Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Лауринчикас, Совместная универсальность дзета-функций с периодическими коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 79–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:54:26

УДК 511

А. Лауринчикас

Совместная универсальность дзета-функций с периодическими коэффициентами

Получена совместная теорема универсальности типа Воронина для набора функций, состоящего из периодических дзета-функций и периодических дзета-функций Гурвица с алгебраически независимыми параметрами.

Библиография: 29 наименований.

Ключевые слова: периодическая дзета-функция, периодическая дзета-функция Гурвица, предельная теорема, совместная универсальность.

§ 1. Введение

Как обычно, через $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ будем обозначать множества соответственно всех простых, целых положительных, целых неотрицательных, целых, действительных и комплексных чисел. С.М. Воронин в [1] (см. также [2], [3]) открыл замечательное свойство универсальности дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$.

ТЕОРЕМА А [2]. Пусть $0 < r < 1/4$, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в круге $|s| \leq r$ и аналитична внутри этого круга. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное число $\tau = \tau(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, из свойства универсальности в смысле Воронина следует, что всякая аналитическая функция, не имеющая нулей в критической полосе, равномерно приближается сдвигами дзета-функции Римана.

Теорема А имеет несколько более общую формулировку. Через $\text{meas}\{A\}$ обозначим меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ и при $T > 0$ положим

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T], \dots\},$$

где вместо многоточия записывается условие, которому удовлетворяет τ . Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$.

ТЕОРЕМА В [4]. Пусть K – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная, не имеющая нулей в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T\left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right) > 0.$$

Исследования по универсальности дзета- и L -функций были продолжены многими авторами, среди которых А. Райх, С.М. Гонек, Б. Багчи, К. Матсумото, Й. Штойдинг, В. Шварц, Р. Гарункштис, Г. Бауэр, Р. Шлежевичене, Г. Мишу, Г. Нагоши, Т. Накамура, автор настоящей статьи и др. Историю этих исследований и результаты можно найти в обзорных статьях [5]–[7], а также в монографиях [4], [8]–[10].

Напомним также универсальность дзета-функции Гурвица $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, которая при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением простого полюса $s = 1$ с вычетом 1. Мы ограничимся рассмотрением только случая трансцендентного α . В этом случае, в отличие от $\zeta(s)$, функция $\zeta(s, \alpha)$ не имеет эйлерова произведения по простым числам, поэтому ее универсальность отличается от универсальности $\zeta(s)$.

ТЕОРЕМА С [8]. Пусть α – трансцендентное число, K – то же множество, что и в теореме В, а $f(s)$ – непрерывная в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Более сложной и интересной является совместная универсальность дзета-функций, при которой набор аналитических функций одновременно приближается сдвигами дзета-функций. Первую совместную теорему универсальности также получил С.М. Воронин. В [11] он доказал совместную универсальность для L -функций Дирихле. Мы приводим современную формулировку этой теоремы.

ТЕОРЕМА D [11]. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_r$ – попарно неэквивалентные характеры Дирихле, а $L(s, \chi_1), \dots, L(s, \chi_r)$ – соответствующие L -функции Дирихле. Предположим, что $K_1, \dots, K_r$ – компактные подмножества полосы D , обладающие связным дополнением, а функции $f_1(s), \dots, f_r(s)$ непрерывны, не имеют нулей соответственно в $K_1, \dots, K_r$ и аналитичны внутри $K_1, \dots, K_r$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Совместная универсальность L -функций Дирихле другими методами была также получена в [12]–[14].

Настоящая статья посвящена изучению совместной универсальности дзета-функций с периодическими коэффициентами, как имеющих, так и не имеющих эйлерова произведения: приближению набора аналитических функций сдвигами периодических дзета-функций и периодических дзета-функций Гурвица. Пусть $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с минимальным периодом $k \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел. Напомним, что периодическая дзета-функция $\zeta(s; \mathbf{a})$ при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

При $\sigma > 1$ в силу периодичности последовательности $\mathbf{a}$ имеем

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{m=1}^k a_m \zeta\left(s, \frac{m}{k}\right).$$

Отсюда и из свойств дзета-функции Гурвица следует, что функция $\zeta(s; \mathbf{a})$ имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением, быть может, точки $s = 1$, которая является ее простым полюсом с вычетом

$$a = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k a_m.$$

Если $a = 0$, то $\zeta(s; \mathbf{a})$ является целой функцией.

Универсальность функции $\zeta(s; \mathbf{a})$ в случае, когда последовательность $\mathbf{a}$ мультипликативна ($a_1 = 1$ и $a_{mn} = a_m a_n$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$), была получена в [15].

Пусть $\mathbf{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – другая периодическая с минимальным периодом $l \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел. Периодическая дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$, $0 < \alpha \leq 1$, при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Используя периодичность последовательности $\mathbf{b}$, легко находим, что при $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{b}) = \frac{1}{l^s} \sum_{m=0}^{l-1} b_m \zeta\left(s, \frac{m + \alpha}{l}\right).$$

Отсюда вытекает, что функция $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением, быть может, точки $s = 1$, которая является ее простым полюсом с вычетом

$$b = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{l-1} b_m.$$

Если $b = 0$, то $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$ – целая функция.

Универсальность функции $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$ с трансцендентным параметром α сначала рассматривалась в [16] и окончательно была получена в [17].

Пусть $\mathbf{a}_j = \{a_{jm} : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с наименьшим периодом $k_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а $\zeta(s; \mathbf{a}_j)$ – соответствующая периодическая дзета-функция, $j = 1, \dots, r_1$, $r_1 > 1$. Совместная универсальность функций $\zeta(s; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s; \mathbf{a}_{r_1})$ изучалась в [18]. Через $k = [k_1, \dots, k_{r_1}]$ обозначим наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_{r_1}$, через $\eta_1, \dots, \eta_{\varphi(k)}$ – приведенную систему вычетов по модулю k и определим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\eta_1} & a_{2\eta_1} & \dots & a_{r_1\eta_1} \\ a_{1\eta_2} & a_{2\eta_2} & \dots & a_{r_1\eta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\eta_{\varphi(k)}} & a_{2\eta_{\varphi(k)}} & \dots & a_{r_1\eta_{\varphi(k)}} \end{pmatrix},$$

где $\varphi(k)$ – функция Эйлера. Кроме того, предположим, что для всех $p \in \mathbb{P}$ выполняются неравенства

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_{jp^\alpha}|}{p^{\alpha/2}} \leq c_j < 1, \quad j = 1, \dots, r_1. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА Е [18]. *Предположим, что последовательности $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ мультипликативны, $\text{rank}(A) = r_1$ и выполняются неравенства (1). Пусть $K_1, \dots, K_{r_1}$ и $f_1(s), \dots, f_{r_1}(s)$ – те же, что и в теореме D. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Изучению совместной универсальности периодических дзета-функций Гурвица посвящены работы [19]–[21]. Наиболее общий результат содержится в [21].

Пусть $\mathbf{b}_j = \{b_{jm} : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с наименьшим периодом $l_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а $\zeta(s; \mathbf{b}_j)$ – соответствующая периодическая дзета-функция Гурвица, $j = 1, \dots, r_2$, $r_2 > 1$. Пусть $l = [l_1, \dots, l_{r_2}]$ и

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{r_2 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{r_2 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1l} & a_{2l} & \dots & a_{r_2 l} \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА F [21]. *Предположим, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ алгебраически независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\text{rank}(B) = r_2$, а $K_1, \dots, K_{r_2}$ – те же самые множества, что и в теореме D. Пусть функции $f_1(s), \dots, f_{r_2}(s)$ соответственно непрерывны в $K_1, \dots, K_{r_2}$ и аналитичны внутри $K_1, \dots, K_{r_2}$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r_2} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Цель настоящей статьи – получить совместную универсальность функций $\zeta(s; \mathbf{a}_j)$ и $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{b}_j)$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что последовательности $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{r_1}$ мультипликативны, $\text{rank}(A) = r_1$ и выполняются неравенства (1), а также что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Пусть $K_1, \dots, K_{r_1}$ и $f_1(s), \dots, f_{r_1}(s)$ удовлетворяют условиям теоремы E, а $\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_{r_2}$ и $\hat{f}_1(s), \dots, \hat{f}_{r_2}(s)$ – условиям теоремы F. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r_2} \sup_{s \in \hat{K}_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{b}_j) - \hat{f}_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Совместная универсальность функций $\zeta(s)$ и $\zeta(s, \alpha)$ с трансцендентным параметром α была получена в [22].

Применение новых идей при доказательстве позволяет отказаться от требования, налагаемого на ранг матрицы B .

§ 2. Совместная предельная теорема

Основную роль при доказательстве теоремы 1 играет совместная предельная теорема в смысле слабой сходимости вероятностных мер в многомерном пространстве аналитических функций для набора функций $\zeta(s; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s; \mathbf{a}_{r_1})$, $\zeta(s, \alpha_1; \mathbf{b}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2})$.

Пусть $H(D)$ – пространство аналитических в D функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах, и пусть

$$H_{r_1, r_2}(D) = \underbrace{H(D) \times \cdots \times H(D)}_{r_1 + r_2}.$$

Через $\mathcal{B}(S)$ обозначим класс борелевских множеств пространства S . Для формулирования предельной теоремы нам еще нужны некоторые топологические структуры. Пусть $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ – единичная окружность на комплексной плоскости, и пусть

$$\Omega = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p, \quad \widehat{\Omega} = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для всех $p \in \mathbb{P}$ и $\gamma_m = \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. В силу теоремы Тихонова бесконечномерные торы Ω и $\widehat{\Omega}$ с топологией произведения и операцией поточечного перемножения являются компактными топологическими абелевыми группами. Поэтому на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ и $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}))$ могут быть определены соответственно вероятностные меры Хаара m_H и $\widehat{m}_H$. Получаем два вероятностных пространства $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ и $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \widehat{m}_H)$. Пусть

$$\underline{\Omega} = \Omega \times \widehat{\Omega}_1 \times \cdots \times \widehat{\Omega}_{r_2},$$

где $\widehat{\Omega}_j = \widehat{\Omega}$ для всех $j = 1, \dots, r_2$. Тогда $\underline{\Omega}$ опять является компактной топологической группой, и мы получаем новое вероятностное пространство $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$, где $\underline{m}_H$ – вероятностная мера Хаара на $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}))$. Отметим, что мера $\underline{m}_H$ является произведением мер m_H и $\widehat{m}_{1H}, \dots, \widehat{m}_{r_2H}$, где $\widehat{m}_{jH}$ – вероятностная мера Хаара на $(\widehat{\Omega}_j, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}_j))$, $j = 1, \dots, r_2$. Через $\omega(p)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p , $p \in \mathbb{P}$, а через $\widehat{\omega}_j(m)$ – проекцию элемента $\widehat{\omega}_j \in \widehat{\Omega}_j$, $j = 1, \dots, r_2$, на координатное пространство γ_m , $m \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, для $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\omega(m) = \prod_{p^r || m} \omega^r(p),$$

где $p^r || m$ означает, что $p^r | m$, но $p^{r+1} \nmid m$.

Пусть $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2})$, $\underline{\omega} = (\omega, \widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_{r_2})$, $\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{r_1})$, $\underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{r_2})$, и на вероятностном пространстве $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ определим $H_{r_1, r_2}(D)$ -значный случайный элемент $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$ формулой

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) = (\zeta(s, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \omega; \mathbf{a}_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathbf{b}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_{r_2}, \omega_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2})),$$

где

$$\begin{aligned} \zeta(s, \omega; \mathbf{a}_j) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{jm} \omega(m)}{m^s}, & j &= 1, \dots, r_1, \\ \zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathbf{b}_j) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{b}_{jm} \widehat{\omega}_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, & j &= 1, \dots, r_2. \end{aligned}$$

Через $P_{\underline{\zeta}}$ обозначим распределение случайного элемента $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$, т. е.

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : \underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)).$$

В настоящем параграфе мы будем изучать слабую сходимость при $T \rightarrow \infty$ вероятностной меры

$$P_T(A) = \nu_T(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{a}, \underline{b}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)),$$

где

$$\zeta(s, \underline{\alpha}; \underline{a}, \underline{b}) = (\zeta(s; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s; \mathbf{a}_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{b}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2})).$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что последовательности $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{r_1}$ мультипликативны, а числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Тогда мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к P_ζ .*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая предельная теорема для тора $\underline{\Omega}$. На $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}))$ определим

$$Q_T(A) = \nu_T(((p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}), ((m + \alpha_1)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0), \dots, \dots, ((m + \alpha_{r_2})^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0)) \in A).$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Тогда мера Q_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере Хаара $\underline{m}_H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Двойственная группа тора $\underline{\Omega}$ изоморфна группе

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \right) \bigoplus_{j=1}^{r_2} \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} \mathbb{Z}_{j m} \right),$$

где $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ для всех $p \in \mathbb{P}$ и $\mathbb{Z}_{j m} = \mathbb{Z}$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $j = 1, \dots, r_2$. Элемент $(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) = ((k_p: p \in \mathbb{P}), (l_{1m}: m \in \mathbb{N}_0), \dots, (l_{r_2 m}: m \in \mathbb{N}_0))$ группы G , где только конечное число целых чисел k_p и $l_{1m}, \dots, l_{r_2 m}$ отличны от нуля, действует на $\underline{\Omega}$ следующим образом:

$$(\omega, \widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_{r_2}) \rightarrow (\omega^{\underline{k}}, \widehat{\omega}_1^{\underline{l}_1}, \dots, \widehat{\omega}_{r_2}^{\underline{l}_{r_2}}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \omega^{k_p}(p) \prod_{j=1}^{r_2} \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \widehat{\omega}_j^{l_{jm}}(m).$$

Поэтому преобразование Фурье $g_T(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2})$ меры Q_T имеет вид

$$\begin{aligned} g_T(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) &= \int_{\underline{\Omega}} \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \omega^{k_p}(p) \prod_{j=1}^{r_2} \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \widehat{\omega}_j^{l_{jm}}(m) \right) dQ_T \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{-i\tau k_p} \prod_{j=1}^{r_2} \prod_{m \in \mathbb{N}_0} (m + \alpha_j)^{-i\tau l_{jm}} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left\{ -i\tau \left(\sum_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_{jm} \log(m + \alpha_j) \right) \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где, как и раньше, только конечное число чисел k_p и l_{jm} отличны от нуля. Поскольку числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$, система

$$\{(\log(m + \alpha_1): m \in \mathbb{N}_0), \dots, (\log(m + \alpha_{r_2}): m \in \mathbb{N}_0)\}$$

линейно независима над $\mathbb{Q}$. Хорошо известно, что система $\{\log p: p \in \mathbb{P}\}$ также линейно независима над $\mathbb{Q}$. Легко видеть, что отсюда вытекает линейная независимость над $\mathbb{Q}$ системы чисел

$$\{(\log p: p \in \mathbb{P}), (\log(m + \alpha_1): m \in \mathbb{N}_0), \dots, (\log(m + \alpha_{r_2}): m \in \mathbb{N}_0)\},$$

поэтому отсюда и из (2) находим, что

$$g_T(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) = (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}), \\ -\frac{\exp\{-iT(\sum_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_{jm} \log(m + \alpha_j))\} - 1}{iT(\sum_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_{jm} \log(m + \alpha_j))}, & \text{если } (\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) \neq (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) = (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}), \\ 0, & \text{если } (\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{r_2}) \neq (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}). \end{cases}$$

Таким образом, утверждение теоремы является следствием общих теорем непрерывности для вероятностных мер на компактных группах (см., например, [23, теорема 1.4.2]).

Теперь пусть число $\sigma_1 > 1/2$ фиксировано и при $m, n \in \mathbb{N}$

$$v(m, n) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\},$$

а при $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$v_j(m, n) = v_j(m, n, \alpha_j) = \exp\left\{-\left(\frac{m + \alpha_j}{n + \alpha_j}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Определим ряды

$$\begin{aligned} \zeta_{jn}(s; \mathbf{a}_j) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{jm} v(m, n)}{m^s}, \quad j = 1, \dots, r_1, \\ \zeta_{jn}(s, \alpha_j; \mathbf{b}_j) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{jm} v_j(m, n)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r_2. \end{aligned}$$

В [15] было получено, что ряды для $\zeta_{jn}(s; \mathbf{a}_j)$, $j = 1, \dots, r_1$, а в [16] – ряды для $\zeta_{jn}(s, \alpha_j; \mathbf{b}_j)$, $j = 1, \dots, r_2$, абсолютно сходятся при $\sigma > 1/2$. Пусть при $m \in \mathbb{N}$

$$\underline{\zeta}_n(s, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) = (\zeta_{1n}(s; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta_{r_1 n}(s; \mathbf{a}_{r_1}), \zeta_{1n}(s, \alpha_1; \mathbf{b}_1), \dots, \zeta_{r_2 n}(s, \alpha_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2}))$$

и при $\underline{\omega} = (\omega, \widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_{r_2}) \in \underline{\Omega}$

$$\begin{aligned} \underline{\zeta}_n(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) &= (\zeta_{1n}(s, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta_{r_1 n}(s, \omega; \mathbf{a}_{r_1}), \\ &\quad \zeta_{1n}(s, \alpha_1, \widehat{\omega}_1; \mathbf{b}_1), \dots, \zeta_{r_2 n}(s, \alpha_{r_2}, \widehat{\omega}_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2})), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_{jn}(s, \omega; \mathbf{a}_j) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{jm} \omega(m) v(m, n)}{m^s}, \quad j = 1, \dots, r_1, \\ \zeta_{jn}(s, \alpha_j, \widehat{\omega}_j; \mathbf{b}_j) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{jm} \widehat{\omega}(m) v_j(m, n)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что ряды для $\zeta_{jn}(s, \omega; \mathbf{a}_j)$, $j = 1, \dots, r_1$, и $\zeta_{jn}(s, \alpha_j, \widehat{\omega}_j; \mathbf{b}_j)$, $j = 1, \dots, r_2$, также абсолютно сходятся при $\sigma > 1/2$.

Пусть $\underline{\omega}_0 = (\omega_0, \widehat{\omega}_{01}, \dots, \widehat{\omega}_{0r_2})$ – фиксированный элемент из $\underline{\Omega}$. Определим две вероятностные меры:

$$\begin{aligned} P_{T,n}(A) &= \nu_T(\underline{\zeta}_n(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)), \\ Q_{T,n}(A) &= \nu_T(\underline{\zeta}_n(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}_0; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Тогда на $(H_{r_1, r_2}(D), \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)))$ существует вероятностная мера P_n такая, что обе меры $P_{T, n}$ и $Q_{T, n}$ одновременно при $T \rightarrow \infty$ слабо сходятся к мере P_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $h_n: \underline{\Omega} \rightarrow H_{r_1, r_2}(D)$ формулой

$$h_n(\underline{\omega}) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{1m}\omega(m)v(m, n)}{m^s}, \dots, \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{r_1 m}\omega(m)v(m, n)}{m^s}, \right. \\ \left. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{1m}\widehat{\omega}_1(m)v_1(m, n)}{(m + \alpha_1)^s}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{r_2 m}\widehat{\omega}_{r_2}(m)v_{r_2}(m, n)}{(m + \alpha_{r_2})^s} \right).$$

Тогда функция h_n непрерывна и

$$h_n((p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}), ((m + \alpha_1)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m + \alpha_{r_2})^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0)) \\ = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{1m}v(m, n)}{m^{s+i\tau}}, \dots, \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{r_1 m}v(m, n)}{m^{s+i\tau}}, \right. \\ \left. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{1m}v_1(m, n)}{(m + \alpha_1)^{s+i\tau}}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{r_2 m}v_{r_2}(m, n)}{(m + \alpha_{r_2})^{s+i\tau}} \right) = \zeta_n(s, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}).$$

Отсюда имеем

$$P_{T, n}(A) = Q_T h_n^{-1}(A) = Q_T(h_n^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)).$$

Следовательно, из теоремы 3 согласно [24, теорема 5.1] вытекает, что мера $P_{T, n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $\underline{m}_H h_n^{-1}$.

Остается то же самое доказать для меры $Q_{T, n}$. Пусть функция $u: \underline{\Omega} \rightarrow \underline{\Omega}$ задана формулой

$$u(\underline{\omega}) = \underline{\omega} \omega_0.$$

Тогда имеем, что

$$h_n(u((p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}), ((m + \alpha_1)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m + \alpha_{r_2})^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0))) \\ = (\zeta_{1n}(s + i\tau, \omega_0; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta_{r_1 n}(s + i\tau, \omega_0; \mathbf{a}_{r_1}), \\ \zeta_{1n}(s + i\tau, \alpha_1, \widehat{\omega}_{01}; \mathbf{b}_1), \dots, \zeta_{r_2 n}(s + i\tau, \alpha_{r_2}, \widehat{\omega}_{0r_2}; \mathbf{b}_{r_2})) \\ = \zeta_n(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}_0; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}).$$

Поэтому, рассуждая аналогично случаю меры $P_{T, n}$, получаем, что мера $Q_{T, n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $\underline{m}_H (h_n u)^{-1}$. Однако в силу инвариантности меры Хаара $\underline{m}_H$ находим, что

$$\underline{m}_H (h_n u)^{-1} = (\underline{m}_H u^{-1}) h_n^{-1} = \underline{m}_H h_n^{-1}.$$

Таким образом, $Q_{T, n}$ при $T \rightarrow \infty$ также слабо сходится к $\underline{m}_H h_n^{-1}$. Теорема доказана.

Теперь приблизим в среднем векторы $\zeta(s, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$ и $\zeta(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$ соответственно векторами $\zeta_n(s, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$ и $\zeta_n(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$. Для этого нам понадобится метрика в пространстве $H_{r_1, r_2}(D)$, индуцирующая его топологию. Хорошо известно (см., например, [25]), что существует последовательность компактных

множеств $\{K_l: l \in \mathbb{N}\}$ полосы D такая, что:

$$1^\circ) D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l;$$

$$2^\circ) K_l \subset K_{l+1} \text{ для всех } l \in \mathbb{N};$$

3°) для всякого компактного множества $K \subset D$ существует l такое, что $K \subseteq K_l$.

Для $g_1, g_2 \in H(D)$ положим

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}.$$

Тогда $\rho(g_1, g_2)$ – метрика в пространстве $H(D)$, индуцирующая его топологию равномерной сходимости на компактах.

Пусть $\underline{g}_1 = (g_{11}, \dots, g_{1, r_1+r_2})$, $\underline{g}_2 = (g_{21}, \dots, g_{2, r_1+r_2}) \in H_{r_1, r_2}(D)$. Тогда

$$\underline{\rho}(\underline{g}_1, \underline{g}_2) = \max_{1 \leq j \leq r_1+r_2} \rho(g_{1j}, g_{2j})$$

является искомой метрикой в $H_{r_1, r_2}(D)$.

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\rho}(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}), \zeta_n(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})) d\tau = 0.$$

Если числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$, то для почти всех элементов $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\rho}(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}), \zeta_n(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})) d\tau = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – компактное подмножество полосы D . В [15] было получено, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}) - \zeta_n(s + i\tau; \mathbf{a})| d\tau = 0,$$

а в [16] было отмечено, что имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{b}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathbf{b})| d\tau = 0,$$

где $\zeta_n(s; \mathbf{a})$ и $\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{b})$ определены аналогично соответственно функциям $\zeta_{jn}(s; \mathbf{a}_j)$ и $\zeta_{jn}(s, \alpha_j; \mathbf{b}_j)$. Отсюда и из определения метрики $\underline{\rho}$ вытекает первое утверждение теоремы.

В [15] также было доказано, что для почти всех $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \omega; \mathbf{a}) - \zeta_n(s + i\tau, \omega; \mathbf{a})| d\tau = 0, \quad (3)$$

а в [16] при трансцендентном α было получено, что для почти всех $\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha, \widehat{\omega}; \mathbf{b}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha, \widehat{\omega}; \mathbf{b})| d\tau = 0,$$

где $\zeta_n(s, \omega; \mathbf{a})$ и $\zeta_n(s, \alpha, \widehat{\omega}; \mathbf{b})$ определены аналогично соответственно функциям $\zeta_{jn}(s, \omega; \mathbf{a}_j)$ и $\zeta_{jn}(s, \alpha_j, \widehat{\omega}; \mathbf{b}_j)$. Алгебраическая независимость чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$

над $\mathbb{Q}$ влечет за собой их трансцендентность. Следовательно, имеем, что для почти всех $\widehat{\omega}_j \in \widehat{\Omega}_j$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j, \widehat{\omega}_j; \mathbf{b}_j) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha_j, \widehat{\omega}_j; \mathbf{b}_j)| d\tau = 0, \quad (4)$$

$$j = 1, \dots, r_2.$$

Поскольку из определения метрики $\underline{\rho}$ следует равенство

$$\left\{ \underline{\omega} \in \underline{\Omega}: \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\rho}(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}), \zeta_n(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})) d\tau = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \underline{\omega} \in \underline{\Omega}: \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta(s + i\tau, \omega; \mathbf{a}_1), \zeta_{1n}(s + i\tau, \omega; \mathbf{a}_1)) d\tau = 0, \dots \right.$$

$$\dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta(s + i\tau, \omega; \mathbf{a}_{r_1}), \zeta_{r_1n}(s + i\tau, \omega; \mathbf{a}_{r_1})) d\tau = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta(s + i\tau, \alpha_1, \widehat{\omega}_1; \mathbf{b}_1), \zeta_{1n}(s + i\tau, \alpha_1, \widehat{\omega}_1; \mathbf{b}_1)) d\tau = 0, \dots$$

$$\left. \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta_n(s + i\tau, \alpha_{r_0}, \widehat{\omega}_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2}), \zeta_{r_2n}(s + i\tau, \alpha_{r_2}, \widehat{\omega}_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2})) d\tau = 0 \right\}$$

и мера $\underline{m}_H$ является произведением мер m_H и $\widehat{m}_{1H}, \dots, \widehat{m}_{r_2H}$, отсюда и из соотношений (3) и (4) получаем второе утверждение теоремы.

На $(H_{r_1, r_2}(D), \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)))$ определим еще одну вероятностную меру

$$R_T(A) = \nu_T(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) \in A).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда на $(H_{r_1, r_2}(D), \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)))$ существует вероятностная мера P такая, что меры P_T и R_T при $T \rightarrow \infty$ одновременно слабо сходятся к P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим на некотором вероятностном пространстве $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mu)$ случайную величину θ и предположим, что она равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. На $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mu)$ определим $H_{r_1, r_2}(D)$ -значный случайный элемент

$$\begin{aligned} \underline{X}_{T,n} &= \underline{X}_{T,n}(s) = (X_{T,n,1}(s), \dots, X_{T,n,r_1}(s), \widehat{X}_{T,n,1}(s), \dots, \widehat{X}_{T,n,r_2}(s)) \\ &= \zeta_n(s + i\theta T, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}). \end{aligned}$$

В силу теоремы 4 имеем

$$\underline{X}_{T,n} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \underline{X}_n, \quad (5)$$

где $\underline{X}_n = \underline{X}_n(s) - H_{r_1, r_2}(D)$ -значный случайный элемент с распределением P_n , а $\xrightarrow{T \rightarrow \infty}$ означает сходимость по распределению.

Ряды для функций $\zeta_{jn}(s; \mathbf{a}_j)$, $j = 1, \dots, r_1$, и $\zeta_{jn}(s, \alpha_j; \mathbf{b}_j)$, $j = 1, \dots, r_2$, абсолютно сходятся при $\sigma > 1/2$. Следовательно, при $\sigma > 1/2$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta_{jn}(\sigma + it; \mathbf{a}_j)|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{jm}|^2 v^2(m, n)}{m^{2\sigma}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{jm}|^2}{m^{2\sigma}}, \quad (6)$$

$$j = 1, \dots, r_1,$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, и

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta_{jn}(\sigma + it, \alpha_j; \mathbf{b}_j)|^2 dt &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_{jm}|^2 v_j^2(m, n)}{(m + \alpha_j)^{2\sigma}} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b_{jm}|^2}{(m + \alpha_j)^{2\sigma}}, \quad j = 1, \dots, r_2, \end{aligned} \quad (7)$$

для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Пусть L_l – простой замкнутый контур, окаймляющий множество K_l и лежащий в полосе D , $l \in \mathbb{N}$. Тогда по интегральной теореме Коши для $s \in K_l$ имеем

$$\zeta_{jn}(s + i\tau; \mathbf{a}_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_l} \frac{\zeta_{jn}(z + i\tau; \mathbf{a}_j)}{z - s} dz, \quad j = 1, \dots, r_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\sup_{s \in K_l} |\zeta_{jn}(s + i\tau; \mathbf{a}_j)| \ll \frac{1}{\delta_l} \int_{L_l} |\zeta_{jn}(z + i\tau; \mathbf{a}_j)| |dz|,$$

где δ_l – расстояние от контура L_l до множества K_l . Контур L_l можем выбрать так, чтобы выполнялись неравенства $0 < c_l \leq \delta_l \leq 1$ с некоторой константой c_l . Поскольку множество K_l ограничено, контур L_l также будет ограниченным. Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_{jn}(s + i\tau; \mathbf{a}_j)| d\tau &\ll \frac{1}{\delta_l} \int_{L_l} |dz| \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta_{jn}(\operatorname{Re} z + i\tau; \mathbf{a}_j)| d\tau \\ &\ll \frac{|L_l|}{\delta_l} \sup_{z \in L_l} \frac{1}{T} \int_{-|\operatorname{Im} z|}^{T+|\operatorname{Im} z|} |\zeta_{jn}(\operatorname{Re} z + i\tau; \mathbf{a}_j)| d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где $|L_l|$ – длина контура L_l . В силу (6) при $\sigma > 1/2$ и достаточно больших T имеем

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta_{jn}(\sigma + it; \mathbf{a}_j)|^2 dt \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{jm}|^2}{m^{2\sigma}}.$$

Поэтому из (8) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_{jn}(s + i\tau; \mathbf{a}_j)| d\tau &\ll \frac{|L_l|}{\delta_l} \sup_{z \in L_l} \left(\frac{1}{T} \int_{-|\operatorname{Re} z|}^{T+|\operatorname{Im} z|} |\zeta_{jn}(\operatorname{Re} z + i\tau; \mathbf{a}_j)|^2 d\tau \right) \\ &\ll \frac{L_l}{\delta_l} \sup_{s \in L_l} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{jm}|^2}{m^{2\operatorname{Re} z}} \right)^{1/2} \leq C_l \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{jm}|^2}{m^{2\sigma_l}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

с некоторой константой C_l и $\sigma_l = \min\{\sigma : s \in L_l\} > 1/2$. Таким образом, для всякого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_{jn}(s + i\tau; \mathbf{a}_j)| d\tau \leq C_l R_{1jl} < \infty, \quad (9)$$

где

$$R_{1jl} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{jm}|^2}{m^{2\sigma_l}} \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, r_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогично, используя (7), получаем, что для всякого $l \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_{jn}(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{b}_j)| d\tau \leq C_l R_{2jl} < \infty, \quad (10)$$

где

$$R_{2jl} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|b_{jm}|^2}{(m + \alpha_j)^{2\sigma_l}} \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, r_2, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теперь пусть ε – произвольное положительное число и $M_{1jl} = C_l R_{1jl} 2^{l+1} r_1 / \varepsilon$, $j = 1, \dots, r_1$, $M_{2jl} = C_l R_{2jl} 2^{l+1} r_2 / \varepsilon$, $j = 1, \dots, r_2$. Тогда в силу неравенств (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} & \limsup_{T \rightarrow \infty} \mu \left(\exists j : \left(\sup_{s \in K_l} |X_{T,n,j}(s)| > M_{1jl} \right) \vee \left(\sup_{s \in K_l} |\widehat{X}_{T,n,j}(s)| > M_{2jl} \right) \right) \\ & \leq \sum_{j=1}^{r_1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mu \left(\sup_{s \in K_l} |X_{T,n,j}(s)| > M_{1jl} \right) \\ & \quad + \sum_{j=1}^{r_2} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mu \left(\sup_{s \in K_l} |\widehat{X}_{T,n,j}(s)| > M_{2jl} \right) \\ & \leq \sum_{j=1}^{r_1} \frac{1}{M_{1jl}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_{jn}(s + i\tau; \mathbf{a}_j)| d\tau \\ & \quad + \sum_{j=1}^{r_2} \frac{1}{M_{2jl}} \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_{jn}(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{b}_j)| d\tau \\ & \leq \sum_{j=1}^{r_1} \frac{C_l R_{1jl}}{M_{1jl}} + \sum_{j=1}^{r_2} \frac{C_l R_{2jl}}{M_{2jl}} = \frac{\varepsilon}{2^l}. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (5) получаем, что

$$\mu \left(\exists j : \left(\sup_{s \in K_l} |X_{n,j}(s)| > M_{1jl} \right) \vee \left(\sup_{s \in K_l} |\widehat{X}_{n,j}(s)| > M_{2jl} \right) \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^l}. \quad (11)$$

Определим множество

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^{r_1+r_2} = & \left\{ (g_1, \dots, g_{r_1}, \widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_{r_2}) \in H_{r_1, r_2}(D) : \sup_{s \in K_l} |g_j(s)| \leq M_{1jl}, \quad j = 1, \dots, r_1, \right. \\ & \left. \sup_{s \in K_l} |\widehat{g}_j(s)| \leq M_{2jl}, \quad j = 1, \dots, r_2, \quad l \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда $H_\varepsilon^{r_1+r_2}$ является компактным множеством в пространстве $H_{r_1, r_2}(D)$ и ввиду (11) для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(\underline{X}_n \in H_\varepsilon^{r_1+r_2}) > 1 - \varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon,$$

или по определению $\underline{X}_n$

$$P_n(H_\varepsilon^{r_1+r_2}) > 1 - \varepsilon$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что семейство вероятностных мер $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ является плотным. Следовательно, по теореме Прохорова (см. [24,

теорема 6.1]) оно относительно компактно. Поэтому существует подпоследовательность $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$ такая, что мера P_{n_k} при $k \rightarrow \infty$ слабо сходится к некоторой мере P на $(H_{r_1, r_2}(D), \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D)))$. Это эквивалентно соотношению

$$\underline{X}_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P. \quad (12)$$

Пусть $\underline{X}_T = \underline{X}_T(s) = \zeta(s + iT\theta, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})$ – еще один $H_{r_1, r_2}(D)$ -значный случайный элемент на вероятностном пространстве $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mu)$. В силу первого утверждения теоремы 5 имеем, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mu(\rho(\underline{X}_T(s), \underline{X}_{T,n}(s)) \geq \varepsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \nu_T(\rho(\zeta(s + iT\theta, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}), \zeta_n(s + iT\theta, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})) \geq \varepsilon) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\varepsilon} \int_0^T \rho(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}), \zeta_n(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство вместе с (5), (12) и [24, теорема 4.2] влечет соотношение

$$\underline{X}_T \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P, \quad (13)$$

которое эквивалентно слабой сходимости при $T \rightarrow \infty$ меры P_T к P . Кроме того, (13) показывает, что мера P не зависит от выбора подпоследовательности $\{P_{n_k}\}$. Отсюда и из относительной компактности семейства $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ вытекает, что

$$\underline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P. \quad (14)$$

Остается доказать слабую сходимость меры R_T . Положим

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{T,n} &= \underline{Y}_{T,n}(s) = \zeta_n(s + iT\theta, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}), \\ \underline{Y}_T &= \underline{Y}_T(s) = \zeta(s + iT\theta, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}). \end{aligned}$$

Тогда, повторяя выше использованные рассуждения для случайных элементов $\underline{Y}_{T,n}$ и $\underline{Y}_T$ и учитывая соотношение (14) и второе утверждение теоремы 5, аналогично случаю меры P_T находим, что мера R_T при $T \rightarrow \infty$ также слабо сходится к мере P .

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится одно утверждение эргодической теории. Пусть $a_\tau = \{(p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}), ((m + \alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m + \alpha_{r_2})^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)\}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Тогда $\{a_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ является однопараметрической группой. Определим на $\underline{\Omega}$ семейство преобразований $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, полагая $\Phi_\tau(\underline{\omega}) = a_\tau \underline{\omega}$, $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Тогда $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа измеримых, сохраняющих меру преобразований на $\underline{\Omega}$. Напомним, что множество $A \in \mathcal{B}(\underline{\Omega})$ называется *инвариантным относительно группы* $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, если для всякого $\tau \in \mathbb{R}$ множества A и $A_\tau = \Phi_\tau(A)$ отличаются друг от друга самое большее на $\underline{m}_H$ -меру нуль. Все инвариантные множества образуют σ -поле, являющееся σ -подполем σ -поля $\mathcal{B}(\underline{\Omega})$. Однопараметрическая группа $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ эргодична, если ее σ -поле инвариантных множеств состоит только из множеств $\underline{m}_H$ -меры нуль или единица.

ЛЕММА 7. *Предположим, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда однопараметрическая группа $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ эргодична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi: \underline{\Omega} \rightarrow \gamma$ – характер группы $\underline{\Omega}$. Как уже было отмечено в доказательстве теоремы 3, тогда

$$\chi(\underline{\omega}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \omega^{k_p}(p) \prod_{j=1}^{r_2} \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \hat{\omega}^{l_{jm}}(m),$$

где только конечное число целых чисел k_p и l_{jm} отличны от нуля. Для нетривиального характера χ отсюда имеем

$$\begin{aligned} \chi(a_\tau) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{-i\tau k_p} \prod_{j=1}^{r_2} \prod_{m \in \mathbb{N}_0} (m + \alpha_j)^{-i\tau l_{jm}} \\ &= \exp \left\{ -i\tau \left(\sum_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_{jm} \log(m + \alpha_j) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку множество

$$\{(\log p: p \in \mathbb{P}), (\log(m + \alpha_1): m \in \mathbb{N}_0), \dots, (\log(m + \alpha_{r_2}): m \in \mathbb{N}_0)\}$$

линейно независимо над $\mathbb{Q}$, отсюда имеем, что существует действительное число $\tau_0 \neq 0$ такое, что

$$\chi(a_{\tau_0}) \neq 1. \quad (15)$$

Рассмотрим инвариантное множество A относительно группы $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$. Тогда для почти всех $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$

$$I_A(a_\tau \underline{\omega}) = I_A(\underline{\omega}), \quad (16)$$

где I_A – индикатор множества A . В силу инвариантности меры Хаара $\underline{m}_H$ и равенства (16) преобразование Фурье $\hat{I}_A(\chi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{I}_A(\chi) &= \int_{\underline{\Omega}} \chi_A(\underline{\omega}) I_A(\underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) = \int_{\underline{\Omega}} \chi(a_{\tau_0} \underline{\omega}) I_A(a_{\tau_0} \underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) \\ &= \chi(a_{\tau_0}) \int_{\underline{\Omega}} \chi(\underline{\omega}) I_A(\underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) = \chi(a_{\tau_0}) \hat{I}_A(\chi). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду неравенства (15) получаем, что

$$\hat{I}_A(\chi) = 0 \quad (17)$$

для всех нетривиальных характеров χ группы $\underline{\Omega}$.

Теперь пусть χ_0 – тривиальный характер группы $\underline{\Omega}$, т. е. $\chi_0(\omega) = 1$ для всех $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Пусть $\hat{I}_A(\chi_0) = u$. Тогда, используя свойство ортогональности характеров и равенство (17), находим, что для всякого характера χ группы $\underline{\Omega}$

$$\hat{I}_A(\chi) = u \int_{\underline{\Omega}} \chi(\underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) = u \hat{1}(\chi) = \hat{u}(\chi).$$

Поскольку $I_A(\chi)$ однозначно определяется преобразованием Фурье $\hat{I}_A(\chi)$, отсюда вытекает, что $I_A(\underline{\omega}) = u$ для почти всех $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Однако $I_A(\underline{\omega})$ – индикатор множества A . Следовательно, $u = 0$ или $u = 1$, и $I_A(\underline{\omega}) = 0$ или $I_A(\underline{\omega}) = 1$ для почти всех $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Таким образом, $\underline{m}_H(A) = 0$ или $\underline{m}_H(A) = 1$, что доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно теореме 6 остается показать, что мера P в теореме 6 совпадает с распределением случайного элемента $\zeta(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{a}, \underline{b})$. Пусть A – фиксированное множество непрерывности меры P в теореме 6. Тогда из последней теоремы согласно [24, теорема 2.1] следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \nu_T(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{a}, \underline{b}) \in A) = P(A). \quad (18)$$

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \underline{m}_H)$ определим случайную величину ξ следующей формулой:

$$\xi(\underline{\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \zeta(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{a}, \underline{b}) \in A, \\ 0, & \text{если } \zeta(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{a}, \underline{b}) \notin A. \end{cases}$$

Обозначая через $E(\xi)$ математическое ожидание случайной величины ξ , имеем

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi d\underline{m}_H = \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \Omega: \zeta(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{a}, \underline{b}) \in A) = P_{\zeta}(A). \quad (19)$$

Напомним (см. [26, с. 155–156]) определение эргодического случайного процесса. Случайный процесс $X(t)$ называется *строго стационарным*, если все его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвигов времени t . Пусть Y – пространство всех вещественных конечных функций вещественной переменной t , а P – вероятностная мера на $\mathcal{B}(Y)$, однозначно определяемая конечномерными распределениями процесса $X(t)$. Получаем вероятностное пространство $(Y, \mathcal{B}(Y), P)$. Элементарными событиями этого пространство являются выборочные функции $x(t)$ процесса $X(t)$. Определим в пространстве $(Y, \mathcal{B}(Y), P)$ преобразования сдвига g_{τ} , переводящие $y(t)$ в $y(t + \tau)$. Множество $A \in \mathcal{B}(Y)$ называется *инвариантным множеством* процесса $X(t)$, если для любого фиксированного $\tau \in \mathbb{R}$ множества A и $A_{\tau} = g_{\tau}(A)$ отличаются самое большее на множество P -меры нуль. Все инвариантные множества образуют σ -поле, содержащееся в $\mathcal{B}(Y)$. Строго стационарный процесс $X(t)$ называется *эргодическим*, если отвечающее ему σ -поле инвариантных множеств состоит лишь из множеств, имеющих P -меры нуль или единица.

Из леммы 7 вытекает эргодичность случайного процесса $\xi(\Phi_{\tau}(\underline{\omega}))$ (см., например, [4, с. 190]). Следовательно, из классической теоремы Биркгофа–Хинчина (см. [26, с. 158]) следует, что для почти всех $\underline{\omega} \in \Omega$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(\Phi_{\tau}(\underline{\omega})) d\tau = E(\xi). \quad (20)$$

Однако в силу определений ξ и Φ_{τ} имеем

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(\Phi_{\tau}(\underline{\omega})) d\tau = \nu_T(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{a}, \underline{b}) \in A).$$

Отсюда и из (19), (20) получаем, что для почти всех $\underline{\omega} \in \Omega$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \nu_T(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{a}, \underline{b}) \in A) = P_{\zeta}(A).$$

Таким образом, ввиду (18) для всех множеств непрерывности A меры P имеет место равенство $P(A) = P_{\zeta}(A)$. Напоминаем, что *определяющим классом* называется подкласс $\mathcal{A}$ класса $\mathcal{B}(S)$, если меры P и Q на $(S, \mathcal{B}(S))$ тождественны всякий раз, когда их значения на $\mathcal{A}$ совпадают. Поскольку все множества непрерывности образуют определяющий класс [27], отсюда следует, что $P(A) = P_{\zeta}(A)$ для всех $A \in \mathcal{B}(H_{r_1, r_2}(D))$. Теорема доказана.

§ 3. Носитель меры $P_{\underline{\zeta}}$

Доказательство теоремы 1 использует теорему 2, но при этом нужно знать носитель меры $P_{\underline{\zeta}}$. Напоминаем, что *носителем меры* $P_{\underline{\zeta}}$ называется минимальное замкнутое множество $S_{P_{\underline{\zeta}}}$ из $H_{r_1, r_2}(D)$ такое, что $\bar{P}_{\underline{\zeta}}(S_{P_{\underline{\zeta}}}) = 1$. Множество $S_{P_{\underline{\zeta}}}$ состоит из всех таких точек $\underline{g} \in H_{r_1, r_2}(D)$, что для всякой окрестности G точки $\underline{g}$ выполняется неравенство $P_{\underline{\zeta}}(G) > 0$.

Пусть при $r > 1$

$$H^r(D) = \underbrace{H(D) \times \cdots \times H(D)}_r.$$

Выше мы замечали, что мера $\underline{m}_H$ является произведением мер m_H и $\hat{m}_{1H}, \dots, \dots, \hat{m}_{r_2H}$. Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} P_{\underline{\zeta}}(A) &= \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega}: \underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) \in A) \\ &= \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega}: (\zeta(s, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \omega, \mathbf{a}_{r_1})) \in A^{(r_1)}, \\ &\quad \zeta(s, \alpha_1, \hat{\omega}_1; \mathbf{b}_1) \in A_1, \dots, \zeta(s, \alpha_{r_2}, \hat{\omega}_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2}) \in A_{r_2}) \\ &= m_H(\omega \in \Omega: (\zeta(s, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \omega; \mathbf{a}_{r_1})) \in A^{(r_1)}) \\ &\quad \times \hat{m}_{1H}(\hat{\omega}_1 \in \hat{\Omega}_1: \zeta(s, \alpha_1, \hat{\omega}_1; \mathbf{b}_1) \in A_1) \times \cdots \\ &\quad \cdots \times \hat{m}_{r_2H}(\hat{\omega}_{r_2} \in \hat{\Omega}_{r_2}: \zeta(s, \alpha_{r_2}, \hat{\omega}_{r_2}; \mathbf{b}_{r_2}) \in A_{r_2}), \end{aligned} \quad (21)$$

где $A^{(r_1)}$ – проекция множества A на $H^{r_1}(D)$, а A_j – проекция множества A на $H(D)$, $j = 1, \dots, r_2$.

Пусть $S = \{g \in H(D): g(s) \neq 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}$.

ЛЕММА 8. Пусть последовательности $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{r_1}$ мультипликативны, $\text{rank}(A) = r_1$ и выполняются неравенства (1). Тогда носителем случайного элемента $(\zeta(s, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \omega; \mathbf{a}_{r_1}))$ является множество S^{r_1} .

При доказательстве леммы 8 мы будем пользоваться следующими вспомогательными утверждениями. Через S_{ξ} обозначим носитель случайного элемента ξ . Пусть $r \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 9. Пусть $\{X_m: m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых $H^r(D)$ -значных случайных элементов таких, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} X_m$ сходится почти наверное. Тогда носителем суммы этого ряда является замыкание множества всех таких элементов $\underline{g} \in H^r(D)$, которые представляются в виде сходящегося ряда:

$$\underline{g} = \sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m, \quad \underline{g}_m \in S_{X_m}.$$

Лемма 9 является частным случаем леммы 5 из [28].

ЛЕММА 10. Предположим, что последовательность $\{\underline{g}_m: m \in \mathbb{N}\} = \{g_{1m}, \dots, g_{rm}: m \in \mathbb{N}\} \in H^r(D)$ удовлетворяет условиям:

1) если $\mu_1, \dots, \mu_r$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{C}} g_{jm}(s) d\mu_j(s) \right| < \infty,$$

то $\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu_j(s) = 0$ для всех $j = 1, \dots, r$ и $l \in \mathbb{N}_0$;

- 2) ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m$ сходится в $H^r(D)$;
 3) для всякого компактного подмножества $K \subset D$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r \sup_{s \in K} |g_{jm}(s)|^2 < \infty.$$

Тогда множество всех сходящихся рядов $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \underline{g}_m$ при $|a_m| = 1$ всюду плотно в $H^r(D)$.

Лемма 10 является частным случаем леммы 6 из [28].

ЛЕММА 11 [4, лемма 6.4.10]. Предположим, что μ – комплекснозначная мера на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \sigma > \sigma_0\}$, и

$$g(s) = \int_{\mathbb{C}} e^{sz} d\mu(z).$$

Если $g(s) \not\equiv 0$, то

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} > \sigma_0.$$

Напоминаем, что аналитическая в угловой области $|\arg s| \leq \theta_0$, $0 < \theta_0 \leq \pi$, функция $g(s)$ называется функцией экспоненциального типа, если

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})|}{r} < \infty$$

равномерно относительно θ , $|\theta| \leq \theta_0$.

ЛЕММА 12 [14, лемма 4.1]. Пусть g – функция экспоненциального типа и

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} > -1.$$

Тогда для взаимно простых l и k имеем

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \equiv l \pmod{k}}} |g(\log p)| = +\infty.$$

Напомним еще теоремы Гурвица и Мергеляна.

ЛЕММА 13. Пусть $\{g_n(s): n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность функций, аналитических в некоторой области G , ограниченной простым замкнутым контуром, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(s) = g(s)$$

равномерно в G , причем $g(s) \not\equiv 0$. Тогда внутренняя точка s_0 области G является нулем функции $g(s)$, если и только если существует последовательность $\{s_n\} \subset G$ такая, что $s_n \rightarrow s_0$ при $n \rightarrow \infty$ и $g_n(s_n) = 0$ при $n > n_0 = n_0(s_0)$.

Лемма 13 называется теоремой Гурвица (доказательство см. в [29]).

ЛЕММА 14. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – компактное множество, обладающее связным дополнением. Тогда всякая функция $g(s)$, непрерывная в K и аналитическая внутри K , равномерно в K приближается многочленами от s .

Лемма 14 называется теоремой Мергеляна (доказательство см. в [27]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. Ввиду мультипликативности последовательности $\mathbf{a}_j$ стандартным путем [4] получаем, что для почти всех $\omega \in \Omega$ и $s \in D$

$$\zeta(s, \omega; \mathbf{a}_j) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{jp^\alpha} \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right), \quad j = 1, \dots, r_1. \quad (22)$$

Пусть для краткости

$$g_{jp}(s, \omega) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{jp^\alpha} \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}}, \quad j = 1, \dots, r_1.$$

Таким образом, мы будем рассматривать носитель случайного элемента

$$\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + g_{r_1 p}(s, \omega)) \right).$$

При $|z| < 1$ определим

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots.$$

Тогда в силу неравенств (1) функции $\log(1 + g_{jp}(s, \omega))$, $j = 1, \dots, r_1$, хорошо определены, и мы будем рассматривать носитель случайного элемента

$$\left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 + g_{r_1 p}(s, \omega)) \right). \quad (23)$$

При доказательстве равенства (22) устанавливается, что произведение

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + g_{jp}(s, \omega)), \quad j = 1, \dots, r_1,$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ сходится равномерно на компактных подмножествах полосы D . Следовательно, существует последовательность $\mathbf{b} = \{b_p : |b_p| = 1\}$ такая, что ряд

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} (g_{1p}(s, \mathbf{b}), \dots, g_{r_1 p}(s, \mathbf{b})) \quad (24)$$

сходится в $H^{r_1}(D)$. Кроме того, легко видеть, что для всякого компактного множества $K \subset D$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{j=1}^{r_1} \sup_{s \in K} |g_{jp}(s, \mathbf{b})|^2 < \infty. \quad (25)$$

Проверим условие 1) леммы 10. Пусть p_0 – фиксированное число, а $\mu_1, \dots, \mu_{r_1}$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что

$$\sum'_{p \in \mathbb{P}} \left| \sum_{j=1}^{r_1} \int_{\mathbb{C}} g_{jp}(s, \mathbf{b}) d\mu_j(s) \right| < \infty, \quad (26)$$

где $\sum'$ означает, что $p > p_0$.

Из определения функций $g_{jp}(s, \omega)$, периодичности последовательностей $\mathbf{a}_j$ и соотношения (26) вытекает, что для всех $l = 1, \dots, k$, $(l, k) = 1$,

$$\sum'_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left| \sum_{j=1}^{r_1} \int_{\mathbb{C}} \frac{a_{jl}}{p^s} d\mu_j(s) \right| < \infty. \quad (27)$$

Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ и

$$\nu_l(A) = \sum_{j=1}^{r_1} a_{jl} \mu_j(A), \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Тогда $\nu_1, \dots, \nu_k$ – также комплекснозначные меры с компактными носителями, содержащимися в D , и в силу (27) имеем

$$\sum'_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \equiv l \pmod{k}}} |\rho_l(\log p)| < \infty, \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1, \quad (28)$$

где

$$\rho_l(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\nu_l(s), \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Поскольку $\rho_l(z)$ – функции экспоненциального типа, из леммы 11 имеем, что или $\rho_l(z) \equiv 0$, или

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |\rho_l(x)|}{x} > -1, \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Если последнее неравенство выполняется для некоторого l , то в силу леммы 12 для этого l имеем

$$\sum'_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \equiv l \pmod{k}}} |\rho_l(\log p)| = \infty,$$

что противоречит (28). Таким образом, имеем, что $\rho_l(z) \equiv 0$ для всех $l = 1, \dots, k$, $(l, k) = 1$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{r_1} a_{jl} \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Поскольку $\text{rank}(A) = r_1$, получаем

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, r_1.$$

Отсюда путем дифференцирования находим, что для всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $j = 1, \dots, r_1$

$$\int_{\mathbb{C}} s^m d\mu_j(s) = 0.$$

Таким образом, ввиду сходимости рядов (24) и (25) имеем, что все условия леммы 10 выполнены. Следовательно, множество всех сходящихся рядов

$$\sum'_{p \in \mathbb{P}} \widehat{a}(p)(g_{1p}(s, \mathbf{b}), \dots, g_{r_1 p}(s, \mathbf{b})), \quad (29)$$

где $|\widehat{a}(p)| = 1$ для всех $p \in \mathbb{P}$, всюду плотно в $H^{r_1}(D)$.

Пусть $x_0(s) = (x_{10}(s), \dots, x_{r_1 0}(s))$ – произвольно выбранный элемент пространства $H^{r_1}(D)$. Берем любые $\varepsilon > 0$ и компактное множество $K \subset D$. Легко видеть, что найдется p_0 такое, что

$$\max_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K} \left(\sum'_{p \in \mathbb{P}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{|g_{jp}(s, \mathbf{a})|^l}{l} + 2 \sum'_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \left| \frac{g_{jp}^\alpha}{p^{\alpha s}} \right| \right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (30)$$

для всех $\mathbf{a} = \{a(p) : |a(p)| = 1\}$. Из плотности множества рядов (29) вытекает существование последовательности $\hat{\mathbf{a}} = \{\hat{a}(p) : |\hat{a}(p)| = 1\}$ такой, что

$$\max_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq p_0}} \log(1 + g_{jp}(s, 1)) - \sum'_{p \in \mathbb{P}} \hat{a}(p) g_{jp}(s, \mathbf{b}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (31)$$

Полагая

$$a(p) = \begin{cases} \hat{a}(p), & \text{если } p > p_0, \\ 1, & \text{если } p \leq p_0, \end{cases}$$

из (30), (31) и неравенств (1) получаем, что

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 + g_{jp}(s, \mathbf{a})) \right| \\ & \leq \max_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq p_0}} \log(1 + g_{jp}(s, 1)) - \sum'_{p \in \mathbb{P}} \hat{a}(p) g_{jp}(s, \mathbf{b}) \right| \\ & \quad + \max_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K} \left| \sum'_{p \in \mathbb{P}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} (g_{jp}(s, \mathbf{a}))^l}{l} + \sum'_{p \in \mathbb{P}} \frac{\hat{a}(p) a_{jp} b(p)}{p^s} \right. \\ & \quad \left. - \sum'_{p \in \mathbb{P}} \frac{a_{jp} a(p)}{p^s} + \sum'_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{a_{jp}^\alpha \hat{a}(p) b^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} - \sum'_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{a_{jp}^\alpha(p) a^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Последнее означает, что множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} (\log(1 + g_{1p}(s, \mathbf{a})), \dots, \log(1 + g_{r_1 p}(s, \mathbf{a}))), \quad (32)$$

где $\mathbf{a} = \{a(p) : |a(p)| = 1\}$, всюду плотно в $H^{r_1}(D)$.

Из определения $\omega(p)$ имеем, что $\{\omega(p) : p \in \mathbb{P}\}$ – последовательность независимых случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Отсюда следует, что

$$\{(\log(1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \log(1 + g_{r_1 p}(s, \omega))) : p \in \mathbb{P}\}$$

– последовательность независимых $H^{r_1}(D)$ -значных случайных элементов на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Поскольку единичная окружность γ является носителем каждой случайной величины $\omega(p)$, множество

$$\{(g_1, \dots, g_{r_1}) \in H^{r_1}(D) : g_j(s) = \log(1 + g_{jp}(s, \mathbf{a})), j = 1, \dots, r_1\},$$

где $\mathbf{a} = \{a(p) : |a(p)| = 1\}$, является носителем $H^{r_1}(D)$ -значного случайного элемента $(\log(1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \log(1 + g_{r_1 p}(s, \omega)))$. Отсюда и из леммы 9 следует, что носителем случайного элемента (23) является замыкание множества всех

сходящихся рядов (32), и в силу плотности этого множества получаем, что носитель случайного элемента (23) – все пространство $H^{r_1}(D)$.

Определим функцию $u: H^{r_1}(D) \rightarrow H^{r_1}(D)$ при помощи формулы

$$u(g_1, \dots, g_{r_1}) = (e^{g_1}, \dots, e^{g_{r_1}}), \quad (g_1, \dots, g_{r_1}) \in H^{r_1}(D).$$

Тогда u – непрерывная функция, отображающая вектор

$$\left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 + g_{r_1 p}(s, \omega)) \right)$$

в вектор

$$\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + g_{r_1 p}(s, \omega)) \right), \quad (33)$$

а также $H^{r_1}(D)$ на $(S \setminus \{0\})^{r_1}$. Отсюда и из утверждения о носителе случайного элемента (23) получаем, что этот носитель содержит множество $(S \setminus \{0\})^{r_1}$. Однако носитель случайного элемента (33) – замкнутое множество. Поскольку в силу леммы 13 имеем $\overline{(S \setminus \{0\})^{r_1}} = S^{r_1}$, то носитель случайного элемента (33) содержит множество S^{r_1} .

В силу неравенств (1) произведение $\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + g_{jp}(s, \omega))$, $j = 1, \dots, r_1$, состоит из ненулевых множителей и для почти всех $\omega \in \Omega$ сходится равномерно на компактных подмножествах полосы D . Следовательно, также из леммы 13 имеем, что множество S^{r_1} содержит носитель случайного элемента (33). Отсюда и из противоположного включения получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 15. Пусть α – трансцендентное число. Тогда носителем $H(D)$ -значного случайного элемента $\zeta(s, \alpha, \hat{\omega}; \mathbf{b})$ является все пространство $H(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [17, лемма 4.1].

ТЕОРЕМА 16. Носителем меры P_ζ является множество $S^{r_1} \times H^{r_2}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием леммы 8, леммы 15 и равенства (21).

§ 4. Доказательство теоремы 1

Поскольку теоремы 2, 16 уже доказаны, доказательство теоремы 1 очевидно, и мы его проводим лишь ради полноты изложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что функции $f_1(s), \dots, f_{r_1}(s)$ и $\hat{f}_1(s), \dots, \hat{f}_{r_2}(s)$ имеют аналитические продолжения на всю полосу D , причем для функций $f_1(s), \dots, f_{r_1}(s)$ эти продолжения являются ненулевыми. Пусть

$$G = \left\{ (g_1, \dots, g_{r_1}, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{r_2}) \in H_{r_1, r_2}(D) : \sup_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |g_j(s) - f_j(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r_2} \sup_{s \in \hat{K}_j} |\hat{g}_j(s) - \hat{f}_j(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Тогда G – открытое множество в пространстве $H_{r_1, r_2}(D)$. В силу [24, теорема 2.1] утверждение теоремы 2 эквивалентно следующему: для всякого открытого множества $A \subset H_{r_1, r_2}(D)$ имеет место неравенство

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T(\zeta(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) \in A) \geq P_\zeta(A). \quad (34)$$

Поскольку в силу теоремы 16 функции $f_1(s), \dots, f_{r_1}(s), \hat{f}_1(s), \dots, \hat{f}_{r_2}(s)$ принадлежат носителю меры P , то выполняется неравенство $P_{\zeta}(G) > 0$. Отсюда, из определения множества G и неравенства (34) вытекает, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r_2} \sup_{s \in \hat{K}_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{b}_j) - \hat{f}_j(s)| < \varepsilon \right) > 0. \quad (35)$$

Пусть функции $f_1(s), \dots, f_{r_1}(s)$ и $\hat{f}_1(s), \dots, \hat{f}_{r_2}(s)$ такие, как в теореме. Тогда в силу леммы 14 существуют многочлены $p_1(s), \dots, p_{r_1}(s)$ и $\hat{p}_1(s), \dots, \hat{p}_{r_2}(s)$, причем $p_j(s) \neq 0$ в K_j , $j = 1, \dots, r_1$, такие, что

$$\sup_{1 < j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |f_j(s) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (36)$$

$$\sup_{1 < j \leq r_2} \sup_{s \in \hat{K}_j} |\hat{f}_j(s) - \hat{p}_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (37)$$

Поскольку $p_j(s) \neq 0$ в K_j , мы можем определить непрерывную ветвь функции $\log p_j(s)$ в K_j , которая будет аналитична внутри K_j , $j = 1, \dots, r_1$. Также по лемме 14 существуют многочлены $\tilde{p}_1(s), \dots, \tilde{p}_{r_1}(s)$ такие, что

$$\sup_{1 < j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |p_j(s) - e^{\tilde{p}_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда и из (36) находим, что

$$\sup_{1 < j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |f_j(s) - e^{\tilde{p}_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (38)$$

Так как $e^{\tilde{p}_j(s)} \neq 0$, из неравенства (35) получаем, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 < j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - e^{\tilde{p}_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \right. \\ \left. \sup_{1 < j \leq r_2} \sup_{s \in \hat{K}_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{b}_j) - \hat{p}_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0. \quad (39)$$

Однако ввиду (38) и (37) имеем

$$\left\{ \tau \in [0, T]: \sup_{1 < j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 < j \leq r_2} \sup_{s \in \hat{K}_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{b}_j) - \hat{f}_j(s)| < \varepsilon \right\} \\ \supseteq \left\{ \tau \in [0, T]: \sup_{1 < j \leq r_1} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - e^{\tilde{p}_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \right. \\ \left. \sup_{1 < j \leq r_2} \sup_{s \in \hat{K}_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{b}_j) - \hat{p}_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Отсюда и из (39) вытекает утверждение теоремы.

Список литературы

1. С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486; англ. пер.: S. M. Voronin, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 443–453.
2. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, de Gruyter, Berlin, 1992.
3. С. М. Воронин, *Избранные труды: математика*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2006.
4. A. Laurinćikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Math. Appl., **352**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
5. A. Laurinćikas, “The universality of zeta-functions”, *Acta Appl. Math.*, **78**:1–3 (2003), 251–271.
6. K. Matsumoto, “Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions”, *Sugaku Expositions*, **17**:1 (2004), 51–71.
7. K. Matsumoto, “An introduction to the value-distribution theory of zeta-functions”, *Šiauliai Math. Semin.*, **1**:9 (2006), 61–83.
8. A. Laurinćikas, R. Garunkštis, *The Lerch zeta-function*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
9. J. Steuding, *Value-distribution of L-functions*, Lectures Notes in Math., **1877**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2007.
10. А. Лауринчикас, “Универсальность дзета-функции Лерха”, *Лит. матем. журн.*, **37**:3 (1997), 367–375; англ. пер.: A. Laurinćikas, “The universality of the Lerch zeta-function”, *Lithuanian Math. J.*, **37**:3 (1997), 275–280.
11. С. М. Воронин, “О функциональной независимости L -функций Дирихле”, *Acta Arith.*, **27** (1975), 493–503.
12. S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Ph. D. Thesis, Universality of Michigan, 1979.
13. B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and allied Dirichlet serie*, Thesis, Indian Stat. Inst., Calcutta, 1981.
14. B. Bagchi, “Joint universality theorem for Dirichlet L -functions”, *Math. Z.*, **181**:3 (1982), 319–334.
15. А. П. Лауринчикас, Д. Шяучюнас, “Замечания об универсальности периодической дзета-функции”, *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 561–568; англ. пер.: A. Laurinćikas, D. Šiaučiūnas, “Remarks on the universality of the periodic zeta function”, *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 532–538.
16. A. Javtokas, A. Laurinćikas, “On the periodic Hurwitz zeta-function”, *Hardy-Ramanujan J.*, **29** (2006), 18–36.
17. A. Javtokas, A. Laurinćikas, “The universality of the periodic Hurwitz zeta-function”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **17**:10 (2006), 711–722.
18. А. П. Лауринчикас, Р. Мацайтене, “О совместной универсальности периодических дзета-функций”, *Матем. заметки*, **85**:1 (2009), 54–64; англ. пер.: A. Laurinćikas, R. Macaitiene, “On the joint universality of periodic zeta functions”, *Math. Notes*, **85**:1–2 (2009), 51–60.
19. A. Laurinćikas, “The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions”, *Analysis (Munich)*, **26**:3 (2006), 419–428.
20. А. П. Лауринчикас, “Аналог теоремы Воронина для периодических дзета-функций Гурвица”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 91–102; англ. пер.: A. Laurinćikas, “Voronin-type theorem for periodic Hurwitz zeta-functions”, *Sb. Math.*, **198**:2 (2007), 231–242.

21. A. Javtokas, A. Laurinčikas, “A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **78**:1 (2008), 13–33.
22. H. Mishou, “The joint value-distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions”, *Lithuanian Math. J.*, **47**:1 (2007), 32–47.
23. Х. Хейер, *Вероятностные меры на локально компактных группах*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: H. Heyer, *Probability measures on locally compact groups*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
24. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977; пер. с англ.: P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York–London–Sydney, 1968.
25. J. В. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
26. Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы: Свойства выборочных функций и их приложения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: H. Cramér, M. R. Leadbetter, *Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications*, Wiley, New York–London–Sydney, 1967.
27. Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.
28. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, “The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms”, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5** (2002), 58–75.
29. Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1939.

А. ЛАУРИНЧИКАС (A. LAURINČIKAS)
Вильнюсский университет, Литва
E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступило в редакцию
15.02.2008
06.08.2008