq \sum_{\mathbf{s} \in \varkappa^\perp(N)} \|\delta_s(f; \mathbf{x})\|_\infty \\ &= \sum_{\mathbf{s} \in \varkappa^\perp(N)} \left\| \delta_s \left(\sum_{\|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\|_\infty \leq 1} A_{\mathbf{s}'}(f; \mathbf{x}) \right) \right\|_\infty \ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \in \varkappa^\perp(N) \\ \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\|_\infty \leq 1}} \|A_{\mathbf{s}'}(f; \mathbf{x})\|_q \cdot 2^{\|\mathbf{s}\|_1/q} \\ &\ll \sum_{\mathbf{s} \in \varkappa^\perp(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \cdot 2^{\|\mathbf{s}\|_1/q} \ll \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/q}. \end{aligned}$$

Далее покажем, что

$$\sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} \asymp |Q(N)|. \quad (25)$$

Действительно, пусть $u_1 = \max\{s_1 \in \mathbb{N}: (s_1, s_2) \in \varkappa(N)\}$; для данного $s_1 \in \mathbb{N}$ положим $u_2(s_1) = \max\{s_2 \in \mathbb{N}: (s_1, s_2) \in \varkappa(N)\}$. Тогда

$$|Q(N)| = \sum_{s_1=1}^{u_1} \sum_{s_2=1}^{u_2(s_1)} |\rho(\mathbf{s})| \asymp \sum_{s_1=1}^{u_1} 2^{s_1+u_2(s_1)} \asymp \sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1}$$

(см. замечание 2). Соотношение (25) доказано.

Применив неравенство Гёльдера и (25) ($1/q + 1/q' = 1$), продолжаем оценку сверху:

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - S_{Q(N)}(f; \mathbf{x})\|_\infty &\ll \frac{1}{N} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} 1 \right)^{1/q'} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} \right)^{1/q} \\ &\ll \frac{1}{N} (\log N)^{1/q'} |Q(N)|^{1/q} \asymp M^{-r+1/q} (\log M)^{-b_1-b_2+r+1-1/q}. \end{aligned}$$

5) $(p, q) = (1, 1), (\infty, \infty)$. Рассмотрим оператор

$$V_{Q(N)}(f; \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \varkappa(N)} A_{\mathbf{s}}(f; \mathbf{x}),$$

где $A_s(f; \mathbf{x})$ определено в (6). Нетрудно убедиться в том, что этот оператор принадлежит множеству $\mathcal{L}_M(1)_p$, где $M = |Q(N)|$. Тогда для $f(\mathbf{x}) \in H_q^\Omega$ имеем ($p = 1, \infty$)

$$\|f(\mathbf{x}) - V_{Q(N)}(f; \mathbf{x})\|_p \leq \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} \|A_s(f; \mathbf{x})\|_p \ll \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N)} \Omega(2^{-s})$$

в силу теоремы А. Далее по лемме 1 и (9) получим

$$E_{Q(N)}(H_p^\Omega) \ll \frac{1}{N} \log N \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - b_2 + r + 1}.$$

Перейдем к доказательству оценок снизу. В силу неравенства (1) их достаточно доказать для $d_M^B(H_q^\Omega, L_p)$. Будем придерживаться схемы, использованной В.Н. Темляковым в [3]. Сформулируем лемму, доказанную в [3].

ЛЕММА 3. *Рассмотрим линейный оператор, заданный следующим образом:*

$$Ae^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} = \sum_{m=1}^L a_m^{\mathbf{k}} \psi_m(\mathbf{x}), \quad (26)$$

где $\{\psi_m(\mathbf{x})\}_{m=1}^L$ – набор функций, для которых $\|\psi_m(\mathbf{x})\|_2 \leq 1$, $m = 1, \dots, L$. Тогда для любого тригонометрического полинома $t(\mathbf{x})$

$$\min_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \operatorname{Re} At(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \left(L \sum_{m=1}^L \sum_{\mathbf{k}} |a_m^{\mathbf{k}} \hat{t}(\mathbf{k})|^2 \right)^{1/2}.$$

1) $p = \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \theta_1(N)} K_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \quad (27)$$

где $\theta_1(N)$ определено в (23),

$$K_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{k}^{\mathbf{s}}, \mathbf{x})} \prod_{j=1}^2 K_{2^{s_j-2}}(x_j), \quad k_j^s = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2, \\ 1, & s_j = 1, \quad j = 1, 2, \end{cases}$$

где $K_m(\tau)$ – ядро Фейера.

Эта функция аналогична функции из примера 2 работы [3].

Как было отмечено выше,

$$|\theta_1(N)| \asymp \log N. \quad (28)$$

Предположим, что оператор G принадлежит $\mathcal{L}_M(B)_\infty$. Покажем, что существует вектор $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ такой, что

$$\|\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) - G\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)\|_\infty \gg M. \quad (29)$$

Очевидно,

$$\|\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - G\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_\infty \geq \Phi(\mathbf{0}) - \min_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \operatorname{Re} G\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

По лемме 3

$$\min_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \operatorname{Re} G\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq M^{1/2} B \left(\sum_{\mathbf{k}} |\hat{\Phi}(\mathbf{k})|^2 \right)^{1/2} \ll M^{1/2} B |\Theta_1(N)|^{1/2}. \quad (30)$$

Здесь через $|\Theta_1(N)|$ обозначено количество элементов множества

$$\Theta_1(N) = \bigcup_{\mathbf{s} \in \theta_1(N)} \rho(\mathbf{s}). \quad (31)$$

Учитывая (24), (28), а также то, что $|\rho(\mathbf{s})| = 2^{\|\mathbf{s}\|_1}$, получим

$$|\Theta_1(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - b_2/r + 1}. \quad (32)$$

С другой стороны,

$$\Phi(\mathbf{0}) \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - b_2/r + 1} \asymp |\Theta_1(N)|. \quad (33)$$

С учетом (30) и (32) можно подобрать такое N , что $|\Theta_1(N)| \asymp M$ и правая часть в (33) будет по крайней мере вдвое больше правой части (30). Для этого N при некотором $\mathbf{y}^*$ имеем

$$\|\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) - G\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)\|_\infty \gg M.$$

Таким образом оценка (29) доказана.

Далее рассмотрим функцию

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = C \frac{1}{N} (N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - b_2/r})^{1/q-1} \Phi(\mathbf{x}), \quad (34)$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ взято из (27). Так как

$$\|K_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_q \asymp 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-1/q)}, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

то функция (34) по теореме А принадлежит H_q^Ω при некотором $C > 0$. С учетом (29) будет

$$\|\Phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) - G\Phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)\|_\infty \gg M^{-r+1/q} (\log M)^{-b_1 - b_2 + r + 1 - 1/q}.$$

2) $1 \leq q < p < \infty$. Рассмотрим оператор

$$A = (S_{Q(2^l N)} - S_{Q(N)})G,$$

где $S_{Q(N)}$ – оператор взятия частичной суммы Фурье, соответствующей множеству $Q(N)$, $G \in \mathcal{L}_M(B)_p$.

Для тригонометрического полинома $t(\mathbf{x})$ со спектром из $\Theta_1(N)$ (см. (31)) будет

$$t(\mathbf{x}) = t(\mathbf{x}) * \left(\sum_{\mathbf{k} \in \Theta_1(N)} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right).$$

Тогда

$$\|t(\mathbf{x})\|_\infty \leq \|t(\mathbf{x})\|_p \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_1(N)} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_{p'}.$$

Здесь $p' = p/(p-1)$. Оценим сверху $\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_1(N)} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_{p'}$. Возьмем γ : $1 < \gamma < p'$.

Тогда с учетом леммы А, (24) и оценки

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_\gamma \asymp 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-1/\gamma)}$$

мы получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_1(N)} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_{p'}^{p'} &\ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta_1(N)} \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_\gamma^{p'} \cdot 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p'/\gamma-1)} \\ &\ll \sum_{\mathbf{s} \in \theta_1(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p'-1)} \ll (N^{1/r}(\log N)^{-b_1/r-b_2/r})^{p'-1} \log N. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\|t(\mathbf{x})\|_\infty \ll \|t(\mathbf{x})\|_p (N^{1/r}(\log N)^{-b_1/r-b_2/r})^{1/p} (\log N)^{1-1/p}.$$

Рассмотрим функцию $\Phi_1(\mathbf{x})$ из (34). В силу (29) существует $\mathbf{y}^*$ такой, что

$$\begin{aligned} M^{-r+1/q}(\log M)^{-b_1-b_2+r+1-1/q} &\ll \|\Phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) - A\Phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)\|_\infty \\ &\ll \|\Phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) - G\Phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)\|_p (N^{1/r}(\log N)^{-b_1/r-b_2/r})^{1/p} (\log N)^{1-1/p}, \end{aligned}$$

откуда получаем требуемую оценку снизу.

3) $1 < q = p \leq 2$. Взяв функцию $\Phi_1(\mathbf{x})$ из (34) с $q = p$, аналогично предыдущему случаю получаем оценку снизу.

4) $1 \leq p \leq q$, $q \geq 2$, $p < \infty$. В этом пункте рассмотрим функцию, аналогичную функции из примера 6 работы [3].

Пусть $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тогда найдутся N , $\theta_4(N)$, $\theta_4(N) \subset \theta(N)$, такие, что

$$|\theta_4(N)| \geq \frac{1}{2} |\theta(N)|, \quad |\Theta(N)| \asymp M,$$

где

$$\Theta(N) = \bigcup_{\mathbf{s} \in \theta(N)} \rho(\mathbf{s}), \quad (35)$$

и в каждом $\rho(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \theta_4(N)$, найдутся векторы $\mathbf{k}^{\mathbf{s}}$, при которых для функции

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \theta_4(N)} e^{i(\mathbf{k}^{\mathbf{s}}, \mathbf{x})} \quad (36)$$

найдется $\mathbf{y}^* = (\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*)$ такой, что

$$\|g(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*) - Gg(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*)\|_1 \gg (\log M)^{1/2}. \quad (37)$$

Доказательство этого факта аналогично доказательству примера 6 из [3].

Рассмотрим функцию $g_1(\mathbf{x}) = C \cdot (1/N)g(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ взято из (36). По теореме А $g_1(\mathbf{x}) \in H_q^\Omega$ при некотором $C > 0$. В силу (37) получим

$$\begin{aligned} \|g_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*) - Gg(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*)\|_p &\geq \|g_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*) - Gg_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*)\|_1 \\ &\gg \frac{1}{N}(\log M)^{1/2} \asymp M^{-r}(\log M)^{-b_1-b_2+r+1/2}. \end{aligned}$$

5) $1 \leq p \leq q \leq 2$. Функция, дающая оценку снизу в этом случае, аналогична функции из примера 7 работы [3].

Пусть N достаточно велико. Возьмем множество $\theta_1(N)$, определенное равенством (23). Положим $v = \lceil |\theta_1(N)|^{1/2} \rceil$ и разобьем куб $\pi_2 = [-\pi; \pi]^2$ на v^2 кубов с ребром $2\pi/v$. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\theta'_1(N) \subset \theta_1(N)$, $|\theta'_1(N)| = v^2$, и получившимся множеством кубов.

Для $\mathbf{s} \in \theta'_1(N)$ через $\mathbf{x}^{\mathbf{s}}$ обозначим центр соответствующего куба. Положим

$$u = 2^{[(1/2) \log |\theta_1(N)|]} \asymp (\log N)^{1/2}. \quad (38)$$

Пусть $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Найдутся N и множество $\theta_5(N) \subset \theta'_1(N)$ такие, что $|\Theta(N)| \asymp M$ (см. (35)), $|\theta_5(N)| \geq (1/2)|\theta'_1(N)|$ и в каждом $\rho(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \theta_5(N)$, кубы $\Delta_{\mathbf{s}} \subset \rho(\mathbf{s})$ с центрами $\mathbf{k}^{\mathbf{s}}$ и ребром $2u$ такие, что для функции $(K_m(\tau) - \text{ядра Фейера})$

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \theta_5(N)} e^{i(\mathbf{k}^{\mathbf{s}}, \mathbf{x})} \prod_{j=1}^2 K_u(x_j - x_j^{\mathbf{s}}) \quad (39)$$

найдется $\mathbf{y}^*$ такое, что

$$\|h(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*) - Gh(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*)\|_1 \gg \log M. \quad (40)$$

Отметим, что при достаточно большом N условие (38) обеспечивает включение $\Delta_{\mathbf{s}} \subset \rho(\mathbf{s})$.

Доказательство (40) полностью аналогично доказательству примера 7 из [2].

Рассмотрим функцию

$$h_1(\mathbf{x}) = C \frac{(\log N)^{1/q-1}}{N} h(\mathbf{x})$$

с функцией $h(\mathbf{x})$ из (39). Функция $h_1(\mathbf{x})$ принадлежит H_q^Ω при некотором $C > 0$. Из (40) следует, что

$$\|h_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*) - Gh_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*)\|_p \gg \frac{(\log N)^{1/q}}{N} \asymp M^{-r}(\log M)^{-b_1-b_2+r+1/q}.$$

Теоремы 1 и 2 доказаны.

В других случаях значений параметров b_j , $j = 1, 2$, доказательства сходны с доказательством теорем 1 и 2. Укажем лишь некоторые основные отличия в доказательствах.

Доказательство теорем 5, 6. Оценки сверху в случае $q < p$ доказываются аналогично оценкам сверху в теоремах 1 и 2. Докажем оценки сверху в случае $1 < p \leq q < \infty$. В качестве приближающего подпространства возьмем множество тригонометрических полиномов с гармониками из множеств $Q'(N)$.

По следствию из теоремы Литтлвуда–Пэли

$$\begin{aligned} E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q &\ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in (\mathcal{K}')^\perp(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{q_0} \right)^{1/q_0} \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}^\perp(N(\log N)^{b_2-b'_2})} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{1/q_0} \right) + \left(\sum_{\mathbf{s} \in A(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{q_0} \right)^{1/q_0}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $A(N) = (\mathcal{K}')^\perp(N) \setminus \mathcal{K}^\perp(N(\log N)^{b_2-b'_2})$.

Первая сумма из правой части (41) оценивается по лемме 1:

$$\sigma_1 \ll \frac{1}{N(\log N)^{b_2-b'_2}} (\log N)^{1/q_0}.$$

Оценим вторую сумму σ_2 из правой части (41). Для векторов $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ из σ_2 будет

$$2^{rs_1} s_1^{b_1} 2^{rs_2} s_2^{b'_2} > N, \quad 2^{rs_1} s_1^{b_1} 2^{rs_2} s_2^{b_2} \leq N(\log N)^{b_2-b'_2}. \quad (42)$$

Если $s_2 \geq \log N/(6r)$, то из (42) и того, что $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathcal{K}^\perp(N)$, следует, что для $\mathbf{s} \in A(N)$

$$\Omega(2^{-\mathbf{s}}) \ll \frac{1}{N(\log N)^{b_2-b'_2}}. \quad (43)$$

Пусть, далее, $s_2 < \log N/(6r)$. Тогда с учетом (42) получаем

$$\Omega(2^{-\mathbf{s}}) = \frac{1}{2^{rs_1} s_1^{b_1} 2^{rs_2} s_2^{b'_2} s_2^{b_2-b'_2}} < \frac{1}{N s_2^{b_2-b'_2}}. \quad (44)$$

Рассмотрим σ_2 . С учетом (43) и (44) получим

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\ll \left(\sum_{s_2 < \log N/(6r), \mathbf{s} \in A(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{q_0} \right)^{1/q_0} \\ &\quad + \left(\sum_{s_2 \geq \log N/(6r), \mathbf{s} \in A(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{q_0} \right)^{1/q_0} \\ &\ll \left(\sum_{s_2=1}^{\lceil \log N/(6r) \rceil - 1} \left(\frac{1}{N s_2^{b_2-b'_2}} \right)^{q_0} \right)^{1/q_0} + \frac{1}{N(\log N)^{b_2-b'_2}} (\log N)^{1/q_0}. \end{aligned}$$

Собирая воедино оценки для σ_1 и σ_2 и выбирая наибольшее по порядку слагаемое, получим оценку сверху:

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \frac{1}{N} \cdot \begin{cases} 1, & b_2 - b'_2 > 1/q_0, \\ (\log \log N)^{1/q_0}, & b_2 - b'_2 = 1/q_0, \\ (\log N)^{1/q_0 - (b_2-b'_2)}, & b_2 - b'_2 < 1/q_0. \end{cases} \quad (45)$$

Если $q = 1$ или $q = \infty$, то

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \sum_{\mathbf{s} \in (\mathcal{K}')^\perp(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}),$$

и мы аналогично получаем оценку (45) с $q_0 = 1$.

По условию теорем 5, 6 $b_2 > r + 1/q_0$, а при $q = \infty$ $b_2 > r + 1$. Следовательно, можно взять b'_2 такое, что $b_2 - b'_2 > 1/q_0$, и из (45) имеем

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \frac{1}{N}. \quad (46)$$

Отсюда, учитывая неубывание L_p -нормы по параметру p , получаем оценку сверху:

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_p \leq E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \frac{1}{N}.$$

Докажем оценку снизу для $p \leq q$. Рассмотрим пачку $\rho(\mathbf{s})$, соответствующую вектору $\mathbf{s} = (s_1, 1)$, $\mathbf{s} \in \theta(N)$. Легко видеть, что $\mathbf{s} = (s_1, 1) \in (\mathcal{K}')^\perp(N)$. Тогда $|\rho(\mathbf{s})| \asymp N^{1/r}(\log N)^{-b_1/r}$.

Как мы знаем, в рассматриваемом случае, $b_1 \leq r$, $b_2 > r$, будет

$$M = |Q(N)| \asymp N^{1/r}(\log N)^{-b_1/r}.$$

Далее, действуя как при доказательстве примера 1 работы [3], мы можем показать, что существует $\mathbf{k}^0 = (k_1^0, 1) \in \rho(s_1, 1)$ такой, что

$$\|e^{i(\mathbf{k}^0, \mathbf{x})} - G(e^{i(\mathbf{k}^0, \mathbf{x})})\|_1 \gg 1. \quad (47)$$

Теперь рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = C(1/N)e^{i(\mathbf{k}^0, \mathbf{x})}$. Функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит H_q^Ω при некотором $C > 0$ для всех $1 \leq q \leq \infty$. Тогда в силу (47) имеем

$$\|f(\mathbf{x}) - Gf(\mathbf{x})\|_p \geq \|f(\mathbf{x}) - Gf(\mathbf{x})\|_1 \gg \frac{1}{N},$$

что дает требуемую оценку снизу.

Для доказательства оценок снизу при $1 \leq q < p \leq \infty$ берем функцию, аналогичную функции из (27), однако вместо $\mathbf{s} \in \theta_1(N)$ берем $\mathbf{s} \in \theta_3(N)$ (см. (23)):

$$\Phi(\mathbf{x}) = C \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s} \in \theta_3(N)} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/q-1)} K_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}).$$

Теоремы 5 и 6 доказаны.

Список литературы

1. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // ДАН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 314–317.
2. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
3. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 138–168.
4. *Андрянов А. В., Темляков В. Н.* О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение // Тр. МИРАН. 1997. Т. 219. С. 32–43.
5. *Динь Зунг.* Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Матем. сб. 1986. Т. 131(173). № 2(10). С. 251–271.
6. *Галеев Э. М.* Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 2. С. 197–211.
7. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Матем. сб. 1964. Т. 63(105). № 3. С. 426–444.
8. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
9. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Analysis Mathematica. 1994. Т. 20. С. 35–48.

Поступило в редакцию
2.IV.1998