Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, Всплески в пространствах гармонических функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 1, 145–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:04:04

УДК 517.51+517.538.2

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Всплески в пространствах гармонических функций

В статье на основе базисов всплесков Мейера [1] построены ортогональные базисы всплесков пространств h_p ($1 \leq p \leq \infty$) функций, гармонических в единичном круге $|z| < 1$ и гармонических в кольце $0 < \rho < |z| < 1$, частичные суммы рядов Фурье по которым обладают аппроксимативными свойствами, сравнимыми с наилучшими приближениями гармоническими полиномами.

Библиография: 10 наименований.

Пусть, как в [1] и [2], неотрицательная четная дважды дифференцируемая функция $\hat{\varphi}(t)$ удовлетворяет условиям: $\hat{\varphi}(t) \equiv 1$ при $|t| < (1 - \varepsilon)/2$, $\hat{\varphi}(t) \equiv 0$ при $|t| \geq (1 + \varepsilon)/2$, $\hat{\varphi}^2(t - 1/2) - 1/2$ нечетна при $|t| < \varepsilon/2$, где $0 < \varepsilon \leq 1/3$, а неотрицательная функция $\hat{\theta}(t)$ определяется соотношением $\hat{\theta}^2(t) = \hat{\varphi}^2(t/2) - \hat{\varphi}^2(t)$. Отметим, что $\hat{\theta}(t)$ тогда будет дважды дифференцируемой функцией, равной нулю при $|t| \leq (1 - \varepsilon)/2$ и при $|t| \geq (1 + \varepsilon)$. Положим

$$\varphi(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi})(x), \quad \theta(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{\theta})(x), \quad \psi(x) = \theta\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad (1)$$

где $\mathcal{F}^{-1}$ – оператор обратного преобразования Фурье,

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{2\pi ixt} dt.$$

Далее $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ обозначают множества целых, целых неотрицательных, натуральных чисел, $j, k, l, m, n, \nu, \mu, s$ – целые числа.

Напомним (см. [1], [2]), что функции φ и ψ порождают ортонормированные системы целых, быстро убывающих функций

$$\{2^{j/2}\varphi(2^jx + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \{1, 2^{j/2}\psi(2^jx + k); (k, j) \in \mathbb{Z}^2\},$$

вторая из которых является ортонормированным базисом всплесков всех пространств $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, и $C_0(\mathbb{R})$, а их периодизации порождают ортонормированные на $(0, 2\pi)$ системы тригонометрических полиномов

$$\{\Phi_{jk}(x) : 0 \leq k < 2^j\}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad \{1, \Psi_{jk}(x) : 0 \leq k < 2^j, j \in \mathbb{Z}_+\}, \quad (2)$$

$$\Phi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2^j}\right) e^{2\pi i\nu k/2^j} e^{i\nu x}, \quad (3)$$

$$\Psi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right) e^{2\pi i\nu(k+0,5)/2^j} e^{i\nu x}, \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (Международная ассоциация содействия сотрудничеству с учеными независимых государств бывшего Советского Союза), грант INTAS-94-4070.

вторая из которых является ортонормированным базисом всплесков всех пространств $L^p(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$, и $C[0, 2\pi]$. При этом, как показано в [2], для частных сумм порядка N

$$\begin{aligned} S_N(x, f) &= f_0 + \sum_{\substack{0 \leq 2^l + m < N, \\ 0 \leq m < 2^l}} \sum_{l \geq 0} f_{lm} \Psi_{lm}(x) \\ &\equiv \sum_{0 \leq m < 2^j} F_{jm} \Phi_{jm}(x) + \sum_{m=0}^{k-1} f_{jm} \Psi_{jm}(x), \quad N = 2^j + k, \quad 0 \leq k < 2^j, \end{aligned} \quad (5)$$

функций $f \in L^p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, $L^\infty = C$, справедливы оценки

$$\|f - S_N(f)\|_{L^p(0, 2\pi)} \leq C E_{N/6}(f)_{L^p}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Здесь и далее через $E_\sigma(f)_{L^p}$ обозначено наилучшее приближение в $L^p(0, 2\pi)$ (в $C_{(0, 2\pi)}$ при $p = \infty$) функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq \sigma$. Тожество в (5) равносильно разложению пространства $V_j = \text{span}\{\Phi_{jm} : 0 \leq m < 2^j\}$ на ортогональную сумму подпространств $V_0 = \{\text{const}\}$ и $W_l = \text{span}\{\Psi_{lm} : 0 \leq m < 2^l\}$, $l = 0, 1, \dots, j-1$, или, иначе говоря, равносильно представлению ядра Дирихле

$$\mathcal{D}_N(x, t; \Psi) := 1 + \sum_{\substack{0 \leq l, \\ 0 \leq m < 2^l}} \sum_{l+m < N} \Psi_{lm}(x) \Psi_{lm}(t) \quad (7)$$

в виде

$$\mathcal{D}_N(x, t; \Psi) = \mathcal{D}_{2^j}(x, t; \Phi) + \sum_{m=0}^{k-1} \Psi_{jm}(x) \Psi_{jm}(t), \quad N = 2^j + k, \quad 0 \leq k < 2^j, \quad (8)$$

где

$$\mathcal{D}_{2^j}(x, t; \Phi) := \sum_{0 \leq m < 2^j} \Phi_{jm}(x) \Phi_{jm}(t),$$

и вторая сумма при $k = 0$ считается равной нулю. На этом пути с помощью интегрирования (κ раз) по частям интегралов в правых частях (1) для $\mathcal{D}_N(x, t; \Psi)$ в [2] были получены оценки

$$|\mathcal{D}_N(x, t)| \leq C \frac{2^j}{(1 + 2^j |\sin(x - t)|)^\kappa}, \quad N = 2^j + k, \quad 0 \leq k < 2^j, \quad (9)$$

с фиксированной константой $\kappa \geq 2$ и конечной константой $C = C(\widehat{\varphi})$, зависящей только от κ и $\widehat{\varphi}$. Отсюда вытекает ограниченность констант Лебега (норм операторов $S_N(f)$ из $L_p(0, 2\pi)$ в $L_p(0, 2\pi)$), что вместе со спецификой функции $\widehat{\varphi}(t)$, обеспечивающей для тригонометрических полиномов τ порядка $\leq 2^{j-1}(1-\varepsilon)$ тождество $S_N(x, \tau) \equiv \tau(x)$, $N = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, и позволило получить оценки (6) с конечной константой $C = C(\kappa, \widehat{\varphi})$.

1. Базис пространства функций, гармонических в круге. Гармонические в круге $K(|z| < 1)$ вещественнозначные функции $u(z)$ ($z = re^{ix}$), удовлетворяющие при фиксированном p , $1 \leq p \leq \infty$, условию

$$\|u\|_p := \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad \|u\|_\infty = \sup_{z \in K} |u(z)| < \infty, \quad (10)$$

имеют почти всюду на окружности $|z| = 1$ угловые граничные значения $u(e^{ix})$. Пространство таких функций при $1 < p < \infty$ будем обозначать через h_p . Известно (см., например, [4] или [5]), что при $1 \leq p \leq \infty$ 2π -периодическая функция $u(e^{ix})$ принадлежит пространству $L_p(0, 2\pi)$ и через нее при $1 < p \leq \infty$ гармоническая функция $u(z)$ восстанавливается с помощью интеграла Пуассона

$$u(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x-t)+r^2} dt$$

и разлагается в ряд

$$u(re^{ix}) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} r^\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad (11)$$

равномерно сходящийся к $u(z)$ внутри круга K , а при $1 < p < \infty$ – также по норме $\|\cdot\|_p$ (10) и по норме пространства $L^p(0, 2\pi)$ на границе круга K (здесь a_ν, b_ν – коэффициенты Фурье функции $u(e^{ix})$). Отметим, что в топологии равномерной сходимости внутри K для любой гармонической в K функции $u(z)$ справедливо разложение в ряд (11) с коэффициентами a_ν, b_ν , являющимися действительными и мнимыми частями коэффициентов ряда Маклорена аналитической функции $f(z)$, для которой $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Однако в целом, во всем круге K , ряд (11) при этом может не сходиться ни в какой метрике $\|\cdot\|_p$. Условие (10) при $p = 1$ обеспечивает в общем случае представление $u(z)$ только в виде интеграла Пуассона–Стилтьеса. Обозначим через h_1 пространство гармонических в круге K функций, удовлетворяющих условию (11), для которых соответствующая функция ограниченной вариации в интеграле Пуассона–Стилтьеса абсолютно непрерывна, или, иначе говоря, представимых интегралом Пуассона с $u(e^{ix}) = f(x) \in L_1(0, 2\pi)$. Через h_p при $p = \infty$ обозначим пространство функций, гармонических в K и непрерывных в замкнутом круге $\bar{K}$. Для функций из h_1 и h_∞ ряды (11) могут не сходиться по соответствующей норме $\|\cdot\|_p$.

Таким образом, система гармонических функций $\{1, r^\nu \cos \nu x, r^\nu \sin \nu x: \nu = 1, 2, \dots\}$ образует естественный базис пространства всех гармонических в круге K функций относительно равномерной внутри K сходимости и базис всех пространств h_p , кроме h_1 и h_∞ . Отметим также, что в силу ограниченности констант Лебега тригонометрической системы в $L_p(0, 2\pi)$ при $1 < p < \infty$ частичные суммы $s_n(x; u)$ порядка n рядов (11) аппроксимируют в h_p функции $u(z)$ по порядку как гармонические полиномы наилучшего приближения:

$$\|u - s_n(u)\|_p \leq c_p E_n(u(e^{ix}))_{L_p(0, 2\pi)} \leq c_p E_n(u)_p.$$

Далее будут построены полиномиальные базисы, обладающие этим свойством во всех h_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Положим для $z = re^{ix}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k < 2^{j-1}$, $\alpha_{00}(z) = r \cos x$, $\tilde{\alpha}_{00} = r \sin x$,

$$\alpha_{jk}(z) = 2^{-(j/2)+1} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} r^\nu \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right) \cos \frac{2\pi\nu(k+0,5)}{2^j} \cos \nu x, \quad j \geq 1, \quad (12)$$

$$\tilde{\alpha}_{jk}(z) = 2^{-(j/2)+1} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} r^\nu \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right) \cos \frac{2\pi\nu(k+0,5)}{2^j} \sin \nu x, \quad j \geq 1, \quad (13)$$

где $\hat{\theta}(t)$ – определенная выше функция. При каждом $j \in \mathbb{Z}_+$ это гармонические полиномы порядка $< (1 + \varepsilon)2^j$. При $r = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_{00}(ix) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{00}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\Psi_{00} + \Psi_{0,-1}(x)), \\ \alpha_{jk}(e^{ix}) &= \frac{1}{2} (\Psi_{jk}(x) + \Psi_{j,-k-1}(x)), \quad j \geq 1, \end{aligned} \quad (14)$$

а $\tilde{\alpha}_{jk}(e^{ix})$ – тригонометрически сопряженные полиномы. Система алгебраических полиномов (см. [1])

$$1, \quad \alpha_{jk}(z) = \alpha_{jk}(z) + i\tilde{\alpha}_{jk}(z), \quad 0 \leq j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq k < 2^{j-1}, \quad (15)$$

образует ортонормированный базис пространств Харди $H_p(K)$, аналитических в круге K функций, $1 \leq p \leq \infty$.

Определим для функций $u(z), v(z) \in h_2(K)$ скалярное произведение (u, v) формулой

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{ix}) \overline{v(e^{ix})} dx. \quad (16)$$

Функции u и v вещественнозначные, поэтому знак сопряжения под интегралом можно не ставить. Отметим, что если $v(z)$ является ограниченной функцией, то (u, v) определено для всех функций $u(z) \in h_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Поэтому каждой функции $u(z) \in h_p$, $1 \leq p \leq \infty$, можно однозначно поставить в соответствие ряд

$$u_0 + \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \sum_{0 \leq m < 2^{l-1}} U_{lm}(z), \quad (17)$$

полагая $U_{lm}(z) = u_{lm}\alpha_{lm}(z) + \hat{u}_{lm}\tilde{\alpha}_{lm}(z)$, $u_0 = (u, 1/2)$, $u_{lm} = (u, \alpha_{lm})$, $\hat{u}_{lm} = (u, \tilde{\alpha}_{lm})$.

Через $S_n(z, u)$ при $n \geq 1$ будем обозначать частичную сумму порядка n ряда (17), включая в нее u_0 и все члены ряда с допустимыми индексами l и m ($0 \leq l$, $0 \leq m < 2^{l-1}$), для которых $2^{l-1} + m < n$, т.е. в S_n будем включать кроме u_0 еще n первых членов двойного ряда при их лексикографическом упорядочении. В частности, будем иметь $S_1(z, u) = u_0 + u_{00}(z)$, а $S_{2^j}(z, u)$ будет содержать u_0 и все слагаемые u_{lm} при $0 \leq l \leq j$, $0 \leq m < 2^{l-1}$ и только их. Положим также $S_0(z, u) \equiv u_0$.

Напомним, что через $E_\sigma(u)_{L^p}$ мы обозначали наилучшее приближение граничных значений $u(e^{ix})$ функции $u(z)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq \sigma$

($\sigma \in \mathbb{R}_+$) в $L^p(0, 2\pi)$. Договоримся еще через h_p^m , $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, обозначать класс гармоничных в K функций $u(re^{ix})$, у которых $\frac{\partial^m}{\partial x^m} u(re^{ix}) \in h_p$, и для краткости вместо $\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} u(re^{ix})$ писать $\mathcal{D}^\nu u(z)$.

Часто фигурирующее в дальнейшем число ε , $0 < \varepsilon \leq 1/3$, фиксированное. Оно связано с определенной в самом начале работы исходной функцией И. Мейера: $(-(1-\varepsilon)/2, (1-\varepsilon)/2)$ – наибольший интервал, на котором $\hat{\varphi}(t) \equiv 1$, где $\hat{\varphi}(t)$ – любая выбранная из построенных им для $\varepsilon = 1/3$ функций. Условие на гладкость $\hat{\varphi}$ в контексте этой работы можно так же, как в [2], ослабить, потребовав лишь абсолютную непрерывность $\hat{\varphi}'(t)$ или даже только абсолютную непрерывность $\hat{\varphi}(t)$ и ограниченность вариации $\hat{\varphi}'(t)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Система гармонических полиномов

$$\{1/\sqrt{2}, \alpha_{jk}(z), \tilde{\alpha}_{jk}(z) : j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq k < 2^{j-1}\} \quad (18)$$

является ортонормированным относительно скалярного произведения (16) базисом всех пространств h_p^m , $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$. При этом для функций $u(z) \in h_p^m$ при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{D}^\nu(u(z) - S_n(z, u))\|_p \leq C_\nu(n^\nu E_{n/3}(u)_{L_p} + E_{n/3}(\mathcal{D}^\nu u)_{L_p}), \quad 0 \leq \nu \leq m, \quad (19)$$

с конечными константами $C_\nu = C_\nu(\hat{\varphi}) \leq C_m(\hat{\varphi})$, зависящими лишь от ν и $\hat{\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ортогональности на $(0, 2\pi)$ второй из систем (2), равенств (14) и очевидных тождеств $\psi_{jk}(x) \equiv \psi_{jm}(x)$ ($k \equiv m \pmod{2^j}$) вытекает ортогональность системы $\{1/\sqrt{2}, \alpha_{jk} : 0 \leq j, \quad 0 \leq k < 2^{j-1}\}$. Полиномы $\tilde{\alpha}_{jk}(e^{ix})$ нечетные, поэтому они ортогональны всем функциям этой системы. Они ортогональны также между собой, так как $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$, если u или v ортогональны константе. Для α_{00} , $\tilde{\alpha}_{00}$ и $1/\sqrt{2}$ условия нормировки очевидны, а при $j \geq 1$

$$(\tilde{\alpha}_{jk}, \tilde{\alpha}_{jk}) = (\alpha_{jk}, \alpha_{jk}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\psi_{jk}^2 + \psi_{j, -k-1}^2) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{jk}^2(x) dx = 1.$$

Из ортонормированности системы (18) следует, что ряд (17) является рядом Фурье по этой системе функции $u(z) \in h_p$. Если $u(z)$ – вещественная часть аналитической в круге K функции $f(z) \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$, с граничными значениями $f(e^{it})$ и $s_n(z, f)$ – частная сумма порядка n функции $f(z)$ по системе (15), то

$$S_N(z, u) = \operatorname{Re} s_N(z, f). \quad (20)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \bar{A}_n(e^{it}) dt A_n(z) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) (\alpha_n(e^{it}) \alpha_n(z) + \tilde{\alpha}_n(e^{it}) \tilde{\alpha}_n(z)) dt \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{it}) (\tilde{\alpha}_n(e^{it}) \alpha_n(z) - \alpha_n(e^{it}) \tilde{\alpha}_n(z)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) (\alpha_n(e^{it}) \alpha_n(z) + \tilde{\alpha}_n(e^{it}) \tilde{\alpha}_n(z)) dt, \end{aligned}$$

ибо $(\tilde{u}, v) = -(u, \tilde{v})$, откуда вытекает (20). Поэтому сам факт, что система (18) является базисом h_p при $1 < p \leq \infty$, вытекает из того, что система (15) является базисом пространств $H_p(K)$. При $p = 1$ отсюда же следует, что система (18) является базисом подпространства пространства h_1 , состоящего из гармонических функций $u(z)$ вида $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $f(z) \in H_1(K)$.

Так как система (18) ортогональная, то полное утверждение теоремы об ее базисности будет вытекать из оценок (19), которые и составляют фактическое содержание теоремы и к доказательству которых мы переходим. При этом мы будем опираться на идеи работы [2].

Обозначим через $\mathcal{D}_{2^j} = \mathcal{D}_{2^j}(x, t, \alpha, \tilde{\alpha})$ ядро Дирихле по системе (18) для частных сумм $S_{2^j}(z, u)$ порядка 2^j , $j \geq 0$,

$$\mathcal{D}_{2^j} = \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^j \sum_{\substack{0 \leq m < 2^{l-1} \\ m \in \mathbb{Z}_+}} \mathcal{A}_{lm}(x, t), \quad (21)$$

где

$$\mathcal{A}_{lm}(x, t) = \alpha_{lm}(e^{it})\alpha_{lm}(e^{ix}) + \tilde{\alpha}_{lm}(e^{it})\tilde{\alpha}_{lm}(e^{ix}). \quad (22)$$

Докажем предварительно две леммы.

С помощью определенной в начале работы функции $\hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_\varepsilon(t)$, κ раз непрерывно дифференцируемой с конечным носителем $((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$, определим функции

$$\begin{aligned} B(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}^2)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}^2(t) e^{ixt} dt, \\ C(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}\left(t - \frac{1}{2}\right) \hat{\varphi}\left(t + \frac{1}{2}\right) e^{2\pi i x t} dt, \end{aligned} \quad (23)$$

где функция $\lambda(t) = \lambda_\varepsilon(t) = \hat{\varphi}(t - 1/2)\hat{\varphi}(t + 1/2)$ четная, κ раз непрерывно дифференцируемая, с носителем $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$. $B(x)$ и $C(x)$ – целые функции экспоненциального типа, достаточно быстро убывающие на бесконечности. Через $B_j(x)$ и $C_j(x)$ обозначим 2π -периодизацию функций $2^j B(2^j x)$ и $2^j C(2^j x)$ соответственно, т.е. полиномы

$$\begin{aligned} B_j(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^j B(2^j(x + 2\pi l)) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}^2\left(\frac{\nu}{2^j}\right) e^{i\nu x}, \\ C_j(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^j C(2^j(x + 2\pi l)) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \lambda\left(\frac{\nu}{2^j}\right) e^{i\nu x}. \end{aligned} \quad (24)$$

ЛЕММА 1.1. Для ядер Дирихле (21) при всех x и t справедливы оценки

$$|\mathcal{D}_{2^j}(x, t, \alpha, \hat{\alpha})| \leq \frac{1}{2} |B_{j+1}(x-t)| + |C_{j+1}(x+t)|, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (12) и (13) имеем при $l \geq 1$

$$\begin{aligned} A_l(x, t) &:= \sum_{m=0}^{2^{l-1}-1} \mathcal{A}_{lm}(x, t) \\ &= 2^{-l+2} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \hat{\theta}\left(\frac{\mu}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^l}\right) \cos(\mu t - \nu x) (\Delta_l(\mu - \nu) + \Delta_l(\mu + \nu)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_l(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2^{l-1}-1} \cos(m + 0, 5) \frac{2\pi\xi}{2^l} \\ &= \frac{\sin \pi\xi}{4 \sin \frac{\pi\xi}{2^l}} = \begin{cases} 0, & \xi \in \mathbb{Z}, \quad \xi \neq k2^l, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^k 2^{l-2}, & \xi = k2^l, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как точки $\mu/2^l, \nu/2^l$, для которых $\mu - \nu = k2^l, k \neq 0$, и $\mu + \nu = k2^l, k \neq 1, k \neq 2$, лежат вне носителя функции $\hat{\theta}(t)$, то

$$\begin{aligned} A_l(x, t) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \hat{\theta}^2\left(\frac{\nu}{2^l}\right) \cos \nu(x - t) - \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(1 - \frac{\nu}{2^l}\right) \\ &\quad \times \cos(\nu x - (2^l - \nu)t) + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(2 - \frac{\nu}{2^l}\right) \cos(\nu x - (2^{l+1} - \nu)t). \end{aligned}$$

Заменяя здесь во второй и третьей суммах переменную суммирования ν на $2^{l-1} + s$ и на $2^l + s$ соответственно, представим их в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2^l}\right) \cos(2^{l-1}(x - t) + s(x + t)), \\ &\sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(1 + \frac{s}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(1 - \frac{s}{2^l}\right) \cos(2^l(x - t) + s(x + t)). \end{aligned}$$

Отметим, что фактически все суммы здесь конечные, так как $\text{supp } \hat{\theta}(t)\hat{\theta}(1 - t) = ((1 - \varepsilon)/2, (1 + \varepsilon)/2)$, $\text{supp } \hat{\theta}(t)\hat{\theta}(2 - t) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, и поэтому формальное несоответствие пределов суммирования по ν и по s здесь только кажущееся. Далее, так как по (22) $\mathcal{A}_{lm}(x, t) \equiv \mathcal{A}_{lm}(t, x)$, то окончательно получаем

$$\begin{aligned} A_l(x, t) &= \frac{1}{2} (A_l(x, t) + A_l(t, x)) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \hat{\theta}^2\left(\frac{\nu}{2^l}\right) \cos \nu(x - t) \\ &\quad - \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2^l}\right) \cos 2^{l-1}(x - t) \cos s(x + t) \\ &\quad + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(1 + \frac{s}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(1 - \frac{s}{2^l}\right) \cos 2^l(x - t) \cos s(x + t). \end{aligned}$$

Отметим, что так как $\hat{\theta}^2(1) = 1/2$, $\hat{\theta}^2(\nu) = 0$ при $\nu \in \mathbb{Z}_+, \nu \neq 1$, $\hat{\theta}^2(1 + s)\hat{\theta}^2(1 - s) = 0$ при $s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, то формула для $A_l(x, t)$ будет верной

и для $A_0(x, t) = A_{00}(x, t) = \cos(x - t)$, если в ней при $l = 0$ опустить вычитаемую (вторую) сумму.

Подставим полученное выражение для $A_l(x, t)$ в (21) и поменяем порядки суммирования по ν , l и по s и l . Учитывая, что $\hat{\theta}^2(t) = \hat{\varphi}^2(t/2) - \hat{\varphi}^2(t)$, получим, что коэффициент перед $\cos \nu(x - l)$ в $\mathcal{D}_{2j}(x, l, \alpha, \tilde{\alpha})$ будет равен

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^j \hat{\theta}^2\left(\frac{\nu}{2^l}\right) &= \sum_{l=0}^j \left(\hat{\varphi}^2\left(\frac{\nu}{2^{l+1}}\right) - \hat{\varphi}^2\left(\frac{\nu}{2^l}\right) \right) \\ &= \hat{\varphi}^2\left(\frac{\nu}{2^{j+1}}\right) - \hat{\varphi}^2(\nu) = \begin{cases} \varphi^2\left(\frac{\nu}{2^{j+1}}\right), & \nu \neq 0, \\ 0, & \nu = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее, в сумме по $s \in \mathbb{Z}$ перед $\cos s(x + t)$ будет множитель

$$\begin{aligned} \beta_s(x, t) &= \sum_{l=0}^j \hat{\theta}\left(1 + \frac{s}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(1 - \frac{s}{2^l}\right) \cos 2^l(x - t) \\ &\quad - \sum_{l=1}^j \hat{\theta}\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2^l}\right) \hat{\theta}\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2^l}\right) \cos 2^{l-1}(x - t). \end{aligned}$$

Так как при $|t| < \varepsilon/2$ и $0 < \varepsilon \leq 1/3$

$$\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2} \pm \frac{1}{4}\right) = 1, \quad \hat{\varphi}^2\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\hat{\varphi}^2\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2},$$

то

$$\begin{aligned} &\hat{\theta}\left(t + \frac{1}{2}\right) \hat{\theta}\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\hat{\varphi}^2\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) - \hat{\varphi}^2\left(t + \frac{1}{2}\right) \right)^{1/2} \left(\hat{\varphi}^2\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) - \hat{\varphi}^2\left(t - \frac{1}{2}\right) \right)^{1/2} \\ &= \left(1 - \hat{\varphi}^2\left(t + \frac{1}{2}\right) \right)^{1/2} \left(1 - \hat{\varphi}^2\left(t - \frac{1}{2}\right) \right)^{1/2} = \hat{\varphi}\left(t - \frac{1}{2}\right) \hat{\varphi}\left(t + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Вне интервала $|t| < \varepsilon/2$ оба произведения обращаются в нуль, так что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\hat{\theta}\left(\frac{1}{2} + t\right) \hat{\theta}\left(\frac{1}{2} - t\right) = \hat{\varphi}\left(\frac{1}{2} + t\right) \hat{\varphi}\left(\frac{1}{2} - t\right) =: \lambda(t).$$

Аналогично, учитывая, что при $|t| < \varepsilon$ $\hat{\varphi}(t \pm 1) = 0$, получаем

$$\hat{\theta}(1 + t) \hat{\theta}(1 - t) = \hat{\varphi}\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right) = \lambda\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \beta_s(x, t) &= \sum_{l=0}^j \lambda\left(\frac{s}{2^{l+1}}\right) \cos 2^l(x - t) - \sum_{l=1}^j \lambda\left(\frac{s}{2^l}\right) \cos 2^{l-1}(x - t) \\ &= \lambda\left(\frac{s}{2^{j+1}}\right) \cos 2^j(x - t). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{2j}(x, t, \alpha, \tilde{\alpha}) &= \frac{1}{2} + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\varphi}^2 \left(\frac{\nu}{2^{j+1}} \right) \cos \nu(x - t) \\ &\quad + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda \left(\frac{s}{2^{j+1}} \right) \cos 2^j(x - t) \cos s(x + t),\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}_{2j}(x, t, \alpha, \tilde{\alpha})| &\leq \left| \frac{1}{2} + \sum_{\nu \geq 1} \tilde{\varphi}^2 \left(\frac{\nu}{2^{j+1}} \right) \cos \nu(x - t) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda \left(\frac{s}{2^{j+1}} \right) \cos s(x + t) \right| = \frac{1}{2} |B_{j+1}(x - t)| + |C_{j+1}(x + t)|,\end{aligned}$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 1.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Для любой функции $u(z) \in h_p$ и любого натурального n справедлива оценка

$$\|S_n(z, u)\|_p \leq C \|u\|_p$$

с конечной константой C , зависящей лишь от $\hat{\varphi}_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, $j \geq 0$. Тогда

$$S_n(e^{ix}, u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \mathcal{D}_n(x, t, \alpha, \tilde{\alpha}) dt,$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n(x, t, \alpha, \tilde{\alpha}) &= \mathcal{D}_{2j}(x, t, \alpha, \tilde{\alpha}) + R_{j+1,k}(x, t), \\ R_{j+1,k}(x, t) &= \sum_{m=0}^{k-1} (\alpha_{j+1,m}(e^{ix}) \alpha_{j+1,m}(e^{it}) + \tilde{\alpha}_{j+1,m}(e^{ix}) \tilde{\alpha}_{j+1,m}(e^{it})),\end{aligned}$$

и по лемме 1.1

$$|\mathcal{D}_n(x, t, \alpha, \tilde{\alpha})| \leq \frac{1}{2} |B_{j+1}(x - t)| + |C_{j+1}(x + t)| + |R_{j+1,k}(x, t)|. \quad (26)$$

Оценим каждое из этих слагаемых по известной схеме.

Из (23), интегрируя правую часть $\kappa \geq 2$ раз по частям, получаем

$$|B(x)| \leq \min \left\{ \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}^2 dt = 1, \quad \frac{1}{|x|^\kappa} \int_{\mathbb{R}} |(\tilde{\varphi}^2)^{(\kappa)}(t)| dt \right\} \leq \frac{C_1}{(1 + |x|)^\kappa},$$

где $C_1 = C((\tilde{\varphi}^2)^{(\kappa)})$. Подставляя это в (24) и учитывая характер монотонности последовательности $(1 + 2^j|x - 2\pi l|)^{-\kappa}$, $l \in \mathbb{Z}$, при $0 \leq x \leq \pi$ выводим оценки

$$\begin{aligned}|B_j(x)| &\leq C_1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{2^j}{(1 + 2^j|x - 2\pi l|)^\kappa} \leq C_1 \left(\frac{3 \cdot 2^j}{(1 + 2^j x)^\kappa} + 2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2^j}{(1 + 2^j(2\pi l - x))^\kappa} \right) \\ &\leq C_1 \left(\frac{3 \cdot 2^j}{(1 + 2^j x)^\kappa} + \frac{1}{\pi} \int_{2\pi}^{\infty} \frac{2^j d\xi}{(1 + 2^j(\xi - x))^\kappa} \right) \\ &= C_1 \left(\frac{3 \cdot 2^j}{(1 + 2^j x)^\kappa} + \frac{1 + 2^j(2\pi - x)}{\pi(1 + 2^j(2\pi - x))^\kappa} \frac{1}{(\kappa - 1)} \right) < 6C_1 \frac{2^j}{(1 + 2^j x)^\kappa}.\end{aligned}$$

Так как $B_j(x)$ – четная функция и $|x| > |\sin x|$, то при любом x

$$|B_j(x)| \leq \frac{6C_1 2^j}{(1 + 2^j |\sin x|)^\kappa}; \quad (27)$$

$C_j(x)$ оценивается так же:

$$|C_j(x)| \leq \frac{6C_2 2^j}{(1 + 2^j |\sin x|)^\kappa}, \quad (28)$$

только константа $C_2 = C_2(\kappa, \hat{\varphi})$ будет определяться величиной интегралов $\int_{\mathbb{R}} |(\hat{\varphi}(t - 1/2)\hat{\varphi}(t + 1/2))^{(k)}| dt$, $k = 0, \kappa$.

Для оценки $R_{j,k-1}(x, t)$, $0 \leq k < 2^{j-1}$, $j \geq 1$, воспользуемся представлением (14) для α_{jm} :

$$\begin{aligned} |R_{j,k-1}(x, t)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2^j-1} |\Psi_{jm}(x)\Psi_{jm}(t)| + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2^j-1} |\tilde{\Psi}_{jm}(x)\tilde{\Psi}_{jm}(t)| \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} |\Psi_{jm}(x)\Psi_{j,-m-1}(t)| + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} |\tilde{\Psi}_{jm}(x)\tilde{\Psi}_{j,m-1}(t)| \\ &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + \frac{1}{4}(R_3 + R_4). \end{aligned}$$

Первая сумма R_1 оценена в [2],

$$R_1 \leq C_3 2^j (1 + 2^j |\sin(x - t)|)^\kappa, \quad (29)$$

где $C_3 = C_3(\kappa, \hat{\varphi})$. Остальные из выписанных сумм оцениваются по той же схеме. Детальную оценку проведем только для последней суммы R_4 , наиболее отличной от первой. Из (4) следует, что

$$\tilde{\Psi}_{jm}(x) = 2^{-j/2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} \nu) \hat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right) e^{2\pi i m \nu / 2^j} e^{i \nu x},$$

и, значит, $\tilde{\Psi}_j(x)$ есть 2π -периодизация функции $2^{j/2} \tilde{\theta}(2^j x)$, где

$$\tilde{\theta}(x) = \int_{\mathbb{R}} (-i \operatorname{sign} t) \tilde{\theta}(t) e^{ixt} dt,$$

а $\tilde{\Psi}_{jm}(x) = \tilde{\Psi}_{j0}(x + 2\pi m / 2^j)$. Так как $\hat{\theta}(t) = 0$ в окрестности точки $t = 0$, то вместе с $\hat{\theta}(t)$ будет $\kappa \geq 2$ раз непрерывно дифференцируемой и функция $\operatorname{sign} t \hat{\theta}(t)$. Отсюда, так же как для $B_j(x)$, получим оценку

$$|\tilde{\Psi}_{j,0}(x)| \leq 6C_1(\hat{\theta}) \frac{2^{j/2}}{(1 + 2^j |\sin x|)^\kappa}, \quad |x| \leq \pi, \quad (30)$$

аналогичную оценке

$$|\Psi_{j,0}(x)| \leq 6C(\hat{\theta}) \frac{2^{j/2}}{(1 + 2^j |\sin x|)^\kappa}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Сразу отметим, что такая оценка функций $\Psi_{j,0}(x)$ в [2] предшествовала указанной оценке для R_1 . Поэтому можно утверждать, что

$$\frac{1}{2}(R_1 + R_2) \leq C_3 2^j (1 + 2^j |\sin(x - t)|)^{-\kappa},$$

и сразу написать аналогичную оценку для R_3 и R_4 . Но для удобства читателя (тем более, что в [2] сам переход от (31) к (29) опущен) выполним этот простой переход в случае R_4 .

Полагая $\xi_m = 2\pi m/2^j$, $\tau = t - 2\pi/2^j$, в силу тождеств $\tilde{\Psi}_{j,m}(x) = \tilde{\Psi}_{j,0}(x + \xi_m)$, $\tilde{\Psi}_{j,-m-1}(t) = \tilde{\Psi}_{j,0}(t - \xi_{m+1}) = \tilde{\Psi}_{j,0}(\tau - \xi_m)$ и неравенства (30) при всех x, t будем иметь

$$R_4 \leq \sum_{m=0}^{2^j-1} \frac{6C(\hat{\theta})2^j}{(1 + 2^j |\sin(x + \xi_m)|)^\kappa (1 + 2^j |\sin(\tau - \xi_m)|)^\kappa}.$$

Из разложения $\sin(x + \tau)$ по дугам $(x + \xi_m)$, $(\tau - \xi_m)$ получаем

$$|\sin(x + \tau)| \leq |\sin(x + \xi_m)| + |\sin(\tau - \xi_m)|,$$

и, следовательно, для любого m либо $|\sin(x + \xi_m)| \geq (1/2) \sin|x + \tau|$, либо $|\sin(\tau - \xi_m)| \geq (1/2) \sin|x + \tau|$. Поэтому

$$R_4 \leq \frac{2^j}{(1 + 2^j |\sin(x + \tau)|)^\kappa} (W_j(x) + W_j(-\tau)),$$

где

$$W_j(\xi) = \sum_{m=0}^{2^j-1} \frac{6C(\hat{\theta})}{(1 + 2^j |\sin(\xi + \xi_m)|)^\kappa}.$$

Из π -периодичности, четности относительно $\xi = \pi/2$ функции $|\sin \xi|$ и ее возрастания на $(0, \pi/2)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} W_j(\xi) &\leq 4 \sum_{m \in [0, \pi/2]} \frac{6C(\hat{\theta})}{(1 + 2^j |\sin \xi_m|)^\kappa} \leq 4 \sum_{\xi_m \in [0, \pi/2]} \frac{6C(\hat{\theta})}{(1 + 2^j \frac{2}{\pi} \xi_m)^\kappa} \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{24C(\hat{\theta})}{(1 + 4m)^\kappa} = C_4(\kappa, \hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Из (31) вытекают такие же оценки для R_3 , так что

$$\frac{1}{4}(R_3 + R_4) \leq \frac{C_4(\kappa, \hat{\varphi})2^j}{(1 + 2^j |\sin(x + t - 2\pi/2^j)|)^\kappa},$$

и, следовательно,

$$R_{j,k}(x, t) \leq 2C_4(\kappa, \widehat{\varphi}) 2^j \left\{ (1 + 2^j |\sin(x - t)|)^{-\kappa} + \left(1 + 2^j \left| \sin\left(x + t - \frac{2\pi}{2^j}\right) \right| \right)^{-\kappa} \right\}.$$

Подставляя это и (27), (28) в (26), окончательно получаем оценку

$$|\mathcal{D}_{2^j}(x, t, \alpha, \tilde{\alpha})| \leq \frac{2^{j+1}C_5}{(1 + 2^{j+1}|\sin(x - t)|)^\kappa} + \frac{2^{j+1}C_5}{(1 + 2^{j+1}|\sin(x + t - \pi/2^j)|)^\kappa} \quad (32)$$

с константой $C_5 = C(\kappa, \widehat{\varphi})$, не зависящей от j, x, t .

Для завершения доказательства леммы 1.2 положим $2^{j+1}(1 + 2^{j+1}|\sin t|)^{-\kappa} = d_{j+1}(t)$. В силу (32)

$$\begin{aligned} |S_n(e^{ix}; u)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \mathcal{D}_n(x, t, \alpha, \tilde{\alpha}) dt \right| \\ &\leq C_5 \left\{ (|u(e^{it})| * d_{j+1}(t))(x) + \left(|u(e^{-it})| * d_{j+1}\left(t - \frac{\pi}{2^j}\right) \right)(x) \right\}, \end{aligned}$$

где $(u * v)(x)$ – свертка функций u и v . Применяя далее неравенство треугольника и известную оценку для нормы свертки

$$\|u * v\|_{L^p} \leq \|v\|_L \|u\|_{L^p}, \quad u \in L^p(0, 2\pi), \quad v \in L(0, 2\pi),$$

получаем оценку

$$\|S_n(e^{ix}; u)\|_{L^p} \leq 2C_5 \|d_{j+1}\|_L \|u(e^{it})\|_{L^p}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \|d_{j+1}\|_L &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2^{j+1} dt}{(1 + 2^{j+1}|\sin t|)^\kappa} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2^{j+1} dt}{(1 + 2^{j+1}\sin t)^\kappa} \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2^{j+1} dt}{(1 + \frac{2}{\pi} 2^{j+1}t)^\kappa} < \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi)^\kappa} < \infty. \end{aligned}$$

Так как для гармонических в круге K функций $u(z)$ нормы

$$\|u(re^{ix})\|_{L^p}^p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < r < 1,$$

с ростом r не убывают, то для $u(z) \in h_p$

$$\|u\|_p = \|u\|_{h_p} = \|u(e^{ix})\|_{L^p}.$$

Поэтому

$$\|S_n(z; u)\|_p \leq C(\kappa, \widehat{\varphi}) \|u\|_p.$$

Фиксируя κ (например, $\kappa = 2$), получаем отсюда утверждение леммы 1.2.

Продолжим доказательство теоремы 1.1.

Используя представление (25) ядра $\mathcal{D}_{2j}(x, t, \alpha, \tilde{\alpha})$, в котором часть, содержащая гармоники $\cos \nu t$ с $\nu \leq 2^j(1-\varepsilon)$, совпадает с тригонометрическим ядром Дирихле, заключаем, что частичные суммы $S_n(z, u)$ порядка $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, сохраняют на месте гармонические полиномы

$$T_N(z) = \sum_{\nu=0}^N r^\nu (a_\nu \cos \nu x - b_\nu \sin \nu x), \quad z = re^{ix},$$

порядка $N \leq 2^j(1-\varepsilon)$, где $2^j(1-\varepsilon) \geq ((1-\varepsilon)/2)n \geq n/3$. Отсюда и из ограниченности в h_p норм $\|S_n\|_p$ операторов $S_n: u(z) \rightarrow S_n(z, u)$, $1 \leq p \leq \infty$, доказанной в лемме 1.2, как и в случае тригонометрических рядов Фурье при $1 < p < \infty$, выводится неравенство (19) теоремы 1.1 при $m = 0$. Действительно, пусть $T_N(z, u) = T_N(u)$ – гармонический полином порядка $N \leq 2^j(1-\varepsilon)$ наилучшего приближения функции $u(z)$ в h_p . Тогда для $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$,

$$\begin{aligned} \|u - S_n(u)\|_p &= \|u - T_N(u) + S_n(T_N(u) - u)\|_p \\ &\leq (1 + \|S_n\|_p) \|u - T_N(u)\|_p \leq (1 + C) E_N(u)_p, \end{aligned}$$

где $E_N(u)_p = E_N(u(e^{ix}))_{L_p(0, 2\pi)}$.

Из сохранения оператором S_n гармонических полиномов порядка N следует, в частности, его перестановочность с оператором дифференцирования $\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x}(z = re^{ix})$: $\mathcal{D}^\nu S_n(z, T_N) = S_n(z, \mathcal{D}^\nu T_N)$.

Пусть $u(z) \in h_p^m$, $m \geq 1$, и V_n – любой линейный полиномиальный оператор в h_p^m , перестановочный с оператором дифференцирования: $\mathcal{D}V_n(z, u) = V_n(z, \mathcal{D}u)$. Тогда $\mathcal{D}^\nu V_n(z, u) = V_n(z, \mathcal{D}^\nu u)$ для любого $\nu \leq m$, и если V_n сохраняет полиномы порядка N , то

$$\mathcal{D}^\nu (u - S_n(u)) = (\mathcal{D}^\nu u - V_n(\mathcal{D}^\nu u)) + (\mathcal{D}^\nu V_n(u) - \mathcal{D}^\nu S_n(u)),$$

и так как $\mathcal{D}^\nu u(z) \in h_p$ при $u(z) \in h_p^m$ и $0 \leq \nu \leq m$, то

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\nu u - V_n(\mathcal{D}^\nu u)\|_p &= \|(\mathcal{D}^\nu u - T_{\nu, N}) + V_n(T_{\nu, N} - \mathcal{D}^\nu u)\|_p \\ &\leq (1 + \|V_n\|_p) \|\mathcal{D}^\nu u - T_{\nu, N}\|_p, \end{aligned}$$

и по неравенству Бернштейна–Зигмунда для полиномов порядка M

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\nu (V_n(u) - S_n(u))\|_p &\leq M^\nu \|V_n(u) - S_n(u)\|_p \\ &= M^\nu \|V_n(u - T_N) + S_n(T_N - u)\|_p \leq (\|V_n\|_p + \|S_n\|_p) M^\nu \|u - T_N\|_p. \end{aligned}$$

При $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, $S_n(z, u)$ – гармонический полином порядка $\leq M = [2^{j+1}(1+\varepsilon)]$. В качестве $V_n(z, u)$ при $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, возьмем, например,

$$V_n(z, u) = \frac{1}{2} (u(re^{it}) * B_{j+1}(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) B_{j+1}(x-t) dt$$

с ядром (24). Так как $\text{supp } \widehat{\varphi}^2(t) = (1 + \varepsilon)/2$ и $\widehat{\varphi}(t) \equiv 1$ при $|t| < (1 - \varepsilon)/2$, то это полиномиальный оператор, переводящий функции $u(z)$ в гармонические полиномы порядка $[2^j(1 + \varepsilon)] \leq M$ и сохраняющий полиномы порядка $N \leq 2^j(1 - \varepsilon)$, к тому же в силу оценки (27) $\|B_{j+1}\|_{L(0, 2\pi)} \leq C(\widehat{\varphi})$ при всех $j \geq -1$, $\|V_n(z, u)\|_p \leq C(\widehat{\varphi})\|u\|_p$, т.е. $\|V_n\|_p \leq C(\widehat{\varphi})$, $n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Выбирая в только что проведенных оценках в качестве V_n такой оператор, а в качестве $T_{\nu, N}$ и T_N — полиномы наилучшего приближения в h_p функций $\mathcal{D}^\nu u(z)$ и $u(z)$ и учитывая, что $M = [2^{j+1}(1 + \varepsilon)] \leq 2(1 + \varepsilon)(2^j + k) = 2(1 + \varepsilon)n$, окончательно получаем для $u(z) \in h_p$ при любом целом ν , $0 \leq \nu \leq m$, и $1 \leq m \leq \infty$ оценку

$$\|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))\|_p \leq C(E_N(\mathcal{D}^\nu u)_p + 4^\nu N^\nu E_N(u)_p) \quad (33)$$

с константой C , зависящей только от некоторой функции $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_\varepsilon$. Теорема 1.1 полностью доказана.

В теореме 1.1 даны оценки скорости сходимости $S_n(z, u)$ к $u(z)$ во всем круге K , включая его границу. Внутри круга сходимость должна быть быстрее. Положим

$$\|u\|_{r,p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dt \right)^{1/p}.$$

Для гармонических в круге K функций $\|u\|_{r,p} = \sup\{\|u\|_{\rho,p} : 0 < \rho \leq r\}$, так что эта норма характеризует величину функции $u(z)$ в круге K_r ($|z| \leq r$).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Для гармонических функций $u(z) \in h_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 0$, и частичных сумм $S_n(z, u)$ их разложений по системе (18) справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))\|_{r,p} &\leq C_\nu r^{n/3} (E_{n/3}(\mathcal{D}^\nu u)_p + n^\nu E_{n/3}(u)_p), \\ 0 < r &\leq 1, \quad 0 \leq \nu \leq m, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

с константами $C_\nu = C_\nu(\widehat{\varphi}) < C_m(\widehat{\varphi}) < \infty$, не зависящими от n , r , p и $u(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $u(z)$ из h_p и $S_n(z, u)$ представимы через свои граничные значения интегралом Пуассона:

$$u(re^{ix}) - S_n(re^{ix}, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(e^{it}) - S_n(e^{it}, u)) P(re^{i(x-t)}) dt, \quad (34)$$

где $P(re^{it})$ — ядро Пуассона,

$$P(re^{it}) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \cos \nu t.$$

Так как оператор S_n при $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, сохраняет на месте полиномы $T_N(re^{ix})$ порядка $N \leq 2^j(1 - \varepsilon)$, то разность $h(e^{it}) - S_n(e^{it}, u)$ ортогональна

любому тригонометрическому полиному $T_N(e^{ix})$. Поэтому равенство сохранится, если в нем под интегралом заменить $P(re^{i(x-t)})$ на $P(re^{i(x-t)}) - T_N(e^{i(x-t)})$. Применяя теорему о норме свертки, получаем отсюда оценку

$$\|u - S_n(u)\|_{r,p} \leq \|u - S_n(u)\|_p E_N(P(re^{it}))_{L(0,2\pi)}.$$

Наилучшее приближение в L^1 ядра Пуассона найдено Н.И. Ахиезером и М.Г. Крейном (см., например, [3]), его доставляет полином T_N , интерполирующий $P_r(e^{it}) = (1 - r^2)(1 - 2r \cos t + r^2)^{-1}$ в нулях $\cos(N+1)t$ (автоматически с переменной знака), так что

$$E_N(P(re^{it}))_L = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{(2k+1)(N+1)}}{2k+1} < \frac{4}{\pi} r^{N+1}.$$

Следовательно, для $u(z) \in h_p$

$$\|u - S_n(u)\|_{r,p} \leq \frac{4}{\pi} r^{N+1} \|u - S_n(u)\|_p.$$

Если $u(z) \in h_p^m$ и $\nu \leq m$, то $\mathcal{D}^\nu u(z) \in h_p$ и в только что проведенных рассуждениях можно всюду заменить $u - S_n(u)$ на $\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))$ и получить неравенство

$$\|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))\|_{r,p} \leq \frac{4}{\pi} r^{N+1} \|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))\|_p.$$

Отсюда и из теоремы 1.1 вытекает утверждение следствия.

По хорошо известной теореме Фавара о наилучших приближениях тригонометрическими полиномами функций $f(x)$ класса $W^r(0, 2\pi)$ и ее обобщению С.М. Никольским на классы $W_p^r(0, 2\pi)$ справедлива оценка

$$E_N(f)_{L^p} \leq \frac{K_\nu}{N^\nu} E_N(f^{(\nu)})_{L^p}.$$

Поэтому в неравенствах теоремы 1.1 и следствия 1.1 можно опускать слагаемое $n^\nu E_{n/3}(u)_p$, увеличив константу, т.е. справедливо следующее предложение.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Для гармонических функций $u(z) \in h_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$, и частичных сумм $S_n(z, u)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))\|_{r,p} &\leq (C_\nu + K_\nu) r^N E_N(\mathcal{D}^\nu u)_p \\ &\leq (C_\nu + K_\nu) K_{m-\nu} \frac{r^N}{N^{m-\nu}} E_N(\mathcal{D}^m u)_p, \quad 0 < r \leq 1, \quad 0 \leq \nu \leq m, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где K_ν — константа Фавара, $C_\nu = C_\nu(\hat{\varphi}_\varepsilon)$ и $N = [2^j(1 - \varepsilon)]$ при $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, $N \geq n/3$.

При желании, взяв конкретную функцию $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_\varepsilon$ Мейера, положив, например, $\hat{\varphi}_\varepsilon^2$ линейной на интервале $((1 - \varepsilon)/2, (1 + \varepsilon)/2)$, можно выписать конкретную оценку для константы C_ν . Важно отметить, что по порядку при $\varepsilon \rightarrow 0$ $C_\nu \sim 1/\varepsilon$,

так что этот рост может не компенсировать соответствующее увеличение числа $N = N(n, \varepsilon)$.

Интересно отметить, что внутри круга K для уклонения $u(z)$ от $S_n(z, u)$ можно в (33) отбросить первое слагаемое:

$$\|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(n))\|_{r,p} \leq C_{\nu,r} N^\nu r^N E_N(u)_p, \quad (35)$$

но константа $C_{\nu,r}$ будет большой при r , близком к 1. Действительно, из (34) дифференцированием по x получим

$$\mathcal{D}^\nu(u(z) - S_n(r, u)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(e^{it}) - S_n(e^{it}, u)) \mathcal{D}^\nu P(re^{i(x-t)}) dt,$$

откуда, как при доказательстве следствия 1.1,

$$\|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))\|_{r,p} \leq E_N(\mathcal{D}^\nu P(re^{it}))_{L^1} \|u - S_n(u)\|_p,$$

где $N = [2^j(1 + \varepsilon)]$ при $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, E_N – величина наилучшего приближения в $L_1(0, 2\pi)$ производной

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} P(re^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\nu r^k \cos\left(kt + \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

тригонометрическими полиномами порядка N .

Можно показать, что при больших N , а именно при $N > \frac{C_\nu}{(1-r)^{[\nu/2]}}$, наилучшее приближение здесь доставляет полином $T_N(t)$, интерполирующий эту функцию в нулях $\cos((N+1)t + \nu\pi/2)$, и на этом пути получить оценку

$$E_N(\mathcal{D}^\nu P(re^{it})) \leq C_\nu r^N \left(N^\nu + \left(\frac{1}{\ln(1/r)} \right)^\nu \right),$$

из которой вытекает (35). Но вывод этой оценки мы здесь не приводим из-за его большого объема.

Пусть $\omega_l(\delta, u)_p$, $1 \leq p \leq \infty$, – модуль гладкости порядка $l \geq 0$ в $L_p(0, 2\pi)$ функции $u(e^{ix})$, почти всюду (при $p = \infty$ – всюду) совпадающей с угловыми граничными значениями гармонической функции $u(z) \in h_p$,

$$\omega_l(\delta, u)_p = \sup_{|t| < \delta} \left\| \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k u(e^{i(x+kt)}) \right\|_{L_p(0, 2\pi)}.$$

Применяя известные оценки Джексона–Стечкина для наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами порядка N , из теоремы 1.1 и следствия 1.1 получаем оценки для уклонения $u(z) - S_n(z, u)$ в терминах гладкости граничной функции $u(e^{ix})$. Точнее, справедливо следующее предложение.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Для функций $u(z) \in h_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и частичных сумм $S_n(z, u)$ их рядов Фурье по системе (18) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\nu(u - S_n(u))\|_{r,p} &\leq C_\nu \frac{r^{n/3}}{n^{m-\nu}} \omega_l\left(\frac{1}{n}, \mathcal{D}^m u\right)_p, \\ 0 < r \leq 1, \quad 0 \leq \nu \leq m, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (36)$$

с конечными константами $C_\nu = C_\nu(l, m, \widehat{\varphi})$, зависящими лишь от l , m и $\widehat{\varphi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если гармоническая в круге K ($|z| < 1$) функция $u(z) \notin h_p$ ни при каком $p \geq 1$, то все приведенные выше утверждения, как и сама методика разложения $u(z)$ в ряд (17), теряют смысл, так как в этом случае угловые граничные значения $u(e^{ix})$ не определяют саму функцию $u(z)$ (например, у ядра Пуассона $P(re^{ix})$ и гармонической функции $P^3(re^{ix}) - 12r^2 \sin^2 x P(re^{ix}) / (1 - 2r \cos x + r^2)^2$ граничные значения одинаковые). Но и в этом случае по функции $u(z)$ можно однозначно построить ряд (17), воспользовавшись легко проверяемым фактом, что при любом фиксированном r ($z = re^{ix}$) системы функций (18) и $\{1/\sqrt{2}, \alpha_{kn}((1/r)e^{ix}), \tilde{\alpha}^{k,n}((1/r)e^{ix})\}$ биортогональны на $(0, 2\pi)$. Сходимость этого ряда к $u(z)$ можно гарантировать, вообще говоря, только внутри круга K : при $0 < r \leq r_0 < 1$, $0 \leq \nu \leq m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\nu(u(z) - S_n(z, u))\|_{r,p} &\leq C_\nu(\widehat{\varphi}) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n/3} \{E_{n/3}(\mathcal{D}^\nu u)_{r,p} + n^\nu E_n(u)_{r_0,p}\} \\ &\leq C_{\nu,m}(\widehat{\varphi}) \frac{r^{n/3}}{n^{m-\nu}} \|u^{(m)}\|_{r_0,p}, \end{aligned} \quad (37)$$

где константы зависят лишь от указанных параметров. Однако при любом фиксированном n и $r_0 \rightarrow 1$ сами величины в правой части этого неравенства могут стать как угодно большими. Пример $u(z) = P(z)$, $p = 2$, где $\|u(z) - S_{2j}(z, u)\|_{r,2}^2 \geq E_{[2j(1+\varepsilon)]}^2(u)^{r,2} \geq E_{2j+1-1}^2(u)^{r,2} = \sum_{k=2j+1}^\infty r^{2k} = \frac{1}{1-r^2} r^{2j+2}$, показывает, что и левая часть в (37) при $r \rightarrow 1$ может стать неограниченно большой. Если же $p = 1$, гармоническая функция $u(z) \notin h_1$, но удовлетворяет условию (10), то из приведенной оценки следует, что расходимость ее ряда (17) во всем круге K (т.е. по норме $\|v\|_1 = \sup\{(1/2\pi) \int_0^{2\pi} |v(re^{ix})| dx, 0 < r < 1\}$) может быть только ограниченной.

Вместо доказательства неравенства (37) ограничимся замечанием, что при $r < r_0$ в силу отмеченной биортогональности двух систем $S_n(re^{ix}; u(\xi)) = S_n((r/r_0)e^{ix}; u(\xi r_0))$, и потому (37) вытекает из следствия 1.1 для $u(r_0\xi)$ и уже упоминавшегося неравенства Фавара.

2. Базис пространств функций, гармонических в кольце. Через $\mathbb{R}_\rho$ обозначим кольцо $\rho < |z| < 1$, $0 < \rho < 1$, и пусть $H(\mathbb{R}_\rho)$ – множество гармонических (вещественных) в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функций. В предыдущей части изучались классы $h_p = h_p(K)$ функций $u(z)$, гармонических в круге K ($|z| < 1$), являющиеся подклассами множества гармонических функций – вещественных частей регулярных в K (автоматически однозначных) функций, выделяя в пространствах

$h_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$, те из них, которые естественным образом однозначно восстанавливаются по своим граничным значениям, определенным, вообще говоря, лишь почти всюду на окружности $|z| = 1$. Здесь мы рассмотрим аналогичные подклассы $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ класса $H(\mathbb{R}_\rho)$, исключив из него многозначные гармонические функции такие, как $\operatorname{Re} z^\alpha = r^\alpha \cos \alpha x$ ($z = re^{ix}$, α нецелое).

Итак, при $1 < p < \infty$ будем считать, что $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$, если $u(z)$ – однозначная гармоническая функция такая, что

$$\|u(z)\|_{p(\mathbb{R}_\rho)} = \sup_{\rho < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} < \infty. \quad (38)$$

При $p = \infty$ на $u(z) \in h_\infty(\mathbb{R}_\rho)$ наложим еще условие непрерывности в замкнутом кольце $\overline{\mathbb{R}_\rho}$. В случае $p = 1$ в класс $h_1(\mathbb{R}_\rho)$ выделим функции, удовлетворяющие (38) при $p = 1$, для которых

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{ix}) - u(e^{ix})| dx \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0, \quad \int_0^{2\pi} |u(re^{ix}) - u(\rho e^{ix})| dx \xrightarrow{r \rightarrow \rho} 0, \quad (39)$$

где $u(e^{ix})$ и $u(\rho e^{ix})$ – соответствующие угловые предельные значения $u(z)$, существование и суммируемость которых обеспечены условием (38).

Структуру функций введенных классов $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ в их сравнении с классами $h_p(K)$ помогает понять следующее, возможно известное, предложение.

ЛЕММА 2.1. *Каждую однозначную гармоническую в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функцию $u(z)$ можно единственным образом разложить в сумму:*

$$u(z) = C \ln |z| + u_1(z) + u_\rho(z), \quad (40)$$

где $u_1(z)$ – гармоническая в круге K ($|z| < 1$) функция, а $u_\rho(z)$ – гармоническая вне круга $\overline{K_\rho}$ ($|z| \leq \rho$), причем $u_\rho(\infty) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для однозначной в $\mathbb{R}_\rho$ гармонической функции $v(z)$ гармонически сопряженная функция $\tilde{v}(z)$ может быть и многозначной, причем такой, что у нее во всем кольце $\mathbb{R}_\rho$ (без разрезов) нельзя выделить однозначную гармоническую ветвь. Например, как у функции $\tilde{w}(z) = \arg(z - \rho/2)$, являющейся гармонически сопряженной к однозначной гармонической функции $w(z) = \ln |z - \rho/2|$. Из представления $\tilde{v}(z)$ в силу уравнений Коши–Римана следует, что для однозначности $\tilde{v}(z) = \tilde{v}(\xi + i\zeta)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого спрямляемого контура $L \subset \mathbb{R}_\rho$ выполнялось равенство

$$\int_L \left(-\frac{\partial v}{\partial \zeta} d\xi + \frac{\partial v}{\partial \xi} d\zeta \right) = 0.$$

Если L ограничивает односвязную область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_\rho$, то это равенство выполняется автоматически в силу гармоничности $v(z)$ в $\mathcal{D}$. Отсюда легко следует, что условие однозначности $\tilde{v}(z)$ равносильно выполнению указанного равенства для какого-либо одного контура $L \subset \mathbb{R}_\rho$, охватывающего круг $|z| < \rho$, например для окружности $|z| = r$, $\rho < r < 1$. В последнем случае оно переписывается в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} v(re^{ix}) dx = 0. \quad (41)$$

Пусть для однозначной гармонической в $\mathbb{R}_\rho$ функции $u(z)$ при $r = r_0 \in (\rho, 1)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(r_0 e^{ix}) dx = C(r_0).$$

Тогда однозначная гармоническая в $\mathbb{R}_\rho$ функция $v(z) = u(z) - r_0 C(r_0) \ln |z|$ удовлетворяет условию (41) при $r = r_0$ и, следовательно, имеет однозначную гармонически сопряженную функцию $\tilde{v}(z)$, так что $v(z) + i\tilde{v}(z)$ — однозначная аналитическая в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функция. Поэтому для $u(z)$ найдется вещественная константа C такая, что

$$u(z) = \operatorname{Re} C \ln z + \operatorname{Re} F(z), \quad (42)$$

где $F(z)$ — аналитическая в $\mathbb{R}_\rho$ функция, разлагающаяся в ряд Лорана по степеням z . Как уже отмечалось, выполнение условия (41) при $r = r_0$ равносильно его выполнению при любом $r \in (\rho, 1)$. Поэтому

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (u(re^{ix}) - r_0 C(r_0) \ln r) dx = C(r) - r_0 C(r_0) \frac{1}{r},$$

т.е.

$$rC(r) = r_0 C(r_0).$$

Следовательно, константа C в разложении (42) функцией $u(z)$ определяется однозначно, а вслед за ней однозначно определяется и функция $F(z) = v(z) + i\tilde{v}(z)$. Выделяя вещественные части $u_\rho(z)$ и $u_1(z)$ из главной и из правильной части ряда Лорана функции $F(z)$, получаем утверждение леммы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $u(z)$ — однозначная гармоническая в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функция и

$$u(z) = C \ln |z| + u_1(z) + u_\rho(z) \quad (40)$$

— ее разложение из леммы 2.1, $1 \leq p \leq \infty$. Для того чтобы $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы $u_1(z)$ и $u_\rho(\rho/z)$ были функциями из пространства $h_p(K)$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$. Функция ρ/z конформно отображает внешность круга K_ρ во внутренность единичного круга K , поэтому $v(z) = u_\rho(\rho/z)$ — гармоническая функция в области $0 < |z| < 1$ и $v(0) = \lim_{z \rightarrow 0} v(z) = u_\rho(\infty) = 0$, так что $v(z)$ гармонична в K . В силу монотонности по r нормы $\left(\int_0^{2\pi} |v(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$, имеем

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |v(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} = \sup_{\rho/r_0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |v(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p}, \quad \rho < r_0 < 1,$$

поэтому эта величина оценивается сверху через

$$\begin{aligned} & \sup_{\rho/r_0 < r < 1} \left\{ \left(\int_0^{2\pi} \left| u\left(\frac{\rho}{r}e^{-ix}\right) \right|^p dx \right)^{1/p} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^{2\pi} \left| u_1\left(\frac{\rho}{r}e^{-ix}\right) \right|^p dx \right)^{1/p} + \left| C \ln \frac{\rho}{r} \right| \right\} \\ & \leq \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^{2\pi} |u_1(r_0e^{ix})|^p dx \right)^{1/p} + C \ln \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |u_1(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} \leq \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} \\ & \quad + \left(\int_0^{2\pi} |u_\rho(r_0e^{ix})|^p dx \right)^{1/p} + C \ln \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Следовательно, условие $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$, $1 < p < \infty$, влечет за собой включения $u_1(z), u_\rho(\rho/z) \in h_p(K)$. Так как $u_1(z)$ непрерывна внутри K , а $u_\rho(z)$ непрерывна вне K_ρ , то из непрерывности $u(z)$ в $\overline{\mathbb{R}_\rho}$ следует непрерывность $u_1(z)$ и $u_\rho(\rho/z)$ в $\overline{K}$, так что эти включения верны и при $p = \infty$. Из доказанных оценок и известной теоремы Фату (см., например, [4, с. 427, 430]) следует, что у функций $u_1(z)$ и $u_\rho(\rho/z)$ (а значит, и у $u(z)$, $u(\rho/z)$) почти всюду на окружности $|z| = 1$ существуют угловые граничные значения $u_1(e^{it})$, $u_\rho(\rho e^{-it})$, и в случае $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |u_1(e^{it}) - u_1(re^{it})| dt & \leq \int_0^{2\pi} |u(e^{it}) - u(re^{it})| dt \\ & \quad + \int_0^{2\pi} |u_\rho(e^{it}) - u_\rho(re^{it})| dt + C \ln r. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое справа есть бесконечно малая при $r \rightarrow 1$ величина по условию (39), а вторая – в силу равномерной непрерывности $u_\rho(z)$ при $|z| \leq \rho + \delta$, $\delta > 0$. Следовательно, функция $u_1(z)$ удовлетворяет условию (39) при $r \rightarrow 1$. Поскольку при $|z| < 1$ и $0 < r_0 < 1$ функция $u_1(r_0z)$ гармонична в круге радиуса $1/r_0 > 1$, то

$$u_1(r_0z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(r_0e^{it}) P(re^{i(x-t)}) dt, \quad z = re^{it}.$$

Условие (39) для $u_1(z)$ и ограниченность ядра Пуассона $P(re^{it})$ при любом фиксированном $r \in (0, 1)$ гарантируют возможность предельного перехода здесь при $r_0 \rightarrow 1$ под знаком интеграла. В итоге получаем, что функция $u_1(z)$ представима через свою граничную функцию $u_1(e^{it}) \in L(0, 2\pi)$ интегралом Пуассона, т.е. $u_1(z) \in h_1(K)$, если $u(z) \in h_1(\mathbb{R}_\rho)$. Включение $u_\rho(\rho/z) \in h_1(K)$ проверяется аналогично. Следствие 2.1 в части необходимости доказано.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть функция $u(z)$ имеет вид (40), где $u_1(z), u_\rho(\rho/z) \in h_p(K)$ при некотором $p \in [1, \infty]$. При $p = \infty$ это гарантирует гармоничность $u(z)$ в $\mathbb{R}_\rho$ и ее непрерывность в $\overline{\mathbb{R}_\rho}$. При $1 \leq p < \infty$ имеем

$$\sup_{\rho < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

так как эта величина в силу равенства (40) не превосходит конечной по условию величины

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |u_1(re^{ix})|^p dx \right)^{1/p} + \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} \left| u_\rho \left(\frac{\rho}{r} e^{-ix} \right) \right|^p dx \right)^{1/p} + C \ln \frac{1}{\rho}.$$

Если $1 < p < \infty$, это означает по определению, что $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$. При $p = 1$ дополнительно дано, что $u_1(z)$ и $u_\rho(\rho/z)$ являются интегралами Пуассона своих граничных значений, значит, и в этом случае нормы $\|u_1(re^{ix}) - u_1(e^{ix})\|_L$, $\|u_\rho((\rho/r)e^{ix}) - u_\rho(\rho e^{ix})\|_L$ на $(0, 2\pi)$ стремятся к нулю при $r \rightarrow 1$ (см., например, [4, гл. 9, § 1, 2] и [5, с. 24, 29]). При $r \rightarrow \rho$ $\|u_1(re^{ix}) - u_1(\rho e^{ix})\|_L \rightarrow 0$, $\|u_\rho((\rho/r)e^{ix}) - u_\rho(e^{ix})\| \rightarrow 0$, поскольку контур $|z| = \rho$ лежит в области гармоничности $u_1(z)$ и $u_\rho(\rho/z)$. Отсюда и из (40) следует, что функция $u(z)$ имеет суммируемые граничные значения $u(e^{ix})$ и $u(\rho e^{ix})$, и что выполняются условия (39). Так что и при $p = 1$ $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$. Следствие 2.1 доказано.

В качестве еще одного следствия докажем теорему о базисе пространств $h_p(\mathbb{R}_\rho)$. Норму $\|u\|_{p(\mathbb{R}_\rho)}$ в этом пространстве определим формулой (38). Отметим, что если в разложении (40) функция $u(z)$ принадлежит $h_p(\mathbb{R}_\rho)$, константа C равна нулю и $u_1(0) = 0$ (как и $u_\rho(\rho/z)|_{z=0} = 0$), то норма $\|u\|_{p(\mathbb{R}_\rho)}$ эквивалентна нормам

$$\|u\|_{L^p(\partial\mathbb{R}_\rho)} =: \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(e^{it})|^p dt \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p} \quad (43)$$

и

$$\|u\|_{p(\partial\mathbb{R}_\rho)} =: \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_1(e^{it})|^p dt \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_\rho(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \quad (44)$$

где $u_1(z)$ и $u_\rho(z)$ – функции из разложения (40). А именно, при сделанных предположениях относительно $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \|u\|_{L^p(\partial\mathbb{R}_\rho)} \leq \|u\|_{p(\mathbb{R}_\rho)} \leq \|u\|_{p(\partial\mathbb{R}_\rho)} \leq C_\rho \|u\|_{L^p(\partial\mathbb{R}_\rho)}. \quad (45)$$

Первое из этих неравенств непосредственно вытекает из определения указанных норм. Второе неравенство получается из равенства

$$u(z) = u_1(z) + u_\rho(z)$$

(в (40) положено $C = 0$), неравенства треугольника и монотонности интегралов $\int_0^{2\pi} |u_1(re^{it})|^p dt$ и $\int_0^{2\pi} |u_\rho(re^{it})|^p dt$ от гармонических функций при $|z| < 1$ и

$|z| > \rho$ соответственно. Для доказательства третьего неравенства используем частный случай уже отмечавшейся формулы о наилучшем приближении в $L_1(0, 2\pi)$ ядра Пуассона:

$$\begin{aligned} E_0(P(\rho e^{it}))_{L_1} &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho e^{it}) \operatorname{sign} \cos t \, dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right) \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)t \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \rho^{2k+1} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho =: \delta_\rho \quad (0 < \delta_\rho < 1, \text{ так как } 0 < \rho < 1). \end{aligned}$$

Применяя это неравенство и неравенство треугольника и используя ортогональность константе на $(0, 2\pi)$ функций $u_\rho(\rho e^{it})$ и $u_1(e^{it})$, получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{p(\partial \mathbb{R}_\rho)} &= \|u(e^{it}) - u_\rho(e^{it})\|_{L_p(0, 2\pi)} + \|u(\rho e^{it}) - u_1(\rho e^{it})\|_{L_p(0, 2\pi)} \\ &\leq \|u\|_{L_p(\partial \mathbb{R}_\rho)} + \|u_\rho(e^{it})\|_{L_p(0, 2\pi)} + \|u_1(\rho e^{it})\|_{L_p(0, 2\pi)} \\ &\leq \|u\|_{L_p(\partial \mathbb{R}_\rho)} + \delta_\rho \|u_\rho(\rho e^{it})\|_{L_p(0, 2\pi)} + \delta_\rho \|u_1(e^{it})\|_{L_p(0, 2\pi)} \\ &= \|u\|_{L_p(\partial \mathbb{R}_\rho)} + \delta_\rho \|u\|_{p(\partial \mathbb{R}_\rho)}, \end{aligned}$$

откуда вытекает последнее из неравенств (45) с константой $C_\rho = 1/(1 - \delta_\rho)$.

Введем следующую систему гармонических в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функций:

$$\{\ln |z|, 1, \alpha_n(z), \tilde{\alpha}_n(z), \alpha_n(\rho/z), \tilde{\alpha}_n(\rho/z); \quad n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad (46)$$

где $\alpha_0(z) = \alpha_{00}(z)$, $\alpha_n(z) = \alpha_{j+1,k}(z)$ при $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, и $\tilde{\alpha}_n(z)$ – гармонические полиномы из теоремы 1.1.

Для любого гармонического полинома без свободного члена

$$\tau(z) = \sum_{\nu=-\mu}^{\mu} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) |z|^\nu, \quad a_0 = b_0 = 0, \quad z = |z|e^{ix},$$

положим

$$\tau^\rho(z) = \sum_{\nu=-\mu}^{\mu} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) |z|^\nu \frac{1}{1 - \rho^{2|\nu|}},$$

т.е. оператор $\tau(z) \rightarrow \tau^\rho(z)$ к гармоникам $|z|^\nu e^{\pm i\nu x}$ и $(1/|z|^\nu) e^{\pm i\nu x}$, $\nu > 0$, или, что то же самое, к гармоникам $|z|^{\pm \nu} \cos \nu x$, $|z|^{\pm \nu} \sin \nu x$, $\nu > 0$, добавляет множитель $1/(1 - \rho^{2\nu})$. Ясно, что

$$\tilde{\alpha}_n^\rho(z) = (\tilde{\alpha}_n)^\rho(z), \quad (\alpha_n^\rho)(\rho/z) = (\alpha_n)^\rho(\rho/z),$$

поэтому мы будем просто писать $\alpha_n^\rho(z)$, $\tilde{\alpha}_n^\rho(z)$, $\alpha_n^\rho(\rho/z)$, $\tilde{\alpha}_n^\rho(\rho/z)$.

Договоримся еще для краткости разность интегралов

$$\int_0^{2\pi} v(e^{ix}) \, dx - \int_0^{2\pi} v(\rho e^{ix}) \, dx$$

обозначать через интеграл $\int_{\partial \mathbb{R}_\rho} v(z) \, dx$, $z = |z|e^{ix}$, что согласуется с положительным обходом границы $\partial \mathbb{R}_\rho$ области $\mathbb{R}_\rho$.

ТЕОРЕМА 2.1. Система функций (46) является базисом каждого из пространств $h_p(\mathbb{R}_\rho)$, $1 \leq p \leq \infty$. Коэффициенты разложения

$$u(z) = a_{-1} + b_{-1}(\ln |z|) / \ln \rho + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \alpha_n(z) + \hat{a}_n \tilde{\alpha}_n(z) + b_n \alpha_n(\rho/z) + \hat{b}_n \tilde{\alpha}_n(\rho/z) \right\} \quad (47)$$

функции $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt, & b_{-1} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} u(z) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} u(z) \alpha_n(z) dx, & b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} u(z) \alpha_n^\rho(\rho/z) dx, \\ \hat{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} u(z) \tilde{\alpha}_n(z) dx, & \hat{b}_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} u(z) \tilde{\alpha}_n^\rho(\rho/z) dx, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$ наряду с разложением (40) из леммы 2.1 введем еще разложение

$$u(z) = u_+(z) + u_-(z), \quad (49)$$

где

$$u_+(z) = u_1(z), \quad u_-(z) = C \ln |z| + u_\rho(z),$$

$C \ln |z|$, $u_1(z)$, $u_\rho(z)$ – функции из разложения (40). Определим билинейную форму

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_+(e^{ix}) v_+(e^{ix}) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_-(\rho e^{ix}) v_-(\rho e^{ix}) dx \quad (50)$$

для всех функций $u, v \in h_1(\mathbb{R}_\rho)$, для которых эти интегралы конечны. В пространстве $h_2(\mathbb{R}_\rho)$ эта билинейная форма определена для всех пар $u(z)$ и $v(z)$ и обладает всеми свойствами скалярного произведения гильбертова пространства над полем вещественных чисел. Договоримся о следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \alpha_{-1}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln |z|}{\ln \rho} &= \alpha_{-1,\rho}, & \alpha_n(z) &= \alpha_n, & \alpha_n\left(\frac{\rho}{z}\right) &= \alpha_{n,\rho}, \\ \tilde{\alpha}_n(z) &= \tilde{\alpha}_n, & \tilde{\alpha}_n(\rho/z) &= \tilde{\alpha}_{n,\rho}, & n &\geq 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha_n)_+ &\equiv \alpha_n, & (\alpha_n)_- &\equiv 0, & (\alpha_{n,\rho})_+ &\equiv 0, & (\alpha_{n,\rho})_- &\equiv \alpha_{n,\rho}, \\ (\tilde{\alpha}_n)_+ &\equiv \tilde{\alpha}_n, & (\tilde{\alpha}_n)_- &\equiv 0, & (\tilde{\alpha}_{n,\rho})_+ &\equiv 0, & (\tilde{\alpha}_{n,\rho})_- &\equiv \tilde{\alpha}_{n,\rho}, \quad n \geq -1. \end{aligned} \quad (52)$$

Поэтому $(\alpha_n, \alpha_m^\rho) = (\tilde{\alpha}_n, \alpha_m^\rho) = (\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_m^\rho) = (\alpha_n, \tilde{\alpha}_m^\rho) = 0$. Далее, так как система (18) ортонормированная на единичной окружности, то

$$(\alpha_n, \alpha_m) = \delta_{n,m}, \quad (\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_m) = \delta_{n,m}, \quad (\alpha_n, \tilde{\alpha}_m) = 0.$$

Далее, при $z = \rho e^{ix}$ $\alpha_{n,\rho}(z) = \alpha_n(e^{-ix})$, $\tilde{\alpha}_{n,\rho}(z) = \tilde{\alpha}_n(e^{-ix})$, что после замены переменной интегрирования $x = -x_1$ дает равенства

$$(\alpha_{n,\rho}; \alpha_{m,\rho}) = \delta_{m,n}, \quad (\tilde{\alpha}_{n,\rho}; \tilde{\alpha}_{m,\rho}) = \delta_{n,m}, \quad (\alpha_{n,\rho}; \tilde{\alpha}_{m,\rho}) = 0.$$

Таким образом, система (46) относительно скалярного произведения (50) является ортогональной, а эквивалентная ей система (51) – ортонормированной. Отсюда и из ограниченности в $\mathbb{R}_\rho$ функций системы (46) следует, что если ряд (47) с какими-либо коэффициентами сходится в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ к функции $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$, то он обязательно является рядом Фурье функции $u(z)$ по этой системе. Таким образом, для доказательства первого утверждения теоремы достаточно доказать, что ряд (47) сходится в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ к $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$, если его коэффициенты определить по формулам

$$b_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u, \alpha_{-1,\rho}), \quad a_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u, \alpha_{-1}), \quad a_n = (u, \alpha_n), \quad b_n = (u, \alpha_{n,\rho}), \\ \hat{a}_n = (u, \tilde{\alpha}_n), \quad \hat{b}_n = (u, \alpha_{n,\rho}), \quad n \geq 0.$$

Но из (51), (50) и определения u_+ следует, что тогда

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{ix}) dx, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{ix}) \alpha_n(e^{ix}) dx, \quad \hat{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{ix}) \tilde{\alpha}_n(e^{ix}) dx,$$

где $u_1(z) \in h_p(K)$ в силу следствия 2.1. Следовательно, соответствующая часть ряда (47) является рядом Фурье функции $u_1(z)$ по системе (54) и по теореме 1.1 сходится в $h_p(K)$ и, тем более, в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ к функции $u_1(z)$. Аналогично, при $n \geq 0$

$$b_n = (u_-, \alpha_{n,\rho}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_-(\rho e^{ix}) \alpha_n(e^{-ix}) dx \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_n(e^{ix}) \left(u_\rho \left(\frac{\rho}{e^{ix}} \right) - C \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_n(e^{ix}) v(e^{ix}) dx, \\ \hat{b}_n = (u_-, \tilde{\alpha}_{n,\rho}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_-(\rho e^{ix}) \tilde{\alpha}_n(e^{-ix}) dx \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}_n(e^{ix}) \left(u_\rho \left(\frac{\rho}{e^{ix}} \right) - C \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}_n(e^{ix}) v(e^{ix}) dx,$$

где положено $v(z) = u_\rho(\rho/z)$ и использовано равенство

$$0 = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{ix}) dx$$

(см. лемму 2.1 и следствие 2.1). Поэтому если в оставшейся части ряда (47) без члена $\ln |z|$ заменить z на ρ/z , то получим ряд Фурье функции $v(z)$ по системе (18),

сходящийся в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ к $u_\rho(\rho/z) \in h_p(K)$. Выполнив еще раз замену z на ρ/z , вернемся к исходной части ряда (47) и получим в заключение, что эта часть ряда (47) сходится в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ к $u_\rho(z)$. Наконец, ясно, что константа $b_{-1}/\ln \rho$ в (47) совпадает с константой C в (40). Поэтому весь ряд (47) сходится по норме пространства $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ к $u(z)$. Следовательно, система (46) является базисом в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Выписанные в первой части доказательства теоремы формулы для коэффициентов ряда (47) через скалярное произведение (50) неудобны, так как для их применения недостаточно знания самой функции $u(z)$ и тем более ее граничных значений, а требуется знать для $u(z)$ разложение (40), поскольку без него построить граничные значения функций u_1 и u_ρ вряд ли возможно. Поэтому формулы (48) являются важной содержательной частью теоремы 2.1. Без них ее следовало бы отнести к рангу теорем существования базиса, несмотря на то, что он в ней выписан. Докажем справедливость этих формул.

Пусть

$$\alpha_n(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{R}_+} \hat{\alpha}_{n,\nu} \cos \nu x |z|^\nu, \quad z = |z|e^{ix},$$

где для краткости положено (см. (12)) $2^{-(j-1)/2} \hat{\theta}(\nu/2^{j+1}) \cos(2\pi\nu(k+0,5)/2^{j+1}) = \hat{\alpha}_{n,\nu}$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_m^\rho(z) &= \sum_{\nu \in \mathbb{R}_+} \hat{\alpha}_{m,\nu} \cos \nu x \frac{|z|^\nu}{1 - \rho^{2\nu}}, \\ \alpha_n\left(\frac{\rho}{z}\right) &= \sum_{\nu \in \mathbb{R}_+} \hat{\alpha}_{n,\nu} \cos \nu x \frac{\rho^\nu}{|z|^\nu}, \end{aligned}$$

$\tilde{\alpha}_n(z)$, $\tilde{\alpha}_n(\rho/z)$ – нечетные по x функции. Поэтому

$$\int_{\partial \mathbb{R}_\rho} \tilde{\alpha}_n(z) \alpha_m^\rho(z) dx = \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} \tilde{\alpha}_n\left(\frac{\rho}{z}\right) \alpha_m^\rho(z) dx = 0,$$

и в силу равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} \alpha_n\left(\frac{\rho}{z}\right) \alpha_m^\rho(z) dx &= \sum_{\nu \in \mathbb{R}_+} (\hat{\alpha}_{n,\nu} \rho^\nu) \hat{\alpha}_{m,\nu} \frac{1}{1 - \rho^{2\nu}} \\ &\quad - \sum_{\nu \in \mathbb{R}_+} \hat{\alpha}_{n,\nu} \left(\hat{\alpha}_{m,\nu} \frac{\rho^\nu}{1 - \rho^{2\nu}} \right) = 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} \alpha_n(z) \alpha_m^\rho(z) dx &= \sum_{\nu \in \mathbb{R}_+} (\hat{\alpha}_{n,\nu} \hat{\alpha}_{m,\nu} \left(\frac{1}{1 - \rho^{2\nu}} - \frac{\rho^{2\nu}}{1 - \rho^{2\nu}} \right)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \alpha_n(z) \alpha_m(z) dx = \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяются равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} \tilde{\alpha}_n(z) \tilde{\alpha}_m^\rho(z) dx &= \delta_{n,m}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} \alpha_n\left(\frac{\rho}{z}\right) \alpha_m^\rho\left(\frac{\rho}{z}\right) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_\rho} \tilde{\alpha}_n\left(\frac{\rho}{z}\right) \tilde{\alpha}_m^\rho\left(\frac{\rho}{z}\right) dx = -\delta_{n,m} \end{aligned}$$

и равенство нулю интегралов по $\partial\mathbb{R}_\rho$ от оставшихся комбинаций парных произведений рассматриваемых функций. Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \alpha_m(e^{ix}) dx = \int_0^{2\pi} \alpha_m(\rho e^{ix}) dx = 0$$

и $\ln|z|$ – константа при $|z| = 1$ и $|z| = \rho$, то

$$\int_{\partial\mathbb{R}_\rho} 1 \cdot \alpha_m^\rho(z) dx = \int_{\partial\mathbb{R}_\rho} \ln|z| \alpha_m^\rho(z) dx = \dots = \int_{\partial\mathbb{R}_\rho} \ln|z| \tilde{\alpha}_m^\rho\left(\frac{\rho}{z}\right) dx = 0.$$

Таким образом, система гармонических полиномов

$$\left\{ \alpha_m^\rho(z), \tilde{\alpha}_m^\rho(z), -\alpha_m^\rho\left(\frac{\rho}{z}\right), -\tilde{\alpha}_m^\rho\left(\frac{\rho}{z}\right) : m \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

в некотором роде “биортогональна” системе (46), только билинейная форма

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_\rho} u(z)v(z) dx$$

не является скалярным произведением.

Так как по доказанному ряд (47) сходится в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ при $u(z) \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$, то в силу (45) он сходится в L_p на окружностях $|z| = 1$ и $|z| = \rho$. Функция $\alpha_m^\rho(z)$ ограничена на этих окружностях. Поэтому, умножив левую и правую части (47) на $\alpha_m^\rho(z)$, можно интеграл $\int_{\partial\mathbb{R}_\rho}$ по dx от правой части вычислять почленным интегрированием ряда. В результате получим

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_\rho} u(z) \alpha_m^\rho(z) dx, \quad m \geq 0.$$

Аналогично получаются остальные равенства (48) при $n \geq 0$. Наконец, из (47) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt = a_{-1}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) dt = a_{-1} + b_{-1},$$

откуда

$$b_{-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) dt.$$

Теорема 2.1 полностью доказана.

Для гармонической в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функции $u(z)$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ договоримся писать $u(z) \in h_p^m(\mathbb{R}_\rho)$, если гармоническая в $\mathbb{R}_\rho$ функция $\frac{\partial^m}{\partial x^m} u(re^{ix}) = D^m u(z)$ содержится в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$. Систему (46) будем обозначать через H_ρ , а систему (18) из п. 1 – через H_0 . По аналогии с теоремой 1.1 будем называть *частной суммой порядка n разложения (47) функции $u(z)$ в сумму*

$$s_n(z; u) = s_n(z; u; H_\rho) = a_{-1} + b_{-1} \frac{\ln|z|}{\ln\rho} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ a_k \alpha_k(z) + \hat{a}_k \tilde{\alpha}_k(z) + b_k \alpha_k\left(\frac{\rho}{z}\right) + \hat{b}_k \tilde{\alpha}_k\left(\frac{\rho}{z}\right) \right\}.$$

При $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, положим $N = [2^j(1 - \varepsilon)]$, где ε связано с носителем функции $\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(t)$ ($\text{supp } \widehat{\varphi}(t) = (-(1 + \varepsilon)/2, (1 + \varepsilon)/2)$), определяющей системы H_0 и H_ρ , и через $E_N(u)_{1,p}$, $E_N(u)_{\rho,p}$ будем обозначать величины наилучшего приближения в L_p на $(0, 2\pi)$ функций $u(e^{ix})$ и $u(\rho e^{ix})$ тригонометрическими полиномами порядка N . Так как $0 < \varepsilon \leq 1/3$, то $E_N(u)_{\lambda,p} \leq E_{n/3}(u)_{\lambda,p}$ ($\lambda = 1$ или $\lambda = \rho$). Наконец, через $\mathbb{R}_\rho^r$ обозначим кольцо $\rho/r < |z| < r$, $\sqrt{\rho} < r \leq 1$, вложенное в кольцо $\mathbb{R}_\rho$, и по аналогии с нормой в $h_p(\mathbb{R}_\rho)$ положим

$$\|u\|_{p(\mathbb{R}_\rho^r)} = \sup_{\rho/r \leq |z| \leq r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(|z|e^{ix})|^p dx \right)^{1/p}.$$

В силу (45)

$$\begin{aligned} \|u\|_{p(\mathbb{R}_\rho^r)} &\asymp \|u\|_{L^p(\partial\mathbb{R}_\rho^r)} \\ &=: \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| u\left(\frac{\rho}{r}e^{ix}\right) \right|^p dx \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(\rho e^{ix})|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

с зависящими лишь от ρ константами в двусторонней оценке $\asymp$, если средние значения $u(e^{ix})$ и $u(\rho e^{ix})$ на периоде равны нулю.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $u(z) \in h_p^m(\mathbb{R}_\rho)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $s_n(u) = s_n(z; u; H_\rho)$, $0 \leq \nu \leq m$, $\sqrt{\rho} \leq r \leq 1$. Тогда

$$\|D^\nu(u - s_n(u))\|_{p(\mathbb{R}_\rho^r)} \leq C_m \frac{r^N}{N^{m-\nu}} (E_N(D^m u)_{1,p} + E_N(D^m u)_{\rho,p}), \quad (53)$$

и как следствие при любом $l \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \|D^\nu(u - s_n(u))\|_{p(\mathbb{R}_\rho^r)} &\leq C_{l,m} \frac{r^N}{N^{m-\nu}} \\ &\times \left(\omega_l\left(\frac{1}{N}; D^m u(e^{ix})\right)_p + \omega_l\left(\frac{1}{N}; D^m u(\rho e^{ix})\right)_p \right), \end{aligned} \quad (54)$$

где $N = [2^j(1 - \varepsilon)]$ при $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, ω_l — модули гладкости порядка l указанных функций, константы C_m , $C_{m,l}$ кроме указанных параметров зависят еще лишь от $\widehat{\varphi}_\varepsilon(t)$ и ρ .

Отметим, что при $r = 1$ кольцо $\mathbb{R}_\rho^r$ совпадает с $\mathbb{R}_\rho$, при $r = \sqrt{\rho}$ оно вырождается в окружность $|z| = \sqrt{\rho}$. Из выписанных оценок легко получить оценки для уклонения $D^\nu u - D^\nu s_n(u)$ в произвольном кольце $\rho \leq R_1 < |z| < R_2 < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале в (47) $a_{-1} = b_{-1} = 0$. Тогда в разложении (40) $u(z) = u_1(z) + u_\rho(z)$, где $u_1(z)$ и $v(z) = u_\rho(\rho/z)$ — функции из $h_p(K)$, $u_1(0) = v(0) = 0$. Как уже отмечалось в доказательстве теоремы 1.1, если в $s_n(z; v; H_0)$ заменить z на ρ/z , то получим

$$s_n(z; u; H_\rho) = s_n(z; u; H_0) + s_n(\rho/z; v; H_0),$$

и по следствию 1.2

$$\begin{aligned} \|D^\nu(u_1 - s_n(u_1; H_0))\|_{p(\mathbb{R}_\rho^r)} &\leq \|D^\nu(u_1 - s_n(u_1; H_0))\|_{p(K_r)} \\ &\leq c_m \frac{r^N}{N^{m-\nu}} E_N(D^m u_1(e^{ix}))_{L_p(0, 2\pi)} \|D^\nu(v - s_n(v; H_0))\|_{p(K_r)} \\ &\leq C_m \frac{r^N}{N^{m-\nu}} E_N(D^m v(e^{ix}))_{L_p(0, 2\pi)}, \end{aligned}$$

где $k_r = \{z : |z| < r\}$. Слева в последнем неравенстве стоит величина, равная

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < |z| < r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left(u_\rho \left(\frac{\rho}{|z|e^{ix}} \right) - s_n(|z|e^{ix}; v; H_0) \right) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \sup_{\rho/r < y < \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left(u_\rho(ye^{-ix}) - s_n\left(\frac{\rho}{y}e^{-ix}; v; H_0\right) \right) \right|^p dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

что не меньше, чем

$$\begin{aligned} &\sup_{\rho/r < |z| < r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left(u_\rho(|z|e^{ix}) - s_n\left(\frac{\rho}{|z|e^{ix}}; v; H_0\right) \right) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \|D^\nu(u_{\rho(z)} - s_n(\frac{\rho}{z}; v; H_0))\|_{p(\mathbb{R}_\rho^r)}, \end{aligned}$$

а так как $E_N(D^m v(e^{ix}))_{L_p} = E_N(D^m v(e^{-ix}))_{L_p} = E_N(D^m u_\rho(\rho e^{ix}))_{L_p}$, то из этих оценок получаем

$$\|D^\nu(u - s_n(u; H_\rho))\|_{p(\mathbb{R}_s^r)} \leq \frac{c_m r^N}{N^{m-6}} (E_N(D^m u_1(e^{ix}))_{L_p} + E_N(D^m u_\rho(\rho e^{ix}))_{L_p}).$$

У этой оценки тот недостаток, что в общем случае функции $u_1(z)$ и $u_\rho(z)$ явно не заданы. Поэтому продолжим оценку, чтобы получить результат в терминах функции $u(z)$. Для краткости обозначим $D^m(u_1(z)) = W_1(z)$, $D^m u_\rho(z) = W_\rho(z)$. Тогда

$$D^m u(z) = W(z) =: W_1(z) + W_\rho(z),$$

где $W_1(z)$ и $W_\rho(\rho/z)$ принадлежат $h_p(K)$ и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_1(e^{ix}) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_\rho\left(\frac{\rho}{e^{ix}}\right) dx = 0.$$

Нам нужно оценить сумму

$$E_N(W_1(e^{ix}))_{L_p} + E_N(W_\rho(\rho e^{ix}))_{L_p}.$$

Заменяя здесь W_1 на $W - W_\rho$ и W_ρ на $W - W_1$ по неравенству треугольника для наилучших приближений, получаем

$$\begin{aligned} (E_N(W_1(e^{ix}))_{L_p} + E_N(W_\rho(\rho e^{ix}))_{L_p}) &\leq E_N(W(e^{ix}))_{L_p} + E_N(W(\rho e^{ix}))_{L_p} \\ &\quad + E_N(W_\rho(\rho e^{ix}))_{L_p} + E_N(W_1(\rho e^{ix}))_{L_p}. \end{aligned}$$

Так как $W_1(\rho e^{ix})$ выражается через интеграл Пуассона от $W_1(e^{it})$ с ядром $P(\rho e^{i(x-t)})$, то (см., например, [3])

$$E_N(W_1(\rho e^{ix}))_{L_p} \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^{N+1} E_N(W_1(\rho e^{ix}))_{L_p} \leq \delta_\rho E_N(W_1(e^{ix}))_{L_p},$$

где $\delta_\rho = 4(\operatorname{arctg} \delta)/\pi$. Аналогично,

$$E_N(W_\rho(e^{ix}))_{L_p} = E_N\left(W_\rho\left(\frac{\rho}{\rho e^{ix}}\right)\right)_{L_p} \leq \delta_\rho E_N(W_\rho(\rho e^{ix}))_{L_p}.$$

Подставляя эти две оценки в предыдущую, находим

$$E_N(W_1(e^{ix}))_{L_p} + E_N(W_\rho(\rho e^{ix}))_{L_p} \leq \frac{1}{1-\delta_\rho} \{E_N(W(e^{ix}))_{L_p} + E_N(W(\rho e^{ix}))_{L_p}\},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \|D^\nu(u - s_N(u; H_\rho))\|_{p(\mathbb{R}_\rho^r)} \\ & \leq \frac{c_m r^N}{N^{m-\nu}} \{E_N(D^m u(e^{ix}))_{L_p} + E_N(D^m u(\rho e^{ix}))_{L_p(0,2\pi)}\}. \end{aligned}$$

Так как функция $a_{-1} + b_{-1} \ln |z| / \ln \rho$ постоянна на окружностях $|z| = 1$ и $|z| = \rho$, то добавление ее к u и $s_n(u; H_\rho)$ не меняет левой и правой частей этого неравенства. Поэтому (53) справедливо и без предположения того, что $a_{-1} = b_{-1} = 0$. Применяя неравенство Джексона–Стечкина, получаем из (53) оценку (54). Теорема доказана.

Поскольку (54) доказано и при $r = 1$, когда $\mathbb{R}_\rho^r = \mathbb{R}_\rho$, то из самой теоремы следует, что при $\sqrt{\rho} < r < \infty$ оценка (53) сохранится, если в правой ее части величину $r^N (E_N(D^m u)_{1,p} + E_N(D^m u)_{\rho,p})$ заменить на $E_N(D^m u(re^{ix}))_{L^p(0,2\pi)} + E_N(D^m u((\rho/r)e^{ix}))_{L^p(0,2\pi)}$. При этом, как и в случае круга, можно отказаться от граничных условий на $u(z)$, накладываемых включением $u \in h_p(\mathbb{R}_\rho)$, считая $u(z)$ просто однозначной, гармонической в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функций. Но тогда при $r \rightarrow 1$ оценки теоремы 2.2 могут вырождаться.

И последнее замечание. Строго внутри кольца $\mathbb{R}_\rho$ (т.е. в $\mathbb{R}_\rho^r$ при $\sqrt{\rho} \leq r < 1$) в случае $1 \leq p < \infty$ можно рассматривать сходимость $s_n(u; H_\rho)$ (как и $s_n(u; H_0)$ в п. 1) к $u(z)$ в более сильной метрике $\|\cdot\|_{q(\mathbb{R}_\rho^r)}$, $q > p$.

При замене левых частей (53) и (54) на $\|D^\nu(u - s_n(u))\|_{q(\mathbb{R}_\rho^r)}$ при $p < q \leq \infty$ и $\sqrt{\rho} \leq r < 1$ оценки (53) и (54) сохраняются, если в их правых частях добавить множитель $N^{1/p-1/q}$, но при этом константы C_m и C_{ml} станут зависящими от r и будут неограниченно большими при $r \rightarrow 1$.

Следует также наряду с цитированными в п. 1 результатами И. Мейера отметить, что вопрос о существовании базиса в $h_\infty(K)$ практически был решен еще в 1974 г. С. В. Бочкаревым [6], построившим базис в пространстве $H_\infty(K)$. Среди других работ отметим также исследования С. В. Бочкарева [7], [8] о построении полиномиальных базисов в конечномерных пространствах аналитических в круге функций, продолженные в дальнейшем А. А. Приваловым, Ж. Бургеном, П. Войташеком и др. (см., например, [9], [10]).

Список литературы

1. *Meyer Y.* Ondelettes et operateurs. I. Ondelets // Actualites Mathematiques. Paris: Hermann, 1990.
2. *Offin D., Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constructive approx. 1993. V. 9. P. 319–325.
3. *Корнейчук Н. П., Лизун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982.
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.–Л.: Госиздат, 1952.
5. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
6. *Бочкарев С. В.* Существование базиса в пространстве аналитических в единичном круге функций и некоторые свойства системы Франклина // Матем. сб. 1974. Т. 95 (137). № 1. С. 3–18.
7. *Бочкарев С. В.* Построение полиномиальных базисов в конечномерных пространствах аналитических в круге функций // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 49–74.
8. *Бочкарев С. В.* Построение интерполяционного диадического базиса в пространстве непрерывных функций на основе ядер Фейера // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 172. С. 29–59.
9. *Bourgain J.* Homogeneous polynomials on the ball and polynomial bases // Israel J. Math. 1989. V. 68. № 3. P. 327–347.
10. *Woitaszczyk P., Wozniakowski K.* Orthonormal polynomial basis in function spaces. Preprint 475/Inst. Math. PAS, 1990.

Институт математики и механики УрО РАН

Поступило в редакцию
20.IV.1998