Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 4, 83–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:57:36

УДК 511

М. А. Королёв

Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана

Доказан ряд новых утверждений, связанных с нулями дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и с так называемым законом Грама.

Библиография: 23 наименования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, закон Грама, правило Грама, аргумент дзета-функции Римана.

Введение

При положительном числе t определим функцию $\vartheta(t)$ следующим образом: $\vartheta(t)$ равна приращению, которое получает непрерывная ветвь аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$ при изменении s вдоль отрезка, соединяющего точки $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} + it$. Выбрав ветвь аргумента, значение которой в точке $s = \frac{1}{2}$ равно нулю, и пользуясь формулой Стирлинга для гамма-функции, получаем

$$\vartheta(t) = \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) - \frac{t}{2} \ln \pi = \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

где при $t \rightarrow +\infty$ функция $\Delta(t)$ разлагается в асимптотический ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n} 2n(2n-1)} (-1)^{n+1} B_{2n} t^{-(2n-1)}$$

(здесь B_{2n} – числа Бернулли: $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$ и т. д.).

Пусть, далее, $n \geq 0$ – целое число. Назовем *точкой Грама* t_n единственный корень уравнения

$$\vartheta(t_n) = \pi \cdot (n-1),$$

так что, например,

$$\begin{aligned} t_0 &= 9.666908\dots, & t_1 &= 17.845599\dots, & t_2 &= 23.170282\dots, \\ t_3 &= 27.670182\dots, & t_4 &= 31.717979\dots, & t_5 &= 35.467184\dots \end{aligned}$$

При больших n имеем асимптотические равенства

$$t_n = \frac{2\pi n}{\ln n} (1 + o(1)), \quad t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{\ln n} (1 + o(1)).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Молодые кандидаты РФ” (грант МК-4052.2009.1).

В самом начале XX в., вычисляя первые нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$, Дж.-П. Грам [1] обнаружил, что при $1 \leq n \leq 15$ выполняются неравенства

$$t_{n-1} < \gamma_n \leq t_n, \quad (1)$$

в которых γ_n – положительные ординаты комплексных нулей $\zeta(s)$, занумерованные в порядке возрастания:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 14.134725\dots, & \gamma_2 &= 21.022039\dots, & \gamma_3 &= 25.010857\dots, \\ \gamma_4 &= 30.424876\dots, & \gamma_5 &= 32.935061\dots, & \gamma_6 &= 37.586178\dots \end{aligned}$$

Иными словами, ординаты первых нулей дзета-функции Римана отделены друг от друга точками Грама.

Грам предположил, однако, что обнаруженная им закономерность не является общей. Действительно, Дж. И. Хатчинсон в 1925 г. нашел [2] первые два значения n , для которых неравенства (1) не имеют места, а именно $n = 127$ и $n = 136$, когда

$$\gamma_{126} < t_{126} < t_{127} < \gamma_{127}, \quad t_{134} < \gamma_{135} < \gamma_{136} < t_{135}.$$

Тем не менее, в подавляющем числе случаев неравенства (1) выполнялись, что и позволило Хатчинсону назвать эту закономерность *правилом Грама*, или *законом Грама* (Gram's rule, или Gram's law).

Вычисления Грама и Хатчинсона были продолжены Э. Ч. Титчмаршем (см. [3], [4]), который установил, что для первых 1042 ординат правило Грама нарушается лишь в 43 случаях, что составляет менее 5% от общего числа.

Подобные наблюдения наводили исследователей на мысль о том, что исключения из правила Грама хотя и встречаются, но все же достаточно редки, так что обнаруженная закономерность по праву именуется “законом”.

В статье [3] Титчмарш впервые поставил вопрос о том, насколько “сильно” ординаты γ_n могут “уклоняться” от правила Грама. Определив для заданного $n \geq 1$ число m из неравенств

$$t_{m-1} < \gamma_n \leq t_m,$$

в качестве меры уклонения Титчмарш рассмотрел некоторую величину, по сути близкую к разности

$$\Delta_n = m - n,$$

для которой затем доказал неограниченность как сверху, так и снизу:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = -\infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = +\infty. \quad (2)$$

Иными словами, так определенное “уклонение” может быть сколь угодно большим: номер n ординаты γ_n и номер m промежутка Грама $(t_{m-1}, t_m]$, содержащего эту ординату, могут отличаться друг от друга на сколь угодно большое по абсолютной величине число.

До середины 1940-х годов ничего не было известно о том, как часто встречаются исключения из правила Грама. Первые результаты такого рода были получены А. Сельбергом и сформулированы им (без доказательства) в ч. IV его доклада “Дзета-функция и гипотеза Римана” [5] в 1946 г.

Во-первых, Сельберг доказал, что при достаточно большом N найдется не менее KN промежутков Грама $(t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N$, не содержащих ни одной ординаты нулей $\zeta(s)$, и что имеется не менее KN промежутков $(t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N$, в каждый из которых попадает по две и более ординат (здесь K – некоторая абсолютная постоянная).

Во-вторых, Сельберг установил, что для любого фиксированного целого числа $k \geq 1$ справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{n=1}^N \Delta_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \frac{N}{(2\pi)^k} (\ln \ln N)^k + O(N(\ln \ln N)^{k-1/2}), \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^N \Delta_n^{2k-1} = O(N(\ln \ln N)^{k-1}). \quad (4)$$

Равенство (3) показывает, что среднее значение величин $|\Delta_n|$, $n = 1, 2, \dots, N$, растет как $\sqrt{\ln \ln N}$, а оценка (4) указывает на то, что положительных и отрицательных значений среди чисел Δ_n примерно поровну.

Полагая $k = 1$ в (3), находим

$$\sum_{n=1}^N \Delta_n^2 \sim \frac{N}{2\pi^2} \ln \ln N.$$

Если теперь в сумме по n оставить лишь слагаемые, отвечающие условию $|\Delta_n| > \Phi \sqrt{\ln \ln N}$, то, обозначив через ν количество слагаемых новой суммы, получим

$$\nu \Phi^2 \ln \ln N \leq \sum_{n=1}^N \Delta_n^2 \sim \frac{N}{2\pi^2} \ln \ln N,$$

откуда имеем

$$\nu \ll N \Phi^{-2}.$$

Взяв величину Φ зависящей от N и такой, чтобы $\Phi(N) \rightarrow +\infty$ при неограниченном возрастании N , заключаем, что количество тех разностей Δ_n , модуль которых велик по сравнению со своим средним значением $\sqrt{\ln \ln N}$, есть величина $O(N \Phi^{-2}) = o(N)$. Иначе говоря, для “почти всех” $n \leq N$ имеем неравенство

$$|\Delta_n| \leq \Phi \sqrt{\ln \ln N}.$$

Вероятно, соображения такого рода позволили Сельбергу высказать следующую гипотезу (см. [5]). “По-видимому, хотя я и не мог доказать этого строго, $\sqrt{\log \log n}$ есть “нормальный” порядок величины Δ_n в следующем смысле: если $\Phi(n)$ есть положительная функция n , стремящаяся к бесконечности вместе с n , то неравенства

$$\frac{\sqrt{\log \log n}}{\Phi(n)} < |\Delta_n| < \Phi(n) \sqrt{\log \log n}$$

имеют место для почти всех n . В частности, это должно означать, что γ_ν “почти никогда” не лежат в интервале $(t_{\nu-1}, t_\nu)$. Именно первое неравенство составляет основную трудность, его я доказать полностью не смог”.

Из гипотезы Сельберга, в частности, следует, что случаи, когда правило Грама все же выполняется, встречаются чрезвычайно редко. Большая доля таких случаев при малых n объясняется тем, что в охваченной первыми вычислениями области ($n \leq 1042$) влияние множителя $\sqrt{\ln \ln n}$ практически незаметно.

В настоящей работе мы докажем ту часть гипотезы Сельберга, которая утверждает, что ордината γ_n “почти никогда” не попадает на промежуток Грама $(t_{n-1}, t_n]$. Изучению распределения значений величин Δ_n предполагается посвятить отдельную статью.

Коротко поясним идейную сторону настоящей работы. Прежде всего, вместо величин Δ_n мы вводим в рассмотрение величины $\Delta(n)$ по следующему правилу: если для заданного $n \geq 1$ выполняются неравенства

$$\gamma_m \leq t_n < \gamma_{m+1},$$

то $\Delta(n)$ полагаем равным разности $m - n$.

Величины Δ_n и $\Delta(n)$, вообще говоря, различны: в первом случае их нумерация связана с ординатами γ_n , а во втором – с точками Грама t_n . Так, для найденных Хатчинсоном исключений из правила Грама имеем $\Delta_{126} = 0$, $\Delta_{127} = 1$, в то время как $\Delta(126) = 0$, $\Delta(127) = -1$, и $\Delta_{135} = 0$, $\Delta_{136} = -1$, но в то же время $\Delta(135) = 1$, $\Delta(136) = 1$. Однако нарушение неравенств $\gamma_n \leq t_n < \gamma_{n+1}$ для почти всех n влечет и нарушение для почти всех n неравенств (1); см. следствие 5. Таким образом, достаточно показать, что для почти всех n разность $\Delta(n)$ отлична от нуля, а эта задача, в свою очередь, сводится к задаче о поведении аргумента дзета-функции Римана в точках Грама.

Осуществляется это следующим образом. Формулу Римана–Мангольдта, выражающую число $N(T)$ нулей $\zeta(s)$, ордината γ которых положительна и не превосходит T , можно записать в виде

$$N(T) = \pi^{-1} \vartheta(T) + 1 + S(T), \quad S(T) = \pi^{-1} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right). \quad (5)$$

Здесь $\arg \zeta(\frac{1}{2} + iT)$ обозначает приращение любой непрерывной ветви $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, соединяющей точки 2 , $2 + iT$ и $\frac{1}{2} + iT$. Функция $S(T)$ называется *аргументом* дзета-функции Римана на критической прямой; ее основные свойства отражены в обзорных статьях [6], [7].

Взяв $T = t_n$ в (5) и предположив, что $\gamma_m \leq t_n < \gamma_{m+1}$, получим

$$m = N(t_n) = \pi^{-1} \pi \cdot (n - 1) + 1 + S(t_n) = n + S(t_n),$$

откуда

$$\Delta(n) = m - n = S(t_n). \quad (6)$$

Последнее соотношение является ключевым для настоящей работы и сводит изучение правила Грама к исследованию значений функции $S(t)$ в точках t_n . Например, с помощью (6) из современных омега-теорем для аргумента дзета-функции Римана на критической прямой и классических оценок сверху величины $|S(t)|$ следует, что

$$\Delta(n) = \Omega_{\pm}((\ln n)^{1/3}(\ln \ln n)^{-1/3}), \quad \Delta(n) = O(\ln n),$$

а если верна гипотеза Римана, то

$$\Delta(n) = \Omega_{\pm}((\ln n)^{1/2}(\ln \ln n)^{-1/2}), \quad \Delta(n) = O\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right).$$

В частности, для величин $\Delta(n)$ справедлив аналог соотношений (2) теоремы Титчмарша:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta(n) = -\infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \Delta(n) = +\infty.$$

Этим, однако, аналогия между величинами $\Delta(n)$ и Δ_n не исчерпывается. Оказывается, что для чисел $\Delta(n)$ справедливы соотношения, подобные формулам (3), (4) Сельберга.

Естественно поставить вопрос: будет ли для величин $\Delta(n)$ справедлив аналог гипотезы Сельберга? Ответ на него оказывается утвердительным. Какова бы ни была положительная, монотонная и неограниченно возрастающая функция $\Phi(x)$, для “почти всех” n справедливы неравенства

$$\frac{\sqrt{\ln \ln n}}{\Phi(n)} < |\Delta(n)| < \Phi(n) \sqrt{\ln \ln n}. \quad (7)$$

В частности, $\Delta(n)$ “почти никогда” не обращается в нуль, т. е. точка t_n “почти никогда” не попадает на промежуток $[\gamma_n, \gamma_{n+1})$. Как отмечалось выше, отсюда следует и предположение Сельберга о том, что $\Delta_n \neq 0$ для почти всех n .

Поясним, наконец, техническую сторону работы. Для этого рассмотрим дискретную случайную величину δ , принимающую значения

$$\delta(n) = \frac{\Delta(n)}{\sqrt{\frac{1}{2\pi^2} \ln \ln N}}, \quad N < n \leq N + M, \quad 0 < M < \frac{1}{2}N.$$

Функция распределения $F(x)$ этой случайной величины выражает долю чисел ряда $N + 1, \dots, N + M$, отвечающих условию $\delta(n) \leq x$, или, что то же самое, условию $\Delta(n) \leq x \sqrt{\frac{1}{2\pi^2} \ln \ln N}$. Задавшись положительной функцией $\Phi(n)$ с указанными выше свойствами, несложно проверить, что число m номеров n , удовлетворяющих какому-либо из неравенств

$$|\Delta(n)| \geq \Phi(n) \sqrt{\ln \ln n}, \quad |\Delta(n)| \leq \frac{1}{\Phi(n)} \sqrt{\ln \ln n},$$

не превосходит суммарного числа решений неравенств

$$|\delta(n)| > \pi\sqrt{2}\Phi(N), \quad |\delta(n)| < \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Phi(N)},$$

которое, в свою очередь, равно сумме $m_1 + m_2$, где

$$m_1 = M(1 - F(\pi\sqrt{2}\Phi)) + MF(-\pi\sqrt{2}\Phi),$$

$$m_2 = M\left(F\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\Phi}\right) - F\left(-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\Phi}\right)\right), \quad \Phi = \Phi(N).$$

Одно из утверждений работы состоит в том, что распределение $F(x)$ оказывается весьма близким к гауссовскому распределению

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Отсюда и из легко проверяемых оценок

$$1 - G(\pi\sqrt{2}\Phi) + G(-\pi\sqrt{2}\Phi) \leq \frac{e^{-\pi^2\Phi^2}}{\pi\sqrt{\pi}\Phi}, \quad G\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\Phi}\right) - G\left(-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\Phi}\right) < \frac{4\sqrt{\pi}}{\Phi}$$

при $N \rightarrow +\infty$ будет следовать, что

$$m_1 = o(M), \quad m_2 = o(M), \quad m_1 + m_2 = o(M),$$

т. е. что неравенства (7) верны для почти всех n .

Приближенная формула для функции распределения $F(x)$ получается с помощью следующего приема, впервые примененного к изучению аргумента дзета-функции А. Гошем [8]. Пусть $f(t)$ – характеристическая функция искомого распределения, т. е.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dF(u) = M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} e^{it\delta(n)}.$$

Если разложить каждую из экспонент $e^{it\delta(n)}$ в ряд Тейлора, а суммирование по n сделать внутренним, то $f(t)$ представится (с некоторой ошибкой) конечной суммой

$$M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \sum_k \frac{(it)^k}{k!} \delta^k(n) = \sum_k \frac{(it)^k}{k!} M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \delta^k(n).$$

Опираясь на асимптотические формулы для величин

$$j_k(N, M) = M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \delta^k(n),$$

мы покажем, что представляющая $f(t)$ сумма весьма близка к ряду Тейлора функции $g(t) = e^{-t^2/2}$ – характеристической функции распределения $G(x)$. Имея оценку разности $|f(t) - g(t)|$, с помощью неравенства Берри–Эсеена можно оценить и отклонение искомой функции $F(x)$ от гауссова распределения.

Таким образом, доказательство гипотезы Сельберга в итоге сводится к вычислению сумм $j_k(N, M)$, или, что то же самое, сумм вида

$$J_k(N, M) = \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^k = \sum_{N < n \leq N+M} (S(t_n))^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Задачи, связанные с суммированием значений функций $S(t)$ и $Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\frac{1}{2} + it)$ в точках Грама и в ординатах нулей $\zeta(s)$, составляют предмет дискретной теории дзета-функции Римана. Исследованию этих задач (а также их обобщений в случае L -функций Дирихле) посвящены, в частности, работы [9]–[16]. Приведем здесь лишь один из результатов Фуджи, состоящий в том, что при неограниченном возрастании N и целом $k > 1$, растущем вместе с N , функция распределения дискретной случайной величины со значениями

$$\frac{\pi(S(t_{n+k}) - S(t_n))}{\sqrt{\ln k}} = \frac{\pi(N(t_{n+k}) - N(t_n) - k)}{\sqrt{\ln k}}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

имеет своим пределом гауссово распределение $G(x)$.

Величины $J_k(N, M)$ так же, как и суммы

$$I_k(N, M) = \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)|^k, \quad k > 0,$$

представляют собой дискретные аналоги интегралов

$$\int_T^{T+H} (S(t))^k dt, \quad \int_T^{T+H} |S(t)|^k dt, \quad (8)$$

которые называются *моментами функции* $S(t)$. Поэтому асимптотические выражения для таких сумм могут быть получены тем же методом, что и асимптотики соответствующих интегралов (см. [17], [18]). Их вывод основан на так называемой “явной формуле” Сельберга, которая позволяет в ходе вычислений заменять (с допустимой точностью) величину $S(t)$ суммой

$$\frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{p < y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} - \sum_{q < y} \frac{q^{-it}}{\sqrt{q}} \right),$$

распространенной на все простые числа из $(1, y]$, $y = y(t)$.

Вычисление сумм $I_k(N, M)$, $J_k(N, M)$ и их интегральных аналогов (8) опирается на так называемую *плотностную теорему* для нулей дзета-функции Римана, т. е. на нетривиальную оценку разности

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H), \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1,$$

которая выражает число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике

$$\sigma < \operatorname{Re} s \leq 1, \quad T-H < \operatorname{Im} s \leq T+H$$

(см., например, [17], [19], [20]). При этом как наименьшее значение H длины промежутка интегрирования в (8), так и минимальное число M слагаемых в суммах $I_k(N, M)$, $J_k(N, M)$ (т. е. наиболее интересные случаи) определяются “возможностями” плотностной теоремы и имеют один порядок:

$$M = [N^{27/82+\varepsilon}], \quad H = T^{27/82+\varepsilon}$$

для всех $N \geq N_0(\varepsilon)$, $T \geq T_0(\varepsilon)$ и

$$M = [N^\varepsilon], \quad H = T^\varepsilon$$

для “почти всех” $N \geq N_1(\varepsilon)$, $T \geq T_1(\varepsilon)$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Статья состоит из пяти параграфов. В § 1 приведены формулировки и доказательства вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных лемм и теорем. В § 2 получены оценки сверху для дискретных аналогов интегралов специального вида, т. е. для сумм

$$\sum_{N < n \leq N+M} \left| \sum_{p \leq y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it_n} \right|^{2m}$$

и им подобных. При этом мы существенно пользуемся результатами, полученными в [7, гл. II, § 2, 3], не приводя в ряде случаев некоторые этапы выкладки. В § 3 и § 4 представлен вывод асимптотических формул и верхних границ сумм $I_k(N, M)$ и $J_k(N, M)$ для случая целых и дробных значений k . Наконец, § 5 посвящен доказательству гипотезы Сельберга.

Всюду в работе ε обозначает сколь угодно малое фиксированное положительное число, не превосходящее 10^{-3} ; $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots$ – комплексные числа, модуль которых не превосходит единицы, в разных соотношениях, вообще говоря, разные; $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта, равная $\ln p$ для $n = p^k$, где $k = 1, 2, \dots$, а p – простое число, и равная нулю в остальных случаях; через $\text{mes } E$ обозначена мера Лебега множества E , через $\{x\}$ – дробная доля числа x .

§ 1. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. Пусть $l \geq 2$ – целое число. Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{1 \leq k < l} \frac{1}{k} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} < 4 \ln l, \quad \sum_{1 \leq k < l} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} < 4\sqrt{l} \ln l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь при $l > k$ очевидным неравенством

$$\ln \frac{l}{k} = -\ln \left(1 - \frac{l-k}{l} \right) > \frac{l-k}{l},$$

находим

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k < l} \frac{1}{k} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} &< \sum_{1 \leq k < l} \frac{l}{k(l-k)} = 2 \sum_{1 \leq k < l} \frac{1}{k} \\ &< 2 \sum_{1 \leq k < l} (\ln(2k+1) - \ln(2k-1)) = 2 \ln(2l-1) < 4 \ln l. \end{aligned}$$

Для второй суммы, соответственно, получаем

$$\sum_{1 \leq k < l} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} = \sum_{1 \leq k < l} \frac{\sqrt{k}}{k} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} < \sqrt{l} \sum_{1 \leq k < l} \frac{1}{k} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} < 4\sqrt{l} \ln l.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $V(t)$ – комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\tau_0, \tau_k]$ функция, $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k$. Тогда, полагая

$$\delta = \min_{0 \leq r < k} (\tau_{r+1} - \tau_r),$$

будем иметь

$$\sum_{r=1}^k |V(\tau_r)|^2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{\tau_0}^{\tau_k} |V(t)|^2 dt + 2 \left(\int_{\tau_0}^{\tau_k} |V(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_k} |V'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [21, с. 122, 123].

ЛЕММА 3 (ван дер Корпут). Пусть $f(x)$ в интервале $M < x < M'$ – вещественная дифференцируемая функция, причем внутри интервала ее производная $f'(x)$ монотонна и знакопостоянна и при постоянном δ с условием $0 < \delta < 1$ удовлетворяет неравенству $|f'(x)| \leq \delta$. Тогда имеем

$$\sum_{M < x \leq M'} e^{2\pi i f(x)} = \int_M^{M'} e^{2\pi i f(x)} dx + \theta \left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [22, с. 25–27].

Пусть $n \geq 2$ – целое число, $z \geq 2$, и пусть

$$\Lambda_z(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{если } 1 \leq n \leq z, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n) - 2\ln^2(z^2/n)}{2\ln^2 z}, & \text{если } z < n \leq z^2, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n)}{2\ln^2 z}, & \text{если } z^2 < n \leq z^3. \end{cases}$$

Пусть, далее, $2 \leq z \leq t^2$. Следуя обозначениям, введенным А. Сельбергом, положим

$$\sigma_{z,t} = 0.5 + 2 \max(|\beta - 0.5|, \ln^{-1} z),$$

где максимум берется по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, удовлетворяющим условию

$$|t - \gamma| \leq \frac{z^{3|\beta-0.5|}}{\ln z}.$$

ЛЕММА 4 (“явная формула” Сельберга). Пусть $e^{16} < z \leq t^2$. Тогда

$$S(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} + 15\theta(\sigma_{z,t} - 0.5)(|r(z, t)| + \ln |t|),$$

где

$$r(z, t) = \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t} + it}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [17].

ЛЕММА 5. Пусть $m \geq 1$, $y > e^3$, $\tau > 0$, и пусть $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ принимают значения простых чисел из промежутка $(1, y]$ и удовлетворяют условию $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m$; пусть, далее, $a(n)$ – произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда для суммы

$$\Sigma = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m \\ q_1, \dots, q_m}} \frac{a(p_1) \cdots a(p_m) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_m)}{(p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_m)^\tau}$$

справедлива формула

$$\Sigma = m! \Sigma_1^m + \theta m^2 m! \Sigma_1^{m-2} \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_j = \sum_{p \leq y} \left(\frac{|a(p)|}{p^\tau} \right)^{2j}, \quad j = 1, 2,$$

причем $|\theta| \leq 1$ при $m > 1$ и $\theta = 0$ при $m = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [7], [18].

§ 2. Основные утверждения

ЛЕММА 6. Пусть $0 < \kappa < \frac{1}{2}$, $0 < c < \frac{1}{2} - \kappa$, k, r, ν, N, M – целые числа, $k \geq 0$, $r \geq 0$, $k + r = \nu$, $\nu \geq 1$, $N \geq \exp \{9\kappa^{-1}\}$, $M \geq \exp \{1.5\nu c^{-1}\}$, $M \leq N$, $y = M^{2c/\nu}$. Пусть, далее, $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r$ принимают значения простых чисел из промежутка $(1, y]$ и удовлетворяют условию $p_1 \cdots p_k \neq q_1 \cdots q_r$. Пусть, наконец, все члены последовательности $a(p)$ при $p \leq y$ подчинены условию $|a(p)| \leq \delta$. Если t_n – последовательность Грама, то для суммы

$$S = \sum_{N < n \leq N+M} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ q_1, \dots, q_r}} \frac{a(p_1) \cdots a(p_k) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_r)}{(p_1 \cdots q_r)^{1/2}} \left(\frac{q_1 \cdots q_r}{p_1 \cdots p_k} \right)^{it_n}$$

имеет место оценка $|S| < (\delta y^{3/2})^\nu \ln N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем суммирование по n внутренним и обозначим через S_1 максимум модулей внутренних сумм, взятый по всем допустимым наборам $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r$; получим

$$|S| \leq \delta^\nu S_1 \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ q_1, \dots, q_r}} (p_1 \cdots q_r)^{-1/2} \leq \delta^\nu S_1 \left(\sum_{p \leq y} \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^\nu < \delta^\nu S_1 \left(\frac{3\sqrt{y}}{\ln y} \right)^\nu < (\delta \sqrt{y})^\nu S_1.$$

Пусть $a > 1$ – та из дробей $\frac{q_1 \cdots q_r}{p_1 \cdots p_k}$, при которой достигается наибольшее значение S_1 . Тогда

$$S_1 = \left| \sum_{N < n \leq N+M} e^{2\pi i f(n)} \right|, \quad f(x) = \frac{\ln a}{2\pi} t_x,$$

где через t_x обозначено единственное при $x \geq 1$ решение уравнения $\vartheta(t_x) = \pi \cdot (x - 1)$. Дифференцируя последнее равенство по x и замечая, что

$$t_x = \frac{2\pi x}{\ln x} (1 + o(1)),$$

при $N \leq x \leq N + M$ находим

$$\begin{aligned} t'_x &= \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)} = \frac{\pi}{\frac{1}{2} \ln \frac{t_x}{2\pi} + \Delta'(t_x)} = \frac{2\pi}{\ln x} (1 + o(1)), \\ |f'(x)| &= \frac{\ln a}{2\pi} t'_x = \frac{\ln a}{\ln x} (1 + o(1)) \leq \frac{\ln y^\nu}{\ln x} (1 + o(1)) \leq 2c \frac{\ln M}{\ln N} (1 + o(1)) \\ &\leq (1 - 2\kappa)(1 + o(1)) < 1 - \kappa. \end{aligned}$$

Отсюда согласно лемме 3 следует неравенство

$$S_1 \leq |j| + 3 + 2\kappa^{-1}(1 - \kappa) \leq |j| + 3\kappa^{-1},$$

где

$$j = \int_N^{N+M} e^{2\pi i f(x)} dx.$$

Теперь интегрируя по частям и пользуясь монотонностью функции $1/f'(x)$, получим

$$\begin{aligned} |j| &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{2\pi i f(N+M)}}{f'(N+M)} - \frac{e^{2\pi i f(N)}}{f'(N)} - \int_N^{N+M} e^{2\pi i f(x)} d \frac{1}{f'(x)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{f'(N+M)} + \frac{1}{f'(N)} + \frac{1}{f'(N+M)} - \frac{1}{f'(N)} \right) = \frac{1}{\pi f'(N+M)} \\ &= \frac{\ln(N+M)}{\pi \ln a} (1 + o(1)) \leq \frac{\ln N}{3 \ln a}. \end{aligned}$$

Наконец, замечая, что

$$\ln a \geq \ln \frac{p_1 \cdots p_k + 1}{p_1 \cdots p_k} \geq \frac{1}{2} (p_1 \cdots p_k)^{-1} \geq \frac{1}{2} y^{-k} \geq \frac{1}{2} y^{-\nu},$$

получаем неравенства

$$|j| \leq \frac{2}{3} y^\nu \ln N, \quad S_1 < \frac{2}{3} y^\nu \ln N + 3\kappa^{-1} < y^\nu \ln N, \quad |S| < (\delta y^{3/2})^\nu \ln N.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $B > 0$, $0 < c \leq \frac{1}{2}$, M, N – целые числа, $N \geq N_0(\varepsilon)$, $N^\varepsilon \leq M \leq \sqrt[3]{N}$, $M \geq \exp\{e^2 c^{-1}\}$, m – целое число, $1 \leq m \leq c e^{-2} \ln M$, $y = M^{c/m}$. Пусть, далее, p принимает значения простых чисел из промежутка $(1, y]$, а последовательность $a_1(p)$ подчинена при $p \leq y$ условию $|a_1(p)| \leq B \frac{\ln p}{\ln y}$. Тогда для суммы

$$S_1 = \sum_{N < n \leq N+M} \left| \sum_{p \leq y} \frac{a_1(p)}{\sqrt{p}} p^{it_n} \right|^{2m}$$

справедлива оценка $S_1 \leq 3.2(2B^2 m)^m M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $b(k)$ как сумму величин $a_1(p_1) \cdots a_1(p_m)$, распространенную на все представления целого k в виде произведения $p_1 \cdots p_m$ простых чисел, не превосходящих y . Тогда исходная сумма примет вид

$$\sum_{N < n \leq N+M} |V(t_n)|^2, \quad \text{где} \quad V(t) = \sum_{1 \leq k \leq Y} \frac{b(k)}{\sqrt{k}} k^{it}, \quad Y = y^m = M^c.$$

Из леммы 2 следует, что верхняя граница S_1 не превосходит величины

$$\delta^{-1} j_1 + 2\sqrt{j_1} \sqrt{j_2},$$

в которой через j_1 и j_2 обозначены интегралы от функций $|V(t)|^2$ и $|V'(t)|^2$ на отрезке $T \leq t \leq T+H$, $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$, а δ взято равным наименьшей из разностей $t_{r+1} - t_r$, $r = N, N+1, \dots, N+M-1$, т.е. $t_{N+M} - t_{N+M-1}$. Преобразуя первый из интегралов, получим

$$\begin{aligned} j_1 &= H \Sigma_1 - 2 \operatorname{Im} \Sigma_2, \\ \Sigma_1 &= \sum_{k \leq Y} \frac{|b(k)|^2}{k}, \quad \Sigma_2 = \sum_{1 < l \leq Y} \sum_{1 \leq k \leq l-1} \frac{b(k) \bar{b}(l)}{\sqrt{kl}} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} ((kl^{-1})^{i(T+H)} - (kl^{-1})^{iT}). \end{aligned}$$

Из определения $b(k)$ следует, что

$$|b(k)| \leq \sum_{p_1 \cdots p_m = k} \frac{B \ln p_1}{\ln y} \cdots \frac{B \ln p_m}{\ln y} \leq B^m m! \leq (Bm)^m.$$

Учитывая эту оценку, с помощью леммы 1 находим

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq (Bm)^m \sum_{k \leq Y} \frac{|b(k)|}{k} \leq (Bm)^m \left(\sum_{p \leq y} \frac{|a_1(p)|}{p} \right)^m \\ &\leq (Bm)^m \left(\frac{B}{\ln y} \sum_{p \leq y} \frac{\ln p}{p} \right)^m \leq (2B^2 m)^m, \\ |\Sigma_2| &\leq 2(Bm)^m \sum_{1 < l \leq Y} \frac{|b(l)|}{\sqrt{l}} \sum_{1 \leq k \leq l-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\ln \frac{l}{k}} < 2(Bm)^m \sum_{1 < l \leq Y} \frac{|b(l)|}{\sqrt{l}} 4\sqrt{l} \ln l \\ &\leq 8(Bm)^m m \ln y \left(\sum_{p \leq y} |a_1(p)| \right)^m \leq 8m(Bm)^m \ln y \left(\frac{B}{\ln y} \sum_{p \leq y} \ln p \right)^m \\ &\leq 8(B^2 m)^m \frac{m}{(\ln y)^{m-1}} (2y)^m. \end{aligned}$$

Из условия леммы следуют неравенства

$$\begin{aligned} \ln y &\geq \frac{c \ln M}{ce^{-2} \ln M} = e^2, \\ Y = y^m = M^c &\leq \sqrt{M} < \sqrt{\frac{1}{6} H \ln N} \leq \sqrt{\frac{1}{6} \cdot 2\varepsilon^{-1} H \ln H} < \sqrt{H} \ln H, \end{aligned}$$

которые приводят к оценке

$$|\Sigma_2| \leq 8(2B^2 m) \frac{m}{e^{2(m-1)}} \sqrt{H} \ln H \leq 8(2B^2 m)^m \sqrt{H} \ln H.$$

Таким образом, при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ оценку сверху для j_1 запишем в виде

$$j_1 \leq (2B^2 m)^m H + 16(2B^2 m)^m \sqrt{H} \ln H < U, \quad (9)$$

где $U = (1 + \varepsilon_1)(2B^2 m)^m H$.

Интеграл j_2 представляется в виде $H\Sigma'_1 - 2\operatorname{Im} \Sigma'_2$, где суммы Σ'_1 и Σ'_2 получаются из выражений для Σ_1 и Σ_2 заменой в них множителей $b(k)$ и $b(l)$ на $b(k) \ln k$ и $b(l) \ln l$ соответственно. Следовательно, оценка сверху интеграла j_2 отличается от оценки (9) множителем $(\ln Y)^2 = (m \ln y)^2 = (c \ln M)^2$:

$$j_2 < U(\ln Y)^2 \leq U(c \ln M)^2 \leq U \left(\frac{1}{2} \ln M \right)^2 \leq U \left(\frac{1}{6} \ln N \right)^2.$$

Возвращаясь теперь к оценке суммы S_1 и замечая, что при возрастании N

$$\delta = t_{M+N} - t_{M+N-1} > \frac{2\pi}{\ln N} (1 + \varepsilon_1)^{-1},$$

находим

$$S_1 < \left((1 + \varepsilon_1)(2\pi)^{-1} \ln N + 2 \cdot \frac{1}{6} \ln N \right) U < \frac{1}{2} (2B^2 m)^m H \ln N < \frac{16}{5} (2B^2 m)^m M.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть при тех же ограничениях на s , M , N , m , y , p , что и в лемме 7, последовательность $a_2(p)$ удовлетворяет условию $|a_2(p)| \leq B$. Тогда для суммы

$$S_2 = \sum_{N < n \leq N+M} \left| \sum_{p \leq y} \frac{a_2(p)}{p} p^{2it_n} \right|^{2m}$$

справедливо неравенство $S_2 \leq (2B^2m)^m M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определяя по аналогии с $b(k)$ числа $c(k)$ и полагая, как и выше, $Y = y^m$, находим

$$|c(k)| \leq B^m m! \leq (Bm)^m, \quad S_2 \leq \delta^{-1} j_1 + 2\sqrt{j_1} \sqrt{j_2}, \quad j_1 = H\Sigma_1 - \text{Im } \Sigma_2,$$

$$\Sigma_1 = \sum_{k \leq Y} \frac{|c(k)|^2}{k^2} \leq (Bm)^m \left(\sum_{p \leq y} \frac{|a_2(p)|}{p^2} \right)^m < (0.6B^2m)^m,$$

$$\begin{aligned} |\Sigma_2| &\leq 2(Bm)^m \sum_{1 < l \leq Y} \frac{|c(l)|}{l} \sum_{1 \leq k < l} \frac{1}{k \ln \frac{l}{k}} < 8(Bm)^m \sum_{1 < l \leq Y} \frac{|c(l)|}{l} \ln l \\ &\leq 8(Bm)^m (c \ln M) \left(\sum_{p \leq y} \frac{|a_2(p)|}{p} \right)^m \leq 4(2B^2m)^m (\ln M) (\ln \ln y)^m. \end{aligned}$$

Определим величину λ из равенства $m = \frac{c}{e^2 \lambda} \ln M$. Из условия леммы следует, что, во-первых, $\lambda \geq 1$ и, во-вторых, $\ln y = cm^{-1} \ln M = e^2 \lambda$. Пользуясь далее тем, что максимум функции $x^{-1} \ln \ln x$ при $x \geq e^2$ не превосходит $\frac{1}{10}$, заключаем, что

$$(\ln \ln y)^m = \exp \left\{ \frac{c}{e^2 \lambda} \ln M \ln \ln(e^2 \lambda) \right\} \leq \exp \left\{ \frac{c}{10} \ln M \right\} \leq M^{0.1}$$

и, следовательно, $|\Sigma_2| < 2(2B^2m)^m M^{0.1} \ln M$. Таким образом, при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ оценки сверху величин j_1 , j_2 , S_2 можно записать в виде

$$\begin{aligned} j_1 &< (0.6B^2m)^m H + 4(2B^2m)^m M^{0.1} \ln M \\ &\leq (2B^2m)^m ((0.3)^m H + 4M^{0.1} \ln M) \leq (0.3 + \varepsilon_1)(2B^2m)^m H, \\ j_2 &< (0.3 + \varepsilon_1)(2B^2m)^m H (c \ln N)^2, \\ S_2 &\leq (\delta^{-1} + 2c \ln M)(0.3 + \varepsilon_1)(2B^2m)^m H \\ &< \left((1 + \varepsilon_1)(2\pi)^{-1} \ln N + \frac{1}{3} \ln N \right) (0.3 + \varepsilon_1)(2B^2m)^m H \\ &< 0.16(2B^2m)^m H \ln N < (2B^2m)^m M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В задачах, связанных с $S(t)$, основную роль играют плотностные теоремы вида

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leq cH(\ln T)x^{-(2\sigma-1)}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \quad (10)$$

где σ — произвольное число с условием $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, $H = T^\alpha$, $x = T^\beta$, α , β , c — некоторые постоянные, $0 < \beta < \alpha \leq 1$, $c > 0$. Приведем несколько вариантов оценки (10), необходимых для дальнейшего.

ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА КАРАЦУБЫ [7], [19]. Неравенство (10) справедливо при любом σ с условием $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ для всех $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ при $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $x = T^{0.1\varepsilon}$ и $c = 13$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть N – целое число, $M = [N^{27/82+\varepsilon}]$. Тогда неравенство (10) справедливо для всех $N \geq N_0(\varepsilon) > 1$ при $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$, $x = T^{0.1\varepsilon}$ и $c = 13$.

ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА (“для почти всех T ” [7], [20]). Пусть $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^\varepsilon$, $x = H^{0.05}$, $c = 13$. Тогда неравенство (10) справедливо при любом σ с условием $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ для всех T из $(X, 2X]$, за исключением значений, образующих некоторое множество $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ с мерой $\text{mes } \mathcal{E} = O(X^{1-0.01\varepsilon})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть K – целое число, $K \geq K_0(\varepsilon) > 1$, и пусть $M = [K^\varepsilon]$, $x = M^{0.05}$, $c = 13$. Тогда неравенство (10) справедливо при любом σ с условием $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ для всех N , $K < N \leq 2K$, $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$, за исключением $O(K^{1-0.01\varepsilon})$ значений.

Везде далее, в этом и последующих параграфах, будем предполагать, что числа N , M , T и H удовлетворяют условиям одной из двух приведенных плотностных теорем (или их следствий). Таким образом, все утверждения, доказываемые ниже, справедливы:

- 1) для всех $N \geq N_0(\varepsilon) > 1$ при $M = [N^{27/82+\varepsilon}]$;
- 2) для всех N из произвольного промежутка $K < N \leq 2K$, $K \geq K_0(\varepsilon) > 1$, за исключением $O(K^{1-0.01\varepsilon})$ значений, при $M = [K^\varepsilon]$.

Условимся везде далее при формулировках и доказательствах утверждений статьи для краткости вместо σ_{z,t_n} использовать обозначение $\sigma_z(n)$. Также отметим, что именно при доказательстве следующей леммы используется плотностная теорема для нулей дзета-функции Римана.

ЛЕММА 9. Пусть m, ν – целые числа, $m \geq 1$, $0 \leq \nu \leq 8m$, $z \geq 2$, $1 \leq \xi \leq z^{4m}$, $z^3 \xi^2 \leq x$, и пусть

$$V = \sum_{N < n \leq N+M} (\sigma_z(n) - 0.5)^\nu \xi^{\sigma_z(n)-0.5}.$$

Тогда имеет место оценка

$$V < M \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + \frac{\nu!}{18} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^\nu \frac{\ln N}{\ln z} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все числа n , $N < n \leq N + M$, разобьем на два класса, относя к первому классу те из них, для которых любой нуль $\beta + i\gamma$ с условием

$$|t_n - \gamma| \leq \frac{z^{3|\beta-0.5|}}{\ln z}$$

удовлетворяет также и неравенству $|\beta - 0.5| \leq \ln^{-1} z$; все остальные числа n отнесем ко второму классу. Тогда сумма V_1 , распространенная на все n из первого класса, не превзойдет величины

$$\left(\frac{2}{\ln z} \right)^\nu \xi^{2/\ln z} M \leq \frac{(2e)^{8m} M}{(\ln z)^\nu}.$$

Далее, для любой точки t_n , отвечающей значению n из второго класса, найдется нуль $\beta_0 + i\gamma_0$ с условием

$$\gamma_0 - \delta_0 \leq t_n \leq \gamma_0 + \delta_0, \quad \delta_0 = \frac{z^{3|\beta_0-0.5|}}{\ln z},$$

такой, что $|\beta_0 - 0.5| > \ln^{-1} z$. Следовательно, все такие точки Грама t_n будут покрыты, если каждую из ординат γ промежутка $(T - \sqrt{x}, T + H + \sqrt{x}]$, $T = t_N$, $H = t_{M+N} - t_N$, окружить окрестностью $(\gamma - \delta, \gamma + \delta)$, где $\delta = z^{3|\beta-0.5|} \ln^{-1} z$ (для любого из рассматриваемых нулей $\beta + i\gamma$, очевидно, имеем $\delta \leq z^{1.5} \ln^{-1} z \leq \sqrt{x}$). Оценивая сумму V_2 , взятую по всем n из второго класса, получим

$$V_2 \leq 2 \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} \sum_{\gamma-\delta \leq t_n \leq \gamma+\delta} 2^\nu (\beta - 0.5)^\nu \xi^{2(\beta-0.5)}.$$

Пусть $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+r}$ – все точки Грама, попавшие на отрезок $[\gamma - \delta, \gamma + \delta]$. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа при некотором η , $\gamma - \delta < \eta < \gamma + \delta$, имеем

$$\begin{aligned} r &= \pi^{-1}(\vartheta(t_{k+r}) - \vartheta(t_{k+1})) + 1 = \pi^{-1}(t_{k+r} - t_{k+1})\vartheta'(\eta) + 1 \\ &\leq 2\pi^{-1}\delta \left(\frac{1}{2} \ln \frac{t_{N+M}}{2\pi} + O(t_{N+M}^{-1}) \right) + 1 < \frac{1}{3} \delta \ln N + 1. \end{aligned}$$

Из условия $x \leq N^\varepsilon$ получаем неравенства $z \leq \sqrt[3]{x} \leq N^{\varepsilon/3}$, $\frac{\ln N}{\ln z} \geq 3\varepsilon^{-1} > 6$. Следовательно,

$$r < \frac{1}{3} \delta \ln N + \frac{1}{6} \delta \ln N = \frac{1}{2} \delta \ln N = \frac{1}{2} z^{3(\beta-0.5)} \frac{\ln N}{\ln z}.$$

Возвращаясь к оценке V_2 , находим

$$V_2 < 2^\nu \frac{\ln N}{\ln z} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} (\beta - 0.5)^\nu (\xi^2 z^3)^{\beta-0.5}.$$

Пользуясь тем, что $\xi^2 z^3 \leq x$, а также тождеством

$$(\beta - 0.5)^\nu x^{\beta-0.5} = \int_0^{\beta-0.5} (u^\nu \ln x + \nu u^{\nu-1}) x^u du,$$

преобразуем сумму по γ следующим образом:

$$\begin{aligned} V_2 &< 2^\nu \frac{\ln N}{\ln z} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} \int_0^{\beta-0.5} (u^\nu \ln x + \nu u^{\nu-1}) x^u du \\ &= 2^\nu \frac{\ln N}{\ln z} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} \int_0^{0.5} g(\beta + i\gamma; u) (u^\nu \ln x + \nu u^{\nu-1}) x^u du, \end{aligned}$$

где функция $g(\beta + i\gamma; u)$ равна единице для $0 \leq u \leq \beta - 0.5$ и равна нулю в противном случае. Поменяем в последнем выражении порядок суммирования и

интегрирования. Тогда сумма значений $g(\beta + i\gamma; u)$, взятая по всем ординатам γ из промежутка $(T - \sqrt{x}, T + H + \sqrt{x}]$, равна разности

$$N\left(\frac{1}{2} + u, T + H + \sqrt{x}\right) - N\left(\frac{1}{2} + u, T - \sqrt{x}\right),$$

которая, в свою очередь, не превосходит суммы

$$\begin{aligned} & \left(N\left(\frac{1}{2} + u, T + H\right) - N\left(\frac{1}{2} + u, T\right) \right) + (N(T + H + \sqrt{x}) - N(T + H)) \\ & + (N(T) - N(T - \sqrt{x})). \end{aligned}$$

Из сформулированных выше плотностных теорем и формулы Римана–Мангольда для $N(T)$ следует, что первое слагаемое ограничено величиной

$$13H(\ln T)x^{-2u} < 13 \cdot 2\pi(1 + o(1))Mx^{-2u} < 81.7Mx^{-2u},$$

а сумма второго и третьего – величиной

$$\pi^{-1}\sqrt{x}(\ln T + O(1)) < 0.3Mx^{-2u}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\begin{aligned} V_2 & < 2^\nu \frac{\ln N}{\ln z} 82M \int_0^{0.5} (u^\nu \ln x + \nu u^{\nu-1}) x^u x^{-2u} du \\ & = 2^\nu \frac{\ln N}{\ln z} \frac{82M}{(\ln x)^\nu} \int_0^{0.5 \ln x} (u^\nu + \nu u^{\nu-1}) e^{-u} du < 164\nu! 2^\nu \frac{\ln N}{\ln z} \frac{M}{(\ln x)^\nu}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке исходной суммы, находим

$$\begin{aligned} V & = V_1 + V_2 \leq \frac{(2e)^{8m} M}{(\ln z)^\nu} + 164\nu! 2^\nu \frac{M}{(\ln x)^\nu} \frac{\ln N}{\ln z} \\ & < M \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + \frac{\nu!}{18} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^\nu \frac{\ln N}{\ln z} \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть m – целое число, $1 \leq m < \frac{1}{192} \ln x$, $x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}$. Тогда имеет место оценка

$$R_{2m} = \sum_{N < n \leq N+M} \left(S(t_n) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t_n \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} < \frac{1}{20} (Am^2)^m M,$$

где $A = e^{34} \varepsilon^{-3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, полагая $z = x^{1/(12m)}$, убеждаемся в том, что

$$z > \exp\left(\frac{\ln x}{12} \frac{192}{\ln x}\right) = e^{16}.$$

При таких z и произвольном t с условием $t^2 > z$, как показано в [7, гл. II, § 2], имеет место следующее неравенство:

$$\left| \pi S(t) + \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right| \leq \sum_{j=1}^7 r_j, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 48(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln N, & r_2 &= \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} (1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \\
 r_3 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^3} \Lambda_z(p) (1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \\
 r_4 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^{1.5}} \Lambda_z(p) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, & r_5 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} \frac{p^{2it}}{p} \right|, \\
 r_6 &= \left| \sum_{p < z^3} \left(1 - \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} \right) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, & r_7 &= \left| \sum_{z^3 \leq p < y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|.
 \end{aligned}$$

Положим $t = t_n$ в (11) и возведем обе части получившегося неравенства в степень $2m$. Суммируя по n и применяя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\pi^{2m} R_{2m} \leq 7^{2m-1} \sum_{j=1}^7 W_j, \quad W_j = \sum_{N < n \leq N+M} r_j^{2m}(t_n).$$

Оценим каждую из сумм W_j по отдельности.

Сначала оценим W_1 . Полагая $\nu = 2m$, $\xi = 1$ в лемме 9 и замечая, что $z^3 \xi^2 \leq \sqrt[4]{x} \leq x$, получим

$$\begin{aligned}
 W_1 &< 48^{2m} (\ln N)^{2m} \sum_{N < n \leq N+M} (\sigma_z(n) - 0.5)^{2m} \\
 &< 48^{2m} (\ln N)^{2m} \frac{(2e)^{8m} M}{(\ln z)^{2m}} \left(1 + \frac{(2m)!}{18} \left(\frac{\ln z}{\ln N} \right)^{2m} \frac{\ln N}{\ln z} \right).
 \end{aligned}$$

Пользуясь оценками $(2m)! < 4\sqrt{m} \left(\frac{2m}{e} \right)^{2m}$ и $x \geq t_N^{\varepsilon/20} > N^{\varepsilon/21}$, заключаем, что второе слагаемое в скобках не превосходит

$$\frac{4\sqrt{m}}{18} \left(\frac{2m}{e} \right)^{2m} \frac{252m\varepsilon^{-1}}{(12m)^{2m}} = \frac{56m^{3/2}}{(6e)^{2m}} \varepsilon^{-1} < (4\varepsilon)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 W_1 &< (48 \cdot 16e^4)^{2m} \left(\frac{\ln N}{\ln z} \right)^{2m} M(1 + (4\varepsilon)^{-1}) < \frac{1}{3} \varepsilon^{-1} M(3 \cdot 2^8 e^4 \cdot 252m\varepsilon^{-1})^{2m} \\
 &< \frac{1}{3} \varepsilon^{-(2m+1)} (e^{16.18} m)^{2m} M.
 \end{aligned}$$

Оценим W_2 и W_3 . Придавая параметру k значения 0 и 1, каждую из этих сумм запишем в виде

$$U_k = (15\pi)^{2mk} \sum_{N < n \leq N+M} (\sigma_z(n) - 0.5)^{2mk} V_k^{2m}(t_n),$$

где

$$V_k(t) = \left| \sum_{p < z^3} \Lambda_z(p) (\ln p)^k \frac{1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}}{\sqrt{p} \ln p} p^{it} \right|.$$

Воспользовавшись результатами статей [7], [17], заключаем, что

$$U_k \leq (15\pi)^{2mk} \sqrt{U'} \sqrt{U''},$$

где

$$\begin{aligned} U' &= \sum_{N < n \leq N+M} (\sigma_z(n) - 0.5)^{4m(k+1)} z^{4m(\sigma_z(n) - 0.5)}, \\ U'' &= (\ln z)^{4m(k+1)+1} \int_0^\infty z^{-u} \sum_{N < n \leq N+M} \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it_n} \right|^{4m} du, \\ a(p) &= \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^k \ln(pz)}{(\ln z)^{k+2} p^u}. \end{aligned}$$

Полагая $\nu = 4m(k+1)$, $\xi = z^{4m}$ в лемме 9 и замечая, что $z^3 \xi^2 = z^{8m+3} \leq z^{11m} \leq x^{11/12} < x$, находим

$$\begin{aligned} U' &< \frac{(2e)^{8m} M}{(\ln z)^{4m(k+1)}} \left(1 + \frac{(4m(k+1))!}{18} \frac{12m}{(12m)^{4m(k+1)}} \frac{\ln N}{\ln x} \right) \\ &< \frac{(2e)^{8m} M}{(\ln z)^{4m(k+1)}} (1 + (30\varepsilon)^{-1}) < (10\varepsilon)^{-1} M \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{4m(k+1)}}. \end{aligned}$$

Далее, убедимся в том, что сумма, стоящая под знаком интеграла в выражении для U'' , удовлетворяет условиям леммы 7. Действительно, положив в ней

$$y = z^3 = x^{1/(4m)}, \quad c = \frac{\ln x}{2 \ln M},$$

получим

$$\begin{aligned} 0 < c < \frac{1}{2}, \quad M > \exp(8e^2 \varepsilon^{-1}) > \exp(e^2 c^{-1}), \\ ce^{-2} \ln M &= \frac{1}{2e^2} \ln x > \frac{1}{96} \ln x > 2m. \end{aligned}$$

Замечая, что $|a(p)| < 4 \cdot 3^{k+1} \frac{\ln p}{\ln y}$, находим

$$U'' < (\ln z)^{4m(k+1)} \cdot 3.2(2^6 \cdot 3^{2(k+1)} m)^{2m} M.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} U_k &\leq (15\pi)^{2mk} \left(\frac{3.2}{10} \varepsilon^{-1} (2^4 e^4 \cdot 2^6 \cdot 3^{2(k+1)} m)^{2m} M^2 \right)^{1/2} \\ &< \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} (2^{10} \cdot 3^{2(k+1)} (15\pi)^{2k} m)^m m^m, \end{aligned}$$

откуда при $k = 0$ и $k = 1$ соответственно получаем

$$W_2 < \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{13.2} m)^m, \quad W_3 < \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{23.1} m)^m.$$

Оценим W_4 . Применяя к этой сумме неравенство Коши, получим

$$W_4 \leq (15\pi)^{2m} \sqrt{U'} \sqrt{U''},$$

где

$$U' = \sum_{N < n \leq N+M} (\sigma_z(n) - 0.5)^{4m}, \quad U'' = \sum_{N < n \leq N+M} \left| \sum_{p < z^{1.5}} \Lambda_z(p) \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^{4m}.$$

Условия леммы 9 будут выполнены, если положить в ней $\xi = 1$, $z = x^{1/(12m)}$, $\nu = 4m$. Следовательно,

$$\begin{aligned} U' &< M \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{4m}} \left(1 + \frac{(4m)!}{18} \frac{1}{(12m)^{4m-1}} \frac{\ln N}{\ln z} \right) < (1 + (50\varepsilon)^{-1}) M \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{4m}} \\ &< (10\varepsilon)^{-1} \frac{(2e)^{8m} M}{(\ln z)^{4m}}. \end{aligned}$$

Полагая теперь $a(p) = \Lambda_z(p) \ln^{-1} z$, $y = z^{1.5}$ в лемме 7 и определяя c из соотношения $z^{1.5} = M^{c/(2m)}$, получим

$$|a(p)| \leq \frac{3 \ln p}{2 \ln y}, \quad c = \frac{\ln x}{4 \ln M} \leq \frac{1}{4}, \quad ce^{-2} \ln M = \frac{1}{4e^2} \ln x > \frac{1}{96} \ln x > 2m,$$

следовательно,

$$U'' \leq (\ln z)^{4m} \cdot 3.2M \left(2 \cdot \frac{9}{4} \cdot 2m \right)^{2m}.$$

Таким образом,

$$W_4 \leq (15\pi)^{2m} \left(\frac{3.2}{10} (2^4 e^4 \cdot 3^2 m)^{2m} \varepsilon^{-1} M^2 \right)^{1/2} < \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{16.7} m)^m.$$

Оценим W_5 . Полагая в лемме 8

$$a(p) = \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} \leq 1, \quad y = z^{1.5}, \quad c = \frac{\ln x}{8 \ln M} < \frac{1}{2},$$

находим $ce^{-2} \ln M = \frac{1}{2e^2} \ln x > \frac{1}{192} \ln x > m$, так что

$$W_5 \leq 2^{-2m} (2m)^m M < m^m M.$$

Оценим W_6 и W_7 . Положим в первом случае

$$a(p) = 1 - \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p}, \quad y = z^3, \quad c = \frac{\ln x}{4 \ln M}.$$

Убедившись в справедливости неравенств

$$|a(p)| \leq 3 \frac{\ln p}{\ln y}, \quad ce^{-2} \ln M = \frac{1}{4e^2} \ln x > \frac{1}{192} \ln x > m, \quad 0 < c \leq \frac{1}{4},$$

при помощи леммы 7 получаем оценку

$$W_6 \leq 3.2(2 \cdot 3^2 m)^m M < 3.2(e^{2.9} m)^m M.$$

Наконец, взяв во втором случае $a(p) = 0$ при $p \leq z^3$ и $a(p) = 1 = \frac{\ln p}{\ln y} \frac{\ln y}{\ln p}$ при $z^3 < p < y$ и заметив, что

$$|a(p)| \leq 4 \frac{\ln p}{\ln y},$$

при $c = \frac{m \ln y}{\ln M}$ имеем

$$c \leq \frac{\ln x}{\ln M} \leq \frac{\ln N^{\varepsilon/10}}{\ln N^{\varepsilon}} = \frac{1}{10}, \quad ce^{-2} \ln M = me^{-2} \ln y \geq \frac{1}{4e^2} \ln x > \frac{1}{192} \ln x > m, \\ W_7 < 3.2(2 \cdot 4^2 m)^m M < 3.2(e^{3.5} m)^m M.$$

Сложив полученные оценки, найдем

$$R_{2m} < \frac{1}{7} M (7\pi^{-1})^{2m} (e^{16.8} m)^{2m} \varepsilon^{-(2m+1)} \\ \times \left(\frac{1}{3} + \varepsilon^{2.5} (e^{-19.1} + e^{-9.2} + e^{-15.6} + e^{-32.3}) + 3.2\varepsilon^3 (e^{-29.4} + e^{-28.8}) \right) \\ < \frac{1}{20} (e^{34} m^2)^m \varepsilon^{-(2m+1)} M \leq \frac{1}{20} (e^{34} \varepsilon^{-3} m^2)^m M.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq \frac{1}{100} \ln x$. Тогда имеет место оценка

$$R_k = \sum_{N < n \leq N+M} \left| S(t_n) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t_n \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^k < \frac{1}{5} (Ak^2)^{k/2} M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай нечетного k , $k = 2m - 1$. Тогда из условия следует, что $m = \frac{k+1}{2} < \frac{1}{192} \ln x$. Применяя к сумме R_k неравенство Гёльдера наряду с утверждением леммы 10, имеем

$$R_k = R_{2m-1} \leq M^{1/(2m)} R_{2m}^{1-1/(2m)} \leq M^{1/(2m)} \left(\frac{1}{20} (Am^2)^m M \right)^{1-1/(2m)} \\ \leq \frac{1}{\sqrt{20}} (Am^2)^{m-1/2} M < \frac{1}{5} (Ak^2)^{k/2} M.$$

Следствие доказано.

§ 3. Моменты величин $\Delta(n)$ с показателем, равным целому числу

Для $a \geq 0$ положим

$$\kappa(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (2v)^a e^{-v^2} dv = \frac{2^a}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

В частности, при целом $m \geq 0$ имеем равенства

$$\kappa(2m) = \frac{(2m)!}{m!}, \quad \kappa(2m+1) = \frac{2^{2m+1} m!}{\sqrt{\pi}}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L = \ln \ln N$, и пусть m – целое число с условием $1 \leq m \leq \sqrt{L}$,

$$I_{2m} = \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^{2m}(n) = \sum_{N < n \leq N+M} S^{2m}(t_n).$$

Тогда справедлива следующая формула:

$$I_{2m} = \frac{\kappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} ML^m (1 + \theta B^m L^{-0.5}),$$

где $B = e^{21}\varepsilon^{-1.5}$. В частности, справедливо равенство

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta^2(n) = \frac{1}{2\pi^2} M \ln \ln N \left(1 + \frac{\theta B}{\sqrt{\ln \ln N}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = x^{1/(3m)}$,

$$U(t) = \sum_{p < y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}}, \quad V(t) = \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i} (U(t) - \bar{U}(t)),$$

$$R(t) = S(t) + V(t).$$

Пусть a и b – произвольные вещественные числа. Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа наряду с неравенством Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} (a+b)^{2m} &= a^{2m} + \theta \cdot 2mb(|a| + |b|)^{2m-1} \\ &= a^{2m} + \theta_1 \cdot 2m|b| \cdot 2^{2m-2} (|a|^{2m-1} + |b|^{2m-1}) \\ &= a^{2m} + \theta_1 \cdot 2^{2m-1} m (|a|^{2m-1} |b| + b^{2m}). \end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах $a = -V(t_n)$, $b = R(t_n)$ и суммируя по n , находим

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \sum_{N < n \leq N+M} S^{2m}(t_n) = \sum_{N < n \leq N+M} (V(t_n) - R(t_n))^{2m} \\ &= V_{2m} + \theta_2 m \cdot 2^{2m-1} (W_m + R_{2m}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_{2m} &= \sum_{N < n \leq N+M} V^{2m}(t_n), \quad R_{2m} = \sum_{N < n \leq N+M} R^{2m}(t_n), \\ W_m &= \sum_{N < n \leq N+M} |V(t_n)|^{2m-1} |R(t_n)|. \end{aligned}$$

Применив к последней сумме неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} W_m &\leq \left(\sum_{N < n \leq N+M} |V(t_n)|^{(2m-1) \cdot 2m/(2m-1)} \right)^{1-1/(2m)} \left(\sum_{N < n \leq N+M} |R(t_n)|^{2m} \right)^{1/(2m)} \\ &= V_{2m}^{1-1/(2m)} R_{2m}^{1/(2m)}, \\ I_{2m} &= V_{2m} + \theta m \cdot 2^{2m-1} (V_{2m}^{1-1/(2m)} R_{2m}^{1/(2m)} + R_{2m}). \end{aligned}$$

Преобразуем далее сумму V_{2m} :

$$\begin{aligned} V^{2m}(t) &= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} (U(t) - \bar{U}(t))^{2m} \\ &= (-1)^m (2\pi)^{-2m} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k} U^k(t) \bar{U}^{2m-k}(t), \\ V_{2m} &= (-1)^m (2\pi)^{-2m} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k} v_k. \end{aligned}$$

В последнем выражении через v_k обозначена сумма

$$\begin{aligned} & \sum_{N < n \leq N+M} U^k(t_n) \bar{U}^{2m-k}(t_n) \\ &= \sum_{N < n \leq N+M} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k < y \\ q_1, \dots, q_{2m-k} < y}} (p_1 \cdots q_{2m-k})^{-1/2} \left(\frac{p_1 \cdots p_k}{q_1 \cdots q_{2m-k}} \right)^{it_n}. \end{aligned}$$

Из лемм 5 и 6 для величин v_k следуют соотношения:

$$\begin{aligned} v_k &= \theta_k y^{3m} \ln N = \theta_k x \ln N, \quad k \neq m, \quad v_m = Mv + \theta_m x \ln N, \\ v &= m! \left(\sum_{p \leq y} p^{-1} \right)^m + \theta m^2 m! \left(\sum_p p^{-2} \right) \left(\sum_{p \leq y} p^{-1} \right)^{m-2}. \end{aligned}$$

Поскольку при неограниченном возрастании N и некотором a с условием $\frac{1}{20} \leq a \leq \frac{1}{10}$ справедливо равенство

$$x = \left(\frac{2\pi N}{\ln N} \right)^{a\varepsilon} (1 + o(1)),$$

то с помощью формулы конечных приращений Лагранжа заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq y} p^{-1} &= L - \ln(m\varepsilon^{-1}) - 4.1\theta_1 = L - \theta_2 \cdot 1.6 \ln(m\varepsilon^{-1}), \\ \left(\sum_{p \leq y} p^{-1} \right)^m &= L^m + \theta_3 \cdot 1.6m \ln(m\varepsilon^{-1}) L^{m-1} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} v - m! L^m &= \theta \cdot 1.6m! m \ln(m\varepsilon^{-1}) L^{m-1} + \theta \frac{1}{2} m^2 m! L^{m-2} \\ &= \theta \cdot 1.7m! m \ln(m\varepsilon^{-1}) L^{m-1}, \\ V_{2m} &= (2\pi)^{-2m} \binom{2m}{m} Mv + \theta (2\pi)^{-2m} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} x \ln N \\ &= \frac{(2m)!}{m!} \frac{ML^m}{(2\pi)^{2m}} (1 + \theta \cdot 1.8m \ln(m\varepsilon^{-1}) L^{-1}). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $\ln(m\varepsilon^{-1}) < \varepsilon^{-1} \ln(m+2)$ при всех $m \geq 1$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Действительно, при $m = 1$ это следует из цепочки очевидных неравенств

$$3^{1/\varepsilon} > e^{1/\varepsilon} > 1 + \varepsilon^{-1} > \varepsilon^{-1},$$

а при $m \geq 2$ – из более сильной оценки $\ln(m\varepsilon^{-1}) < \varepsilon^{-1} \ln m$, которая эквивалентна неравенству

$$\ln m > \frac{\ln(\varepsilon^{-1})}{\varepsilon^{-1} - 1} = \frac{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}}{1 - \varepsilon},$$

справедливому при всех $m \geq 2$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Замечая, что $m \ln(m+2) < 1.1m^{1.5}$, окончательно находим

$$V_{2m} = \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} ML^m (1 + 2\theta \varepsilon^{-1} m^{1.5} L^{-1}).$$

Из формулы Стирлинга и последнего соотношения при $N \geq N_0(\varepsilon)$ следует оценка

$$V_{2m} < 2 \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} ML^m < 3 \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^m ML^m.$$

Наряду с оценкой величины R_{2m} , которую дает лемма 10, это приводит к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} V_{2m}^{1-1/(2m)} R_{2m}^{1/(2m)} &< 3 \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^{m-0.5} \sqrt{Am^2} ML^{m-0.5} < 3\pi \sqrt{Aem} \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^m ML^{m-0.5}, \\ 2^{2m-1} m V_{2m}^{1-1/(2m)} R_{2m}^{1/(2m)} &< \frac{3\pi\sqrt{e}}{2} m^{1.5} \sqrt{A} \left(\frac{4m}{\pi^2 e} \right)^m ML^{m-0.5} \\ &\leq \frac{3\pi\sqrt{e}}{2} \frac{m^{1.5}}{(\sqrt{e})^m} \left(\frac{4m\sqrt{A}}{\pi^2 \sqrt{e}} \right)^m ML^{m-0.5} < 9.01 \left(\frac{4m}{\pi^2} \sqrt{\frac{A}{e}} \right)^m ML^{m-0.5}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к выражению для суммы I_{2m} , получим

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} ML^m (1 + 2\theta_1 \varepsilon^{-1} m^{1.5} L^{-1}) + 9.01\theta_2 \left(\frac{4m}{\pi^2} \sqrt{\frac{A}{e}} \right)^m ML^{m-0.5} \\ &\quad + \theta_3 \frac{m}{40} (4Am^2)^m M = \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} ML^m (1 + \theta r_m), \end{aligned}$$

где

$$r_m = \frac{2\varepsilon^{-1}m^{1.5}}{L} + \frac{(2\pi)^{2m}}{\varkappa(2m)} \left(\frac{9.01}{\sqrt{L}} \left(\frac{4m}{\pi^2} \sqrt{\frac{A}{e}} \right)^m + \frac{m}{40} \left(\frac{4Am^2}{L} \right)^m \right).$$

Пользуясь легко проверяемым неравенством

$$\frac{m!}{(2m)!} < 0.8 \left(\frac{e}{4m} \right)^m,$$

находим

$$\begin{aligned} r_m &< \frac{2\varepsilon^{-1}m^{1.5}}{L} + \frac{m!}{(2m)!} \left(\frac{9.01}{\sqrt{L}} \left(16m \sqrt{\frac{A}{e}} \right)^m + \frac{m}{40} \left(\frac{16\pi^2 Am^2}{L} \right)^m \right) \\ &< \frac{2\varepsilon^{-1}m^{1.5}}{L} + \frac{7.3}{\sqrt{L}} (4\sqrt{Ae})^m + \frac{m}{50} \left(\frac{4\pi^2 e Am}{L} \right)^m \\ &= \frac{(4\sqrt{Ae})^m}{\sqrt{L}} \left(\frac{2\varepsilon^{-1}}{\sqrt{L}} \frac{m^{1.5}}{(4\sqrt{Ae})^m} + 7.3 + \frac{\sqrt{L}}{50} m \left(\frac{\pi^2 m \sqrt{Ae}}{L} \right)^m \right). \end{aligned}$$

Поскольку наибольшие значения дробей $\frac{m^{1.5}}{(4\sqrt{Ae})^m}$ и $m \left(\frac{\pi^2 m \sqrt{Ae}}{L} \right)^m$ достигаются на отрезке $1 \leq m \leq \sqrt{L}$ при $m = 1$, то при $N \geq N_0(\varepsilon)$ оценка величины r_m принимает следующий вид:

$$r_m < \frac{(4\sqrt{Ae})^m}{\sqrt{L}} \left(\frac{2\varepsilon^{-1}}{\sqrt{L}} \frac{1}{4\sqrt{Ae}} + 7.3 + \frac{\sqrt{L}}{50} \frac{\pi^2 \sqrt{Ae}}{L} \right) < e^2 \frac{(4\sqrt{Ae})^m}{\sqrt{L}} < \frac{B^m}{\sqrt{L}},$$

где $B = e^{21}\varepsilon^{-1.5} > 4e^2\sqrt{Ae}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $L = \ln \ln N$, $A = e^{34} \varepsilon^{-3}$, и пусть m – целое число с условием $1 \leq m \leq \sqrt{L}$,

$$J_{2m-1} = \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^{2m-1}(n) = \sum_{N < n \leq N+M} S^{2m-1}(t_n).$$

Тогда имеет место оценка

$$|J_{2m-1}| \leq \frac{3.5}{\sqrt{A}} (Am)^m ML^{m-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь обозначениями, введенными по ходу доказательства теоремы 1, и полагая $a = -V(t_n)$, $b = R(t_n)$ в тождестве

$$(a + b)^{2m-1} = a^{2m-1} + \theta m \cdot 2^{2m-2} (a^{2m-2} |b| + |b|^{2m-1}),$$

находим

$$J_{2m-1} = -V_{2m-1} + \theta m \cdot 2^{2m-2} (U_m + R_{2m-1}),$$

где

$$\begin{aligned} V_{2m-1} &= \sum_{N < n \leq N+M} V^{2m-1}(t_n), & R_{2m-1} &= \sum_{N < n \leq N+M} |R(t_n)|^{2m-1}, \\ U_m &= \sum_{N < n \leq N+M} |V(t_n)|^{2m-2} |R(t_n)|. \end{aligned}$$

Применив к сумме U_m неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} U_m &\leq \left(\sum_{N < n \leq N+M} |V(t_n)|^{(2m-2)m/(m-1)} \right)^{1-1/m} \left(\sum_{N < n \leq N+M} |R(t_n)|^m \right)^{1/m} \\ &= V_{2m}^{1-1/m} R_m^{1/m}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$J_{2m-1} = -V_{2m-1} + \theta m \cdot 2^{2m-2} (V_{2m}^{1-1/m} R_m^{1/m} + R_{2m-1}).$$

Пользуясь оценкой

$$V_{2m} < 3 \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^m ML^m,$$

установленной по ходу доказательства теоремы 1, и следствием 3, получаем

$$\begin{aligned} V_{2m}^{1-1/m} R_m^{1/m} &< 3 \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^{m-1} ML^{m-1} \sqrt{Am} = 3\pi^2 e \sqrt{A} \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^m ML^{m-1}, \\ 2^{2m-2} m (V_{2m}^{1-1/m} R_m^{1/m} + R_{2m-1}) &< \frac{3\pi^2 e}{4} \sqrt{Am} \left(\frac{4m}{\pi^2 e} \right)^m ML^{m-1} + \frac{(16Am^2)^m}{40\sqrt{A}} M \\ &= (Am)^m ML^{m-1} \left(\frac{3\pi^2 e}{4} \sqrt{Am} \left(\frac{4}{\pi^2 e A} \right)^m + \frac{L}{40\sqrt{A}} \left(\frac{16m}{L} \right)^m \right). \end{aligned}$$

Поскольку наибольшие значения дробей, стоящих в скобках, достигаются при $m = 1$, окончательно находим

$$\begin{aligned} 2^{2m-2}m(V_{2m}^{1-1/m}R_m^{1/m} + R_{2m-1}) &< (Am)^m ML^{m-1} \left(\frac{3}{\sqrt{A}} + \frac{2}{5\sqrt{A}} \right) \\ &= \frac{3.4}{\sqrt{A}} (Am)^m ML^{m-1}. \end{aligned}$$

Чтобы оценить сумму V_{2m-1} , положим $y = x^{1/(3m)}$ и воспользуемся леммой 6:

$$\begin{aligned} V_{2m-1} &= \sum_{N < n \leq N+M} \left(\frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{p \leq y} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} - \sum_{q \leq y} \frac{q^{-it_n}}{\sqrt{q}} \right) \right)^{2m-1} \\ &= (2\pi i)^{1-2m} \sum_{N < n \leq N+M} \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^{k+1} \binom{2m-1}{k} \\ &\quad \times \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \leq y \\ q_1, \dots, q_{2m-k-1} \leq y}} (p_1 \cdots q_{2m-k-1})^{-0.5} \left(\frac{p_1 \cdots p_k}{q_1 \cdots q_{2m-k-1}} \right)^{it_n} \\ &= (2\pi)^{1-2m} \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^{k+1} \binom{2m-1}{k} \theta y^{\frac{3}{2}(2m-1)} \ln N = \theta \pi^{1-2m} y^{3m-\frac{3}{2}} \ln N \\ &= \theta x \ln N = \theta \frac{0.1}{\sqrt{A}} (Am)^m ML^{m-1}. \end{aligned}$$

Сложив полученные оценки, приходим к утверждению теоремы.

§ 4. Моменты величин $|\Delta(n)|$ с дробным показателем

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L = \ln \ln N$, $B = e^{21}\varepsilon^{-1.5}$, и пусть a – произвольное число с условием

$$0 < a \leq \frac{e \ln L}{10B \ln \ln L}.$$

Тогда справедлива следующая асимптотическая формула:

$$I_a = \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)|^a = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} ML^{0.5a} (1 + \theta c(B^{-1} \ln L)^{-\gamma}).$$

При этом в случае $0 < a \leq 1$ величины s и γ можно положить равными 90 и 0.5а соответственно, а в случае $a > 1$ – равными $2^{15.4}$ и $\frac{1}{2} + \{\frac{a-1}{2}\}$. В частности, при $a = 1$ получаем

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)| = \pi^{-3/2} M \sqrt{\ln \ln N} (1 + 90\theta(B^{-1} \ln L)^{-0.5}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\delta(n) = 2\pi|\Delta(n)|L^{-0.5}$. Пусть

$$j(a) = M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \delta^a(n).$$

Тогда из формул теоремы 1 при целом m с условием $1 \leq m \leq L^{0.5}$ следуют соотношения

$$j(2m) = \varkappa(2m)(1 + \theta B^m L^{-0.5}).$$

Рассмотрим сначала случай $0 < a \leq 1$. Пользуясь тождеством

$$|\delta(n)|^a = \varkappa_1^{-1} \int_0^\infty \frac{\sin^2(\delta(n)u)}{u^{1+a}} du, \quad \varkappa_1 = \varkappa_1(a) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^{1+a}} du,$$

и замечая, что

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \sum_{k=1}^\infty \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin^2 u}{u^{1+a}} du > \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\pi k)^{1+a}} \int_0^\pi \sin^2 u du \\ &= \frac{1}{2\pi^a} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1+a}} > \frac{1}{2\pi^a} \int_1^\infty \frac{du}{u^{1+a}} = \frac{1}{2\pi^a a} > \frac{1}{2\pi a}, \end{aligned}$$

представим сумму $j(a)$ в виде

$$(M\varkappa_1)^{-1} \int_0^\infty \frac{1}{u^{1+a}} \sum_{N < n \leq N+M} \sin^2(\delta(n)u) du.$$

Положим $\lambda = \frac{1}{4}(B^{-1} \ln L)^{0.5}$, $K = [\frac{16}{3}e\lambda^2] + 1$ и приблизим каждую из функций $\sin^2(\delta(n)u)$ на отрезке $0 \leq u \leq \lambda$ суммой первых K слагаемых ее ряда Тейлора. Поскольку такое разложение будет содержать лишь четные степени $\delta(n)u$, после перемены порядка суммирования “дробный момент” $j(a)$ выразится суммой величин $j(2k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$, взятых с некоторыми коэффициентами. Преобразуя, далее, получившуюся сумму по формулам теоремы 1, получим искомые формулы для $j(a)$ и I_a .

Проведем теперь необходимые вычисления. Прежде всего, имеем равенство $j(a) = j_1 + r_1$, в котором

$$\begin{aligned} j_1 &= \varkappa_1^{-1} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{1+a}} \left(M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \sin^2(\delta(n)u) \right) du, \\ r_1 &= (M\varkappa_1)^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \int_\lambda^\infty \frac{\sin^2(\delta(n)u)}{u^{1+a}} du \leq \varkappa_1^{-1} \int_\lambda^\infty \frac{du}{u^{1+a}} < 2\pi\lambda^{-a}. \end{aligned}$$

Далее, из формулы

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} (2x)^{2k} + \frac{\theta (2x)^{2K+2}}{2(2K+2)!}$$

следует, что $j_1 = j_2 + r_2$, где

$$\begin{aligned} j_2 &= \varkappa_1^{-1} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{1+a}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} j(2k) du, \\ r_2 &= \frac{1}{2} \theta \varkappa_1^{-1} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{1+a}} \frac{(2u)^{2K+2}}{(2K+2)!} j(2K+2) du. \end{aligned}$$

Замечая, что $B^{K+1} < B^2 L^{B^{-1} \ln B} < L^{0.1}$, нетрудно убедиться в том, что верхние границы величин $j(2K+2)$, $|r_2|$ не превосходят соответственно

$$\varkappa(2K+2)(1+\theta L^{-0.4}) \leq 2 \frac{(2K+2)!}{(K+1)!},$$

$$\varkappa_1^{-1} \frac{4^{K+1}}{(K+1)!} \int_0^\lambda u^{2K+1-a} du \leq \left(\frac{4e\lambda^2}{K} \right)^K \lambda^{-a} \leq \left(\frac{3}{4} \right)^K \lambda^{-a}.$$

Сумму j_2 преобразуем с помощью теоремы 1. Обозначая через r_3 вклад в эту сумму от остаточных членов формул для величин $j(2k)$, получим $j_2 = j_3 + r_3$, причем

$$|r_3| < (2\varkappa_1)^{-1} B^K L^{-0.5} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{1+a}} \sum_{k=1}^K \frac{(2u)^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{k!} du < L^{-0.4} \lambda^{-a} \sum_{k=1}^K \frac{(2\lambda)^{2k}}{k!}$$

$$< L^{-0.4} \lambda^{-a} e^{4\lambda^2} < L^{-0.3} \lambda^{-a}.$$

Далее, заменяя в сумме j_3 величины $\varkappa(2k)$ их выражениями через несобственные интегралы, находим

$$j_3 = \varkappa_1^{-1} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{1+a}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} (2u)^{2k} \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} (2v)^{2k} dv \right) du$$

$$= \varkappa_1^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{1+a}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} (4uv)^{2k} \right) du dv.$$

Заметим теперь, что сумма по k в последнем выражении приближает функцию $\sin^2(2uv)$ с точностью до слагаемого $\theta \frac{(4uv)^{2K+2}}{(2K+2)!}$. Воспользовавшись этим, интеграл по отрезку $0 \leq u \leq \lambda$ заменим несобственным. Получим $j_3 = j_4 + r_4$, где

$$j_4 = \varkappa_1^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} \int_0^\infty \frac{\sin^2(2uv)}{u^{1+a}} du dv = \varkappa_1^{-1} \varkappa_1 \int_0^\infty e^{-v^2} (2v)^a dv = \varkappa(a),$$

$$r_4 = \theta \varkappa_1^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} \left(\int_0^\lambda \frac{(4uv)^{2K+2}}{u^{1+a} (2K+2)!} du + \int_\lambda^\infty \frac{\sin^2(2uv)}{u^{1+a}} du \right) dv$$

$$= \theta \left(\varkappa_1^{-1} \frac{(2\lambda)^{2K+2}}{(2K+2)!} \varkappa(2K+2) \frac{\lambda^{-a}}{K} + 2\pi \lambda^{-a} \right)$$

$$= \theta \left(\left(\frac{4e\lambda^2}{K} \right)^K \lambda^{-a} + 2\pi \lambda^{-a} \right) = \theta \lambda^{-a} \left(2\pi + \left(\frac{3}{4} \right)^K \right).$$

Сложив полученные оценки величин r_j , окончательно находим

$$j(a) = \varkappa(a) + \theta \lambda^{-a} \left(4\pi + 2 \left(\frac{3}{4} \right)^K + L^{-0.3} \right) = \varkappa(a) (1 + 90\theta (B^{-1} \ln L)^{-0.5a}).$$

Рассмотрим теперь случай $a > 1$. Представляя a в виде $2m+1+b$, где $m \geq 0$ – целое число, $0 \leq b < 2$, и пользуясь тождеством

$$|\delta(n)|^{1+b} = \varkappa_2^{-1} \int_0^\infty \frac{\sin^4(\delta(n)u)}{u^{2+b}} du, \quad \varkappa_2 = \varkappa_2(b) = \int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^{2+b}} du > \frac{1}{5},$$

запишем исходную сумму в виде

$$(M\kappa_2)^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \delta^{2m}(n) \int_0^\infty \frac{\sin^4(\delta(n)u)}{u^{2+b}} du.$$

Следуя тем же рассуждениям, что и в случае $0 < a \leq 1$, и полагая при этом

$$\lambda = \frac{1}{16} \sqrt{B^{-1} \ln L}, \quad K = [(12e\lambda)^2] + 1,$$

найдем $j(a) = j_1 + r_1$, где

$$j_1 = (M\kappa_2)^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \delta^{2m}(n) \int_0^\lambda \frac{\sin^4(\delta(n)u)}{u^{2+b}} du,$$

$$r_1 = \theta \kappa_2^{-1} \lambda^{-(1+b)} j(2m) = 5.1 \theta \kappa(a) \lambda^{-(1+b)}.$$

Пусть, далее, $b_k = \frac{(-1)^k}{2} (2^{2k-2} - 1)$, $k \geq 2$, – коэффициенты разложения функции $\sin^4 x$ в ряд Тейлора по четным степеням $2x$. Тогда имеем равенство $j_1 = j_2 + r_2$, где

$$r_2 = \frac{\theta}{2} \kappa_2^{-1} j(2m + 2K + 2) \int_0^\lambda \frac{1}{u^{2+b}} \frac{(4u)^{2K+2}}{(2K+2)!} du$$

$$= 160 \theta j(2m + 2K + 2) \left(\frac{\lambda}{K} \right)^2 \left(\frac{16e^2 \lambda^2}{4K^2} \right)^K \lambda^{-(1+b)},$$

$$j_2 = \kappa_2^{-1} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{2+b}} \left(\sum_{k=2}^K b_k \frac{(2u)^{2k}}{(2k)!} j(2m + 2k) \right) du.$$

Из легко проверяемых неравенств $B^{m+K+1} < L^{0.1}$, $2K^{m+1} < 2^K$ следуют оценки

$$j(2m + 2K + 2) < 2\kappa(2m + 2K + 2) < 2(2(m + K + 1))^{m+K+1}$$

$$< 2(3K)^{m+K+1} < 3^{2K} K^{m+1} K^K < (18K)^K,$$

$$|r_2| < \left(\frac{72e^2 \lambda^2}{K} \right)^K < 2^{-K}.$$

Каждую из сумм $j(2m + 2k)$ в выражении для j_2 преобразуем с помощью формул теоремы 1. Обозначая через r_3 вклад от остаточных членов этих формул, находим $j_2 = j_3 + r_3$, где

$$j_3 = \kappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} (2v)^{2m} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{2+b}} \left(\sum_{k=2}^K b_k \frac{(4uv)^{2k}}{(2k)!} \right) du dv,$$

$$r_3 = \theta B^m L^{-0.5} \int_0^\lambda \frac{1}{u^{2+b}} \left(\sum_{k=2}^K \frac{(16Bu^2)^k}{k!} \frac{\kappa(2m + 2k)}{\kappa(2k)} \right) du.$$

Для оценки r_3 заметим, что при всех $k \geq 2$

$$\frac{\kappa(2m + 2k)}{\kappa(2k)} = \binom{2m}{m} \binom{2m + 2k}{2m} \binom{m + k}{m}^{-1} m! < 2^{2m} \cdot 2^{2m+2k} m! = 16^m m! 2^{2k},$$

кроме того, $(16B)^m m! < L^{B^{-1}} < L^{0.1}$. Поэтому верхняя граница r_3 не превосходит

$$L^{-0.4} \lambda^{-(1+b)} \sum_{k=2}^K \frac{(64B\lambda^2)^k}{k!} < L^{-0.4} e^{64B\lambda^2} \lambda^{-(1+b)} < L^{-0.15} \lambda^{-(1+b)}.$$

Заменим теперь в выражении для j_3 сумму по k на величину

$$\sin^4(2uv) + \frac{\theta}{2} \frac{(4uv)^{2K+2}}{(2K+2)!}$$

и перейдем к бесконечному промежутку интегрирования по u . Таким образом получим $j_3 = j_4 + r_4$, где

$$\begin{aligned} j_4 &= \varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} (2v)^{2m} \int_0^\infty \frac{\sin^4(2uv)}{u^{2+b}} du dv \\ &= \varkappa_2^{-1} \varkappa_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} (2v)^{2m+1+b} dv = \varkappa(a), \\ r_4 &= \theta \varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-v^2} \left((2v)^{2(m+K+1)} \int_0^\lambda \frac{(2u)^{2K+2}}{2u^{2+b}(2K+2)!} du \right. \\ &\quad \left. + (2v)^{2m} \int_\lambda^\infty \frac{\sin^4(2uv)}{u^{2+b}} du \right) dv \\ &= \theta \varkappa_2^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{K}} \left(\frac{\lambda}{K} \right)^2 \left(\frac{4e\lambda^2}{K} \right)^K \frac{\varkappa(2m+2K+2)}{\varkappa(2K+2)} \lambda^{-(1+b)} + \varkappa(2m) \lambda^{-(1+b)} \right) \\ &= \theta \varkappa_2^{-1} \left(\left(\frac{16e\lambda^2}{K} \right)^K \frac{16^m m!}{\sqrt{K} \varkappa(2m)} + 1 \right) \varkappa(2m) \lambda^{-(1+b)} \\ &= \theta \varkappa_2^{-1} \varkappa(2m) \left(4^m \left(\frac{16e\lambda^2}{K} \right)^K + 1 \right) \lambda^{-(1+b)} \\ &= \theta \varkappa_2^{-1} \varkappa(a) \left(1 + \left(\frac{32e\lambda^2}{K} \right)^K \right) \lambda^{-(1+b)} = 5.1 \theta \varkappa(a) \lambda^{-(1+b)}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} j(a) &= \varkappa(a) + \theta(2 \cdot 5.1 + 2^{-K} + L^{-0.15}) \varkappa(a) \lambda^{-(1+b)} = \varkappa(a)(1 + 10.3 \theta \lambda^{-(1+b)}) \\ &= \varkappa(a)(1 + 2^{15.4} \theta (B^{-1} \ln L)^{-(1+b)/2}). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что при $a > 1$

$$\frac{1+b}{2} = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{a-1}{2} \right\} = \gamma.$$

Теорема доказана.

§ 5. Доказательство гипотезы Сельберга

Пусть $G(x)$ – гауссово распределение,

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

и пусть $g(t) = e^{-t^2/2}$ – характеристическая функция распределения $G(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для вещественного x величина $\nu(x)$ обозначает количество чисел n , $N < n \leq N + M$, удовлетворяющих условию

$$\Delta(n) \leq x \sqrt{\frac{1}{2\pi^2} \ln \ln N}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\nu(x) = M(G(x) + \theta C(\ln \ln \ln N)^{-0.5}), \quad C = e^{22.4} \varepsilon^{-1.5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим, как и выше, $L = \ln \ln N$ и рассмотрим характеристическую функцию $f(t)$ дискретной случайной величины δ со значениями

$$\delta(n) = \pi \sqrt{\frac{2}{L}} \Delta(n), \quad n = N + 1, \dots, N + M,$$

т. е. сумму

$$f(t) = M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} e^{it\delta(n)}.$$

Пусть P – целое число с условием $1 < P \leq \sqrt{L}$; приблизим каждую из экспонент $e^{it\delta(n)}$ суммой первых $2P$ слагаемых ряда Тейлора. Получим

$$\begin{aligned} f(t) &= M^{-1} \sum_{N < n \leq N+M} \left(\sum_{k=0}^{2P-1} \frac{(it)^k}{k!} \delta^k(n) + 2\theta \frac{t^{2P}}{(2P)!} \delta^{2P}(n) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2P-1} \frac{(it)^k}{k!} j_k + 2\theta \frac{t^{2P}}{(2P)!} j_{2P}. \end{aligned}$$

Здесь через j_k обозначена сумма k -х степеней величин $\delta(n)$, деленная на M . Из формул теоремы 1 нетрудно заключить, что $j_0 = 1$ и при $1 \leq k \leq P$

$$j_{2k} = \frac{(2k)!}{k!} 2^{-k} (1 + \theta B^k L^{-0.5}) = \frac{(2k)!}{k!} 2^{-k} (1 + \theta_1 B^{2k} L^{-0.5}), \quad B = e^{21} \varepsilon^{-1.5}.$$

Далее, полагая $A = e^{34} \varepsilon^{-3} = e^{-8} B^2$ и пользуясь оценкой

$$\frac{k!}{(2k)!} < 0.8 \left(\frac{e}{4k} \right)^k,$$

находим

$$\begin{aligned} |j_{2k-1}| &= (2\pi^2 L^{-1})^{k-0.5} M^{-1} |J_{2k-1}| \leq \frac{7}{2\pi\sqrt{2}} (AL)^{-0.5} (2\pi^2 Ak)^k \\ &\leq \frac{7}{2\pi\sqrt{2}} (AL)^{-0.5} \frac{(2k)!}{k!} \frac{4}{5} \left(\frac{e}{4k} \right)^k (2\pi^2 Ak)^k \\ &< 0.5 L^{-0.5} \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{\pi^2}{2e^7} B^2 \right)^k < 0.5 L^{-0.5} \frac{(2k)!}{k!} 2^{-k} B^{2k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала слагаемые выражения для $f(t)$, отвечающие четным k . Обозначим их вклад через $f_1(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sum_{k=0}^{P-1} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} j_{2k} = \sum_{k=0}^{P-1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k (1 + \theta B^{2k} L^{-0.5}) \\ &= g(t) + \frac{\theta}{P!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^P + \theta L^{-0.5} \sum_{k=1}^{P-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{B^2 t^2}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

Пусть, далее, $f_2(t)$ – вклад в $f(t)$ от слагаемых с нечетными номерами k ; оценивая $f_2(t)$ по абсолютной величине, получим

$$|f_2(t)| \leq 0.5 L^{-0.5} \sum_{k=1}^P \frac{|t|^{2k-1}}{(2k-1)!} \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{B^2}{2}\right)^k = L^{-0.5} \sum_{k=0}^{P-1} \frac{|t|^{2k+1}}{k!} \left(\frac{B^2}{2}\right)^{k+1}.$$

Наконец, заметим, что

$$\frac{2t^{2P}}{(2P)!} j_{2P} \leq \frac{2t^{2P}}{P!} \cdot 2^{-P} (1 + B^{2P} L^{-0.5}) \leq \frac{2}{P!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^P + 2 \cdot \frac{L^{-0.5}}{P!} \left(\frac{B^2 t^2}{2}\right)^P.$$

Пусть $\lambda > 1$. Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t}.$$

Пользуясь полученными выше оценками, находим

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\leq \int_0^\lambda \frac{3}{P!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^P \frac{dt}{t} + L^{-0.5} \int_0^\lambda \sum_{k=1}^P \frac{1}{k!} \left(\frac{B^2 t^2}{2}\right)^k \frac{dt}{t} \\ &\quad + L^{-0.5} \int_0^\lambda \sum_{k=0}^{P-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{B^2}{2}\right)^{k+1} t^{2k} dt \\ &= \frac{1.5}{P \cdot P!} \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^P + L^{-0.5} \sum_{k=1}^P \frac{1}{2k \cdot k!} \left(\frac{B^2 \lambda^2}{2}\right)^k \\ &\quad + \frac{1}{2} B^2 \lambda L^{-0.5} \sum_{k=0}^{P-1} \frac{1}{k! (2k+1)} \left(\frac{B^2 \lambda^2}{2}\right)^k \\ &< P^{-1.5} \left(\frac{e \lambda^2}{2P}\right)^P + B^2 \lambda L^{-0.5} e^{0.5 B^2 \lambda^2}. \end{aligned}$$

Положим теперь

$$\lambda = B^{-1} \sqrt{\frac{2}{3} \ln L}, \quad P = [\epsilon \lambda^2] + 1.$$

Тогда интеграл $I(\lambda)$ не превзойдет величины

$$P^{-1.5} 2^{-P} + B^2 \lambda L^{-1/6} < 2^{-P} + L^{-1/7} < L^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{2}{3} B^{-2} e \ln 2 > e^{-42} \epsilon^3.$$

Согласно неравенству Берри–Эссеена (см., например, [23, с. 299]) при любом вещественном x модуль разности функций распределения $F(x)$ и $G(x)$, отвечающих характеристическим функциям $f(t)$ и $g(t)$, не превосходит суммы

$$\frac{2}{\pi}I(\lambda) + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\lambda^{-1} < \frac{2}{\pi}L^{-\alpha} + \frac{12\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{B}{\sqrt{\ln L}} < \frac{C}{\sqrt{\ln L}},$$

где $C = e^{22.4}\varepsilon^{-1.5}$. Таким образом,

$$F(x) = G(x) + \frac{\theta C}{\sqrt{\ln L}}, \quad \nu(x) = MF(x) = M\left(G(x) + \frac{\theta C}{\sqrt{\ln L}}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\Phi(n)$ – монотонная положительная функция, неограниченно возрастающая при $n \rightarrow +\infty$, и пусть величины m_1 , m_2 и m равны соответственно числам решений следующих неравенств:

$$|\Delta(n)| \leq \frac{1}{\Phi(n)}\sqrt{\ln \ln n}, \quad |\Delta(n)| > \Phi(n)\sqrt{\ln \ln n},$$

$$\frac{1}{\Phi(n)}\sqrt{\ln \ln n} < |\Delta(n)| \leq \Phi(n)\sqrt{\ln \ln n},$$

где $N < n \leq N + M$. Тогда справедливы соотношения

$$m_1 \leq 2M\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Phi^{-1} + q\right), \quad m_2 < M\left(\frac{e^{-\pi^2\Phi^2}}{2\pi\Phi\sqrt{2}} + 2q\right),$$

$$m \geq M\left(1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Phi^{-1} - \frac{e^{-\pi^2\Phi^2}}{2\pi\Phi\sqrt{2}} - 4q\right),$$

где $\Phi = \Phi(N)$, $q = q(N) = e^{22.4}\varepsilon^{-1.5}(\ln \ln \ln N)^{-0.5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из монотонности $\Phi(n)$ следует, что число m_1 не превосходит числа решений неравенства

$$|\Delta(n)| < \frac{2}{\Phi}\sqrt{\ln \ln N}.$$

Полагая $x = 2\pi\sqrt{2}\Phi^{-1}$, находим

$$m_1 \leq \nu(x) - \nu(-x) = M(G(x) - G(-x) + 2\theta q) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-u^2/2} du + 2\theta q\right)$$

$$\leq M\left(x\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2q\right) = 2M\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\Phi} + q\right).$$

Аналогично, m_2 не превосходит числа решений неравенства

$$|\Delta(n)| > \Phi\sqrt{\ln \ln N} = y\sqrt{\frac{1}{2\pi^2} \ln \ln N},$$

где $y = \pi\Phi\sqrt{2}$. Следовательно,

$$m_2 \leq \nu(+\infty) - \nu(y) = M(G(+\infty) - G(y) + 2\theta q) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty e^{-t^2/2} dt + 2\theta q\right)$$

$$\leq M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-y^2/2}}{y} + 2q\right) = M\left(\frac{e^{-\pi^2\Phi^2}}{2\pi\Phi\sqrt{2}} + 2q\right).$$

Последнее утверждение следствия вытекает из соотношения $m = M - m_1 - m_2$ и доказанного выше. В частности, при $N \rightarrow +\infty$ получаем $\Phi(N) \rightarrow +\infty$, $q(N) \rightarrow +\infty$, так что

$$\begin{aligned} m_1 &\ll M(\Phi^{-1}(N) + q(N)) = o(M), \\ m_2 &\ll M(\Phi^{-1}(N)e^{-\pi^2\Phi^2(N)} + q(N)) = o(M), \\ m &= M - o(M). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Ордината γ_n “почти никогда” не попадает в промежуток Грама $(t_{n-1}, t_n]$, т.е. гипотеза Сельберга верна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что число решений двойного неравенства

$$\gamma_n \leq t_n < \gamma_{n+1}, \quad \text{где } N < n \leq N + M, \quad (12)$$

не более чем на единицу отличается от числа решений двойного неравенства

$$t_{n-1} < \gamma_n \leq t_n, \quad \text{где } N < n \leq N + M. \quad (13)$$

Действительно, условие (12) нарушается тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух взаимоисключающих неравенств $t_n < \gamma_n$ и $\gamma_{n+1} \leq t_n$, где $N < n \leq N + M$. Обозначая количества их решений через k_1 и k_2 , находим, что число решений неравенств (12) есть $M - (k_1 + k_2)$.

Аналогично, число решений неравенств (13) равно $M - (n_1 + n_2)$, где n_1 и n_2 – количества решений соответственно неравенств $t_n < \gamma_n$ и $\gamma_n \leq t_{n-1}$ с условием $N < n \leq N + M$.

Однако очевидно, что $k_1 = n_1$; число n_2 есть количество решений неравенства $\gamma_{n+1} \leq t_n$, где $N - 1 < n \leq N + M - 1$, следовательно, оно отличается от k_2 не более чем на единицу. Выше было показано, что число решений (12) есть $o(M)$, следовательно, и число решений (13) также есть $o(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для задачи о распределении значений функции $S(t)$ при изменении t на отрезке $T < t \leq T + H$ имеет место следующий аналог теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть x – вещественное число, $E(x)$ – множество тех значений $t \in (T, T + H]$, для которых*

$$S(t) \leq x \sqrt{\frac{1}{2\pi^2} \ln \ln T}.$$

Тогда имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\text{mes } E(x) = H(G(x) + O((\ln \ln \ln T)^{-0.5})),$$

где постоянная в знаке O зависит от ε .

Это утверждение представляет собой некоторое усиление теоремы 6 обзорной статьи [4], в которой указанная асимптотика получена с остаточным членом порядка $(\ln \ln \ln \ln T)^{-0.5}$. Его доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 4 и опирается, помимо прочего, на оценки интегралов

$$\int_T^{T+H} S^k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

подобные оценкам теоремы 2.

В качестве приложения теоремы 4 получим оценки сверху и снизу следующей суммы, представляющей собой “момент степени (-1) ” величин $|\Delta(n)|$:

$$I = I_{(-1)} = \sum'_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)|^{-1}$$

(здесь и далее штрих в знаке суммы означает суммирование по тем n , для которых $\Delta(n)$ отлично от нуля).

ТЕОРЕМА 6. *Имеют место оценки*

$$\frac{M}{\sqrt{\ln \ln N}} \leq I \leq \frac{c\varepsilon^{-1.5}M}{\sqrt{\ln \ln \ln N}},$$

где $c > 0$ – некоторая абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через k_ν количество чисел n ряда $N+1, \dots, N+M$ с условием $|\Delta(n)| = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Получим

$$I = \frac{k_1}{1} + \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{3} + \dots$$

Сумма в правой части равенства является конечной, поскольку

$$|\Delta(n)| = |S(t_n)| \ll \ln t_n \ll \ln N,$$

и при любом $r \geq 1$ не превосходит величины

$$(k_1 + \dots + k_r) + \frac{1}{r+1}(k_{r+1} + k_{r+2} + \dots) \leq (k_1 + \dots + k_r) + \frac{M}{r+1}.$$

Слагаемое $k_1 + \dots + k_r$ равно количеству чисел n с условием $|\Delta(n)| \leq r$ и по порядку не превосходит величины

$$M(r^{-1} + q(N)), \quad q(N) = \frac{e^{21}\varepsilon^{-1.5}}{\sqrt{\ln \ln \ln N}}.$$

Полагая $r = [\sqrt[4]{\ln \ln N}]$, приходим к неравенству

$$I \ll M(r^{-1} + q(N)) + Mr^{-1} \ll \frac{\varepsilon^{-1.5}M}{\sqrt{\ln \ln \ln N}}.$$

Чтобы получить оценку снизу, просуммируем по n обе части тождества

$$\frac{1}{\delta(n)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\delta^2(n)x^2} dx,$$

где $\delta(n) = \pi \sqrt{\frac{2}{L}} \Delta(n)$. Заменяя каждую из экспонент величиной

$$1 - e^{-\theta(\delta(n)x)^2} (\delta(n)x)^2 = 1 - \theta_1(\delta(n)x)^2, \quad 0 \leq \theta, \theta_1 \leq 1,$$

а несобственный интеграл – интегралом по отрезку $0 \leq x \leq \alpha$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$\begin{aligned}
 j &= \sum'_{N < n \leq N+M} |\delta(n)|^{-1} \geq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \sum'_{N < n \leq N+M} e^{-\delta^2(n)x^2} dx \\
 &\geq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \sum'_{N < n \leq N+M} (1 - \delta^2(n)x^2) dx \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \left(\sum'_{N < n \leq N+M} 1 - x^2 \sum_{N < n \leq N+M} \delta^2(n) \right) dx \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\alpha(M - k_0) - \frac{\alpha^3}{3} \frac{2\pi^2}{\ln \ln N} \frac{M}{2\pi^2} \ln \ln N \left(1 + \frac{B}{\sqrt{\ln \ln N}} \right) \right) \\
 &\geq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\alpha(M - k_0) - \frac{\alpha^3}{3} M \left(1 + \frac{B}{\sqrt{\ln \ln N}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Согласно теореме 4 величина k_0 имеет порядок $M(\ln \ln \ln N)^{-0.5}$. Поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 \sum'_{N < n \leq N+M} |\delta(n)|^{-1} &\geq 0.99 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} M \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right) > \frac{1}{2} M, \\
 I = \sum'_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)|^{-1} &= \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\ln \ln N}} \sum'_{N < n \leq N+M} |\delta(n)|^{-1} > \frac{M}{\sqrt{\ln \ln N}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По-видимому, оценка снизу в теореме 6 является правильной по порядку, т. е.

$$\frac{c_1 M}{\sqrt{\ln \ln N}} \leq \sum'_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)|^{-1} \leq \frac{c_2 M}{\sqrt{\ln \ln N}},$$

где c_1, c_2 – положительные абсолютные постоянные.

Список литературы

1. J.-P. Gram, “Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann”, *Acta Math.*, **27**:1 (1903), 289–304.
2. J. I. Hutchinson, “On the roots of the Riemann zeta function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27**:1 (1925), 49–60.
3. E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **151** (1935), 234–255.
4. E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **157** (1936), 261–263.
5. A. Selberg, “The zeta-function and the Riemann hypothesis”, *C. R. Dixième Congrès Math. Skandinaves* 1946, **10**, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200.
6. А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96; англ. пер.: А. А. Karatsuba, М. А. Korolev, “The argument of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, **60**:3 (2005), 433–488.

7. А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой”, *УМН*, **61**:3 (2006), 3–92; англ. пер.: А. А. Karatsuba, М. А. Korolev, “Behaviour of the argument of the Riemann zeta function on the critical line”, *Russian Math. Surveys*, **61**:3 (2006), 389–482.
8. А. Ghosh, “On the Riemann zeta-function – mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$ ”, *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.
9. Е. С. Титчмарш, “The mean-value of the zeta-function on the critical line”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:1 (1928), 137–150.
10. Я. Мозер, “О законе Грама в теории дзета-функции Римана”, *Acta Arith.*, **32**:2 (1977), 107–113.
11. Я. Мозер, “Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана”, *Acta Arith.*, **36**:2 (1980), 147–156.
12. Я. Мозер, “Об одной биквадратной сумме в теории дзета-функции Римана”, *Acta Math. Univ. Comenian.*, **42–43** (1983), 35–39.
13. А. Fujii, “A comparative study of the zeros of Dirichlet L -functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81** (1975), 199–201.
14. А. Fujii, “On the zeros of Dirichlet L -functions. V”, *Acta Arith.*, **28**:4 (1976), 395–403.
15. А. Fujii, “Gram’s law for the zeta zeros and the eigenvalues of Gaussian unitary ensembles”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **63**:10 (1987), 392–395.
16. А. А. Лаврик, “Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана”, *Теория чисел и анализ*, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 197–230; англ. пер.: А. А. Lavrik, “Titchmarsh’s problem in the discrete theory of the Riemann zeta-function”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **207**:6 (1995), 179–209.
17. А. Selberg, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155.
18. А. Ghosh, “On Riemann’s zeta-function – sign changes of $S(T)$ ”, *Recent progress in analytic number theory. Vol. I* (Durham, 1979), Academic Press, London–New York, 1981, 25–46.
19. А. А. Карацуба, “О функции $S(t)$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:5 (1996), 27–56; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “On the function $S(t)$ ”, *Izv. Math.*, **60**:5 (1996), 901–931.
20. М. А. Королёв, “Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 21–60; англ. пер.: М. А. Korolev, “The argument of the Riemann zeta-function on the critical line”, *Izv. Math.*, **67**:2 (2003), 225–264.
21. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: А. А. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, de Gruyter, Berlin, 1992.
22. И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, 2-е изд., Наука, М., 1980; англ. пер. 1-го изд.: I. M. Vinogradov, *Trigonometrical sums in number theory*, Statistical Publ. Society, Calcutta, 1978.
23. М. Лозе, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: М. Loève, *Probability theory*, Van Nostrand, Princeton–Toronto–New York–London, 1960.

М. А. КОРОЛЁВ (М. А. KOROLEV)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

Поступило в редакцию
 07.02.2008