Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, О существовании решения однородной системы обобщенных уравнений Винера–Хопфа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 157–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:46:08

УДК 517.968

М. С. Сгибнев

О существовании решения однородной системы обобщенных уравнений Винера–Хопфа

Доказано существование неубывающего решения однородной системы обобщенных уравнений Винера–Хопфа. Установлены асимптотические свойства этого решения.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: система интегральных уравнений, однородная система уравнений Винера–Хопфа, матрица мер, матричная функция восстановления, асимптотическое поведение.

§ 1. Введение

В работах [1], [2] исследовалось однородное уравнение Винера–Хопфа

$$S(x) = \int_0^{\infty} k(x-y)S(y) dy, \quad x > 0, \quad (1)$$

где $S(x)$ – неизвестная функция, а $k(x)$ – плотность некоторого симметричного распределения вероятностей F , т. е.

$$k(x) = k(-x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx = 1.$$

В работе [1] доказано существование неубывающего непрерывного справа решения $S(x) \not\equiv 0$ уравнения (1) с нормировкой $S(0+) = 1$ [1, теорема 5]. Если плотность $k(x)$ имеет конечный второй момент $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 k(x) dx$, то [1, теорема 6]

$$S(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sigma} x, \quad x \rightarrow \infty.$$

Соотношение $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow \infty$, означает, что $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Данное свойство было уточнено в работе [2, теорема 1]: если $\sigma^2 < \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (S(x+h) - S(x)) = \frac{\sqrt{2}h}{\sigma}$$

для любого $h \geq 0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$z_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} K_{ij}(x-y)z_j(y) dy, \quad x > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $\mathbf{K}(x) = (K_{ij}(x))$ – матрица неотрицательных функций из $L_1(\mathbb{R})$. Обозначим через $\mathbf{z}(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^T$ n -мерный вектор-столбец (верхний индекс T означает транспонирование). В матричной форме система (2) принимает вид

$$\mathbf{z}(x) = \int_0^\infty \mathbf{K}(x-y)\mathbf{z}(y) dy, \quad x > 0. \quad (3)$$

Вопрос о нетривиальной разрешимости системы (3) исследовался в работе [3], где можно найти дополнительные ссылки. Перепишем уравнение (3) эквивалентным образом:

$$\mathbf{z}(x) = \int_{-\infty}^x \mathbf{K}(y)\mathbf{z}(x-y) dy, \quad x > 0.$$

Рассмотрим уравнение более общего вида

$$\mathbf{z}(x) = \int_{-\infty}^x \mathbf{F}(dy)\mathbf{z}(x-y), \quad x \geq 0; \quad (4)$$

здесь $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица конечных неотрицательных мер на $\mathbb{R}$, а i -я координата вектора в правой части (4) по определению есть

$$\left[\int_{-\infty}^x \mathbf{F}(dy)\mathbf{z}(x-y) \right]_i := \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^x z_j(x-y) F_{ij}(dy).$$

Считаем, что верхний предел интегрирования x включен в область интегрирования.

В одномерном случае ($n = 1$) уравнение

$$S(x) = \int_{-\infty}^x S(x-y) F(dy), \quad x \geq 0, \quad (5)$$

исследовалось в работе [4], где предполагалось, что F – распределение вероятностей на $\mathbb{R}$, порождающее случайное блуждание $\{S_n\}$ осциллирующего типа, т. е. когда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ почти наверное (п.н.). Если F – распределение вероятностей на $\mathbb{R}$, порождающее случайное блуждание $\{S_n\}$, уходящее в $-\infty$, т. е. когда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ п.н., то, как известно (см., например, [5, § XII.3a] или [6, п. 2]), существует ограниченное неубывающее решение $S(x)$ уравнения (5) с нормировкой $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 1$, совпадающее с функцией распределения супремума $\sup_{n \geq 0} S_n$ случайного блуждания $\{S_n\}$.

Цель настоящей работы состоит в исследовании вопроса о нетривиальной разрешимости системы (4) без предположения об абсолютной непрерывности матричной меры $\mathbf{F}$. Будет доказано существование неотрицательного отличного от нуля неубывающего по каждой координате решения $\mathbf{z}(x)$ системы (4) для широкого класса матричных мер $\mathbf{F}$ и будут установлены элементарные асимптотические свойства решения $\mathbf{z}(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Более детальное изучение асимптотики решения станет предметом отдельной статьи.

Назовем систему уравнений (4) *однородной системой обобщенных уравнений Винера–Хопфа*, чтобы отличить ее от однородной системы обычных уравнений Винера–Хопфа (3).

§ 2. Обозначения и определения

Если ν и $\varkappa$ – меры, определенные на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$, то их *сверткой* называется мера

$$\nu * \varkappa(A) := \iint_{\{x+y \in A\}} \nu(dx) \varkappa(dy) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-y) \varkappa(dy), \quad A \in \mathcal{B};$$

здесь $A-y := \{x \in \mathbb{R} : x+y \in A\}$. Для произвольной вещественнозначной меры ν определим ее *преобразование Лапласа* по формуле $\widehat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν . *Функцией распределения* меры ν называется функция $\nu((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица размером $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на $\mathbb{R}$. Свертка $\mathbf{F} * \mathbf{G}$ двух таких матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ – это матрица с элементами $(\mathbf{F} * \mathbf{G})_{ij} := \sum_{l=1}^n F_{il} * G_{lj}$, $i, j = 1, \dots, n$. Далее, $\mathbf{F}^{1*} := \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{(k+1)*} := \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{F} = \mathbf{F} * \mathbf{F}^{k*}$, $\mathbf{F}^{0*} := \delta_0 \mathbf{I}$, где δ_0 – атомическая мера массы 1, сосредоточенная в нуле, а $\mathbf{I}$ – единичная матрица размером $n \times n$. Положим $\mathbf{F}(\infty) = (F_{ij}(\infty)) = (F_{ij}(\mathbb{R}))$.

Условимся о том, что все операции над матрицами мер и вектор-функциями осуществляются поэлементно; например, если $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица, элементами которой являются меры, то $\int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) := (\int_{\mathbb{R}} x F_{ij}(dx))$, а через $\widehat{\mathbf{F}}(s)$ будем обозначать матрицу, состоящую из преобразований Лапласа $\widehat{F}_{ij}(s)$ элементов матрицы $\mathbf{F}$. Аналогичное соглашение относится и к неравенствам, в которых участвуют матрицы и вектор-функции. Если $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – скалярная матрица, то полагаем $|\mathbf{A}| := (|a_{ij}|)$. Через $\mathbf{0}$ будем обозначать нулевую матрицу или нулевой вектор, размеры которых будут определяться из контекста.

Пусть $\mathbf{A}$ – числовая матрица размером $n \times n$ и $\sigma(\mathbf{A})$ – совокупность всех ее собственных значений. Число $\varrho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$ называется *спектральным радиусом* матрицы $\mathbf{A}$. Известно, что если $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, то $\varrho(\mathbf{A}) \in \sigma(\mathbf{A})$ и существует неотрицательный вектор $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, для которого $\mathbf{A}\mathbf{x} = \varrho(\mathbf{A})\mathbf{x}$ [7, теорема 8.3.1]. Далее, по теореме Перрона–Фробениуса [7, теорема 8.4.4] любая неотрицательная неразложимая матрица $\mathbf{A}$ имеет положительное собственное значение кратности 1, равное $\varrho(\mathbf{A})$, и существует положительный правый (и левый) собственный вектор, соответствующий этому собственному значению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скалярная матрица $\mathbf{P} = (p_{ij})$ размером $n \times n$ называется *стохастической* (*полустохастической*), если $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$ и

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \leq 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скалярная матрица $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ размером $n \times n$ называется *примитивной*, если она неразложима и обладает только одним собственным значением с максимальным модулем.

Известно (см. [7, теорема 8.5.2]), что матрица $\mathbf{A}$ примитивна в том и только в том случае, когда $\mathbf{A}^m > \mathbf{0}$ для некоторого $m \geq 1$.

Среди матриц мер особое место занимают вырожденные матрицы в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Матрица мер $\mathbf{F} = (F_{ij})$ размером $n \times n$ называется *вырожденной*, если существуют постоянные $\beta_1, \dots, \beta_n$ такие, что меры F_{ij} сосредоточены в точках $\beta_j - \beta_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Матрица мер, не являющаяся вырожденной, называется *невыврожденной*.

Если $\mathbf{F}(\infty)$ – стохастическая матрица, то данное определение перефразирует определение вырожденности марковского аддитивного процесса с ядром $\mathbf{F}$, приведенное в [8]. В частности, вырожденной является матричная мера, сосредоточенная в нуле: $\mathbf{F}(\{0\}) = \mathbf{F}(\infty)$. При $n = 1$ вырожденный случай соответствует распределению вероятностей F , сосредоточенному в нуле. Всюду далее мы будем иметь дело только с невырожденными матрицами мер $\mathbf{F}$.

§ 3. Факторизация

Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица размером $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неразложима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Нам потребуется факторизационное тождество

$$\mathbf{I} - z\hat{\mathbf{F}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}_{z-}(s)][\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}_{z+}(s)], \quad |z| \leq 1, \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad (6)$$

где функции $\hat{\mathbf{F}}_{z+}(s)$, $\hat{\mathbf{F}}_{z-}(s)$, $\operatorname{Re} s = 0$, суть матрицы преобразований Лапласа неотрицательных конечных мер, сосредоточенных на $(0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ соответственно, причем $\varrho[\hat{\mathbf{F}}_{z+}(0)] \leq |z|$ и $\varrho[\hat{\mathbf{F}}_{z-}(0)] \leq 1$ при $|z| \leq 1$. Кроме того, матрицы мер $\mathbf{F}_{z\pm}$ непрерывно и монотонно ($\uparrow$) зависят от $z \in (0, 1)$.

Тождество (6) было установлено в вероятностном контексте для таких матриц мер $\mathbf{F}$, у которых $\mathbf{F}(\infty)$ – стохастическая примитивная матрица [9, формула (2.9)].

Предположим сначала, что $\mathbf{F}(\infty)$ – примитивная стохастическая матрица, в этом случае вместо $\mathbf{F}$ будем пользоваться $\mathbf{G}$. Напомним некоторые положения работы [9] и сформулируем основное факторизационное тождество (см. [9, формула (2.9)]). Рассматривается однородный по времени и аддитивный по первой координате марковский процесс $\{\zeta_m, \varkappa_m\}$ с дискретным временем. Считается, что случайная величина $\varkappa_m$ принимает лишь n значений, а эволюция процесса задается матрицей

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = (\hat{G}_{ij}(s)) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{sy} dP(\zeta_m \leq x + y, \varkappa_m = j \mid \zeta_{m-1} = x, \varkappa_{m-1} = i) \right),$$

где $\operatorname{Re} s = 0$ и $i, j = 1, \dots, n$. Положим $\zeta_0 = 0$. Первую координату процесса $\{\zeta_m, \varkappa_m\}$ можно рассматривать как сумму случайных величин, определенных на переходах цепи Маркова $\{\varkappa_m\}$, при этом переходные вероятности цепи определяются матрицей $\hat{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{G}(\infty)$. Обозначим $\zeta^* := \sup_{m>0} \zeta_m$ и $\zeta_* := \inf_{m>0} \zeta_m$. Определим на событии $\{\zeta^* > 0\}$ случайную величину $\mathcal{T}_+ := \inf\{m \geq 1: \zeta_m > 0\}$. На событии $\{\zeta^* \leq 0\}$ положим $\mathcal{T}_+ := \infty$. Аналогично, $\mathcal{T}_- := \inf\{m \geq 1: \zeta_m \leq 0\}$ на $\{\zeta_* \leq 0\}$ и $\mathcal{T}_- := \infty$ на $\{\zeta_* > 0\}$. Положим $\mathcal{H}_{\pm} := \zeta_{\mathcal{T}_{\pm}}$, и пусть

$$\hat{\mathbf{G}}_{z+}(s) := (E(z^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+}; \zeta^* > 0, \varkappa_{\mathcal{T}_+} = j \mid \varkappa_0 = i)), \quad (7)$$

где $|z| < 1$ и $\operatorname{Re} s = 0$. Матрица $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{G}}_{z+}(s)$ будет правой компонентой факторизации матрицы $\mathbf{I} - z\widehat{\mathbf{G}}(s)$. Чтобы получить левую компоненту $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{G}}_{z-}(s)$, введем обращенный процесс $\{\tilde{\zeta}_m, \tilde{\varkappa}_m\}$. Пусть $\mathbf{l}' = (l'_1, \dots, l'_n)$ – положительный вектор такой, что $\mathbf{l}' = \mathbf{l}'\mathbf{G}(\infty)$, и пусть $\mathbf{X} := \operatorname{diag}(l'_1, \dots, l'_n)$ – диагональная матрица с элементами $l'_1, \dots, l'_n$, расположенными на главной диагонали. Эволюция обращенного процесса задается матрицей $\mathbf{X}^{-1}[\widehat{\mathbf{G}}(s)]^T \mathbf{X}$. Положим

$$\widehat{\mathbf{G}}_{z-}(s) := \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{E}(z^{\tilde{\mathcal{T}}^-} e^{s\tilde{\mathcal{H}}^-}; \tilde{\zeta}_* \leq 0, \tilde{\varkappa}_{\tilde{\mathcal{T}}_-} = j \mid \tilde{\varkappa}_0 = i))^T \mathbf{X}. \quad (8)$$

В этих обозначениях основное факторизационное тождество (см. [9, формула (2.9)]) принимает следующий вид:

$$\mathbf{I} - z\widehat{\mathbf{G}}(s) = [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{G}}_{z-}(s)][\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{G}}_{z+}(s)], \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} s = 0. \quad (9)$$

Как отмечено в [9], из вероятностного смысла следует, что основное факторизационное тождество справедливо при $|z| \leq 1$. Далее, при $z \in (0, 1]$ функции $\widehat{\mathbf{G}}_{z+}(s)$, $\widehat{\mathbf{G}}_{z-}(s)$, $\operatorname{Re} s = 0$, суть матрицы преобразований Лапласа неотрицательных конечных мер, непрерывно и монотонно ($\uparrow$) зависящих от z и сосредоточенных на $(0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ соответственно. При $|z| \leq 1$ справедливы неравенства $\varrho[\widehat{\mathbf{G}}_{z+}(0)] \leq |z|$ и $\varrho[\widehat{\mathbf{G}}_{z-}(0)] \leq 1$. Действительно, поскольку $\mathcal{T}_+ \geq 1$ на событии $\{\zeta^* > 0\}$, имеем

$$|\widehat{\mathbf{G}}_{z+}(0)| \leq (|z| \mathbf{P}(\zeta^* > 0, \varkappa_{\mathcal{T}_+} = j \mid \varkappa_0 = i)).$$

Следовательно (см. [7, теорема 8.1.18]),

$$\varrho[\widehat{\mathbf{G}}_{z+}(0)] \leq |z| \mathbf{P}(\zeta^* > 0, \varkappa_{\mathcal{T}_+} = j \mid \varkappa_0 = i).$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(\zeta^* > 0, \varkappa_{\mathcal{T}_+} = j \mid \varkappa_0 = i) = \mathbf{P}(\zeta^* > 0 \mid \varkappa_0 = i) \leq 1,$$

матрица $(\mathbf{P}(\zeta^* > 0, \varkappa_{\mathcal{T}_+} = j \mid \varkappa_0 = i))$ является полустохастической. Нетрудно видеть, что спектральный радиус произвольной полустохастической матрицы $\mathbf{P}$ не превосходит единицы. Подытоживая эти рассуждения, видим, что $\varrho[\widehat{\mathbf{G}}_{z+}(0)] \leq |z|$. Оценим $\varrho[\widehat{\mathbf{G}}_{z-}(0)]$. Справедлива оценка (здесь $\operatorname{Re} s = 0$)

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathbf{G}}_{z-}(s)| &= \mathbf{X}^{-1} |(\mathbf{E}(z^{\tilde{\mathcal{T}}^-} e^{s\tilde{\mathcal{H}}^-}; \tilde{\zeta}_* \leq 0, \tilde{\varkappa}_{\tilde{\mathcal{T}}_-} = j \mid \tilde{\varkappa}_0 = i))^T| \mathbf{X} \\ &\leq \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{P}(\tilde{\zeta}_* \leq 0, \tilde{\varkappa}_{\tilde{\mathcal{T}}_-} = j \mid \tilde{\varkappa}_0 = i))^T \mathbf{X} =: \mathbf{X}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{X}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}$ – полустохастическая матрица. Далее, матрица $\mathbf{P}^T$ имеет те же собственные значения, что и матрица $\mathbf{P}$, следовательно, $\varrho(\mathbf{P}^T) = \varrho(\mathbf{P}) \leq 1$. Матрицы $\mathbf{P}^T$ и $\mathbf{X}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{X}$ подобны и потому имеют одинаковые собственные значения (см. [7, следствие 1.3.4]), следовательно,

$$\varrho(\mathbf{X}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{X}) = \varrho(\mathbf{P}^T) \leq 1.$$

Окончательно имеем $\varrho[\widehat{\mathbf{G}}_{z+}(0)] \leq |z|$ и $\varrho[\widehat{\mathbf{G}}_{z-}(0)] \leq 1$.

Заметим, что основное факторизационное тождество (9) справедливо и для таких матриц мер $\mathbf{G}$, у которых $\mathbf{G}(\infty)$ – *неразложимая* (а не только примитивная) стохастическая матрица, поскольку, как уже отмечалось во введении, у таких матриц $\mathbf{G}(\infty)$ есть неподвижная вектор-строка $\mathbf{l}' = (l'_1, \dots, l'_n)$ с *положительными* координатами. Этого достаточно, чтобы образовать обращенный процесс $\{\tilde{\zeta}_m, \tilde{\varkappa}_m\}$ и получить тождество (9), в котором компонента $\hat{\mathbf{G}}_{z-}(s)$ имеет вид (8) (см. [9, доказательство теоремы 2.1, б)]).

Наконец, перейдем от тождества (9) для матриц мер $\mathbf{G}$ с неразложимыми стохастическими матрицами $\mathbf{G}(\infty)$ к общему случаю, т. е. к тождеству (6) для матриц мер $\mathbf{F}$ с неразложимыми матрицами $\mathbf{F}(\infty)$ такими, что $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Это осуществляется благодаря стандартному преобразованию, переводящему $\mathbf{F}(\infty)$ в неразложимую стохастическую матрицу (см. [10, доказательство теоремы 3]). С этой целью выберем правый собственный вектор $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающий собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$, и рассмотрим матрицу мер $\mathbf{G} := \mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{J}$, где $\mathbf{J} := \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$. Очевидно, что свойство неразложимости матрицы инвариантно относительно умножения справа или слева на диагональную матрицу с ненулевыми диагональными элементами. Далее, непосредственно проверяется, что матрица $\mathbf{G}(\infty)$ стохастическая:

$$\mathbf{G}(\infty)\mathbf{1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}(\infty)\mathbf{J}\mathbf{1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}(\infty)\mathbf{r} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{1};$$

здесь $\mathbf{1}$ – n -мерный вектор-столбец с координатами 1. Для матриц $\mathbf{G}$ справедлива факторизация (9). Полагая $\mathbf{F}_{z\pm} := \mathbf{J}\mathbf{G}_{z\pm}\mathbf{J}^{-1}$, видим, что матрица $\delta_0\mathbf{I} - z\mathbf{F}$ допускает факторизацию (6) с указанными свойствами, поскольку спектры подобных матриц совпадают, следовательно, $\varrho[\hat{\mathbf{F}}_{z\pm}(0)] = \varrho[\hat{\mathbf{G}}_{z\pm}(0)]$, откуда вытекает $\varrho[\hat{\mathbf{F}}_{z+}(0)] \leq |z|$ и $\varrho[\hat{\mathbf{F}}_{z-}(0)] \leq 1$ при $|z| \leq 1$. Обозначим $\mathbf{F}_{\pm} := \mathbf{F}_{1\pm}$. Тогда из (6) вытекает факторизация Винера–Хопфа для матрицы мер $\delta_0\mathbf{I} - \mathbf{F}$:

$$\delta_0\mathbf{I} - \mathbf{F} = (\delta_0\mathbf{I} - \mathbf{F}_-) * (\delta_0\mathbf{I} - \mathbf{F}_+), \quad (10)$$

где $\mathbf{F}_-$ и $\mathbf{F}_+$ – матрицы конечных неотрицательных мер, сосредоточенных на $(-\infty, 0]$ и $(0, \infty)$ соответственно, причем $\varrho[\mathbf{F}_{\pm}(\infty)] \leq 1$.

Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неразложима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Положим $\mu := \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}$. Перечислим спектральные свойства компонент $\mathbf{F}_{\pm}$ в факторизации (10) в зависимости от знака μ :

- а) если $\mu < 0$, то $\varrho[\mathbf{F}_+(\infty)] < 1$ и $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] = 1$;
- б) если $\mu > 0$, то $\varrho[\mathbf{F}_+(\infty)] = 1$ и $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] < 1$;
- в) если $\mu = 0$, то $\varrho[\mathbf{F}_+(\infty)] = \varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] = 1$.

Для матриц мер $\mathbf{F}$ таких, что $\mathbf{F}(\infty)$ – стохастическая матрица, эти утверждения совпадают с [6, теорема 4.1 и предложение 4.2], а общий случай сводится к стохастическому, как показано в [10, доказательство теоремы 3].

§ 4. Основная теорема

Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица размером $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Матричной мерой восстановления, порожденной матрицей мер $\mathbf{F} = (F_{ij})$, называется матрица мер $\mathbf{U} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{k*}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица размером $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $[0, \infty)$. Предположим, что $\varrho[\mathbf{F}(\{0\})] < 1$. Тогда матричная мера восстановления $\mathbf{U}$, порожденная матрицей мер $\mathbf{F}$, σ -конечна, т.е. $U(A) < \infty$ для любого ограниченного $A \in \mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу преобразований Лапласа $\widehat{\mathbf{F}}(\zeta)$, $\zeta < 0$. Имеем $\widehat{\mathbf{F}}(\zeta) \rightarrow \mathbf{F}(\{0\})$ при $\zeta \rightarrow -\infty$. Следовательно, в силу непрерывной зависимости собственных значений матрицы от ее элементов (см. [11, § 7.2]) найдется $\zeta_0 < 0$ такое, что $\varrho[\widehat{\mathbf{F}}(\zeta_0)] < 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varrho[\widehat{\mathbf{F}}(\zeta_0)] + \varepsilon < 1$. В силу [7, следствие 5.6.13] найдется такая постоянная $C = C(\varepsilon)$, что все элементы матрицы $[\widehat{\mathbf{F}}(\zeta_0)]^k$ не превосходят величины $C\{\varrho[\widehat{\mathbf{F}}(\zeta_0)] + \varepsilon\}^k$, $k = 0, 1, \dots$. Пусть теперь $A > 0$ произвольно. Тогда

$$\begin{aligned} U([0, A]) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \mathbf{F}^{k*}([0, A]) \leq e^{-\zeta_0 A} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \int_0^\infty e^{\zeta_0 x} \mathbf{F}^{k*}(dx) \\ &= e^{-\zeta_0 A} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m [\widehat{\mathbf{F}}(\zeta_0)]^k = e^{-\zeta_0 A} \sum_{k=0}^{\infty} [\widehat{\mathbf{F}}(\zeta_0)]^k \\ &\leq C e^{-\zeta_0 A} \sum_{k=0}^{\infty} \{\varrho[\widehat{\mathbf{F}}(\zeta_0)] + \varepsilon\}^k \mathbf{1} < \infty, \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}$ – матрица размером $n \times n$, все элементы которой равны 1. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для матрицы мер $\mathbf{G}_{1+}$ (см. (7)) имеем $\mathbf{G}_{1+}(\{0\}) = \mathbf{0}$, и потому матрица мер $\mathbf{F}_+ = \mathbf{J}\mathbf{G}_{1+}\mathbf{J}^{-1}$ обладает этим же свойством. Таким образом, матрица $\mathbf{F}_+$ удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, мера восстановления $\mathbf{U}_+$, порожденная матрицей мер $\mathbf{F}_+$, является σ -конечной матричной мерой.

Докажем теорему о существовании нетривиального решения для системы уравнений (4). Отличительное предположение этой теоремы состоит в том, что компонента $\mathbf{F}_-$ факторизации (10) удовлетворяет условию $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] = 1$. В частности, этому условию соответствуют пп. а) и в) приведенной выше классификации. Однако здесь мы, вообще говоря, не будем предполагать существования конечного среднего значения μ для исходной матрицы $\mathbf{F}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{F}$ – матрица размером $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на прямой. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неразложима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Допустим, что матрица $\mathbf{F}_-$, участвующая в факторизации (10), такова, что $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] = 1$. Пусть $\mathbf{r}_- \neq \mathbf{0}$ –

правый собственный вектор с неотрицательными координатами матрицы $\mathbf{F}_-(\infty)$, отвечающий ее собственному значению 1, и пусть $\mathbf{U}_+$ – матричная мера восстановления, порожденная матрицей мер $\mathbf{F}_+$. Тогда вектор-функция $\mathbf{z}(x) = \mathbf{U}_+([0, x])\mathbf{r}_-$, $x \geq 0$, является неубывающим решением однородной системы обобщенных уравнений Винера–Хопфа (4) таким, что $\mathbf{z}(0+) = \mathbf{r}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\zeta \in (0, 1)$ и обозначим через $\mathbf{U}_{\zeta+}$ матричную меру восстановления, порожденную матрицей мер $\mathbf{F}_{\zeta+}$. Обозначим $\varrho := \varrho[\mathbf{F}_{\zeta+}(\infty)] < 1$. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, чтобы $\varrho + \varepsilon < 1$. Согласно [7, следствие 5.6.13] существует такая константа $C = C(\varepsilon)$, что все элементы матрицы $[\mathbf{F}_{\zeta+}(\infty)]^k$ не превосходят величины $C(\varrho + \varepsilon)^k$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Матричный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{F}_{\zeta+}(\infty)]^k$ сходится к матрице $\mathbf{U}_{\zeta+}(\mathbb{R}) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\zeta+}(\infty)]^{-1}$. Таким образом, матричная мера $\mathbf{U}_{\zeta+}$ конечна, и ее преобразование Лапласа определено при $\operatorname{Re} s \leq 0$. Из тождества (6) вытекает формула

$$\widehat{\mathbf{U}}_{\zeta+}(s) = [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_{\zeta+}(s)]^{-1} = [\mathbf{I} - \zeta \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_{\zeta-}(s)], \quad \operatorname{Re} s = 0.$$

Рассмотрим свертку $\zeta \mathbf{F} * \mathbf{U}_{\zeta+}$. Имеем

$$\begin{aligned} \zeta (\mathbf{F} * \mathbf{U}_{\zeta+})^\wedge(s) &= \zeta \widehat{\mathbf{F}}(s) [\mathbf{I} - \zeta \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_{\zeta-}(s)] \\ &= \widehat{\mathbf{F}}_{\zeta-}(s) - \mathbf{I} + [\mathbf{I} - \zeta \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_{\zeta-}(s)] \\ &= \widehat{\mathbf{F}}_{\zeta-}(s) - \mathbf{I} + \widehat{\mathbf{U}}_{\zeta+}(s). \end{aligned}$$

Переходя от преобразований Лапласа к мерам, получим равенство

$$\zeta \mathbf{F} * \mathbf{U}_{\zeta+}(A) = \mathbf{F}_{\zeta-}(A) - \delta_0(A)\mathbf{I} + \mathbf{U}_{\zeta+}(A), \quad A \in \mathcal{B}. \quad (11)$$

Пусть $\zeta \uparrow 1$. Имеем $\mathbf{U}_{\zeta+}(A) \uparrow \mathbf{U}_+(A)$ и $\mathbf{F}_{\zeta-}(A) \uparrow \mathbf{F}_-(A)$ при любом $A \in \mathcal{B}$. Элементы матрицы

$$\mathbf{F} * \mathbf{U}_{\zeta+}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(dy) \mathbf{U}_{\zeta+}(A - y)$$

конечны и представляют собой конечные суммы интегралов от неотрицательных функций по неотрицательным мерам:

$$[\mathbf{F} * \mathbf{U}_{\zeta+}(A)]_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} F_{ik}(dy) [\mathbf{U}_{\zeta+}(A - y)]_{kj},$$

причем все функции $[\mathbf{U}_{\zeta+}(A - y)]_{kj}$ не убывают при $\zeta \uparrow 1$. Следовательно, элементы матрицы $\zeta \mathbf{F} * \mathbf{U}_{\zeta+}(A)$ стремятся при $\zeta \uparrow 1$ к соответствующим элементам матрицы $\mathbf{F} * \mathbf{U}_+(A)$, которые могут быть конечны либо бесконечны [12, § 27, теорема В]. Таким образом, соотношение (11) превращается в равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(dy) \mathbf{U}_+(A - y) = \mathbf{F}_-(A) - \delta_0(A)\mathbf{I} + \mathbf{U}_+(A), \quad A \in \mathcal{B}. \quad (12)$$

Матричная мера $\mathbf{F}_-$ сосредоточена на $(-\infty, 0]$, а мера $\mathbf{U}_+$ – на $[0, \infty)$. Поэтому, полагая $A = (-\infty, x]$, $x \geq 0$, в равенстве (12), приходим к соотношению

$$\int_{-\infty}^x \mathbf{F}(dy) \mathbf{U}_+([0, x - y]) = \mathbf{F}_-(\infty) - \mathbf{I} + \mathbf{U}_+([0, x]), \quad x \geq 0.$$

Интеграл в левой части этого равенства конечен, поскольку все элементы матрицы $U_+([0, x])$ конечны (см. замечание 1). Умножая справа на вектор r_- обе части полученного равенства, видим, что

$$\int_{-\infty}^x F(dy)U_+([0, x-y])r_- = U_+([0, x])r_-, \quad x \geq 0,$$

т. е. вектор-функция $z(x) := U_+([0, x])r_-$, $x \geq 0$, — решение системы (4). Полученное решение удовлетворяет соотношению $z(0+) = r_-$, поскольку матричная мера F_+ сосредоточена на $(0, \infty)$, следовательно, мера

$$\sum_{k=1}^{\infty} (F_+)^{k*} = U_+ - \delta_0 I$$

также сосредоточена на $(0, \infty)$. Теорема доказана.

§ 5. Асимптотика решения

Установим элементарные асимптотические свойства решения $z(x)$, о котором говорится в теореме 1. Сначала дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [5]. Распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек $\{0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \dots\}$. Наибольшее число $\lambda > 0$, обладающее этим свойством, называется *шагом* распределения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [13]. Распределение вероятностей F на $\mathbb{R}$ называется *решетчатым*, если оно сосредоточено на множестве, образующем арифметическую прогрессию, т. е. на множестве точек вида $a + j\lambda$, где $a \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ — постоянные числа, а $j \in \mathbb{Z}$ (как обычно, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел). Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* F .

Аналогичным образом определяются арифметические и решетчатые меры. В матричном случае ситуация имеет более сложный вид. Пусть $F = (F_{ij})$ — квадратная матрица порядка n , элементами которой являются неотрицательные конечные меры на $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [14]. Матрица мер F размером $n \times n$ называется *решетчатой*, если выполняются следующие условия:

- 1) каждая мера F_{ij} , $i \neq j$, решетчата с шагом λ_{ij} , каждая мера F_{ii} арифметическая с шагом λ_{ii} ;
- 2) все λ_{ij} кратны некоторому числу, наибольшее из таких чисел обозначим через λ ;
- 3) если a_{ij} , a_{jk} и a_{ik} — точки роста функций распределения мер F_{ij} , F_{jk} и F_{ik} соответственно, то $a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} + m\lambda$, где $m \in \mathbb{Z}$; иными словами, $a_{ij} + a_{jk} \equiv a_{ik} \pmod{\lambda}$.

Число λ называется *шагом* решетчатой матрицы мер F . Невырожденная матрица мер, не являющаяся решетчатой, называется *нерешетчатой*.

Условимся о том, что если $a = \infty$, то $a^{-1} := 0$ и запись $f(t) \sim g(t)/a$, $t \rightarrow \infty$, означает $f(t) = o[g(t)]$, $t \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1, и пусть $z(x) = U_+([0, x])r_-$ – решение системы (4). Если $\varrho[F_+(\infty)] < 1$, то*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = [I - F_+(\infty)]^{-1} r_-. \quad (13)$$

Пусть матрица мер F нерешетчатая. Допустим, что матрица $F_+(\infty)$ неразложима и $\varrho[F_+(\infty)] = 1$. Пусть l_+ и r_+ – соответственно левый и правый собственные векторы с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $F_+(\infty)$. Тогда

$$z(x+h) - z(x) \rightarrow \frac{h(r_+ l_+) r_-}{l_+ \int_0^\infty x F_+(dx) r_+}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (14)$$

для любого фиксированного $h > 0$. В частности, покомпонентно выполняется соотношение

$$z(x) \sim \frac{(r_+ l_+) r_-}{l_+ \int_0^\infty x F_+(dx) r_+} x, \quad x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varrho[F_+(\infty)] < 1$. Матричный ряд $\sum_{k=0}^\infty [F_+(\infty)]^k$ сходится и равен матрице $[I - F_+(\infty)]^{-1}$ (см. доказательство теоремы 1). Таким образом, при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} z(x) &= U_+([0, x])r_- \rightarrow U_+(\infty)r_- = \sum_{k=0}^\infty (F_+)^{k*}(\infty)r_- \\ &= \sum_{k=0}^\infty [F_+(\infty)]^k r_- = [I - F_+(\infty)]^{-1} r_-. \end{aligned}$$

Соотношение (13) доказано.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть G – матрица мер такая, что матрица $G(\infty)$ неразложима и $\varrho[G(\infty)] = 1$. Известно (см. [10, теорема 2]), что матрица мер G решетчатая тогда и только тогда, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $\det(I - \hat{G}(it_0)) = 0$. Согласно этому критерию $\det(I - \hat{F}(it)) \neq 0$ при всех $t \neq 0$. Имеем (см. тождество (10))

$$I - \hat{F}(it) = [I - \hat{F}_-(it)] [I - \hat{F}_+(it)], \quad t \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Из тождества (16) вытекает, что $\det(I - \hat{F}_+(it)) \neq 0$ при всех $t \neq 0$. Следовательно, матрица мер F_+ нерешетчатая. Тогда согласно [10, теорема 1] имеем

$$U_+((x, x+h]) \rightarrow \frac{h r_+ l_+}{l_+ \int_0^\infty x F_+(dx) r_+}, \quad x \rightarrow \infty,$$

для любого фиксированного $h > 0$, откуда вытекает требуемое утверждение (14), а вместе с ним и соотношение (15). Теорема доказана.

Приведем для сравнения теорему 7.1 из [3] о существовании решения системы уравнений Винера–Хопфа и его свойствах в абсолютно непрерывном случае (3), используя наши обозначения, чтобы не вводить новых. Сформулируем утверждение а) теоремы 7.1 из [3]: пусть выполнены условия

$$\varrho[F(\infty)] = \varrho\left[\int_{\mathbb{R}} K(x) dx\right] = 1,$$

матрица $\int_{-\infty}^0 \mathbf{K}(x) dx$ неразложима и $-\infty \leq \mu \leq 0$; тогда система (3) обладает решениями вида $\mathbf{z}(x) = \lambda \mathbf{U}_+([0, x]) \mathbf{r}_-$, где $\lambda > 0$, или, что то же самое, система (3) обладает решениями вида $\mathbf{z}(x) = \mathbf{U}_+([0, x]) \mathbf{r}_-$, как в теореме 1 настоящей работы (от параметра $\lambda > 0$ можно избавиться, взяв вектор $\lambda \mathbf{r}_-$ вместо вектора $\mathbf{r}_-$). Напомним также, что из условия $-\infty \leq \mu \leq 0$ вытекает равенство $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] = 1$, использовавшееся в теореме 1 настоящей работы.

Сформулируем утверждение б) теоремы 7.1 из [3]: если $-\infty \leq \mu < 0$, то решение $\mathbf{z}(x) = \mathbf{U}_+([0, x]) \mathbf{r}_-$ системы (3) непрерывно и справедливо равенство (13). Отметим, что в [3, формула (7.15)] допущена опечатка: вместо $S_0(+\infty) = G(I - G)^{-1}$ должно быть $S_0(+\infty) = (I - G)^{-1}$. Наконец, сформулируем утверждение в) теоремы 7.1 из [3]: если $\mu = 0$ и матрицы $\int_{-\infty}^0 \mathbf{K}(x) dx$ и $\int_0^{\infty} \mathbf{K}(x) dx$ неразложимы, то решение $\mathbf{z}(x) = \mathbf{U}_+([0, x]) \mathbf{r}_-$ системы (3) удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{z}(x) = \frac{(\mathbf{r}_+ \mathbf{l}_+) \mathbf{r}_-}{\mathbf{l}_+ \int_0^{\infty} x \mathbf{F}_+(dx) \mathbf{r}_+} x + \varrho(x),$$

где $\varrho(x) = o(x)$, $x \rightarrow \infty$. Если $\int_0^{\infty} x^p \mathbf{K}(x) dx < \infty$, $p \geq 4$, то

$$\int_0^{\infty} x^{p-4} \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) - \varrho(x) \right| dx < \infty.$$

В заключение сравним теоремы 1 и 2 с соответствующими результатами работы [4]. Теорема 1 в [4] – частный случай теоремы 1 настоящей статьи при $n = 1$. Асимптотические свойства решения (13) и (14), установленные в теореме 2, обобщают соответствующую асимптотику решения в одномерном случае (см. [4, соотношения (12) и (11)]).

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. F. Spitzer, “The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density”, *Duke Math. J.*, **24**:3 (1957), 327–343.
2. F. Spitzer, “The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density. II”, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 363–372.
3. Н. Б. Енгибарян, “Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 61–82; англ. пер.: N. B. Engibaryan, “Conservative systems of integral convolution equations on the half-line and the entire line”, *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 847–867.
4. М. С. Сгибнев, “Об однородном консервативном уравнении Винера–Хопфа”, *Матем. сб.*, **198**:9 (2007), 123–132; англ. пер.: M. S. Sgibnev, “Homogeneous conservative Wiener–Hopf equation”, *Sb. Math.*, **198**:9 (2007), 1341–1350.
5. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1967; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. II, Wiley, New York–London–Sydney, 1966.
6. S. Asmussen, “Aspects of matrix Wiener–Hopf factorisation in applied probability”, *Math. Sci.*, **14**:2 (1989), 101–116.
7. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

8. M. Newbould, “A classification of a random walk defined on a finite Markov chain”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **26**:2 (1973), 95–104.
9. Э. Л. Пресман, “Методы факторизации и граничная задача для суммы случайных величин, заданных на цепи Маркова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:4 (1969), 861–900; англ. пер.: È. L. Presman, “Factorization methods and boundary problems for sums of random variables given on Markov chains”, *Math. USSR-Izv.*, **3**:4 (1969), 815–852.
10. М. С. Сгибнев, “Матричный аналог теоремы восстановления Блеквелла на прямой”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 69–86; англ. пер.: M. S. Sgibnev, “The matrix analogue of the Blackwell renewal theorem on the real line”, *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 369–386.
11. П. Ланкастер, *Теория матриц*, Наука, М., 1982; пер. с англ.: P. Lancaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York–London, 1969.
12. П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Measure theory*, Nostrand, New York; Macmillan, London, 1950.
13. Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: E. Lukacs, *Characteristic functions*, Hafner Publ., New York, 1970.
14. K. S. Crump, “On systems of renewal equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **30**:2 (1970), 425–434.

М. С. СГИБНЕВ (M. S. SGIBNEV)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: sgibnev@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
16.01.2008
25.07.2008