Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, Осреднение смешанной краевой задачи в области с анизотропной фрактальной перфорацией, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 2, 165–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:40:06

УДК 517.946

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий

Осреднение смешанной краевой задачи в области с анизотропной фрактальной перфорацией

Производится осреднение смешанной краевой задачи для скалярного эллиптического уравнения в прямоугольнике с анизотропной фрактальной перфорацией, а именно размер отверстий (малый) в одном направлении остается неизменным, а в другом — уменьшается при удалении от основания прямоугольника. На границах отверстий назначены условия Неймана. Асимптотические конструкции характерны наличием нескольких пограничных слоев. Получены явные формулы для осредненного дифференциального оператора и выведены асимптотически точные оценки погрешности, причем малость мажоранты связана со свойством гладкости правой части по медленной переменной в шкале пространств Соболева–Слободецкого.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: осреднение, анизотропная перфорация, фрактальная структура, пограничные слои.

§ 1. Постановка задачи и предварительные сведения

1.1. Постановка задачи. Пусть Ξ — прямоугольник $\{y = (y_1, y_2): 0 < y_i < b_i, i = 1, 2\}$, а $\omega \in \mathbb{R}^2$ — строго выпуклая область с гладкой границей $\partial\omega$, замыкание $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ которой лежит внутри Ξ . Обозначим $S = \Xi \setminus \bar{\omega}$. Предположим, что в координатах y контур $\partial\omega$ задан соотношениями

$$y_1 = H_+(y_2), \quad y_1 = b_1 - H_-(y_2) \quad \text{при} \quad y_2 \in (l_-, l_+) =: \Lambda_0, \quad (1.1)$$

где $0 < l_- < l_+ < b_2$, $H_{\pm} \in C^\infty(\Lambda_0)$, $H(y_2) = H_-(y_2) + H_+(y_2) \in (0, b_1)$ при всех $y_2 \in \Lambda_0$ и $H_+(l_{\pm}) = b_1 - H_-(l_{\pm})$, т. е. для $\mathbf{H}(y_2) := b_1^{-1}H(y_2)$ получаем $\mathbf{H}(l_{\pm}) = 1$. Поскольку граница $\partial\omega$ гладкая, вблизи точек $P^{\pm} = (H_+(l_{\pm}), l_{\pm})$ справедливы представления

$$\begin{aligned} H_+(y_2) &= H_+(l_{\pm}) - |y_2 - l_{\pm}|^{1/2}(K_{\pm} + O(|y_2 - l_{\pm}|)), \\ H_-(y_2) &= H_-(l_{\pm}) - |y_2 - l_{\pm}|^{1/2}(K_{\pm} + O(|y_2 - l_{\pm}|)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Предположим, что $K_{\pm} > 0$, т. е. кривизна дуги $\partial\omega$ в точках $P_{\pm} = (H_+(l_{\pm}), l_{\pm})$ положительная. Под $\Sigma(y_2)$ понимаем сечение ячейки S , а именно

$$\begin{aligned} \Sigma(y_2) &= [0, b_1] \quad \text{при} \quad y_2 \in \Lambda_- := [0, l_-] \quad \text{или} \quad y_2 \in \Lambda_+ := [l_+, b_2], \\ \Sigma(y_2) &= [0, H_+(y_2)] \cup [b_1 - H_-(y_2), b_1] \quad \text{при} \quad y_2 \in \Lambda_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще один прямоугольник $Q = [0, a_1] \times [0, a_2]$ и введем малый параметр $h > 0$ так, чтобы $a_i = N_i b_i h$, $i = 1, 2$, причем N_i — большие натуральные числа. Прямыми $\{x = (x_1, x_2): x_2 = jhb_2\}$ рассечем Q на полосы $\Pi_j(h)$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00759-а).

Рис. 1. Область $\Omega(h)$. Случай $q = 2$

шириной hb_2 ; здесь $j = 1, \dots, N_2$. Каждую из этих полосок разобьем на конгруэнтные замкнутые прямоугольники $Q_j^p(h) \simeq Q_j(h)$ с размерами $hq^{-j}b_1 \times hb_2$, при этом $q \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ и $p = 1, \dots, q^j N_1$. Если $q = 1$, то все прямоугольники одинаковые, но при $q \geq 2$ основания прямоугольников укорачиваются с ростом номера j , а само разбиение приобретает анизотропную фрактальную структуру. Далее имеем дело только со случаем $q \geq 2$.

Произведем сжатие ячейки S в h^{-1} раз вдоль оси y_1 и в $q^j h^{-1}$ раз вдоль оси y_2 . Заменим прямоугольники $Q_j^p(h)$ сжатыми ячейками $S_j^p(h) \simeq S_j(h)$, объединение которых составит множество $\Omega(h) \cup \partial Q$. Открытое множество $\Omega(h)$ представляет собой перфорированную область, однако в сравнении с обычной, равномерной, перфорацией отверстия $\omega_j^{(p)}(h) \simeq \omega_j(h)$ сужаются в поперечном направлении при удалении от оси абсцисс (рис. 1). Подобные геометрические структуры встречаются в распределительных и транспортных системах животных и растительных организмов.

В области $\Omega(h)$, зависящей от малого параметра $h \in (0, h_0]$, рассмотрим смешанную краевую задачу для скалярного эллиптического дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x)u(h, x) := -\nabla_x^\top A(x) \nabla_x u(h, x) = f(h, x), \quad x \in \Omega(h), \quad (1.3)$$

где $\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)^\top$, $\top$ – знак транспонирования, а A – гладкая вещественная матрица-функция размером 2×2 , симметричная и положительно определенная при $x \in Q$. Уравнение (1.3) дополним условиями Дирихле на основаниях прямоугольника:

$$u(h, x_1, 0) = u(h, x_1, a_2) = 0, \quad x_1 \in (0, a_1), \quad (1.4)$$

и условиями периодичности на боковых сторонах:

$$u(h, 0, x_2) = u(h, a_1, x_2), \quad \partial_{x_1} u(h, 0, x_2) = \partial_{x_1} u(h, a_1, x_2), \quad x_2 \in (0, a_2), \quad (1.5)$$

а на границах всех отверстий поставим условия Неймана

$$\mathcal{N}(x, \nabla_x)u(h, x) := n(h, x)^\top A(x) \nabla_x u(h, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega(h) \setminus \partial Q. \quad (1.6)$$

Здесь n – единичный вектор внешней нормали к границе области $\Omega(h)$.

Рис. 2. Область со сгущающейся перфорацией

Аналогичные анизотропные фрактальные структуры были предложены к осреднению и изучены в работах [1]–[3], где рассмотрены краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений в сплошном прямоугольнике или в прямоугольнике со сгущающейся перфорацией (рис. 2). Задача (1.3)–(1.6) в области, изображенной на рис. 1, порождает новые эффекты, связанные с возникновением внутренних пограничных слоев.

1.2. Несколько замечаний о структуре асимптотики. Основной особенностью поведения решений краевых задач в областях с анизотропным фрактальным строением является неполнота классического асимптотического анзаца теории осреднения – его следует уточнить, привлекая асимптотические структуры, характерные для эллиптических задач в тонких областях (см. далее пп. 2.1, 2.2). Именно такая модификация анзаца и позволила в [2], [3] справиться с построением формальной асимптотики. В сравнении с областью, изображенной на рис. 2 и рассмотренной в [3], в области на рис. 1 ячейка также утончается при удалении от основания $\{x: x_1 \in (0, a_1), x_2 = 0\}$ прямоугольника Q , однако имеющееся в ней отверстие, ширина которого уменьшается соразмерно, привносит свои особенности в асимптотический анализ. Так, асимптотические представления решения различаются на участках $\Lambda_0 \ni y_2$ и $(0, l_-) \cup (l_+, b_2) \ni y_2$. Поэтому на этих участках появляются разные предельные обыкновенные дифференциальные уравнения, моделирующие тонкую область (рис. 3), и требуется определить условия сопряжения для их решений в точках $y_2 = l_\pm$. Они возникают как условие экспоненциального затухания пограничного слоя в полосе с полубесконечным разрезом (см. рис. 4 и пп. 2.3, 2.4) и

замыкают предельную задачу, по решению которой в п. 2.5 вычисляется осредненное уравнение в частных производных на прямоугольнике Q . Условия Дирихле (1.4) и условия периодичности (1.5) наследуются осредненной задачей.

Рис. 3. Тонкий прямоугольник с отверстиями и моделирующие его отрезки

Формальная асимптотика, найденная в § 2, обоснована в § 3. Как обычно, наличие внутренней сингулярности возмущенной границы $\partial\Omega(h) \setminus Q$ с краевыми условиями Неймана (1.6) существенно усложняет (по сравнению с [2], [3]) вывод оценки асимптотического остатка в разложении решения $u(h, x)$ задачи (1.3)–(1.6). Во-первых, проверка неравенства Фридрихса на области $\Omega(h)$ оказывается не столь простой, как в случае обычной периодической перфорации. Во-вторых, дополнительные пограничные слои загромождают глобальное асимптотическое приближение $\mathfrak{U}(h, x)$ (см. п. 3.2). Оценка невязок функции $\mathfrak{U}$ в интегральном тождестве, обслуживающем задачу (1.3)–(1.6), производится в несколько этапов, а результат формулируется в теореме 3.1. Наконец, в теореме 3.2 сравниваются решения $u(h, x)$ и $u^0(x)$ задач (1.3)–(1.6) и (1.9), (1.8), глобальное приближение $\mathfrak{U}(h, x)$ очищено от “лишних” слагаемых. Отметим, что постоянные в финальных оценках (3.44) и (3.45) не зависят от правой части $f(x, y)$ уравнения (1.3), эта зависимость выделена в мажоранте явно. Точность $O(h^\varkappa)$ асимптотического приближения зависит от дифференциальных свойств функции f , принадлежащей классу Соболева–Слободецкого $H^\varkappa$ с показателем $\varkappa \in (0, 1/2]$ по переменной $x \in Q$ и пространству L_∞ по переменной $y \in S$. Последние два свойства оценок не являются обязательными в теории осреднения, но именно их проверка потребовала скрупулезной обработки невязок и усложнила доказательство.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Границы отверстий гладкие, и поэтому при гладкой правой части уравнения (1.3) решение $u(h, x)$ также ока-

Рис. 4. Полоса с полубесконечным разрезом

Рис. 5. Пограничный слой вблизи концов разреза: плоскость с параболическим вырезом

зывается гладким. Вместе с тем, у составляющей V типа пограничного слоя, возникающей при решении краевой задачи (2.18)–(2.20) в полосе с разрезом (см. рис. 4 и лемму 2.1), имеются корневые особенности градиента, обычные для областей с трещинами (см. [4]). В п. 2.6 для устранения таких особенностей в асимптотике решения конструируется еще один пограничный слой, описываемый решением задачи (2.53) на плоскости с параболическим вырезом (рис. 5), аналогичные пограничные слои уже возникали в работе [5] в задачах на тонких плоских областях с криволинейными границами. Отметим, что при оправдании асимптотики последний пограничный слой не требуется включать в глобальное асимптотическое приближение к решению, так как его H^1 -норма заведомо мала, т. е. он проявляется в младших асимптотических членах, которые в данной статье не анализируются.

1.3. Общий асимптотический анзац. Воспользуемся асимптотическим анзацем, принятым в теории осреднения (см. [6], [7] и др.):

$$u(h, x) \sim u^0(x) + hU(x, y)\nabla_x u^0(x) + \dots, \quad (1.7)$$

где $y = h^{-1}x$ – быстрая переменная, а u^0 – функция на прямоугольнике Q , подчиненная условиям Дирихле и периодичности

$$\begin{aligned} u^0(x_1, 0) = u^0(x_1, a_2) = 0, \quad x_1 \in (0, a_1), \\ u^0(0, x_2) = u^0(a_1, x_2) = 0, \quad \frac{\partial u^0}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{\partial u^0}{\partial x_1}(a_1, x_2), \quad x_1 \in (0, a_1), \end{aligned} \quad (1.8)$$

и удовлетворяющая осредненному уравнению

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x)u^0(x) := -\nabla_x^\top \mathcal{A}(x)\nabla_x u^0(x) = \mathcal{F}(x), \quad x \in Q. \quad (1.9)$$

Под $U = (U_1, U_2)$ понимаем асимптотический корректор, т. е. решение вспомогательной задачи на ячейке периодичности:

$$-\nabla_y^\top A(x)\nabla_y U(x, y) = 0, \quad y \in S_j, \quad (1.10)$$

$$n(y)^\top A(x)\nabla_y U(x, y) = -n(y)^\top A(x), \quad y \in \partial\omega_j = \partial S_j \setminus \partial Q_j. \quad (1.11)$$

Нетрудно убедиться в том, что решение такой задачи существует (среднее правой части (1.11) по границе отверстия $\omega_j = Q_j \setminus \overline{S_j}$ равно нулю), и поэтому,

применяя формально классическую процедуру осреднения, определяем выражение для (2×2) -матрицы-функции $\mathcal{A}$ из правой части (1.9):

$$(\text{mes}_2 S_j)^{-1} \int_{S_j} \{A(x) + A(x) \nabla_y U(x, y)\} dy. \quad (1.12)$$

Однако эта формула требует уточнения и непосредственно применена быть не может, так как область интегрирования S_j и решение $U = U^{(j)}$ задачи (1.10), (1.11) зависят от номера j полосы $\Pi_j(h)$, в которой располагается ячейка S_j . Далее будет показано, что матрица $\mathcal{A}(x)$, фигурирующая в осредненном уравнении (1.9), является пределом интеграла (1.12) при $j \rightarrow +\infty$, и, более того, найдено явное выражение

$$\mathcal{A} = \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2 - |\omega|} \frac{b_2 - l}{b_2 - l + A_{11} A_{22} (\det A)^{-1} \mathcal{H}} \begin{pmatrix} b_2^{-1} (b_2 - l + \mathcal{H}) A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & b_2 (b_2 - l)^{-1} A_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Здесь $l = l_+ - l_-$ и

$$\mathcal{H} = \int_{l_-}^{l_+} \mathbf{H}(y_2)^{-1} dy_2, \quad \mathbf{H}(y_2) = b_1^{-1} H(y_2). \quad (1.14)$$

§ 2. Формальная асимптотика

2.1. Асимптотический анзац в тонкой области. Поскольку при увеличении номера j ячейка $S_j(1)$ утончается, имеет смысл применить процедуру построения асимптотики решений краевых задач в тонких областях (см., например, [8], [4, § 4], [9, гл. 1]). Введем быструю переменную $\eta_j = q^j y_1$ и для решения $U^{(j)} = (U_1^{(j)}, U_2^{(j)})$ вспомогательной задачи (1.10), (1.11) примем асимптотический анзац

$$U^{(j)}(x, y) = U^0(x, y_2) + q^{-j} U^1(x, \eta_j, y_2) + q^{-2j} U^2(x, \eta_j, y_2) + \dots, \quad (2.1)$$

где $U^p = (U_1^p, U_2^p)$ – строка функций. Напомним правило дифференцирования сложной функции:

$$\nabla_x \Phi(x, h^{-1} q^j x_1, h^{-1} x) = \left(D_x + h^{-1} q^j \frac{\partial}{\partial \eta} + h^{-1} \nabla_y \right) \Phi(x, \eta, y) \Big|_{\eta = h^{-1} q^j x_1, y = h^{-1} x}. \quad (2.2)$$

В формуле (2.2) и далее, для того чтобы различать полные и частные производные, введены обозначения ∇_x и $D_x^\top = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ соответственно.

Поскольку внешняя нормаль на частях границы сжатого отверстия ω_j имеет вид

$$n^j(y_2) = [1 + q^{-2j} H'_\pm(y_2)^2]^{-1/2} (\pm 1, -q^{-j} H'_\pm(y_2)), \quad (2.3)$$

дифференциальные операторы $-\nabla_y^\top A \nabla_y$ и $(n^j)^\top A \nabla_y$ допускают следующие расщепления:

$$\begin{aligned} -\nabla_y^\top A(x) \nabla_y &= -q^{2j} \partial_\eta A_{11}(x) \partial_\eta - q^j \partial_\eta A_{12}(x) \partial_2 - q^j \partial_2 A_{21}(x) \partial_\eta - \partial_2 A_{22}(x) \partial_2, \\ [1 + q^{-2j} H'_\pm(y_2)^2]^{1/2} n^j(y_2)^\top A(x) \nabla_y &= \pm q^j A_{11}(x) \partial_\eta \pm A_{12}(x) \partial_2 - H'_\pm(y_2) A_{21}(x) \partial_\eta - q^{-j} H'_\pm(y_2) A_{22}(x) \partial_2. \end{aligned}$$

При этом $\partial_\eta = \partial/\partial\eta$, $\partial_i = \partial/\partial y_i$, $i = 1, 2$, и $H'_\pm = \partial_2 H_\pm$. Для периодических относительно η_j функций под η будет удобно понимать переменную, совпадающую с η_j в полосах $\Pi_j(h)$, $j = 1, \dots, N_2$.

Подставим анзац (2.1) в соотношения (1.10), (1.11) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра q^{-j} . В результате получим рекуррентную последовательность задач на сечениях $\Sigma(y_2)$ ячейки S . Благодаря тому, что вектор-функция U^0 из анзаца (2.1) не зависит от переменных η , первая из возникших задач с параметром y_2 имеет вид

$$-\partial_\eta A_{11}(x) \partial_\eta U^1(x, \eta, y_2) = 0 \quad \text{при} \quad \eta \in \Sigma(y_2), \quad y_2 \in [0, b_2), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} A_{11}(x) \partial_\eta U^1(x, H_+(y_2), y_2) &= -A_{12}(x) \partial_2 U^0(x, y_2) - e_1^\top A(x), \\ -A_{11}(x) \partial_\eta U^1(x, -H_-(y_2), y_2) &= A_{12}(x) \partial_2 U^0(x, y_2) + e_1^\top A(x) \quad \text{при} \quad y_2 \in \Lambda_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$U^1(x, 0, y_2) = U^1(x, b_1, y_2), \quad \partial_\eta U^1(x, 0, y_2) = \partial_\eta U^1(x, b_1, y_2) \quad \text{при} \quad y_2 \in [0, b_2]. \quad (2.6)$$

При этом e_i — орт оси y_i , т. е. $e_1^\top A$ — строка (A_{11}, A_{12}) . Решая задачу (2.4)–(2.6), определяем второй член U^1 анзаца (2.1) как линейную функцию производной $\partial_2 U^0$:

$$U^1(x, \eta, y_2) = 0 \quad \text{при} \quad y_2 \in \Lambda_+ \cup \Lambda_-, \quad (2.7)$$

$$U^1(x, \eta, y_2) = -\eta^\# A_{11}(x)^{-1} (A_{12}(x) \partial_2 U^0(x, y_2) + e_1^\top A(x)) \quad \text{при} \quad y_2 \in \Lambda_0. \quad (2.8)$$

Через $\eta^\#$ обозначаем переменную η в случае $\eta \in (0, H_+(y_2))$ и $\eta - b_1$ в случае $\eta \in (b_1 - H_-(y_2), b_1)$. Уравнение для очередного члена U^2 анзаца (2.1) имеет вид

$$-\partial_\eta A_{11}(x) \partial_\eta U^2 = F := \partial_\eta A_{12}(x) \partial_2 U^1 + \partial_2 A_{21}(x) \partial_\eta U^1 + \partial_2 A_{22}(x) \partial_2 U^0. \quad (2.9)$$

Согласно формуле (2.7) имеем $F(x, \eta, y_2) = \partial_2 A_{22}(x) \partial_2 U^0(x, y_2)$ при $y_2 \in \Lambda_+ \cup \Lambda_-$.

Уравнение (2.9) дополним условиями периодичности

$$U^2(x, 0, y_2) = U^2(x, b_1, y_2), \quad \partial_\eta U^2(x, 0, y_2) = \partial_\eta U^2(x, b_1, y_2),$$

а также следующими краевыми условиями на границе отверстия, полученными при учете формул (2.5) и (2.8):

$$\begin{aligned} A_{11}(x) \partial_\eta U^2(x, H_+(y_2), y_2) &= G_+(x, y_2) \\ &:= -A_{12}(x) \partial_2 U^1(x, H_+(y_2), y_2) + H'_+(y_2) A_{21}(x) \partial_\eta U^1(x, H_+(y_2), y_2) \\ &\quad + H'_+(y_2) A_{22}(x) \partial_2 U^0(x, y_2) + H'_+(y_2) e_2^\top A(x), \\ -A_{11}(x) \partial_\eta U^2(x, b_1 - H_-(y_2), y_2) &= G_-(x, y_2) \\ &:= A_{12}(x) \partial_2 U^1(x, b_1 - H_-(y_2), y_2) + H'_-(y_2) A_{21}(x) \partial_\eta U^1(x, b_1 - H_-(y_2), y_2) \\ &\quad + H'_-(y_2) A_{22}(x) \partial_2 U^0(x, y_2) + H'_-(y_2) e_2^\top A(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Условие разрешимости задачи (2.9), (2.10)

$$\int_{b_1 - H_-(y_2)}^{H_+(y_2)} F(x, \eta, y_2) d\eta - G_+(x, y_2) - G_-(x, y_2) = 0 \quad (2.11)$$

образует уравнение для первого члена U^0 анзаца (2.1). Именно, вне проекции отверстия на ось y_2 выполняется равенство

$$-\partial_2 A_{22}(x) \partial_2 U^0(x, y_2) = 0, \quad y_2 \in \Lambda_{\pm}, \quad (2.12)$$

а в случае $\Lambda_0 = y_2 \in (l_-, l_+)$ условие разрешимости (2.11) превращается в соотношение

$$-\partial_2 \mathbf{H}(y_2) \mathbf{A}(x) \partial_2 U^0(x, y_2) = \mathbf{F}(x, y_2), \quad y_2 \in \Lambda_0, \quad (2.13)$$

где

$$\mathbf{A}(x) = A_{22}(x) - A_{21}(x) A_{11}^{-1}(x) A_{12}(x), \quad \mathbf{F}(x, y_2) = -\partial_2 \mathbf{H}(y_2) \mathbf{A}(x) e_2^\top. \quad (2.14)$$

Естественным образом возникает требование периодичности

$$U^0(x, 0) = U^0(x, b_2), \quad (2.15)$$

$$\partial_2 U^0(x, 0) = \partial_2 U^0(x, b_2). \quad (2.16)$$

Для того чтобы замкнуть результирующую задачу, необходимо определить условия сопряжения в точках $y_2 = l_{\pm}$ для решений уравнений (2.12) и (2.13). Это делается в следующем пункте путем построения пограничного слоя. Если функция U^0 найдена, то задача (2.9), (2.10) имеет решение U^2 .

2.2. Пограничный слой в полосе с разрезом. В окрестностях точек $P_{\pm}$ введем растянутые координаты

$$(\xi_1^{\pm}, \xi_2^{\pm}) = (\eta_j, q^j(y_2 - l_{\pm})). \quad (2.17)$$

Далее для определенности рассматриваем точку P_- и вместо ξ^- и ξ_p^- для краткости пишем ξ и ξ_p . Сокращая обозначения, в этом пункте также не указываем зависимость функций от медленной переменной x .

В силу соотношений (1.1) и (1.2) область S_j , записанная в координатах (2.17), после предельного перехода $j \rightarrow \infty$ превращается в полосу $\Pi = (0, b_1) \times \mathbb{R}$ с полубесконечным разрезом $M = \{\xi: \xi_1 = H_+(l_-), \xi_2 \geq 0\}$. Формула (2.3) для внешней нормали показывает, что главным членом асимптотики правой части краевого условия (1.11) служит выражение $\mp e_1^\top A$. Потому соответствующая предельная задача для строки (V_1, V_2) , порождающей главный член пограничного слоя, имеет следующий вид:

$$-\nabla_{\xi}^\top A \nabla_{\xi} V(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi \setminus M, \quad (2.18)$$

$$\pm e_1^\top A \nabla_{\xi} V(H_+(l_-) \pm 0, \xi_2) = \mp e_1^\top A, \quad \xi_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (2.19)$$

$$V(0, \xi_2) = V(b_1, \xi_2), \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} V(0, \xi_2) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} V(b_1, \xi_2), \quad \xi_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Далее понадобятся решения такой задачи, а также однородной (скалярной) задачи (2.18)–(2.20), имеющие полиномиальное поведение на обеих бесконечностях в $\Pi \setminus M$. В силу общих результатов [10, гл. 1], [4, § 4] количество линейно независимых решений однородной задачи (2.18)–(2.20) совпадает с количеством

цилиндрических выходов на бесконечность, т. е. равно двум. Одно решение однородной задачи – постоянная $v^0 = 1$ – очевидно. Согласно [10, гл. 1], [4, § 4] другое решение v^1 допускает следующие представления:

$$v^1(\xi) = \xi_2 + o(\exp(-\delta|\xi_2|)) \quad \text{при} \quad \xi_2 < -d, \quad (2.21)$$

$$v^1(\xi) = \mathbf{a}_0(\xi_2 - A_{11}(x)^{-1}A_{12}(x)\xi_1^\#) + \mathbf{a}_1 + o(\exp(-\delta|\xi_2|)) \quad \text{при} \quad \xi_2 > d. \quad (2.22)$$

При этом $\xi_1^\#$ – величина, совпадающая с переменной ξ_1 на $(0, H_+(l_-))$ и с разностью $\xi_1 - b_1$ на интервале $(H_+(l_-), b_1)$ (ср. с определениями в (2.8)), δ и d – положительные числа (δ – малое, а d – произвольное), $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_1$ – постоянные, а соотношения (2.21), (2.22) можно дифференцировать с сохранением порядка затухания остатка. Для вычисления коэффициента $\mathbf{a}_0$ подставим v^0 и v^1 в формулу Грина для прямоугольника $(0, b_1) \times (-R, R)$ с надрезом $M_R = \{\xi: \xi_1 = H_+(l_-), \xi_2 \in [0, R]\}$ и после упрощений получим равенство

$$-\int_0^{b_1} \sum_{i=1}^2 A_{2i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} v^1 \Big|_{\xi_1=-R} d\xi_2 + \int_0^{b_1} \sum_{i=1}^2 A_{2i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} v^1 \Big|_{\xi_1=R} d\xi_2 = 0. \quad (2.23)$$

Заменяя v^1 асимптотиками (2.21) и (2.22), переходим к пределу при $R \rightarrow \infty$ и обнаруживаем, что

$$-b_1 A_{22}(x) + \mathbf{a}_0 b_1 \mathbf{A}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_0 = \mathbf{A}(x)^{-1} A_{22}(x). \quad (2.24)$$

Постоянная $\mathbf{a}_1$ зависит от матрицы A , но ее явный вид далее не понадобится. Если $A_{12}(x) = 0$, то $v^1(\xi) = \xi_2$ и $\mathbf{a}_0 = 1$, $\mathbf{a}_1 = 0$.

При $A_{12}(x) \neq 0$ производная решения v^1 имеет корневую особенность вблизи вершины разреза (именно потому в представлениях (2.21) и (2.22) введено условие $|\xi_2| > 0$). Действительно, если такой особенности нет, то в соответствии с [10, гл. 2] функция v^1 принадлежит классу Соболева H^2 в любой ограниченной части множества $\Pi \setminus M$, а значит, в силу представлений (2.21), (2.22) производная $\partial v^1 / \partial \xi_2$ вдоль разреза является ограниченным решением задачи (2.18)–(2.20) с конечным интегралом Дирихле, и поэтому $\partial v^1 / \partial \xi_2 = \text{const}$. Последнее невозможно по причине соотношений (2.24) и (2.14), а именно $\mathbf{a}_0 \neq 1$ в случае $A_{12}(x) \neq 0$.

Согласно также результатам [10, гл. 2, 5] найдется частное решение $V = (V_1, V_2)$ задачи (2.18)–(2.20), для которого

$$V(\xi) = o(\exp(-\delta|\xi_2|)), \quad \xi_2 < -d, \quad (2.25)$$

$$V(\xi) = -(\xi_1^\#, \xi_2) + C_0(\xi_2 - A_{11}^{-1}A_{12}\xi_1^\#) + C_1 + o(\exp(-\delta|\xi_2|)), \quad \xi_2 > d. \quad (2.26)$$

В (2.26) первое слагаемое служит для компенсации правой части краевого условия (2.19), $C_m = (C_{m1}, C_{m2})$ – строки, причем C_0 вычисляется при помощи приема, использованного в выкладках (2.23) и (2.24), а именно

$$\int_0^{b_1} \sum_{i=1}^2 A_{2i} \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_1=R} d\xi_2 = O(\exp(-\delta R)) \quad \Rightarrow \quad C_0 = \mathbf{A}^{-1} e_2^\top A. \quad (2.27)$$

Отметим, что ввиду разнонаправленности нормалей интегралы по берегам разреза взаимно уничтожаются.

Решение V имеет корневую сингулярность в вершине $\xi = 0$ разреза при любой матрице A . В самом деле, правая часть краевого условия (2.19) постоянна, и в случае отсутствия сингулярности производная $\partial V/\partial \xi_2$ оказывается решением однородной задачи (2.18)–(2.20), экспоненциально затухающим при $\xi_2 \rightarrow -\infty$, т. е. $\partial V/\partial \xi_2 = 0$, и нужное противоречие получено.

Теперь из уже упоминавшихся результатов [10] вытекает следующее утверждение, при формулировке которого восстанавливаем индексы $\pm$, указывающие на точки $P^\pm$. Отметим, что разрез $M_+ = \{\xi^+ : \xi_1^+ = H_+(l_+), \xi_2^+ \leq 0\}$ направлен в противоположную по сравнению с разрезом M_- сторону, а значит, в соотношениях (2.21), (2.22) и (2.25), (2.26) нужно поменять местами ограничения $\xi_2^+ < -d$ и $\xi_2^+ > d$.

ЛЕММА 2.1. Любое решение задачи (2.18)–(2.20), имеющее на бесконечности не более чем полиномиальный рост, представимо в виде

$$V^\pm(\xi^\pm) + c^{0\pm} + c^{1\pm} v^{1\pm}(\xi^\pm), \quad (2.28)$$

где $c^{m\pm}$ – постоянные строки ($c_1^{m\pm}, c_2^{m\pm}$), а $V^\pm$ и $v^{1\pm}$ – специальные решения задачи (2.18)–(2.20), гладкие всюду, кроме точки $\xi = 0$, и допускающие соответственно представления (2.25), (2.26) и (2.21), (2.22), уточненные в (2.27) и (2.24). Кроме того, для $V^\pm$ и $v^{1\pm}$ справедливы разложения

$$V^\pm(\xi) = V^\pm(0) + (\mathfrak{A}_1^\pm, \mathfrak{A}_2^\pm)|\xi|^{1/2}\Phi^\pm(|\xi|^{-1}\xi) + (\mathfrak{L}_1^\pm(\xi), \mathfrak{L}_2^\pm(\xi)) + O(|\xi|^{3/2}),$$

$$|\xi_2| < 2d, \quad (2.29)$$

$$v^{1\pm}(\xi) = v^{1\pm}(0) + (\mathfrak{a}_1^\pm, \mathfrak{a}_2^\pm)|\xi|^{1/2}\Phi^\pm(|\xi|^{-1}\xi) + \mathfrak{l}(\xi) + O(|\xi|^{3/2}), \quad |\xi_2| < 2d.$$

В формулах (2.29) $\mathfrak{A}_i^\pm$ и $\mathfrak{a}_i^\pm$ – постоянные, $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{l}$ – линейные однородные функции, а $\Phi^\pm$ – гладкие функции на разомкнутой единичной окружности. Соотношение (2.29) можно дифференцировать, считая, что $\nabla_\xi O(|\xi|^\lambda) = O(|\xi|^{\lambda-1})$. Функция $V^\pm$ гладкая (в частности, $\mathfrak{A}_i^\pm = 0$) тогда и только тогда, когда $A_{12} = 0$, но $\mathfrak{a}^\pm \neq 0$ при любой матрице A .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для определения угловых частей сингулярностей в (2.29) следует аффинным преобразованием привести оператор $\nabla_\xi^\top A(x) \nabla_\xi$ к лапласиану (см. п. 2.6) и заметить, что у решения задачи Неймана для уравнения Лапласа основная сингулярность имеет форму $\ar^{1/2} \sin(\varphi/2)$, где (r, φ) – полярные координаты с осью, направленной вдоль продолжения трещины.

2.3. Условия сопряжения в точках $y_2 = l_\pm$. Вблизи точки P^- вместо анзаца (2.1) приближением к решению U вспомогательной задачи (1.10), (1.11) возьмем линейную комбинацию (2.28), умноженную на q^{-j} в соответствии со сказанным перед формулировкой задачи (2.18)–(2.20). Применим метод сращиваемых разложений. Обработанная согласно формулам (2.21), (2.25) и (2.17) величина

$$q^{-j}V^-(\xi^-) + q^{-j}c^{0-} + q^{-j}c^{1-}v^{1-}(\xi^-) = q^{-j}c^{0-} + c^{1-}(y_2 - l_-) + \dots, \quad \xi_2^- < -d,$$

должна мало отличаться от суммы

$$U^0(y_2) + q^{-j}U^1(\eta, y_2) + \dots = U^0(l_- - 0) + (y_2 - l_-)\partial_2 U^0(l_- - 0) + \dots, \quad y_2 < l_-,$$

преобразованной при помощи формулы Тейлора и определения (2.7). Следовательно,

$$c^{0-} = q^j U^0(l_- - 0), \quad c^{1-} = \partial_2 U^0(l_- - 0). \quad (2.30)$$

Аналогично, в силу разложений (2.22), (2.26) и определений (2.8) должны приближенно совпадать величины

$$\begin{aligned} & q^{-j}V^-(\xi^-) + q^{-j}c^{0-} + q^{-j}c^{1-}q^{-j}v^{1-}(\xi^-) \\ &= q^{-j}c^{0-} - (y_1^\#, y_2 - l_-) + \mathbf{A}^{-1}(A_{21}, A_{22})(y_2 - l_- - A_{11}^{-1}A_{12}y_1^\#) \\ & \quad + c^{1-}\mathbf{A}^{-1}A_{22}(y_2 - l_- - A_{11}^{-1}A_{12}y_1^\#) + \dots, \quad \xi^- > d, \\ & U^0(x, l_- + 0) + (y_2 - l_-)\partial_2 U^0(x, l_- + 0) \\ & \quad - y_1^\# A_{11}^{-1}A_{12}\partial_2 U^0(x, l_- + 0) - y_1^\#(1, A_{11}^{-1}A_{12}) + \dots, \quad y_2 > l_-. \end{aligned}$$

Сравнивая множители при 1 и $(y_2 - l_-)$, получаем два равенства

$$c^{0-} = q^j U^0(l_- + 0), \quad (2.31)$$

$$\mathbf{A}^{-1}A_{22}c^{1-} + \mathbf{A}^{-1}e_2^\top A - e_2^\top = \partial_2 U^0(l_- + 0). \quad (2.32)$$

Отметим, что второе также обеспечивает совпадение множителей при $y_1^\#$.

Повторяя преобразования, выводим аналогичные (2.30) и (2.31), (2.32) равенства в точке $y_2 = l_+$. В результате приходим к следующим условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} & U^0(x, l_\pm \pm 0) = U^0(x, l_\pm \mp 0), \\ & A_{22}\partial_2 U^0(x, l_\pm \pm 0) + e_2^\top A - \mathbf{A}e_2^\top = \mathbf{A}\partial_2 U^0(x, l_\pm \mp 0). \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.4. Вычисление матрицы $\mathbf{A}$. Подставим первые два члена анзаца (2.1) для величин $U(x, y) = U^{(j)}(x, y, \eta_j)$ в подынтегральное выражение (1.12), записанное при помощи переменных y_1 и η . Сохраняя члены $O(1)$ по сравнению с малым параметром q^{-j} , имеем

$$\begin{aligned} & A(x) + A(x)\nabla_y U^{(j)}(x, y, \eta_j) \sim \mathbf{A}(x)e_2\{\partial_2 U^0(x, y_2) + e_2^\top\}, \quad y_2 \in \Lambda_0, \\ & A(x) + A(x)\nabla_y U^{(j)}(x, y, \eta_j) \sim A(x) + A(x)e_2\partial_2 U^0(x, y_2), \quad y_2 \in \Lambda_+ \cup \Lambda_-. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Формулы (2.12) и (2.13) показывают, что

$$\partial_2 U^0(x, y_2) = -e_2^\top + \mathbf{C}^0(x)\mathbf{H}(y_2)^{-1}\mathbf{A}(x)^{-1}, \quad y_2 \in \Lambda_0, \quad (2.35)$$

$$\partial_2 U^0(x, y_2) = \mathbf{C}^\pm(x)A_{22}(x)^{-1}, \quad y_2 \in \Lambda_\pm. \quad (2.36)$$

Ввиду условий сопряжения (2.33) и условий периодичности (2.16) строки $\mathbf{C}^0 = (\mathbf{C}_1^0, \mathbf{C}_2^0)$ и $\mathbf{C}^\pm = (\mathbf{C}_1^\pm, \mathbf{C}_2^\pm)$ связаны соотношениями

$$\mathbf{C}^0(x) = \mathbf{C}^\pm(x) + e_2^\top A(x). \quad (2.37)$$

В (2.35) использованы формулы $\mathbf{H}(\pm l_\pm) = 1$ (см. п. 1.1). Подставляя равенства (2.35), (2.36) в соотношения (2.34) и используя связь (2.37), заключаем, что

$$\begin{aligned} & A + A\nabla_y U \sim \mathbf{H}^{-1}e_2\mathbf{C}^0, \quad y_2 \in \Lambda_0, \\ & A + A\nabla_y U \sim A_{22}^{-1}\{Ae_2\mathbf{C}^0 + \det A e_1^\top e_1\}, \quad y_2 \in \Lambda_\pm. \end{aligned}$$

Следовательно, предел интеграла (1.12) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = (b_1 b_2 - |\omega|)^{-1} & \left\{ e_2 \mathbf{C}^0 \int_{l_-}^{l_+} \left(\int_0^{H_+} \mathbf{H}^{-1}(y_2) dy_1 + \int_{b_1 - H_-}^{b_1} \mathbf{H}^{-1}(y_2) dy_1 \right) dy_2 \right. \\ & \left. + b_1(b_2 - l) A_{22}^{-1} (A e_2 \mathbf{C}^0 + \det A e_1^\top e_1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Вычислим величины $\mathbf{C}_i^0$. Согласно (2.15) имеем

$$\int_0^{b_2} \partial_2 U_0(y_2) dy_2 = 0.$$

Таким образом, из формул (2.35) и (2.36) выводим, что

$$(b_2 - l) A_{22}^{-1} \mathbf{C}^\pm - l e_2^\top + \mathbf{C}^0 \mathbf{A}^{-1} \mathcal{H} = 0.$$

Теперь при учете связи (2.37) находим

$$\mathbf{C}^0 = \{b_2 - l + A_{11} A_{22} (\det A)^{-1} \mathcal{H}\} ((b_2 - l) A_{21}, b_2 A_{22}); \quad (2.39)$$

здесь $\mathcal{H}$ – величина (1.14). Подставим строку (2.39) в формулу (2.38) и после преобразований получим явное выражение (1.13) для матрицы $\mathcal{A}$ в осредненном уравнении (1.9).

ЛЕММА 2.2. Матрица (1.13) симметричная и положительно определенная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность матрицы $\mathcal{A}$ очевидна. В силу соотношения $\mathbf{H} \leq 1$ выполняется оценка $\mathcal{H} \geq l$. Поскольку $A_{11} A_{22} (\det A)^{-1} \geq 1$, имеем

$$\mathcal{A}_{11} = \frac{b_1(b_2 - l)(b_2 - l + \mathcal{H})}{(b_1 b_2 - |\omega|)(b_2 - l + A_{11} A_{22} (\det A)^{-1} \mathcal{H})} A_{11} > 0.$$

Вычисляя определитель матрицы (1.13), получаем соотношение

$$\det \mathcal{A} = \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2 - |\omega|} \det A > 0,$$

а следовательно, и положительную определенность матрицы $\mathcal{A}$.

2.5. Поправочный член пограничного слоя в полосе с разрезом.

В п. 2.4 было показано, что начальные члены пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} U^0(l_\pm) + q^{-j} \mathbf{V}^{0,\pm}(\xi^\pm), \\ \mathbf{V}^{0,\pm}(\xi^\pm) = V^\pm(\xi^\pm) + \partial_2 U^0(l_\pm \pm 0) v^{1\pm}(\xi^\pm). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Для сокращения записи мы не указываем аргумент x и далее рассматриваем только точку P_- , игнорируя индекс минус. Построим поправку к выражению (2.40) в виде

$$q^{-3j/2} \mathbf{V}^1(\xi). \quad (2.41)$$

Появление множителя $q^{-3j/2}$ связано с тем, что в силу соотношений (1.2) нормаль $n(y)$ к границе $\partial\omega_j$ “сплюсненного” отверстия направлена вдоль вектора

$$\pm e_1 + \frac{1}{2} K_- [q^{-j/2} \xi_2^{-1/2} + O(q^{-j} \xi_2^{-1})] e_2. \quad (2.42)$$

Учитывая в сумме (2.42) слагаемое $O(q^{-j/2})$, обнаруживаем, что краевое условие (1.11), примененное к анзацу (2.40), (2.41), обеспечивает соотношения

$$\pm e_1^\top A \nabla_\xi \mathbf{V}^1(\xi) = -\frac{1}{2} K_- \xi_2^{-1/2} (e_2^\top A + e_2^\top A \nabla_\xi \mathbf{V}^0(\xi)) \quad \text{при} \quad \xi_1 = H_+(l_-) \mp 0. \quad (2.43)$$

Строка $\mathbf{V}^1 = (\mathbf{V}_1^1, \mathbf{V}_2^1)$, разумеется, удовлетворяет уравнению (2.18) и условиям периодичности (2.20).

Асимптотическое представление вектор-функции $\mathbf{V}^1$ при $\xi_2 > d$ ищем в виде

$$\mathbf{V}^1(\xi) = C_0 \xi_2^{3/2} - \frac{3}{2} C_0 A_{11}^{-1} A_{22} \xi_1 \xi_2^{1/2} + C_1 + \Phi(\xi_1) \xi_2^{-1/2} + O(\xi_2^{-3/2}), \quad (2.44)$$

где C_0 и C_1 – постоянные векторы. Подставим асимптотические разложения (2.44), (2.22), (2.26) в уравнения (2.18) и (2.43), и учтем формулы (2.24), (2.27) и (2.30). В результате получим следующую задачу для определения вектор-функции Φ :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{d^2 \Phi}{d\xi_1^2}(\xi_1) - \frac{3}{4} C_0 (2A_{12} A_{11}^{-1} A_{12} + A_{22}) &= 0, \\ \xi_1 &\in (0, H_+(l_-)) \cup (H_+(l_-), b_1), \\ \pm \left\{ A_{11} \frac{d\Phi}{d\xi_1}(\xi_1) - \frac{3}{4} C_0 A_{12} A_{11}^{-1} A_{12} \xi_1 \right\} &= -\frac{1}{2} K_- (e_2^\top A + A_{22} \partial_2 U^0(l_- - 0)), \\ \xi_1 &= H_+(l_-) \mp 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Задача

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{d^2 \Phi}{d\xi_1^2}(\xi_1) &= F(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0, H_+(l_-)) \cup (H_+(l_-), b_1), \\ \pm A_{11} \frac{d\Phi}{d\xi_1}(\xi_1) &= G_\pm(\xi_1) \quad \xi_1 = H_+(l_-) \mp 0, \end{aligned}$$

разрешима в том и только в том случае, если

$$\int_0^{b_1} F(\xi_1) d\xi_1 + G(b_1) + G(0) = 0. \quad (2.46)$$

Выполнение условия (2.46) для правых частей задачи (2.45) достигается выбором вектора C_0 с постоянными компонентами, а именно

$$C_0 = \frac{4}{3} b_1^{-1} \mathbf{A}^{-1} K_- (e_2 A + A_{22} \partial_2 U^0(l_- - 0)). \quad (2.47)$$

Покажем, что условия сопряжения (2.32) обеспечивают совпадение коэффициента C_0 асимптотического разложения (2.44) вектор-функции $\mathbf{V}^1$ с коэффициентом $\bar{U}_-^0$ из следующего представления вектор-функции U^0 при $y_2 \rightarrow l_-$:

$$\begin{aligned} U^0(x, y_2) &= U^0(x, l_- - 0) + (y_2 - l_-) \partial_2 U^0(x, l_- - 0) \\ &\quad + (y_2 - l_-)^{3/2} \bar{U}_-^0(x) + \dots, \quad y_2 < l_-. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Вычислим коэффициент $\bar{U}_-^0$. Подставив формулы (2.48) и (1.2) в уравнение (2.13), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ (b_1 - 2K_-(y_2 - l_-)^{1/2}) \mathbf{A}(x) \left(\partial_2 U^0(x, l_- - 0) + \frac{3}{2} \bar{U}_-^0(x) (y_2 - l_-)^{1/2} \right) \right\} \\ = K_-(y_2 - l_-)^{1/2} \mathbf{A}(x) e_2^\top. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{U}_-^0(x) = \frac{4}{3} b_1^{-1} K_- (\partial_2 U^0(x, l_- - 0) + e_2^\top), \quad (2.49)$$

и согласно соотношениям (2.47), (2.49), (2.32) справедливо искомое равенство $\mathcal{C}_0 = \bar{U}_-^0$.

Отметим, что в силу формулы (2.8) асимптотическое разложение (2.48) влечет за собой следующее представление для функции U^1 :

$$\begin{aligned} U^1(y_2) = -y_1^\# A_{11}(x)^{-1} A_{12}(x) \partial_2 U^0(x, l_- - 0) \\ - \frac{3}{2} y_1^\# A_{11}(x)^{-1} A_{12}(x) \bar{U}_-^0(x, y_2 - l_-)^{1/2} + \dots, \quad y_2 < l_-. \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.6. Пограничный слой во внешности параболы. Как уже отмечалось в § 1, пограничный слой, построенный в п. 2.2, имеет особенность в точках $P^\pm$, но у самого решения $u(h, x)$ никаких особенностей нет. Для устранения этого дефекта асимптотических конструкций построим дополнительный пограничный слой, используя сверхбыстрые переменные

$$\zeta^\pm = (\zeta_1^\pm, \zeta_2^\pm) = q^{j\mu} (\xi_1^\pm - H_\mp(l_\pm), \xi_2^\pm). \quad (2.51)$$

Как обычно, рассмотрим только точку P^- и не будем выписывать верхний индекс. Показатель $\mu > 0$ подбираем так, чтобы в уравнениях

$$\xi_1 = H_+(q^{-j}\xi_2 + l_-), \quad \xi_1 = b_1 - H_-(q^{-j}\xi_2 + l_+), \quad (2.52)$$

описывающих границу сжатого отверстия в ячейке S_j , можно было сделать формальный переход $j \rightarrow +\infty$. Учитывая представления (1.2), обнаруживаем, что такое возможно в случае $\mu = 1$, причем уравнения (2.52) трансформируются в следующие:

$$\zeta_1 = -K_- |\zeta_2|^{1/2}, \quad \zeta_1 = K_- |\zeta_2|^{1/2}.$$

Итак, замена координат $\xi \mapsto \zeta$ порождает предельную область $\Upsilon = \{(\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_2 < K_-^{-2} \zeta_1^2\}$ – плоскость с вырезанной параболой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если кривизна дуги $\partial\omega$ в точке P^- равна нулю и вместо формул (1.2) выполняются представления

$$\begin{aligned} H_+(y_2) &= H_+(l_-) - |y_2 - l_-|^{1/(2m)} (K_- + O(|y_2 - l_-|)), \\ H_-(y_2) &= b_1 - H_-(l_-) + |y_2 - l_-|^{1/(2m)} (K_- + O(|y_2 - l_-|)) \end{aligned}$$

с некоторыми $m \in \mathbb{N}$ и $K_-^m > 0$, то $\mu = (2m - 1)^{-1}$, а вместо квадратичной параболы возникает парабола степени $2m$.

Переходя к переменным ζ из (2.51), получаем следующую задачу Неймана для пограничного слоя $q^{-j/2}Z(\zeta)$:

$$-\nabla_{\zeta}^{\top} A \nabla_{\zeta} Z(\zeta) = F(\zeta) := \nabla_{\zeta}^{\top} A \nabla_{\zeta} (\mathfrak{x}(|\zeta|) \mathfrak{t} |\zeta|^{1/2} \Phi(|\zeta|^{-1} \zeta)), \quad \zeta \in \Upsilon, \quad (2.53)$$

$$n_{\Upsilon}^{\top} A \nabla_{\zeta} Z(\zeta) = G(\zeta) := n_{\Upsilon}^{\top} A \nabla_{\zeta} (\mathfrak{x}(|\zeta|) \mathfrak{t} |\zeta|^{1/2} \Phi(|\zeta|^{-1} \zeta)), \quad \zeta \in \partial \Upsilon. \quad (2.54)$$

Здесь n_{Υ} – вектор внешней нормали к границе $\partial \Upsilon$, $\Phi = \Phi^{-}$ – функция, фигурирующая в соотношениях (2.29), $\mathfrak{x} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ – эталонная срезающая функция,

$$\mathfrak{x}(t) = 1 \quad \text{при} \quad t > \frac{2}{3}, \quad \mathfrak{x}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < \frac{1}{3}. \quad (2.55)$$

Отметим, что сглаживание особенностей асимптотической составляющей (2.40) производится простым умножением ее на срезающую функцию $\mathfrak{x}$, зависящую от сверхбыстрых переменных (2.51); при этом главные части возникающих невязок в дифференциальном уравнении (1.3) и краевом условии (1.6) компенсируются именно решением $Z(\zeta)$ задачи (2.53), (2.54). Другой вариант сглаживания особенностей вблизи вершины разреза M , опирающийся на метод сращиваемых асимптотических разложений, обсуждается в конце настоящего пункта.

В правую часть (2.53) помещена невязка, оставленная негладким слагаемым $O(|\xi|^{1/2})$ в разложении (2.29) решения (2.28) задачи в полосе с разрезом, т. е. Φ – угловая часть (см. замечание 2.1), а строка $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$ определена равенством

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{a}_1^{-} + \mathfrak{a}_1^{-} c_1^{1,-}, \mathfrak{a}_2^{-} + \mathfrak{a}_2^{-} c_2^{1,-}). \quad (2.56)$$

Отметим, что функция $\zeta \mapsto |\zeta|^{1/2} \Phi(|\zeta|^{-1} \zeta)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.53), а значит, правая часть F , порожденная умножением на срезающую функцию (2.55), имеет компактный носитель.

Пусть (ρ, φ) – полярные координаты с полярной осью, направленной вдоль оси ζ_2 , и с началом в точке $\zeta = 0$. Введем пространство $\mathcal{V}(\Upsilon)$ функций w с конечной нормой

$$\|w; \mathcal{V}(\Upsilon)\| := \|\nabla_{\zeta} w; L_2(\Upsilon)\| + \|(1 + \rho)^{-1} (1 + |\log(1 + \rho)|)^{-1} w; L_2(\Upsilon)\|.$$

Из неравенства Харди вытекает соотношение

$$\int_{\Upsilon} |\nabla_x w|^2 d\zeta + \int_{B_R \cap \Upsilon} |w|^2 d\zeta \geq C \int_{\Upsilon} (1 + \rho)^{-2} (1 + |\log(1 + \rho)|)^{-2} |w|^2 d\zeta,$$

где $B_R = \{\zeta : |\zeta| < R\}$ – круг радиусом $R > 0$.

Около бесконечности область с вырезанной параболой является возмущением угла раствора 2π . Поэтому очередное утверждение, а также упоминаемые далее оценки остатков разложений при $\rho \rightarrow \infty$ суть простые следствия общих результатов теории эллиптических краевых задач в областях с коническими (угловыми) особенностями границы (см. ключевые работы [11]–[13], [4], а также, например, монографию [10]). Упрощенные методы проверки нужных утверждений подробно, но просто описаны в [10, гл. 2].

ЛЕММА 2.3. *Если для правых частей задачи*

$$-\nabla_{\zeta}^{\top} A \nabla_{\zeta} Z(\zeta) = F(\zeta), \quad \zeta \in \Upsilon; \quad n_{\Upsilon}^{\top} A \nabla_{\zeta} Z(\zeta) = G(\zeta), \quad \zeta \in \partial \Upsilon, \quad (2.57)$$

сумма

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_\Upsilon(F, G) &= \int_\Upsilon (1 + \rho)^2 (1 + |\log(1 + \rho)|)^2 F(\zeta)^2 d\zeta \\ &\quad + \int_{\partial\Upsilon} (1 + \rho) (1 + |\log(1 + \rho)|) G(\zeta)^2 ds_\zeta \end{aligned} \quad (2.58)$$

конечна и выполняется равенство

$$\int_\Upsilon F(\zeta) d\zeta + \int_{\partial\Upsilon} G(\zeta) ds_\zeta = 0, \quad (2.59)$$

то существует единственное решение w задачи (2.57), подчиненное следующему условию ортогональности и оценке:

$$\int_{B_R \cap \Upsilon} w(\zeta) d\zeta = 0, \quad \|w; \mathcal{V}(\Upsilon)\| \leq C \mathbb{I}_\Upsilon(F, G).$$

Приведем оператор $\nabla_\xi^\top A(x) \nabla_\xi$ к лапласиану аффинным преобразованием $\zeta \mapsto \zeta_\bullet = A^{-1/2} \zeta$, где $A^{1/2}$ – положительный корень из симметрической положительно определенной матрицы A . В координатах $\zeta_\bullet$ граница области Υ остается квадратичной параболой с вектором внешней нормали $n_\Upsilon^\bullet$. Выберем полярные координаты так, чтобы область Υ определялась соотношением

$$\rho_\bullet \cos \varphi_\bullet > K_\bullet (\rho_\bullet \sin \varphi_\bullet)^2.$$

При этом функция $\zeta_\bullet \mapsto \Psi_\bullet(\rho_\bullet, \varphi_\bullet) = \rho^{1/2} \Phi(\varphi)$ приобретает вид $\Psi(\rho_\bullet, \varphi_\bullet) = \rho_\bullet^{1/2} \sin(\varphi_\bullet/2)$ (ср. замечание 2.1), а краевое условие (2.54) трансформируется в краевое условие Неймана

$$n_\Upsilon^\bullet(\zeta_\bullet)^\top \nabla_{\zeta_\bullet} Z_\bullet(\zeta_\bullet) = G(\zeta_\bullet) := n_\Upsilon^\bullet(\zeta_\bullet)^\top \nabla_{\zeta_\bullet} \left(t_0 \mathfrak{r}(|\zeta_\bullet|) \rho_\bullet^{1/2} \sin \frac{\varphi_\bullet}{2} \right). \quad (2.60)$$

Изучим правую часть краевого условия (2.60). Поскольку на границе Υ выполняются соотношения $\varphi_\bullet = \pi - K_\bullet^{-1/2} \rho_\bullet^{-1/2} + O(\rho_\bullet^{-3/2})$ и

$$\begin{aligned} &n_\Upsilon^\bullet \nabla_{\zeta_\bullet} (\rho_\bullet^M \Theta(\varphi_\bullet)) \\ &= -\operatorname{sign} \varphi_\bullet \left(M K_\bullet^{-1/2} \rho_\bullet^{-1/2} \Theta(\varphi_\bullet) \sin \varphi_\bullet - \frac{d\Theta(\varphi_\bullet)}{d\varphi_\bullet} \cos \varphi_\bullet \right) \rho_\bullet^{M-1} + O(\rho_\bullet^{M-3/2}), \end{aligned} \quad (2.61)$$

получаем

$$G(\zeta_\bullet) = \frac{1}{2} t_0 K_\bullet^{-1/2} \mathfrak{r}(|\zeta_\bullet|) \rho_\bullet^{-1} \operatorname{sign} \varphi_\bullet + O((\rho_\bullet + 1)^{-3/2}),$$

т. е. условие конечности интеграла (2.58) нарушено. Ищем решение Z в виде

$$Z(\zeta_\bullet) = \mathfrak{r}(|\zeta_\bullet|) \left(t_0 \rho_\bullet^{1/2} \sin \frac{\varphi_\bullet}{2} + \mathfrak{s} \varphi_\bullet \right) + \mathfrak{z}(\zeta_\bullet). \quad (2.62)$$

Зафиксируем постоянный вектор $\mathfrak{s}$ так, чтобы уничтожался член $O(\rho_\bullet^{-1})$ в вытекающем из (2.61) и (2.62) разложении

$$n_\Upsilon^\bullet \nabla_{\zeta_\bullet} (Z(\zeta_\bullet)) = \mathfrak{r}(|\zeta_\bullet|) \operatorname{sign} \varphi_\bullet \left(\frac{1}{2} t_0 K_\bullet^{-1/2} - \mathfrak{s} \right) \rho_\bullet^{-1} + O((\rho_\bullet + 1)^{-3/2}).$$

Новые правые части $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ задачи (2.53), (2.54) для остатка $\mathfrak{Z}$ порождают сходящийся интеграл (2.58). Поскольку они являются нечетными функциями относительно переменной $\varphi_\bullet$, условие ортогональности (2.59) выполнено автоматически, т. е. лемма 2.3 обеспечивает существование $\mathfrak{Z}$. Отметим, что из общих результатов (см. [13]) вытекают оценки

$$|\nabla_{\zeta_\bullet}^p \mathfrak{Z}(\zeta_\bullet)| \leq c_p (1 + \rho_\bullet)^{-p-1/2} (1 + \log(1 + \rho_\bullet)), \quad p = 0, 1, \dots \quad (2.63)$$

Граница области Υ гладкая, а правые части F и G принадлежат пространствам $C^\infty(\bar{\Upsilon})$ и $C^\infty(\partial\Upsilon)$ благодаря умножению на срезающую функцию $\mathfrak{r}$. Таким образом, решение $\mathfrak{Z}$ оказывается бесконечно дифференцируемым в $\bar{\Upsilon}$.

Помимо метода составных разложений, в котором сглаживание сингулярных составляющих асимптотических анзацев производится путем умножения на подходящую срезающую функцию, можно применить метод сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [14]). При этом в качестве внутреннего разложения решения $u(h, x)$ исходной задачи (1.3)–(1.6) используется выражение

$$C + h^1 q^{-j/2} (Z(\zeta_\bullet) + \mathfrak{r}(|\zeta|) \mathfrak{t} |\zeta|^{1/2} \Phi(|\zeta|^{-1} \zeta)), \quad (2.64)$$

представляющее собой неограниченное, но гладкое в $\bar{\Upsilon}$ решение однородной задачи Неймана во внешности параболы. Соотношения (2.62) и (2.63) доставляют асимптотику функции (2.64) при $\zeta \rightarrow +\infty$. В силу формул (2.29) и (2.56) старший член $O(|\zeta|^{1/2})$ этой асимптотики уже согласован с главным членом (2.40) внешнего разложения.

§ 3. Обоснование асимптотики

3.1. Весовое неравенство Фридрихса. В принципе следующее утверждение можно извлечь из книги [9, гл. 1], но для удобства читателя приведем доказательство, упрощенное благодаря специальной геометрии области $\Omega(h)$.

ЛЕММА 3.1. *Если функция u принадлежит пространству Соболева $H^1(\Omega(h))$ и аннулируется на нижнем основании $\{x: x_1 \in (0, a_1), x_2 = 0\}$ прямоугольника Q , то выполняется неравенство*

$$\|x_2^{-1} u; L_2(\Omega(h))\| \leq c \|\nabla_x u; L_2(\Omega(h))\| \quad (3.1)$$

с постоянной c , не зависящей ни от функции u , ни от параметра $h \in (0, h_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно ограничиться рассмотрением гладких функций и в конце перейти к замыканию по норме в пространстве Соболева $H^1(\Omega(h))$. Мы собираемся выпустить из точек $(x_1, 0)$ на нижнем основании прямоугольника Q ломаные со звеньями, параллельными сторонам прямоугольника Q , и заполнить ими всю область $\Omega(h)$. Одномерное неравенство Харди

$$\int_0^D s^{-2} U(s)^2 ds \leq 4 \int_0^D \left| \frac{dU}{ds}(s) \right|^2 ds, \quad U \in H_\infty^1[0, D], \quad U(0) = 0, \quad D > 0, \quad (3.2)$$

написанное для функции u на каждой ломаной (s – длина дуги) и проинтегрированное по $x_1 \in (0, b_1)$, приводит к соотношению (3.1), так как $|\partial_s u(x)| \leq |\nabla_x u(x)|$, и согласно дальнейшим построениям выполняется соотношение $s \leq c x_2$.

Рис. 6. Разбиение ячейки $S_j^p(1)$

Зафиксируем одну из ячеек $S_j^p(h) \subset Q_j^p(h)$ и построим пронизывающие ее ломаные. Растянем $S_j^p(h)$ в h^{-1} раз и разобьем полученную ячейку $S_j^p(1)$ на пять множеств $\sigma_2^\pm$, $\sigma_1^\pm$ и σ_0 (рис. 6). Подграфик σ_0 имеет основанием проекцию отверстия ω_j (сжали область ω в q^j раз вдоль оси абсцисс), а заметающие σ_0 звенья ломаных – отрезки, параллельные оси x_2 , исходящие из основания и обрывающиеся на границе отверстия. Множество σ_1^- получается после удаления объединения $\bar{\omega}_j \cup \bar{\sigma}^0$ из прямоугольника

$$\left[\frac{1}{2} q^{-j} \min_{\Lambda_0} H_+, q^{-j} H_+(l_+) \right] \times \left[0, \frac{1}{2} (b_2 + l_+) \right]. \quad (3.3)$$

Множество σ_2^- имеет форму буквы Г: из прямоугольника $[0, q^{-j} H_+(l_+)] \times [0, b_2]$ вырезается внутренность прямоугольника (3.3). Аналогично определяются фигуры σ_1^+ и σ_2^+ . Ломаные, начинающиеся на основании множеств $\sigma_1^\pm$ (или множеств $\sigma_2^\pm$), сначала поднимаются до высоты $\frac{1}{2}(b_2 + l_+) - O(q^{-j})$ (или до $\frac{1}{2}(b_2 + l_+) + O(q^{-j})$), затем поворачиваются под прямым углом в сторону отверстия и, наконец, спускаются до границы отверстия (или вновь поднимаются до верхнего основания прямоугольника Q). Нетрудно добиться того, чтобы ломаные не пересекались и заметали всю ячейку $S_j^p(1)$, за исключением множества нулевой меры.

Сожмем ячейку $S_j^p(1)$ вместе с построенными фрагментами ломаных и поместим ее на отведенное место в $\Omega(h)$. Соединяя звенья при переходе от ячейки $S_j^p(h)$ к ячейкам $S_{j+1}^{qp}(h), \dots, S_{j+1}^{qp+q-1}(h)$, восстанавливаем искомые ломаные, которые либо пронизывают $\Omega(h)$ целиком, либо обрываются на границе одного из отверстий. Лемма доказана.

Меняя на рис. 6 верх и низ, получаем семейство ломаных, исходящих из верхнего основания прямоугольника Q , и устанавливаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. Для функции $u \in H^1(\Omega(h))$, обращающейся в нуль при $x_1 \in (0, a_1)$, $x_2 = a_2$, справедливо неравенство

$$\| (a_2 - x_2)^{-1} u; L_2(\Omega(h)) \| \leq c \| \nabla_x u; L_2(\Omega(h)) \| \quad (3.4)$$

с постоянной c , не зависящей ни от функции u , ни от параметра $h \in (0, h_0]$.

Заменяя в предыдущих рассуждениях неравенство Харди (3.2) другим его вариантом

$$\begin{aligned} & \int_0^d s^{-2}(1 + |\log s|)^{-2} U(s)^2 ds + \frac{1}{hD} \int_0^{hD} U(s)^2 ds \\ & \leq c \int_0^d \left(\left| \frac{dU}{ds}(s) \right|^2 + U(s)^2 \right) ds, \quad U \in C^1[0, D], \end{aligned}$$

приходим к очередному утверждению.

ЛЕММА 3.3. Для функции $u \in H^1(\Omega(h))$ справедливо неравенство

$$\|x_1^{-1}(1 + |\log x_1|)^{-1}u; L_2(\Omega(h))\| + h^{1/2}\|u; L_2(\Omega(h) \cap \Pi_h^\pm)\| \leq c\|u; H^1(\Omega(h))\|,$$

причем $\Pi_h^\pm$ – полосы шириной Dh , примыкающие к основаниям прямоугольника Q , а постоянная c , не зависящей ни от функции u , ни от величин $h \in (0, h_0]$, $D \leq bh_0^{-1}$.

3.2. Глобальное асимптотическое приближение. Для обоснования асимптотики решения задачи (1.3)–(1.6) уточним определение правой части f уравнения (1.3). Предположим, что функция f задана формулой

$$f(h, x) = F(x, \eta_j, y_2), \quad x \in \Pi_j(h), \quad j = 1, \dots, N_2. \quad (3.5)$$

Для функции $F(x, \eta, y_2)$ при некотором показателе $\varkappa \in (0, 1/2]$ справедливо включение

$$F \in H_{\text{per}}^\varkappa(Q \rightarrow L_\infty(\Xi))^2, \quad (3.6)$$

где $H_{\text{per}}^\varkappa(Q \rightarrow L_\infty(\Xi))$ – пространство Соболева–Слободецкого абстрактных функций, периодических по переменной $x_1 \in (0, a_1]$ и имеющих конечную норму

$$\begin{aligned} \|F; H^\varkappa(Q \rightarrow L_\infty(\Xi))\| &= \left(\int_Q \sup_{(\eta, y_2) \in \Xi} |F(x, \eta, y_2)|^2 dx \right. \\ & \left. + \int_Q \int_Q \sup_{(\eta, y_2) \in \Xi} |F(x, \eta, y_2) - F(\mathbf{x}, \eta, y_2)|^2 \frac{dx d\mathbf{x}}{|x - \mathbf{x}|^{2(1+\varkappa)}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Слагаемое u^0 в асимптотическом разложении (1.7) является решением задачи (1.9), (1.8) со скалярным дифференциальным оператором $\mathcal{L} = -\nabla_x^\top \mathcal{A} \nabla_x$ и матрицей (1.13). Согласно определению (3.5) правую часть $\mathcal{F}$ уравнения (1.9) найдем по формуле

$$\mathcal{F}(x) = \bar{f}(x), \quad x \in Q. \quad (3.8)$$

Здесь и далее черта означает вычисление среднего значения, т. е.

$$\bar{T}(x) = b_1^{-1} b_2^{-1} \int_0^{b_2} \int_0^{b_1} T(x, \eta, y_2) d\eta dy_2.$$

Норму (3.7) далее кратко обозначаем $\mathbf{N}$. В силу формулы (3.8) выполнение неравенства $\|\mathcal{F}; H^\varkappa(Q)\| \leq c\mathbf{N}$. Величина $\mathbf{N}$ будет входить в мажоранты, которые появятся далее при оценивании невязок. Под $H_{\text{per}}^\varkappa(\Omega)$ подразумеваем

пространство функций из класса Соболева–Слободецкого $H^\varkappa(Q)$, удовлетворяющего условиям периодичности (1.5).

Из эллиптичности оператора $\mathcal{L}$, обеспеченной леммой 2.2, согласно общим результатам эллиптической теории (см., например, [15]) вытекает очередное утверждение.

ЛЕММА 3.4. *Если $\mathcal{F} \in H_{\text{per}}^\varkappa(\Omega)$ и $\varkappa \in (0, 1/2]$, то существует единственное решение u^0 задачи (1.9), (1.8) из пространства $H_{\text{per}}^{2+\varkappa}(\Omega)$ и верна оценка*

$$\|u^0; H^{2+\varkappa}(\Omega)\| \leq c\|\mathcal{F}; H^\varkappa(\Omega)\|. \quad (3.9)$$

С целью определить асимптотическое приближение $\mathfrak{U}$ для решения u задачи (1.3)–(1.6) введем в области $\Omega(h)$ разбиение единицы, соответствующее структуре асимптотики, построенной в § 2. Пусть $\mathfrak{x}$ – эталонная срезка (2.55). Срезающие функции χ_j , X_j и $\mathcal{X}$ зададим формулами

$$\chi_j^\pm(h, x) = 1 - \mathfrak{x}(h^{-1}(jhb_2 + hl_\pm - x_2)) - \mathfrak{x}(h^{-1}(jhb_2 + hl_\pm - x_2)), \quad (3.10)$$

$$X_j^\pm(h, x) = \mathfrak{x}(h^{-1}q^j(jhb_2 + hl_\pm - x_2)) + \mathfrak{x}(h^{-1}q^j(jhb_2 + x_2 - hl_\pm)), \quad (3.11)$$

$$X_j(h, x) = \prod_{\pm} X_j^\pm(h, x), \quad \mathcal{X}(h, x) = \mathfrak{x}(h^{-1}l_-^{-1}x_2)\mathfrak{x}(h^{-1}l_+^{-1}(a_2 - x_2)). \quad (3.12)$$

Глобальное асимптотическое приближение $\mathfrak{U}$ к решению u задачи (1.3)–(1.6) определим как сумму:

$$\mathfrak{U}(h, x) = u^0(x) + h(\mathcal{U}(x, h) + \mathcal{V}(x, h)). \quad (3.13)$$

Составляющая $\mathcal{U}$ найдена в п. 2.2 и имеет вид

$$\mathcal{U}(x, h) = \mathcal{X}(h, x) \sum_{\Pi_j(h)} X_j(h, x) \mathcal{U}^{(j)}(x, h), \quad (3.14)$$

где

$$\mathcal{U}^{(j)}(x, h) = (U^0(x, y_2) + q^{-j}U^1(x, \eta_j, y_2) + q^{-2j}U^2(x, \eta_j, y_2))\nabla_x u^0(x).$$

Составляющая

$$\mathcal{V}(x, h) = \sum_{\Pi_j(h)} \sum_{\pm} \sum_{k=1}^{q^j N_1} \chi_j^\pm(h, x) \{ \mathcal{Z}_\pm^{(j)}(x, \xi^\pm) - \mathcal{X}(h, x) \mathcal{W}_\pm^{(j)}(h, x) \} \quad (3.15)$$

включает в себя построенные в п. 2.5 члены пограничного слоя в полосе с разрезом

$$\mathcal{Z}_\pm^{(j)}(x, \xi^\pm) = U^0(x, l_\pm) + q^{-j}\mathbf{V}^{0\pm}(x, \xi^\pm) + q^{-3j/2}\mathbf{V}^{1\pm}(x, \xi^\pm).$$

Наконец, слагаемые $\mathcal{W}_\pm^{(j)}$, обеспечивающие “сращивание” пограничного слоя и старшего члена асимптотического анзаца (2.1), определены в соответствии с представлениями (2.49) и (2.50) старших члена асимптотического анзаца (2.1), а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\pm^{(j)}(h, x) = & \left(U^0(x, l_\pm \mp 0) + (l_\pm \mp y_2) \frac{\partial U^0}{\partial y_2}(x, l_\pm \mp 0) \right. \\ & + (l_\pm \mp y_2)^{3/2} \bar{U}_-^0(x) - \frac{3}{2} (l_\pm \mp y_2)^{1/2} y_1^\# A_{11}^{-1} A_{12} \bar{U}_-^0(x) \\ & \left. - y_1^\# A_{11}^{-1} A_{12} \partial_2 U^0(x, l_\pm \mp 0) - y_1^\# (1, A_{11}^{-1} A_{12}) \right) \nabla_x u^0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Члены пограничных слоев $Z^\pm$ и $\mathcal{Z}_\pm^{(j)}$ (а также обеспечивающие сращивание слагаемые $\mathcal{W}_\pm^{(j)}$ в ячейке $Q_j^k(h)$ слоя $\Pi_j(h)$ анизотропной фрактальной структуры $\Omega(h)$) определяются при помощи следующих систем координат:

$$\begin{aligned}(\xi_1^{j,k,\pm}, \xi_2^{j,k,\pm}) &= (q^j h^{-1}(jhb_2 + hl_\pm - x_2), q^j h^{-1}(H_+(l_\pm) + kb_1 - x_1)), \\(\zeta_1^{j,k,\pm}, \zeta_2^{j,k,\pm}) &= (q^{2j} h^{-1}(jhb_2 + hl_\pm - x_2), q^{2j} h^{-1}(H_+(l_\pm) + kb_1 - x_1)).\end{aligned}$$

Однако в правой части (3.15) и далее для сокращения обозначений индексы j и k не пишем.

Разность $\mathfrak{R}(h, x) = u(h, x) - \mathfrak{U}(h, x)$ истинного и приближенного решений удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}\mathfrak{R} = \mathcal{L}u - \mathcal{L}\mathfrak{U} = f - \mathcal{L}\mathfrak{U} =: \mathfrak{F}, \quad x \in \Omega(h), \quad (3.16)$$

краевым условиям Неймана

$$\mathcal{N}\mathfrak{R} = -\mathcal{N}\mathfrak{U} =: \mathfrak{G}, \quad x \in \partial\Omega(h) \setminus \partial Q, \quad (3.17)$$

а также по построению однородным условиям Дирихле (1.4) и условиям периодичности (1.5). В силу определения срезающей функции $X(h, x)$ выполнено включение $\mathfrak{R} \in \dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega(h))$, где $\dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega(h))$ – подпространство функций из соболевского класса $H^1(\Omega(h))$, удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5).

Умножим систему (3.16) на $\mathfrak{R}$ и проинтегрируем по частям в области $\Omega(h)$ при учете условий (1.4), (1.5) и (3.17). Благодаря неравенству Фридрихса (3.1) получаем соотношение

$$\begin{aligned}(f - \mathcal{L}\mathfrak{U}, \mathfrak{R})_{\Omega(h)} - (\mathcal{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{R})_{\partial\Omega(h) \setminus \partial Q} &= (AD(\nabla_x)\mathfrak{R}, D(\nabla_x)\mathfrak{R})_{\Omega(h)} \\&\geq c \|x_2^{-1}\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|^2.\end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь и далее $(\cdot, \cdot)_\Delta$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Delta)$, скалярном или векторном.

Итак, для оценки нормы $\|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|$ осталось обработать левую часть соотношения (3.18). Это будет сделано в несколько этапов: на первом этапе без учета пограничного слоя рассматривается слагаемое в левой части (3.18), содержащее интеграл по области $\Omega(h)$, а на втором этапе – слагаемое (3.18), являющееся поверхностным интегралом по $\partial\Omega(h) \setminus \partial Q$. Невязка, образованная пограничным слоем, рассматривается на третьем этапе.

3.3. Оценка невязок; первый этап. Обработаем слагаемые из левой части (3.18), которые содержат интеграл по $\Omega(h)$ и образованы функцией $\mathcal{U}$, определенной по формуле (3.14). Для удобства проинтегрируем в некоторых скалярных произведениях по частям. Полученные поверхностные интегралы рассмотрим на втором этапе вместе с поверхностным интегралом из левой части соотношения (3.18). Записывая члены, содержащие интеграл по $\Omega(h)$, при помощи правила (2.2) и группируя их, получаем следующую сумму:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N_2} \left\{ h^{-1} q^{-j} (X_j \mathcal{X} \{ \partial_\eta A_{12} \partial_2 U^2 + \partial_2 A_{21} \partial_\eta U^2 + \partial_2 A_{22} \partial_2 U^1 \right. \\&\quad \left. + q^{-j} \partial_2 A_{22} \partial_2 U^2 \} \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \right. \\&\quad \left. + h^0 [(\{D_x^\top A + D_x^\top A e_2 \partial_2 U^0 + D_x^\top A e_1 \partial_\eta U^1\right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ((Ae_2\partial_2(U^1 + q^{-j}U^2))^\top D_x)^\top \nabla_x u^0 + f, \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + ((2 - X_j - \mathcal{X})\{D_x^\top A + D_x^\top Ae_2\partial_2 U^0 + D_x^\top Ae_1\partial_\eta U^1 \\
& + ((Ae_2\partial_2(U^1 + q^{-j}U^2))^\top D_x)^\top \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + (q^{-j}X_j\mathcal{X}\{D_x^\top Ae_2\partial_2 U^1 + (AD_y(U^1 + q^{-j}U^2))^\top D_x)^\top + D_x^\top Ae_1\partial_\eta U^2 \\
& + e_1^\top \partial_\eta AD_x U^2 + q^{-j}(e_2^\top \partial_2 AD_x U^2 + D_x^\top Ae_2\partial_2 U^2)\} \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)}] \\
& + h^1[(X_j\mathcal{X}\{((AD_x\mathcal{U}^{(j)})^\top D_x)^\top + q^{-2j}D_x^\top AD_x U^2\} \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + (A(\nabla_x \mathcal{X})\mathcal{U}^{(j)} \nabla_x u^0, \nabla_x \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + ((\nabla_x^\top \mathcal{X})A(\nabla_x \mathcal{U}^{(j)} - D_x U^0 - q^{-j}D_x U^1) \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + ((\nabla_x^\top X_j)A(\nabla_x \mathcal{U}^{(j)} - \nabla_x \mathcal{W}^{(j)}) \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + (A(\nabla_x X_j)(\mathcal{U}^{(j)} - \mathcal{W}^{(j)}) \nabla_x u^0, \nabla_x \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + (A\mathcal{X}D_x\{U^0 + q^{-j}U^1\} \nabla_x u^0, \nabla_x \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)} \\
& + (A(\{X_j\mathcal{X}U^0 + q^{-j}U^1 + q^{-2j}U^2\} \nabla_x) \nabla_x u^0, \nabla_x \mathfrak{R})_{\Pi_j(h)}] \} \\
& =: \sum_{j=1}^{N_2} \{h^{-1}\mathbf{I}_1^{(j)} + h^0[\mathbf{I}_2^{(j)} + \mathbf{I}_3^{(j)} + \mathbf{I}_4^{(j)}] + h^1[\mathbf{I}_5^{(j)} + \mathbf{I}_6^{(j)} + \mathbf{I}_7^{(j)} + \mathbf{I}_8^{(j)} + \mathbf{I}_9^{(j)} + \mathbf{I}_{10}^{(j)} + \mathbf{I}_{11}^{(j)}]\}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Слагаемые порядков $h^{-1}q^j$ и $h^{-1}q^0$ в (3.19) аннулируются согласно формулам (2.4)–(2.6) и (2.9). Отметим также, что при записи невязки, содержащей составляющее анзаца (2.1), переменная η будет обозначаться через η_j в полосах $\Pi_j(h)$, $j = 1, \dots, N_2$.

Оценим слагаемые (3.19), начиная с $h^{-1}\mathbf{I}_1^{(j)}$. Согласно теореме Соболева о вложении $H^{\kappa+2} \subset C^1$ справедливо неравенство

$$\|\nabla_x u^0; C(\overline{Q})\| \leq c\|u^0; H^{\kappa+2}(Q)\|. \tag{3.20}$$

В силу определений функций U^p , данных в п. 2.1, и формулы (3.20) при любом $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$|\mathbf{I}_1^{(j)}|^2 \leq \varepsilon^{-1} \int_{\Pi_j} x^{-2} \mathfrak{R}^2 dx + \varepsilon c N^2 q^{-2j} \int_{\Pi_j} x_2^2 dx. \tag{3.21}$$

Поскольку

$$(j-1)hb_2 < x_2 \leq jhb_2, \quad x \in \Pi_j(h), \tag{3.22}$$

имеем

$$\int_{\Pi_j} x_2^2 dx \leq ch^3 q^{-2j} j^2 \leq Ch^3. \tag{3.23}$$

Просуммируем неравенства (3.21) по $j = 1, \dots, N_2$ и воспользуемся простым алгебраическим фактом: если $c_k^2 \leq \varepsilon a_k^2 + \varepsilon^{-1} b_k^2$ для всяких $\varepsilon > 0$, то при любом натуральном K выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^K c_k^2 \leq 2 \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^K b_k^2 \right)^{1/2}.$$

В результате согласно соотношениям (3.21) и (3.23), а также лемме 3.1 находим

$$h^{-1} \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_1^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^{-1}h^{3/2} \|\nabla_x \mathfrak{R}; L_2(\Omega(h))\| \leq c\mathbf{N}h^{1/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

Для обработки слагаемых $\mathbf{I}_2^{(j)}$ применим следующее утверждение, содержащееся по существу в [1, лемма 4.2].

ЛЕММА 3.5. Пусть $R \in \dot{H}_{\text{per}}^1(Q)$, $T \in H^\varkappa(Q \rightarrow L_\infty(\Xi))$. Тогда выполняется неравенство

$$\left| \int_{\Omega(h)} (T(x, y_2, \eta) - \bar{T}(x)) R(x) dx \right| \leq ch^\varkappa \|T; H^\varkappa(\Omega(h) \rightarrow L_\infty(\Xi))\| \|R; H^1(\Omega(h))\|. \quad (3.24)$$

Как и ранее, в левой части (3.24) величина η совпадает с η_j в полосах $\Pi_j(h)$. Применяя оценку (3.24) к сумме $\sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{I}_2^{(j)}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_2^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^\varkappa \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

При рассмотрении других слагаемых воспользуемся следующим вариантом неравенства Харди (см., например, [9, лемма 1.2.4]):

$$\|v; L_2(P_{dh})\| \leq c(dh)^{1/2} \|v; H^1(\Omega(h))\|; \quad (3.25)$$

здесь P_{dh} – полоса $\{0 < x_1 < a_1; p_0 < x_2 < p_1\}$, имеющая ширину $p_1 - p_0 = hd$.

Носитель срезки $1 - \mathcal{X}$ состоит из двух сегментов длиной, меньшей h , а носитель срезки $1 - \sum_{j=1}^{N_2} X_j$ состоит из N_2 сегментов длиной, меньшей hq^{-j} . Используя в каждой из $N_2 + 2$ полос, составляющих множество $(0, a_1) \times \text{supp}\{2 - \sum_{j=1}^{N_2} X_j - \mathcal{X}\}$, неравенства (3.25) и (3.20), выводим оценку

$$\sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_3^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^{1/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

Ограничения (3.22) влекут за собой соотношение

$$q^{-j}x_2 \leq ch, \quad x \in \Pi_j(h). \quad (3.26)$$

Таким образом, согласно формулам (3.20), (3.1) и (3.26), (3.9) находим

$$\sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_4^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^{1/2} \|x_2^{-1} \mathfrak{R}; L_2(\Omega(h))\| \leq c\mathbf{N}h^{1/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|, \quad (3.27)$$

$$h \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_5^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^1 \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

Обратимся к слагаемым $h\mathbf{I}_6^{(j)}$ и $h\mathbf{I}_7^{(j)}$. Согласно определению (3.12) имеем

$$|\nabla_x \mathcal{X}(h, x)| = h^{-1} |\nabla_y \mathcal{X}(y)| \leq ch^{-1}, \quad x \in \overline{\Omega(h)}. \quad (3.28)$$

Кроме того,

$$|x_2(a_2 - x_2)| \leq ch, \quad x \in \text{supp } \nabla_x \mathcal{X}. \quad (3.29)$$

Следовательно, при учете неравенств (3.28), (3.29), (3.20) и (3.25), а также неравенств (3.1) и (3.4) приходим к соотношениям

$$h \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_6^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^{1/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|, \quad h \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_7^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^{1/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

Слагаемые $h\mathbf{I}_8^{(j)}$ и $h\mathbf{I}_9^{(j)}$ отличны от нуля лишь на множествах $\sigma_{j,\pm}^h = \text{supp}(\nabla_x X_j^\pm(x, h))$. При $x \in \sigma_{j,\pm}^h$ согласно определению функции $\mathcal{W}_\pm^{(j)}$ выполняются неравенства

$$|\nabla_x^k (\mathcal{U}^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)})| \leq c(q^{-j})^{2-k} h^{2-k}. \quad (3.30)$$

В силу определения (3.11) имеем

$$|\nabla_x X_j^\pm(h, x)| = h^{-1} q^j |\nabla_y X_j^\pm(h, x)| \leq ch^{-1} q^j, \quad x \in \overline{\Pi_j(h)}. \quad (3.31)$$

Применяя к $h\mathbf{I}_8^{(j)}$ оценки (3.30), где $k = 1$, и (3.20), (3.31), а также учитывая формулу $|\sigma_{j,\pm}^h| \leq hq^{-j}$, обнаруживаем, что

$$h|\mathbf{I}_8^{(j)}| \leq ch^{3/2} q^{-j/2} \mathbf{N} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|. \quad (3.32)$$

Просуммировав неравенства (3.32) по всем ячейкам, видим, что

$$h \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_8^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^{1/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

Аналогично при помощи оценки (3.30), где $k = 0$, получаем соотношение

$$h \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_9^{(j)}| \leq c\mathbf{N}h^{3/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что слагаемые $\mathbf{I}_{10}^{(j)}$ и $\mathbf{I}_{11}^{(j)}$ подчинены соотношениям

$$h \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_{10}^{(j)}| \leq ch^1 \mathbf{N} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|, \quad h \sum_{j=1}^{N_2} |\mathbf{I}_{11}^{(j)}| \leq ch^1 \mathbf{N} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

3.4. Оценки невязок; второй этап. Теперь обработаем слагаемые в левой части (3.18), содержащие интегралы по $\partial\Omega(h)$ и образованные функцией $\mathcal{U}$ из формулы (3.14). Записывая их в соответствии с правилом (2.2), образуем сумму

$$\sum_{\pm} \sum_{j=1}^{N_2} h^0 q^{-2j} (\psi_{\pm}^{(j)} \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\partial\omega_j(h)} =: \mathbf{J}. \quad (3.33)$$

Рис. 7. Разбиение ячейки $S_j^{(p)}(h)$

При этом

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}^{(j)} = & X_j \mathcal{X}[\pm A_{12} \partial_2 U^2 - H'_{\pm} A_{21} \partial_{\eta} U^2 - H'_{\pm} A_{22} \partial_2 U^1] \\ & + h^1 [\pm e^1 A D_x U^2 - e^2 H'_{\pm} A D_x U^1] - h^0 q^{-j} e^2 A_{22} \partial_2 U^2 - h^1 q^{-j} e^2 H'_{\pm} A D_x U^2. \end{aligned}$$

Слагаемые порядков $h^0 q^0$ и $h^0 q^{-j}$ аннулируются согласно формулам (2.4), (2.5) и (2.9). Далее понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 3.6. Для функции $\mathcal{V} \in H^1(S_j^{(p)}(h))$ справедлива оценка

$$h^1 q^{-j} \int_{\partial \omega_j^{(p)}(h)} \mathcal{V}(h, x)^2 ds_x \leq c \int_{S_j^{(p)}(h)} \{h^2 q^{-2j} |\nabla_x \mathcal{V}(h, x)|^2 + |\mathcal{V}(h, x)|^2\} dx. \quad (3.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим в ячейке $S_j^{(p)}(h)$ четыре множества (рис. 7)

$$\begin{aligned} B_{j\pm}^p(h) &= \{(x_1, x_2) \in S_j^{(p)}(h) : x_2 \in \beta_{\pm}^{\pm}(h)\}, \\ T_{j\pm}^p(h) &= \{x_1 \in \gamma_p^{\pm}(h), x_2 \in \beta_j^0(h)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_j^{\pm}(h) &= (hjb_2 + hl_{\pm} - hq^{-j}, hjb_2 + hl_{\pm} + hq^{-j}), \\ \beta_j^0(h) &= (hjb_2 + hl_{-} + hq^{-j}, hjb_2 + hl_{+} - hq^{-j}), \\ \gamma_p^{+}(h) &= (hq^{-j}pb_1, hq^{-j}pb_1 + hq^{-j}H_{+}), \\ \gamma_p^{-}(h) &= (hq^{-j}(p+1)b_1 - H_{-}, hq^{-j}(p+1)b_1). \end{aligned}$$

На множестве $B_{j\pm}^p(h)$ введем координаты $(\xi_1^{\pm}, \xi_2^{\pm})$ (см. (2.17)). В области $B_{j\pm}^p(1) = \{(\xi_1^{\pm}, \xi_2^{\pm}) : (q^{-j}h^1\xi_1^{\pm}, q^{-j}h^1(\xi_2^{\pm} + l_{\pm})) \in B_{j\pm}^p(h)\}$ справедливо следовое неравенство

$$\int_{\partial B_{j\pm}^p(1) \cap \{S_j^p(1) \setminus \partial Q_j^p(1)\}} \mathcal{V}(x, h)^2 ds_{\xi^{\pm}} \leq c \int_{B_{j\pm}^p(1)} (|\nabla_{\xi} \mathcal{V}(x, h)|^2 + |\mathcal{V}(x, h)|^2) d\xi^{\pm} \quad (3.35)$$

(см., например, [16]). Переходя в интегралах (3.35) к переменным (x_1, x_2) , находим

$$\begin{aligned} & h^{-1} q^j \int_{\partial B_{j\pm}^p(h) \cap \{S_j^p(h) \setminus \partial Q_j^p(h)\}} \mathcal{V}(x, h)^2 ds_x \\ & \leq ch^{-2} q^{2j} \int_{B_{j\pm}^p(h)} (h^2 q^{-2j} |\nabla_\xi \mathcal{V}(x, h)|^2 + |\mathcal{V}(x, h)|^2) dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для доказательства формулы (3.34) в области $\overline{T_{j+}^p}(h)$ введем срезающую функцию $\theta_{h,+}^{j,p}(x) = 1 - \mathfrak{x}(h^{-1} q^j x_1 - pb_1 - H_+(h^{-1} x_2 - jb_2))$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\overline{T_{j\pm}^p}(h) \cap \partial \omega_j^{(p)}(h)} \mathcal{V}^2 ds_x = C_0 \int_{\beta_j^0(h)} \mathcal{V}^2 dx_2 = C_0 \int_{\gamma_p^+(h)} \int_{\beta_j^0(h)} \frac{\partial}{\partial x_1} (\theta_{h,+}^{j,p} \mathcal{V}^2) dx_1 dx_2 \\ & \leq C \left\{ h^{-1} q^j \int_{\gamma_p^+(h)} \int_{\beta_j^0(h)} \mathcal{V}^2 dx_1 dx_2 + \int_{\gamma_p^+(h)} \int_{\beta_j^0(h)} \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{V}^2) dx_1 dx_2 \right\} \\ & \leq C \left\{ h^1 q^{-j} \int_{\gamma_p^+(h)} \int_{\beta_j^0(h)} (\nabla_x \mathcal{V})^2 dx_1 dx_2 + h^{-1} q^j \int_{\gamma_p^+(h)} \int_{\beta_j^0(h)} \mathcal{V}^2 dx_1 dx_2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Множители C_0 и C не зависят от параметров h и j . Объединяя оценки (3.36) и (3.37) с аналогичной оценкой в области $\overline{T_{j-}^p}(h)$, приходим к (3.34). Лемма доказана.

Применим лемму 3.6 к сумме (3.33). Учитывая неравенство (3.20), имеем

$$\begin{aligned} & h^0 q^{-2j} \left| \int_{\partial \omega_j^{(p)}(h)} \psi_\pm^{(j)} \nabla_x u^0 \mathfrak{R} ds_x \right| \leq c \|\nabla_x u^0; C(\overline{\Omega})\| \left(q^{-3j} \int_{S_j^{(p)}(h)} (\psi_\pm^{(j)})^2 \mathfrak{R}^2 dx \right. \\ & \quad \left. + h^2 q^{-5j} \int_{S_j^{(p)}(h)} |\nabla_x (\psi_\pm^{(j)} \nabla_x u^0 \mathfrak{R})|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq C \left(q^{-3j} \int_{S_j^{(p)}(h)} (\psi_\pm^{(j)})^2 \mathfrak{R}^2 dx \right. \\ & \quad \left. + h^2 q^{-5j} \left\{ \int_{S_j^{(p)}(h)} |\nabla_x \psi_\pm^{(j)}|^2 \mathfrak{R}^2 dx + \int_{S_j^{(p)}(h)} |\psi_\pm^{(j)}|^2 |\nabla_x \mathfrak{R}|^2 dx \right\} \right)^{1/2} \\ & =: C (q^{-3j} \mathbf{J}_{1,\pm}^{(j,p)} + h^2 q^{-5j} \{ \mathbf{J}_{2,\pm}^{(j,p)} + \mathbf{J}_{3,\pm}^{(j,p)} \})^{1/2}. \end{aligned}$$

Для слагаемых $\mathbf{J}_{m,\pm}^{(j,p)}$, $m = 1, 2, 3$, неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{p=1}^j \sum_{\pm} |q^{-3j} \mathbf{J}_{1,\pm}^{(j,p)}| \leq c \mathbf{N}^2 h^1 \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|^2, \\ & h^2 \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{p=1}^j \sum_{\pm} |q^{-5j} \mathbf{J}_{2,\pm}^{(j,p)}| \leq c \mathbf{N}^2 h^1 \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|^2 \end{aligned}$$

выводятся аналогично соотношению (3.27) из оценок (3.1) и (3.26). Кроме того, в силу непрерывности функции $\psi_{\pm}^{(j)}$ имеем

$$h^2 \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{p=1}^j \sum_{\pm} |q^{-5j} \mathbf{J}_{3,\pm}^{(j,p)}| \leq c \mathbf{N}^2 h^2 \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|^2.$$

Итак,

$$|\mathbf{J}| \leq c \mathbf{N} h^{1/2} \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|.$$

3.5. Оценки невязки; третий этап. Теперь рассмотрим поверхностный интеграл по $\partial\Omega(h) \setminus \partial Q$ из левой части (3.18), образованный пограничным слоем. Сгруппируем эти слагаемые в удобной форме:

$$\begin{aligned} h^1 \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{p=1}^j \sum_{\pm} \{ & (\chi_j^{\pm} \{n^{\top} A \mp e^1 A\} \nabla_x (\mathcal{Z}_{\pm}^{(j)} - \mathcal{W}_{\pm}^{(j)}) \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\partial\omega_j(h)} \\ & + (n^{\top} A \nabla_x (\chi_j^{\pm}) (\mathcal{Z}_{\pm}^{(j)} - \mathcal{W}_{\pm}^{(j)}) \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\partial\omega_j^{(p)}(h)} \\ & + (n^{\top} A \chi_j^{\pm} (\mathcal{Z}_{\pm}^{(j)} - \mathcal{W}_{\pm}^{(j)}) \nabla_x \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{\partial\omega_j^{(p)}(h)} \} := h^1 \sum_{\dots} \sum_{m=1}^3 \mathbf{K}_{m,\pm}^{(j,p)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь и далее $\sum_{\dots}$ означает суммирование по индексам $j = 1, \dots, N_2$, $p = 1, \dots, j$ и символам $\pm$.

Для оценки слагаемых $\mathbf{K}_{1,\pm}^{(j,p)}$ используем лемму 3.6, а слагаемые $\mathbf{K}_{2,\pm}^{(j,p)}$ и $\mathbf{K}_{3,\pm}^{(j,p)}$ обработаем позднее, вместе с невязкой, оставленной пограничным слоем в интеграле по $\Omega(h)$ из левой части (3.18).

В силу неравенства Коши и соотношения (3.34) получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}_{1,\pm}^{(j,p)}|^2 & \leq c \left(h^0 q^j \int_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} |\mathcal{V}_{1,\pm}^{(j,p)}|^2 \mathfrak{R}^2 dx \right. \\ & \left. + \int_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} h^2 q^{-j} |\mathcal{V}_{1,\pm}^{(j,p)}|^2 (\nabla_x \mathfrak{R})^2 dx + \int_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} h^2 q^{-j} |\nabla_x \mathcal{V}_{1,\pm}^{(j,p)}|^2 \mathfrak{R}^2 dx \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $\tau_{j,\pm}^h = \text{supp}(\chi_j^{\pm}(x, h))$, а $\mathcal{V}_{1,\pm}^{(j,p)} = \chi_j^{\pm} \{n^{\top} A \mp e^1 A\} \nabla_x (\mathcal{Z}_{\pm}^{(j)} - \mathcal{W}_{\pm}^{(j)}) \nabla_x u^0$. Согласно определениям (2.3) и (3.15) имеем

$$|\mathcal{V}_{1,\pm}^{(j,p)}(h, x)| \leq c \mathbf{N} q^{-2j}, \quad |\nabla_x \mathcal{V}_{1,\pm}^{(j,p)}(h, x)| \leq c \mathbf{N} h^{-1}, \quad x \in \tau_{j,\pm}^h. \quad (3.40)$$

Просуммируем неравенства (3.39) и при учете (3.40) обнаружим, что

$$h^2 \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{p=1}^j \sum_{\pm} |\mathbf{K}_{m,\pm}^{(j,p)}|^2 \leq c \mathbf{N} h^1 \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|^2, \quad m = 1. \quad (3.41)$$

Рассмотрим теперь интегралы из левой части (3.38), образованные пограничным слоем и содержащие производные от срезающей функции $\chi_j^{\pm}$. Объединяя

их с интегралами $\mathbf{K}_{2,\pm}^{(j,p)}$ из (3.38), воспользуемся формулой интегрирования по частям и получим выражение

$$\begin{aligned} & h^1 \sum \{ (A(\nabla_x^\top \chi_j^\pm) \nabla_x ((\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)}) \nabla_x u^0), \mathfrak{R})_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} \\ & \quad + (A(\nabla_x \chi_j^\pm) (\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)}) \nabla_x u^0, \nabla_x \mathfrak{R})_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} \} := h^1 \sum_{\dots} \sum_{m=4}^5 \mathbf{K}_{m,\pm}^{(j,p)}. \end{aligned}$$

В силу определения (3.10) имеем

$$|\nabla_x \chi_j^\pm(h, x)| \leq ch^{-1}, \quad x \in \overline{\tau_{j,\pm}^h(h)}. \quad (3.42)$$

Применив к интегралам $\mathbf{K}_{4,\pm}^{(j,p)}$ и $\mathbf{K}_{5,\pm}^{(j,p)}$ неравенства (3.42), (3.20), (3.25) и просуммировав по индексу j , находим

$$h^2 \sum_{\dots} |\mathbf{K}_{m,\pm}^{(j,p)}|^2 \leq cN h^1 \|\mathfrak{R}; H^1(\Omega(h))\|^2, \quad m = 4, 5. \quad (3.43)$$

Оставшуюся часть невязки, порожденной пограничным слоем:

$$h^1 \sum_{\dots} (\chi_j^\pm \{ 2A \nabla_x (\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)}) \nabla_x^\top \nabla_x u^0 + A(\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)}) \nabla_x^\top \nabla_x \nabla_x u^0 \}, \mathfrak{R})_{S_j^{(p)}},$$

объединим с интегралами $\mathbf{K}_{3,\pm}^{(j,p)}$ из (3.38). Интегрируя по частям, запишем эту сумму в виде

$$\begin{aligned} & h^1 \sum_{\dots} \{ -((\nabla_x^\top \chi_j^\pm) A(\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)}) \nabla_x \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} \\ & \quad + ((\chi_j^\pm A \nabla_x^\top (\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)}) - (\nabla_x^\top A)(\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)})) \nabla_x \nabla_x u^0, \mathfrak{R})_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} \\ & \quad - (\chi_j^\pm A \nabla_x (\mathcal{Z}_\pm^{(j)} - \mathcal{W}_\pm^{(j)}) \nabla_x u^0, \nabla_x \mathfrak{R})_{S_j^{(p)} \cap \tau_{j,\pm}^h(h)} \} := h^1 \sum_{\dots} \sum_{m=6}^8 \mathbf{K}_{m,\pm}^{(j,p)}. \end{aligned}$$

Для оценки $\mathbf{K}_{6,\pm}^{(j,p)}$ используем неравенства (3.42), (3.20), (3.25) и, просуммировав по j , приходим к формуле (3.43) с $m = 6$.

Слагаемые $\mathbf{K}_{7,\pm}^{(j,p)}$ и $\mathbf{K}_{8,\pm}^{(j,p)}$ обработаем при помощи неравенства (3.39). Применив к правой части полученного выражения оценки (3.40), выводим соотношение (3.41) при $m = 7, 8$.

3.6. Основные теоремы об асимптотике. В предыдущих пунктах были оценены все выражения, составляющие левую часть (3.18). В итоге получено соотношение

$$\|\mathfrak{R}^h; H^1(\Omega(h))\|^2 \leq c \|F; H^\kappa(Q \rightarrow L_\infty(\Xi))\| \|\mathfrak{R}^h; H^1(\Omega(h))\|.$$

Таким образом, верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть матрица-функция A и функция f^h удовлетворяют указанным выше предположениям, в частности для правой части f^h уравнения (1.3) выполнено представление (3.5) с функцией F , удовлетворяющей

включению (3.6) с показателем гладкости $\varkappa \in (0, 1/2]$. Тогда справедлива оценка

$$\|u - \mathfrak{U}; L_2(\Omega(h))\| + \|\nabla_x(u - \mathfrak{U}); L_2(\Omega(h))\| \leq c_\varkappa h^\varkappa \|F; H_{\text{per}}^\varkappa(Q \rightarrow L_\infty(\Xi))\|, \quad (3.44)$$

где множитель $c_\varkappa$ не зависит от функции F и параметра $h \in (0, 1]$.

Глобальное асимптотическое приближение (3.13) содержит члены, введенные только для технических целей. Срезающие функции и решения типа пограничного слоя нужны для обеспечения достаточной гладкости используемого асимптотического приближения и подстановки его в интегральное тождество, обслуживающее задачу (1.3)–(1.6). Вместе с тем, в окончательных асимптотических формулах для решения $u \in H^1(\Omega)^2$ и его градиента “лишние” члены можно убрать. Так, вычисляя непосредственно нормы каждого из слагаемых в (3.13) и присоединяя к остатку несущественные, приходим к значительно более простым асимптотическим формулам.

ТЕОРЕМА 3.2. В прежних условиях и обозначениях справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u - u_0; L_2(\Omega(h))\| + \|\nabla_x u - \nabla_x u_0 - u \nabla_x u_0; L_2(\Omega(h))\| \\ & \leq c_\varkappa h^\varkappa \|F; H_{\text{per}}^\varkappa(Q \rightarrow L_\infty(\Xi))\|, \end{aligned} \quad (3.45)$$

в котором $u = (\partial_\eta, 0)U^1 + (0, \partial_{y_2})U^0$ (переменная η совпадает с η_j в полосах $\Pi_j(h)$), а множитель $c_\varkappa$ не зависит от F и $h \in (0, 1]$.

Список литературы

1. С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, “Разветвляющаяся периодичность: осреднение задачи для эллиптической системы”, *Докл. РАН*, **397**:6 (2004), 743–747; англ. пер.: S. A. Nazarov, A. S. Slutsii, “Branching periodicity: homogenization of the Dirichlet problem for an elliptic system”, *Dokl. Math.*, **70**:1 (2004), 628–631.
2. С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, “Осреднение эллиптической системы при утончении ячеек периодичности в одном направлении”, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 878–891; англ. пер.: S. A. Nazarov, A. S. Slutsii, “Homogenization of an elliptic system as the cells of periodicity are refined in one direction”, *Math. Notes*, **78**:5–6 (2005), 814–826.
3. С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, “Осреднение эллиптической системы при сгущающейся перфорации области”, *Алгебра и анализ*, **17**:6 (2005), 125–160; англ. пер.: S. A. Nazarov, A. S. Slutsii, “Homogenization of an elliptic system under condensing perforation of the domain”, *St. Petersburg Math. J.*, **17**:6 (2005), 989–1014.
4. С. А. Назаров, “Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов”, *УМН*, **54**:5 (1999), 77–142; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and an algebraic description of their attributes”, *Russian Math. Surveys*, **54**:5 (1999), 947–1014.
5. С. А. Назаров, “Асимптотика решений эллиптических уравнений в тонких областях с кусочно гладкой границей”, *Дифференциальные уравнения и их приложения. Вып. 33.*, Изд-во АН ЛитССР, Вильнюс, 1982, 62–83.
6. Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: E. Sánchez-Palencia, *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Phys., **127**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.

7. Н. С. Бахвалов, Г. А. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N.S. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenisation: Averaging processes in periodic media*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **36**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
8. С. А. Назаров, “Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких”, *Алгебра и анализ*, **7:5** (1995), 1–92; англ. пер.: S. A. Nazarov, “General averaging procedure for selfadjoint elliptic systems in many-dimensional domains, including thin ones”, *St. Petersburg Math. J.*, **7:5** (1995), 681–748.
9. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
10. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в кусочно гладких областях*, Наука, М., 1991; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.
11. В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, Тр. ММО, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, “Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **16** (1967), 227–313.
12. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками”, *Math. Nachr.*, **76:1** (1977), 29–60.
13. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе”, *Math. Nachr.*, **81:1** (1978), 25–82.
14. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. M. Il’in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
15. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
16. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.

С. А. НАЗАРОВ (S. A. NAZAROV)

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

E-mail: sergnazarov@yahoo.co.uk; serna@snark.ipme.ru

Поступило в редакцию

11.02.2008

А. С. СЛУЦКИЙ (A. S. SLUTSKIY)

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

E-mail: slutskij@gmail.com