Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Елагин, Полуортогональные разложения для производных категорий эквивариантных когерентных пучков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 5, 37–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2772>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:11:05

УДК 512.732

А. Д. Елагин

**Полуортогональные разложения
для производных категорий
эквивариантных когерентных пучков**

Для алгебраического многообразия X с действием алгебраической группы G , на котором существует полный исключительный набор из пучков, сохраняемый действием группы, построено полуортогональное разложение ограниченной производной категории G -эквивариантных когерентных пучков. Компоненты этого разложения эквивалентны производным категориям скрученных представлений группы. В случае, если группа конечна или редуктивна над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, это дает существование полного исключительного набора в производных эквивариантных категориях. Показано, как полученные результаты применяются к конкретным многообразиям таким, как проективные пространства, квадратики, многообразия Грассмана и поверхности дель Пеццо.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: полуортогональное разложение, исключительный набор, скрученный пучок.

Введение

Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k с действием алгебраической группы G . Работа посвящена изучению категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$ – производной категории G -эквивариантных когерентных пучков на X . Мы устанавливаем достаточные условия, при которых категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$ допускает полуортогональное разложение на подкатегории, эквивалентные производным категориям представлений группы, скрученных на некоторый коцикл. Для группы с полупростой категорией представлений такое полуортогональное разложение дает полный исключительный набор в $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$, имеющий блочную структуру.

В простейшем варианте (теорема 2.6) наш результат состоит в следующем: если в производной категории когерентных пучков $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ существует полный исключительный набор из эквивариантных пучков $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$, то категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$ допускает полуортогональное разложение

$$\langle \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{Repr}(G)), \dots, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{Repr}(G)) \rangle,$$

в котором подкатегории $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{Repr}(G))$ эквивалентны производной категории представлений группы G . Как следствие (теорема 2.1), если группа G конечна,

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта CRDF RUM1-2661-MO-05.

характеристика k (далее $\text{char}(k)$) взаимно проста с $|G|$ и $k = \bar{k}$, то в $\mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X))$ имеется полный исключительный набор

$$\left(\begin{array}{cccc} \mathcal{E}_1 \otimes V_1 & \mathcal{E}_2 \otimes V_1 & & \mathcal{E}_n \otimes V_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \mathcal{E}_1 \otimes V_m & \mathcal{E}_2 \otimes V_m & & \mathcal{E}_n \otimes V_m \end{array} \right),$$

где $V_1, \dots, V_m$ – все неприводимые представления G над k .

Эти результаты можно рассматривать как вариант следующей теоремы [1, теорема 3.1]. Пусть $X \xrightarrow{p} S$ – плоский собственный морфизм гладких схем, пусть $E_1, \dots, E_n$ – пучки на X такие, что для каждого слоя X_s набор $(E_1|_{X_s}, \dots, E_n|_{X_s})$ полный и исключительный. Тогда имеется полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle E_1 \otimes p^* \mathcal{D}^b(S), \dots, E_n \otimes p^* \mathcal{D}^b(S) \rangle.$$

В нашем случае в качестве p рассматривается морфизм стеков $X//G \rightarrow \text{pt} // G$. Роль базы играет факторстек $\text{pt} // G$, пучки на нем – это представления группы G , а роль тотального пространства – факторстек $X//G$, пучки на котором суть эквивариантные пучки на X . Декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X//G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pt} & \longrightarrow & \text{pt} // G \end{array}$$

позволяет рассматривать морфизм $X \rightarrow X//G$ как вложение слоя над единственной замкнутой точкой базы $\text{pt} \rightarrow \text{pt} // G$. Роль E_i играют эквивариантные пучки, которые образуют полный исключительный набор при ограничении на слой, т. е. при забывании действия группы.

Условие, налагаемое на исключительный набор $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$, можно ослабить: вместо эквивариантности пучков $\mathcal{E}_i$ достаточно потребовать сохранения этих пучков действием группы. При этом вместо представлений группы нужно рассматривать представления, скрученные на коцикл. Аналогичным образом скрученные пучки появляются в работе М. Бернардара [2] при построении полуортогональных разложений для относительных схем Севери–Брауэра (см. п. 3.1). Мы используем понятие “коцикла” на алгебраической группе, которое является естественным обобщением понятия 2-коцикла со значениями в k^* для абстрактных групп и связано с классификацией центральных расширений группы с помощью $\mathbb{G}_m$. В основном результате (теорема 2.16) мы строим полуортогональное разложение категории $\mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X))$ при следующих условиях: в $\mathcal{D}^b(\text{coh}(X))$ существует такой полный исключительный набор блочного вида из пучков, что действие группы переставляет пучки из набора в пределах каждого блока.

В завершение работы мы показываем, как построенная теория применяется к конкретным многообразиям: проективным пространствам, квадракам, многообразиям Грассмана и поверхностям дель Пеццо степени $d \geq 5$.

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 вводятся необходимые понятия и обозначения, а также излагается теория, связанная с коциклами групп, скрученными представлениями и эквивариантными пучками. Основные теоремы приведены в § 2. Перед изложением результатов в максимальной общности мы рассматриваем частный случай конечных групп, в этом случае определения и формулировки теорем более просты. Доказывая теорему 2.1 для конечных групп, мы демонстрируем основные идеи доказательства теоремы 2.6 в более общем контексте алгебраических групп, избегая при этом технических трудностей. Применению общей теории к конкретным классам многообразий посвящен § 3.

Автор благодарен Д. О. Орлову и А. Г. Кузнецову за многочисленные полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

§ 1. Предварительные сведения: коциклы, скрученные представления и скрученные пучки

В настоящей работе мы будем придерживаться следующих соглашений. Под *многообразием* мы будем понимать неособое алгебраическое многообразие над произвольным полем k , *пучком* на многообразии X будет называться когерентный пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей. Под *группой* мы будем иметь в виду алгебраическую группу над k , если не оговорено иное (например, в п. 2.1 группы будут считаться конечными). Все рассматриваемые производные категории будут ограниченными, например $\mathcal{D}(X)$ будет обозначать $\mathcal{D}^b(\text{coh}(X))$. Ниже мы даем определения и обсуждаем основные свойства необходимых понятий.

1.1. Эквивариантные пучки. Пусть G – конечная группа, действующая на алгебраическом многообразии X . *Эквивариантным пучком* относительно действия группы G на X (иногда *G -эквивариантным пучком*, или *G -пучком*) называется пучок F на X вместе с фиксированными изоморфизмами $\theta_g: F \rightarrow g^*F$ для каждого $g \in G$ такими, что для всякой пары $g, h \in G$ диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\theta_h} & h^*F & \xrightarrow{h^*\theta_g} & h^*g^*F \\ & \searrow \theta_{gh} & & & \parallel \\ & & & & (gh)^*F \end{array}$$

коммутативна. *Морфизмом* эквивариантных пучков называется морфизм пучков $f: F_1 \rightarrow F_2$, коммутирующий с изоморфизмами θ_1 и θ_2 : для всех $g \in G$ выполнено $\theta_{2,g} \circ f = g^*f \circ \theta_{1,g}$.

Пусть теперь G – алгебраическая группа, X – алгебраическое многообразие с действием группы G . В этом случае определения необходимо несколько уточнить. Пусть $\mu: G \times G \rightarrow G$ – морфизм умножения в G , $a: G \times X \rightarrow X$ – морфизм действия. Проекции из прямого произведения $G \times G$, $G \times X$ или $G \times G \times X$ на i -й сомножитель мы будем обозначать p_i , проекции $G \times G \times X$ или $G \times G \times G$ на произведение первых двух или последних двух сомножителей мы обозначим p_{12} и p_{23} соответственно. По определению *G -эквивариантный*

пучок на X – это пучок F на X вместе с изоморфизмом пучков $\theta: p_2^*F \rightarrow a^*F$ на $G \times X$, удовлетворяющим условию коцикла: на $G \times G \times X$ диаграмма пучков

$$\begin{array}{ccccc} p_3^*F & \xrightarrow{p_{23}^*\theta} & (ap_{23})^*F & \xrightarrow{(\text{Id} \times a)^*\theta} & (a(\text{Id} \times a))^*F \\ & \searrow & & & \parallel \\ & & (\mu \times \text{Id})^*\theta & \rightarrow & (a(\mu \times \text{Id}))^*F \end{array}$$

коммутативна.

Морфизмы в категории G -эquivариантных пучков на X определяются как морфизмы между пучками, согласованные с изоморфизмом θ .

Группу морфизмов в категории G -эquivариантных пучков на X из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$ мы будем обозначать $\text{Hom}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Отметим, что на пространстве $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ морфизмов в категории пучков возникает действие группы G и $\text{Hom}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^G$.

Когерентные пучки на X , эquivариантные относительно действия группы G , образуют абелеву категорию, которая обозначается $\text{coh}^G(X)$. Ограниченную производную категорию от $\text{coh}^G(X)$ мы обозначим $\mathcal{D}^G(X) = \mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X))$.

Приведенные выше определения в случае, когда X – точка, F – векторное пространство, дают определение (алгебраического) представления группы G , эквивалентное обычному (представление группы G в пространстве V есть гомоморфизм $G \rightarrow \text{GL}(V)$). Категорию конечномерных представлений G мы будем обозначать $\text{Rep}(G)$.

1.2. Коциклы, скрученные представления и пучки для конечных групп. Пусть G – конечная группа, k – поле, α – 2-коцикл группы G со значениями в k^* . Определения и начальные сведения, относящиеся к когомологиям групп, можно найти, например, в [3].

Мы называем α -представлением группы G в векторном пространстве V над k отображение $R: G \rightarrow \text{GL}(V)$ такое, что $R(g)R(h) = \alpha(g, h)R(gh)$ для любых $g, h \in G$. Определим также *скрученную групповую алгебру* следующим образом. Положим $k_\alpha[G]$ равным $\bigoplus_{g \in G} k \cdot g$ как векторное пространство и определим умножение на элементах базиса с помощью равенства $g \cdot h = \alpha(g, h)(gh)$.

Очевидно, категории α -представлений группы G над k и представлений алгебры $k_\alpha[G]$ над k эквивалентны, мы будем обозначать их $\text{Rep}(G, \alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Определенная выше алгебра $k_\alpha[G]$ является ассоциативной алгеброй с единицей. Она является полупростой в случае, если $\text{char}(k)$ не делит порядок группы G . Алгебра $k_\alpha[G]$ зависит (с точностью до изоморфизма) только от класса $[\alpha] \in H^2(G, k^*)$ в 2-когомологиях группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Роль единицы играет элемент $e/\alpha(e, e)$. Ассоциативность следует непосредственно из условия коцикла. Для проверки полупростоты достаточно показать, что любое инвариантное подпространство $U \subset V$ в α -представлении $R: G \rightarrow \text{GL}(V)$ имеет дополнительное инвариантное подпространство. Пусть $p: V \rightarrow U$ – проектор. Положим

$$p' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} R(g)pR(g)^{-1}.$$

Тогда p' будет инвариантным проектором на U , так как при всех $h \in G$

$$\begin{aligned} R(h)p'R(h)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} R(h)R(g)pR(g)^{-1}R(h)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(h, g)R(hg)pR(hg)^{-1}\alpha(h, g)^{-1} = p', \end{aligned}$$

и $U^\perp = \ker p'$ будет искомым дополнительным подпространством.

Если коцикл $\alpha\beta$ получен из α умножением на кограницу $\beta = \partial\gamma$, где $\beta(g, h) = \gamma(g)\gamma(h)\gamma(gh)^{-1}$, то изоморфизм алгебр $k_\alpha[G] \rightarrow k_{\alpha\beta}[G]$ определяется сопоставлением $g \mapsto g/\gamma(g)$. Предложение доказано.

Пусть X – алгебраическое многообразие над k , G – конечная группа, действующая на X , α – 2-коцикл G со значениями в k^* .

Мы называем α - G -эквивариантным пучком на X когерентный пучок F вместе с фиксированными изоморфизмами $\theta_g: F \rightarrow g^*F$ для каждого $g \in G$ такими, что $\alpha(g, h)\theta_{gh} = h^*(\theta_g) \circ \theta_h$ для всякой пары $g, h \in G$. В случае тривиального коцикла $\alpha(g, h) = 1$ это определение дает обычное понятие G -эквивариантного пучка. Для краткости α - G -эквивариантные пучки мы будем иногда называть α -пучками. Свойства α - G -эквивариантных пучков собраны в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть X – алгебраическое многообразие с действием конечной группы G , α – фиксированный коцикл группы G . Тогда α - G -эквивариантные пучки на X образуют абелеву категорию. Пусть α и β – 2-коциклы группы G , $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – α - и β -пучки, U и V – α - и β -представления группы G . Тогда:

- а) $U \otimes V$ является $(\alpha\beta)$ -представлением группы G ;
- б) U^* является (α^{-1}) -представлением;
- с) $\text{Hom}(U, V)$ является $(\alpha^{-1}\beta)$ -представлением;
- д) $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ является $(\alpha\beta)$ -пучком на X ;
- е) $\mathcal{F}^*$ является (α^{-1}) -пучком;
- ф) $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является $(\alpha^{-1}\beta)$ -пучком;
- г) $\mathcal{O}_X \otimes V$ является β -пучком;
- h) $\mathcal{F} \otimes V$ является $(\alpha\beta)$ -пучком;
- и) $\Gamma(X, \mathcal{F})$ является α -представлением группы G ;
- j) $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является $(\alpha^{-1}\beta)$ -представлением.

Доказательство предложения 1.2 мы не приводим.

Изучение представлений группы, скрученных на коцикл, может быть сведено к изучению обычных представлений с помощью следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть G – группа порядка n , поле k алгебраически замкнутое характеристики нуль. Пусть $\mu_d \subset k^*$ – подгруппа корней из единицы степени d .

1. Пусть $\alpha \in Z^2(G, k^*)$ – коцикл и существует α -представление V группы G размерности d . Тогда $d \cdot [\alpha] = 0$ в $H^2(G, k^*)$ и существует коцикл $\alpha' \in Z^2(G, \mu_d)$ такой, что $[\alpha] = [\alpha']$.

2. Пространство $H^2(G, k^*)$ аннулируется умножением на n , и естественное отображение $H^2(G, \mu_n) \rightarrow H^2(G, k^*)$ сюръективно.

3. Пусть $\alpha \in Z^2(G, \mu_d)$, $\bar{G}$ – центральное расширение G с помощью μ_d , задаваемое коциклом α . Обозначим через $\text{Repr}_{(i)}(\bar{G})$ полную подкатегорию в $\text{Repr}(\bar{G})$, образованную представлениями R такими, что $R(\xi) = \xi^i \cdot \text{Id}$ при $\xi \in \mu_d$. Тогда

$$\text{Repr}(\bar{G}) \cong \bigoplus_{i=0}^{d-1} \text{Repr}_{(i)}(\bar{G}), \quad \text{Repr}_{(i)}(\bar{G}) \cong \text{Repr}(G, \alpha^i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1. Детерминант $\Lambda^d V$ представления V является одномерным (α^d) -представлением G . Пусть R – соответствующее отображение $G \rightarrow k^*$. Поскольку $R(g)R(h) = \alpha(g, h)^d R(gh)$, мы видим, что $\alpha^d = \partial R$, т. е. класс когомологий $[\alpha]$ аннулируется умножением на d . Рассмотрим точную последовательность коэффициентов

$$0 \rightarrow \mu_d \rightarrow k^* \xrightarrow{d} k^* \rightarrow 0.$$

В связанной с ней точной последовательности в когомологиях имеется фрагмент

$$H^2(G, \mu_d) \rightarrow H^2(G, k^*) \xrightarrow{d} H^2(G, k^*),$$

откуда следует существование нужного $[\alpha'] \in H^2(G, \mu_d)$.

Утверждение 2 следует из утверждения 1, так как для любого коцикла α группа G имеет n -мерное α -представление, а именно регулярное.

Докажем утверждение 3. По определению расширения, связанного с коциклом [3, гл. IV, § 3], имеется точная тройка групп

$$1 \rightarrow \mu_d \rightarrow \bar{G} \rightarrow G \rightarrow 1,$$

где μ_d – центральная подгруппа, при этом можно выбрать для каждого элемента $g \in G$ такое поднятие $\bar{g} \in \bar{G}$, что для любых $g, h \in G$ будет выполнено равенство

$$\bar{g} \cdot \bar{h} = \overline{gh} \cdot \alpha(g, h). \quad (1.1)$$

Разложение

$$\text{Repr}(\bar{G}) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \text{Repr}_{(i)}(\bar{G})$$

по характерам центральной подгруппы $\mu_d \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ в $\bar{G}$ следует из общей теории представлений. Представления из $\text{Repr}_{(i)}(\bar{G})$ мы будем называть *представлениями веса i* . Пусть $R: \bar{G} \rightarrow \text{GL}(U)$ – представление группы $\bar{G}$ веса i . Рассмотрим отображение $G \rightarrow \text{GL}(U)$, сопоставляющее элементу $g \in G$ оператор $R(\bar{g})$, где $\bar{g}$ – фиксированный выше прообраз g в $\bar{G}$. Из формулы (1.1) нетрудно видеть, что это отображение является (α^i) -представлением группы G и что таким образом мы получаем эквивалентность между $\text{Repr}_{(i)}(\bar{G})$ и $\text{Repr}(G, \alpha^i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Утверждение 2 предложения 1.3 является частным случаем общего утверждения из теории когомологий групп: $n \cdot H^i(G, M) = 0$ при $i > 0$ для произвольных конечной группы G порядка n и G -модуля M .

1.3. Коциклы, скрученные представления и пучки для алгебраических групп. В п. 2.2 нам понадобится рассматривать “скрученные представления G ” и “скрученные G -эквивариантные пучки” для алгебраической группы G . Для этого нужно изложенную выше теорию, связанную с коциклами, обобщить на случай алгебраических групп. Естественного определения коцикла на алгебраической группе типа “ $\alpha(g, h)$ есть регулярная функция $G \times G \rightarrow \mathbf{k}^*$ ” здесь оказывается недостаточно, необходимо использовать более общее понятие.

Дадим правильные определения объектов, которые естественно возникают в п. 2.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть G – алгебраическая группа со структурным морфизмом $\mu: G \times G \rightarrow G$. Пусть $a: G \times X \rightarrow X$ – действие G на алгебраическом многообразии X . *Коциклом* на G назовем пару $(\mathcal{L}, \alpha)$, состоящую из линейного расслоения $\mathcal{L}$ на G и изоморфизма расслоений $\alpha: p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \rightarrow \mu^*\mathcal{L}$ на $G \times G$, удовлетворяющего условию ассоциативности: на произведении $G \times G \times G$ изоморфизмы

$$(\mathrm{Id} \times \mu)^*\alpha \circ (\mathrm{Id} \otimes p_{23}^*\alpha), \quad (\mu \times \mathrm{Id})^*\alpha \circ (p_{12}^*\alpha \otimes \mathrm{Id})$$

между расслоениями $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*\mathcal{L}$ и $(\mu(\mathrm{Id} \times \mu))^*\mathcal{L}$ равны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. В действительности пара $(\mathcal{L}, \alpha)$ является обобщением не коцикла в случае конечных групп, а его класса когомологий, однако скрученные представления и пучки можно определить непосредственно по этому классу.

Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на G . Назовем $(\mathcal{L}, \alpha)$ -*представлением* G в векторном пространстве V изоморфизм $\theta: \mathcal{L} \otimes V \rightarrow \mathcal{O} \otimes V$ пучков на G такой, что диаграмма пучков на $G \times G$

$$\begin{array}{ccc} p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes V & \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes p_2^*\theta} & p_1^*\mathcal{L} \otimes V \\ \alpha \otimes \mathrm{Id} \downarrow & & \downarrow p_1^*\theta \\ \mu^*\mathcal{L} \otimes V & \xrightarrow{\mu^*\theta} & \mathcal{O} \otimes V \end{array} \quad (1.2)$$

коммутативна. *Морфизмом* $(\mathcal{L}, \alpha)$ -представлений назовем линейное отображение $V \rightarrow U$, согласованное со структурными изоморфизмами θ_V и θ_U . Конечномерные $(\mathcal{L}, \alpha)$ -представления группы G образуют абелеву категорию, которую мы будем обозначать $\mathrm{Rep}(G, \mathcal{L}, \alpha)$.

Далее, $(\mathcal{L}, \alpha)$ -*G-эквивариантным пучком* (или $(\mathcal{L}, \alpha)$ -*пучком*) на X назовем пучок F на X вместе с изоморфизмом $\theta: p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*F \rightarrow a^*F$ пучков на $G \times X$, удовлетворяющим условию согласованности: на $G \times G \times X$ диаграмма пучков

$$\begin{array}{ccccc} p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*F & \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes p_{23}^*\theta} & p_1^*\mathcal{L} \otimes (ap_{23})^*F & \xrightarrow{(\mathrm{Id} \times a)^*\theta} & (a(\mathrm{Id} \times a))^*F \\ & \searrow p_{12}^*\alpha \otimes \mathrm{Id} & & & \parallel \\ & & (\mu p_{12})^*\mathcal{L} \otimes p_3^*F & \xrightarrow{(\mu \times \mathrm{Id})^*\theta} & (a(\mu \times \mathrm{Id}))^*F \end{array}$$

коммутативна. Морфизм $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантных пучков определяется как гомоморфизм пучков $F_1 \rightarrow F_2$ на X , согласованный со структурными морфизмами θ_1 и θ_2 . Так же, как и обычные G -эквивариантные пучки, $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантные пучки на X образуют абелеву категорию, ее мы обозначим $\text{coh}^{G, \mathcal{L}, \alpha}(X)$. В частном случае, когда $\mathcal{L} = \mathcal{O}_G$ и $\alpha: \mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ – обычное умножение, получаем категорию G -эквивариантных пучков. Если в качестве X взять точку, то получим категорию $(\mathcal{L}, \alpha)$ -представлений группы G .

ПРИМЕР 1.7. Пусть $X = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$, $G = \text{PGL}(W)$ (группа G тавтологически действует на X), $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)$ – пучок на X . Обозначим через $\mathcal{L}$ линейное расслоение на G , ассоциированное с главным $\mathbb{C}^*$ -расслоением $\text{GL}(W)$ над G . Умножение в $\text{GL}(W)$ определяет умножение на сечениях $\mathcal{L}$, тем самым мы получаем коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)$ на G . Отображение действия $\text{GL}(W) \times W \rightarrow W$ позволяет определить изоморфизм

$$p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* (\mathcal{O} \otimes W) \rightarrow a^* (\mathcal{O} \otimes W)$$

пучков на $G \times \mathbb{P}(W)$, т. е. $(\mathcal{L}, \alpha)$ -действие на расслоении $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \otimes W$. При этом $\mathcal{O}(-1) \subset \mathcal{O} \otimes W$ будет инвариантным подрасслоением. Таким образом, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)$ является $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантным пучком.

Заметим, что расслоение $\mathcal{L}$ нетривиально: $G = \text{PGL}(W) = \mathbb{P}(\text{End } W) \setminus \{\det = 0\}$, следовательно, группа Пикара $\text{Pic } G$ равна $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и порождена расслоением $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\text{End } W)}(1)$. При этом $\mathcal{L}$ есть ограничение тавтологического расслоения с $\mathbb{P}(\text{End } W)$ и $\mathcal{L} \not\cong \mathcal{O}$.

На множестве коциклов группы G можно очевидным способом определить умножение: если $(\mathcal{L}_1, \alpha_1)$ и $(\mathcal{L}_2, \alpha_2)$ – коциклы на G , то их произведением будет $(\mathcal{L}_1, \alpha_1) \cdot (\mathcal{L}_2, \alpha_2) = (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2)$, где изоморфизм $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ определяется как композиция

$$\begin{aligned} p_1^* (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \otimes p_2^* (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) &= p_1^* \mathcal{L}_1 \otimes p_2^* \mathcal{L}_1 \otimes p_1^* \mathcal{L}_2 \otimes p_2^* \mathcal{L}_2 \xrightarrow{\alpha_1 \otimes \alpha_2} \mu^* \mathcal{L}_1 \otimes \mu^* \mathcal{L}_2 \\ &= \mu^* (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2). \end{aligned}$$

Эта операция снабжает групповой структурой множество коциклов на G . Обратный элемент к $(\mathcal{L}, \alpha)$ мы будем обозначать $(\mathcal{L}, \alpha)^{-1} = (\mathcal{L}^*, \alpha^*)$.

В следующем предложении мы сформулируем некоторые свойства скрученных представлений и пучков.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть $\mathcal{F}$ – $(\mathcal{L}_1, \alpha_1)$ - G -эквивариантный пучок, а $\mathcal{G}$ – $(\mathcal{L}_2, \alpha_2)$ - G -эквивариантный пучок на X , U и V – $(\mathcal{L}_1, \alpha_1)$ - и $(\mathcal{L}_2, \alpha_2)$ -представления G . Тогда:

- $U \otimes V$ является $(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2)$ -представлением группы G ;
- U^* является $(\mathcal{L}_1^*, \alpha_1^*)$ -представлением G ;
- $\text{Hom}(U, V)$ является $(\mathcal{L}_1^* \otimes \mathcal{L}_2, \alpha_1^* \otimes \alpha_2)$ -представлением G ;
- $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ является $(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2)$ -пучком на X ;
- $\mathcal{F}^*$ является $(\mathcal{L}_1^*, \alpha_1^*)$ -пучком;
- $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является $(\mathcal{L}_1^* \otimes \mathcal{L}_2, \alpha_1^* \otimes \alpha_2)$ -пучком;
- $\mathcal{O}_X \otimes V$ является $(\mathcal{L}_2, \alpha_2)$ -пучком;
- $\mathcal{F} \otimes V$ является $(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2)$ -пучком;

- i) $\Gamma(X, \mathcal{F})$ является $(\mathcal{L}_1, \alpha_1)$ -представлением G ;
- j) $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является $(\mathcal{L}_1^* \otimes \mathcal{L}_2, \alpha_1^* \otimes \alpha_2)$ -представлением G .

Доказательство предложения 1.8 мы не приводим.

Как и в ситуации с конечными группами, определенные выше коциклы классифицируют центральные расширения групп с помощью $\mathbb{G}_m$. Рассмотрим коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)$ на алгебраической группе G . Обозначим через $\tilde{G}$ тотальное пространство расслоения $\mathcal{L}$ без нулевого сечения. Мы имеем $\tilde{G} = \text{Spec}_G \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}$ – пучок $\mathcal{O}_G$ -алгебр на G . Тогда $\tilde{G}$ – главное $\mathbb{G}_m$ -расслоение. Отметим здесь, что категории пучков на $\tilde{G}$ и пучков $\mathcal{A}$ -модулей на G эквивалентны. Изоморфизм α позволяет определить на $\tilde{G}$ ассоциативное умножение.

Действительно, морфизм умножения

$$\tilde{\mu}: \tilde{G} \times \tilde{G} = \text{Spec}_{G \times G} (p_1^* \mathcal{A} \otimes p_2^* \mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec}_G \mathcal{A} = \tilde{G}$$

определим с помощью гомоморфизма пучков алгебр $\mu^* \mathcal{A} \rightarrow p_1^* \mathcal{A} \otimes p_2^* \mathcal{A}$, порожденного изоморфизмом $\alpha^{-1}: \mu^* \mathcal{L} \rightarrow p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}$. Условие ассоциативности для α влечет ассоциативность умножения $\tilde{\mu}$. Обозначим через π проекцию $\tilde{G}$ на G . Слой π над единицей группы G есть по определению $\text{Spec } k \times_G \tilde{G} = \text{Spec } e^* \mathcal{A}$, где $e: \text{Spec } k \rightarrow G$ – единица в G . Мы можем выбрать элемент $1_e \in e^* \mathcal{L} \setminus 0$ так, что для изоморфизма $e^* \alpha: e^* \mathcal{L} \otimes e^* \mathcal{L} \rightarrow e^* \mathcal{L}$ выполнено $e^* \alpha(1_e \otimes 1_e) = 1_e$. Если теперь отождествить $e^* \mathcal{L}$ с $k = 1_e \cdot k$, то $e^* \alpha$ станет обычным умножением и $e^* \mathcal{A} \cong k[t, 1/t]$, где $t \in e^* \mathcal{L}^*$, $t \cdot 1_e = 1$. Единица в $\tilde{G}$ задается таким гомоморфизмом $k[t, 1/t] \rightarrow k$, что $t \mapsto 1$. Пусть $i: G \rightarrow \tilde{G}$ – морфизм взятия обратного элемента; тогда морфизм $\tilde{i}$ определим с помощью изоморфизма $\mathcal{A} \rightarrow i^* \mathcal{A}$ пучков алгебр на G , порожденного изоморфизмом $\mathcal{L} \rightarrow i^* \mathcal{L}^{-1}$. Последний, в свою очередь, индуцирован спариванием

$$\mathcal{L} \otimes i^* \mathcal{L} \cong \Delta^* (p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}) \xrightarrow{\Delta^* \alpha} \Delta^* \mu^* \mathcal{L} \cong e^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O} = \mathcal{O},$$

где $\Delta: G \rightarrow G \times G$ – антидиагональное вложение.

Согласно определениям проекция $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ является гомоморфизмом, его ядро $\text{Spec } e^* \mathcal{A}$ изоморфно $\mathbb{G}_m$ и лежит в центре $\tilde{G}$, т. е. мы получили центральное расширение

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1.$$

Пусть $\tilde{\mathcal{L}} = \pi^* \mathcal{L}$ – расслоение на $\tilde{G}$, $\tilde{\alpha} = \pi^* \alpha$ – изоморфизм $p_1^* \tilde{\mathcal{L}} \otimes p_2^* \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \tilde{\mu}^* \tilde{\mathcal{L}}$. Тогда $\pi^*(\mathcal{L}, \alpha) = (\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\alpha})$ – коцикл на $\tilde{G}$. Мы утверждаем, что этот коцикл тривиален. Действительно, расслоению $\tilde{\mathcal{L}}$ соответствует пучок $\mathcal{A}$ -модулей $\mathcal{L} \otimes \mathcal{A}$ на G . Имеется очевидный изоморфизм $\mathcal{L} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, согласованный с умножением α .

Пусть X – многообразие с действием группы G ; тогда на X возникает также действие группы $\tilde{G}$. Если $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантный пучок на X относительно действия G , то на $\mathcal{F}$ естественно возникает структура $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\alpha})$ -эквивариантного пучка относительно действия $\tilde{G}$. Таким образом, пучок $\mathcal{F}$ при расширении группы до $\tilde{G}$ становится настоящим эквивариантным пучком.

Подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует на X тривиально. Выясним, как она действует на $\mathcal{F}$. Мы утверждаем, что это действие линейно. Верно и обратное: любой $\tilde{G}$ -эквивариантный пучок с линейным действием $\mathbb{G}_m$ определяет некоторый $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантный пучок. В действительности имеет место следующее несколько более общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть X – алгебраическое многообразие с действием алгебраической группы G и $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на G . Рассмотрим расширение групп $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$, отвечающее этому коциклу. Тогда для любого целого r имеется эквивалентность категорий

$$\mathrm{coh}^{G, \mathcal{L}^r, \alpha^r}(X) \cong \mathrm{coh}^{\tilde{G}}_{(r)}(X),$$

где $\mathrm{coh}^{\tilde{G}}_{(r)}(X)$ – полная подкатегория в $\mathrm{coh}^{\tilde{G}}(X)$, образованная пучками, на которых подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)^r = (\mathcal{L}^r, \alpha^r)$ – степень заданного коцикла, а $\mathcal{F}$ – $(\mathcal{L}, \alpha)^r$ -эквивариантный пучок на X со структурным морфизмом $\theta: p_1^* \mathcal{L}^r \otimes p_2^* \mathcal{F} \rightarrow a^* \mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}$ автоматически является $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\alpha})^r$ -эквивариантным пучком относительно группы $\tilde{G}$, т. е. с учетом описанной выше тривиализации коцикла $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\alpha})^r$ является $\tilde{G}$ -эквивариантным пучком. Мы утверждаем, что это соответствие дает нужную эквивалентность. Выясним, как действует подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ на пучке $\mathcal{F}$. Это действие определяется изоморфизмом пучков $p_1^* \tilde{\mathcal{L}}^r \otimes p_2^* \mathcal{F} \rightarrow p_2^* \mathcal{F}$ на $\mathbb{G}_m \times X$, поднятым с θ , или, что то же, изоморфизмом

$$e^* \mathcal{L}^r \otimes e^* \mathcal{A} \otimes \mathcal{F} \rightarrow e^* \mathcal{A} \otimes \mathcal{F} \quad (1.3)$$

пучков $(e^* \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_X)$ -модулей на X . При отождествлении $e^* \mathcal{L}^r = (1_e \cdot k)^{\otimes r} = 1_e \cdot k$ последний становится тождественным изоморфизмом, а с учетом изоморфизма $e^* \mathcal{L}^r \otimes e^* \mathcal{A} \rightarrow e^* \mathcal{A}$, который получен итерированием из изоморфизма $\mathcal{L} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, описанного выше, действие (1.3) имеет вид умножения на $t^r: k[t, 1/t] \otimes \mathcal{F} \rightarrow k[t, 1/t] \otimes \mathcal{F}$. Значит, $\mathbb{G}_m$ действует на пучок $\mathcal{F}$ с весом r .

Обратно, если $\mathcal{F}$ – $\tilde{G}$ -эквивариантный когерентный пучок на X такой, что $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует на $\mathcal{F}$ с весом r , то на $\mathcal{F}$ можно ввести структуру $(\mathcal{L}, \alpha)^r$ - G -эквивариантного пучка. Действительно, структура $\tilde{G}$ -пучка на $\mathcal{F}$ определяется изоморфизмом пучков $(p_1^* \mathcal{A})$ -модулей на $G \times X$:

$$\tilde{\theta}: p_1^* \mathcal{A} \otimes p_2^* \mathcal{F} \rightarrow p_1^* \mathcal{A} \otimes a^* \mathcal{F}.$$

Ограничение $\tilde{\theta}$ на $p_1^* \mathcal{L}^r \otimes p_2^* \mathcal{F}$ есть сумма морфизмов

$$\theta_i: p_1^* \mathcal{L}^r \otimes p_2^* \mathcal{F} \rightarrow p_1^* \mathcal{L}^i \otimes a^* \mathcal{F}.$$

Поскольку $\mathbb{G}_m$ действует на $\mathcal{F}$ с весом r , только компонента θ_0 отлична от нуля, $\theta = \theta_0$, и мы имеем изоморфизм $p_1^* \mathcal{L}^r \otimes p_2^* \mathcal{F} \rightarrow a^* \mathcal{F}$, удовлетворяющий условию согласованности.

Как частный случай предложения 1.9 при $X = \mathrm{pt}$, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на алгебраической группе G , отвечающий расширению групп $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$. Тогда для любого целого r имеется эквивалентность категорий

$$\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}^r, \alpha^r) \cong \mathrm{Repr}_{(r)}(\tilde{G}),$$

где $\mathrm{Repr}_{(r)}(\tilde{G})$ – полная подкатегория в $\mathrm{Repr}(\tilde{G})$, образованная представлениями, на которых подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ действует с весом r .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Поскольку подгруппа $\mathbb{G}_m \subset \tilde{G}$ является центральной и редуктивной, категории $\mathrm{Repr}_{(r)}(\tilde{G})$, определенные выше, являются компонентами следующего разложения по характерам $\mathbb{G}_m$:

$$\mathrm{Repr}(\tilde{G}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Repr}_{(r)}(\tilde{G}).$$

Аналогичное разложение имеется и для категории $\tilde{G}$ -эquivариантных пучков на многообразии:

$$\mathrm{coh}^{\tilde{G}}(X) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{coh}_{(r)}^{\tilde{G}}(X).$$

Таким образом, категорию $(\mathcal{L}, \alpha)$ -представлений группы G можно описать как полную подкатегорию (и даже как прямое слагаемое) в категории представлений некоторого расширения группы с помощью $\mathbb{G}_m$. На самом деле, как и в случае конечных групп, при этом достаточно рассматривать конечные расширения.

ЛЕММА 1.12. Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на алгебраической группе G . Предположим, что существует $(\mathcal{L}, \alpha)$ -представление группы G в векторном пространстве V размерности n . Тогда коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)^n$ тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.8 в одномерном пространстве $\Lambda^n V$ имеется $(\mathcal{L}, \alpha)^n$ -представление G , т. е. по определению имеется изоморфизм θ расслоений на G : $\mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{O}$. При этом условие согласованности (1.2) из определения скрученного представления означает, что при θ структурный изоморфизм α^n переходит в обычное умножение $\mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$. Лемма доказана.

В предположениях леммы 1.12 мы построим расширение группы G с помощью алгебраической группы μ_n . Для этого фиксируем изоморфизм $\theta: \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{O}$ из доказательства леммы 1.12, тривиализующий коцикл $(\mathcal{L}, \alpha)^n$. Определим пучок $\mathcal{O}_G$ -алгебр на G : положим

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes i}$$

и определим умножение на $\mathcal{B}$ с помощью изоморфизма θ . Определим теперь $\overline{G}$ как относительный спектр $\mathrm{Spec}_G \mathcal{B}$. Наглядно представить себе $\overline{G}$ можно как прообраз единичного сечения при однородном отображении возведения в степень: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^n \cong \mathcal{O}$. Рассуждения, аналогичные тем, что проводились выше для группы $\tilde{G}$, позволяют доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Определенное выше $\overline{G}$ является замкнутой подгруппой в $\tilde{G}$, а также центральным расширением G с помощью μ_n . Имеются эквивалентности категорий

$$\mathrm{coh}^{G, \mathcal{L}^r, \alpha^r}(X) \cong \mathrm{coh}_{(r)}^{\overline{G}}(X), \quad \mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}^r, \alpha^r) \cong \mathrm{Repr}_{(r)}(\overline{G})$$

для всех целых r , а также разложения

$$\mathrm{coh}^{\overline{G}}(X) \cong \bigoplus_{r=0}^{n-1} \mathrm{coh}_{(r)}^{\overline{G}}(X), \quad \mathrm{Repr}(\overline{G}) = \bigoplus_{r=0}^{n-1} \mathrm{Repr}_{(r)}(\overline{G}),$$

где обозначения $\mathrm{coh}_{(r)}^{\overline{G}}(X)$ и $\mathrm{Repr}_{(r)}(\overline{G})$ аналогичны использованным выше.

1.4. Допустимые подкатегории. Согласно определению из [4, § 3] подкатегория называется *допустимой справа (слева)*, если функтор ее вложения имеет правый (левый) сопряженный. Подкатегория называется *допустимой*, если она допустима справа и слева. Ниже нам понадобится следующий результат [4, лемма 3.1, теорема 3.2a].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. 1. Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория, $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n \subset \mathcal{T}$ – допустимые справа триангулированные подкатегории. Пусть категории $\mathcal{S}_i$ полуортогональны друг другу, т.е. $\text{Hom}(\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_i) = 0$ при $i < j$. Тогда существует полуортогональное разложение $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n \rangle$, в котором правый ортогонал $\mathcal{S}^\perp$ есть полная подкатегория в $\mathcal{T}$, состоящая из объектов X таких, что $\text{Hom}(\mathcal{S}_i, X) = 0$ при всех i . Аналогичное утверждение верно при замене правого на левое.

2. Пусть $\dim \bigoplus_k \text{Hom}_T^k(F_1, F_2) < \infty$ для любых объектов F_1, F_2 триангулированной категории $\mathcal{T}$. Тогда всякая подкатегория в $\mathcal{T}$, порожденная исключительным набором, допустима.

§ 2. Общие теоремы

В этом параграфе находятся теоремы, составляющие основной результат работы.

2.1. Случай конечных групп. Для большей наглядности мы сначала излагаем формулировки для частного случая действия конечной группы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k , G – конечная группа, действующая на X , пусть $k = \bar{k}$ и $\text{char}(k)$ не делит $|G|$. Пусть $(E_1, \dots, E_n)$ – полный исключительный набор из пучков в категории $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}^b(\text{coh}(X))$. Предположим, что на каждом пучке E_i можно ввести G -эквивариантную структуру; обозначим полученный G -эквивариантный пучок через $\mathcal{E}_i$. Тогда блочный набор

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 \otimes V_1 & \mathcal{E}_2 \otimes V_1 & \mathcal{E}_n \otimes V_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{E}_1 \otimes V_m & \mathcal{E}_2 \otimes V_m & \mathcal{E}_n \otimes V_m \end{array} \right), \quad (2.1)$$

где $V_1, \dots, V_m$ – все неприводимые представления группы G над k , является полным и исключительным в категории $\mathcal{D}^G(X) = \mathcal{D}^b(\text{coh}^G(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что категория представлений группы G над k полупроста, следовательно, для G -эквивариантных пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ мы имеем

$$\text{Hom}_G^i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = (\text{Hom}^i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2))^G,$$

другими словами, группы Ext в эквивариантной категории можно вычислять как инварианты от групп Ext в обычной категории пучков.

Проверим то, что набор (2.1) исключительный. Пусть $i < j$; тогда

$$\text{Hom}_G^r(\mathcal{E}_j \otimes V_p, \mathcal{E}_i \otimes V_q) \subset \text{Hom}^r(E_j \otimes V_p, E_i \otimes V_q) = \text{Hom}^r(E_j, E_i) \otimes V_p^* \otimes V_q = 0,$$

так как набор $(E_1, \dots, E_n)$ исключительный. При $i = j$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_G^r(\mathcal{E}_i \otimes V_p, \mathcal{E}_i \otimes V_q) &= (\operatorname{Hom}^r(E_i \otimes V_p, E_i \otimes V_q))^G \\ &= (\operatorname{Hom}^r(E_i, E_i) \otimes V_p^* \otimes V_q)^G = (\operatorname{Hom}^r(E_i, E_i) \otimes \operatorname{Hom}(V_p, V_q))^G \\ &= \begin{cases} k & \text{при } p = q, r = 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, набор (2.1) исключительный. Докажем его полноту.

Согласно предложению 1.14 для этого достаточно показать, что правый ортогонал к подкатегории в $\mathcal{D}^G(X)$, порожденной набором (2.1), равен нулю. Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^G(X)$, $\mathcal{F} \neq 0$.

Поскольку набор $(E_1, \dots, E_n)$ порождает категорию $\mathcal{D}(X)$, для некоторых i и r пространство $\operatorname{Hom}^r(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})$ ненулевое. Рассмотрим действие группы G на этом пространстве. Пусть V – какое-либо нетривиальное неприводимое подпредставление в нем. Тогда

$$\operatorname{Hom}_G^r(\mathcal{E}_i \otimes V, \mathcal{F}) = \operatorname{Hom}_G(V, \operatorname{Hom}^r(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})) \neq 0.$$

Следовательно, $\mathcal{F}$ не лежит в ортогонале к подкатегории, порожденной набором (2.1). Теорема доказана.

Теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.6, которую мы докажем ниже. Мы приводим отдельно доказательство этого частного случая, так как оно более наглядно и при этом демонстрирует идеи, необходимые в общем случае.

Условия в теореме 2.1 можно ослабить, потребовав инвариантность пучков, составляющих исходный исключительный набор, вместо их эквивариантности.

Пусть, по-прежнему, конечная группа G действует на многообразии X . Предположим, что E – исключительный когерентный пучок на X такой, что $g^*E \cong E$ для любого $g \in G$ (в этом случае мы говорим, что действие G сохраняет пучок E). Тогда для некоторого 2-коцикла α на E можно ввести структуру α -пучка. Действительно, фиксируем для каждого элемента g группы G какой-нибудь изоморфизм $\theta_g: E \rightarrow g^*E$. Тогда из-за исключительности пучка E изоморфизмы θ_{gh} и $h^*(\theta_g) \circ \theta_h: E \rightarrow (gh)^*E$ будут отличаться на скалярный множитель, который и обозначим через $\alpha(g, h)$. Можно проверить, что величины $\alpha(g, h)$ будут образовывать коцикл, причем его класс в когомологиях не зависит от выбора изоморфизмов θ_g . По определению пучок E с выбранными изоморфизмами θ_g будет являться α -пучком.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k и G – конечная группа, действующая на X , пусть $k = \bar{k}$ и $\operatorname{char}(k)$ не делит порядок группы. Пусть $(E_1, \dots, E_n)$ – полный исключительный набор из пучков в категории $\mathcal{D}(X)$. Предположим, что действие G сохраняет каждый из пучков E_i , т.е. $g^*E_i \cong E_i$ для всех g и i . Введем на E_i структуру G -эквивариантного пучка относительно соответствующего коцикла α_i , обозначим полученный α_i - G -эквивариантный пучок через $\mathcal{E}_i$. Тогда блочный набор

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 \otimes V_1^{(1)} & \mathcal{E}_2 \otimes V_1^{(2)} & \mathcal{E}_n \otimes V_1^{(n)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \mathcal{E}_1 \otimes V_{m_1}^{(1)} & \mathcal{E}_2 \otimes V_{m_2}^{(2)} & \mathcal{E}_n \otimes V_{m_n}^{(n)} \end{array} \right),$$

где $V_1^{(i)}, \dots, V_{m_i}^{(i)}$ – все неприводимые (α_i^{-1}) -представления группы G над k , является полным и исключительным в категории $\mathcal{D}^G(X)$.

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству теоремы 2.1. Мы не будем его проводить, так как теорема 2.2 является следствием теоремы 2.11, которая будет доказана ниже. Заметим лишь, что согласно предложению 1.1 категории (α_i^{-1}) -представлений группы G полупросты.

Для дальнейшего обобщения нам понадобится понятие коиндуцированного G -пучка. Пусть G – группа, действующая на многообразии X , H – ее подгруппа. Функтор Res_H^G забывания из G -пучков в H -пучки имеет правый сопряженный функтор, который обозначается Coind_H^G . Если $\mathcal{F}$ – H -эquivариантный пучок на X , то G -пучок $\text{Coind}_H^G(\mathcal{F})$ называется коиндуцированным с подгруппы H пучком. Без учета эквивариантной структуры пучок $\text{Coind}_H^G(\mathcal{F})$ изоморфен $\bigoplus_{g \in J} g^* \mathcal{F}$, где J – множество представителей правых смежных классов G по H (подробности см. в п. 2.2).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k и G – конечная группа, действующая на X , пусть $k = \bar{k}$ и $\text{char}(k)$ не делит порядок группы G . Предположим, что в категории $\mathcal{D}(X)$ имеется полный исключительный набор блочного вида, состоящий из пучков:

$$\left(\begin{array}{ccc} E_1^{(1)} & E_1^{(2)} & E_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{k_1}^{(1)} & E_{k_2}^{(2)} & E_{k_n}^{(n)} \end{array} \right),$$

такой, что действие группы G транзитивно переставляет пучки в пределах каждого блока. Обозначим через H_i стабилизатор пучка $E_1^{(i)}$. Введем на $E_1^{(i)}$ H_i -эquivариантную структуру относительно некоторого 2-цикла α_i группы H_i , полученный эквивариантный пучок обозначим через $\mathcal{E}^{(i)}$. Пусть $V_1^{(i)}, \dots, V_{m_i}^{(i)}$ – все неприводимые (α_i^{-1}) -представления группы H_i над k . Тогда блочный набор

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{Coind}_{H_1}^G(\mathcal{E}^{(1)} \otimes V_1^{(1)}) & \text{Coind}_{H_2}^G(\mathcal{E}^{(2)} \otimes V_1^{(2)}) & \text{Coind}_{H_n}^G(\mathcal{E}^{(n)} \otimes V_1^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{Coind}_{H_1}^G(\mathcal{E}^{(1)} \otimes V_{m_1}^{(1)}) & \text{Coind}_{H_2}^G(\mathcal{E}^{(2)} \otimes V_{m_2}^{(2)}) & \text{Coind}_{H_n}^G(\mathcal{E}^{(n)} \otimes V_{m_n}^{(n)}) \end{array} \right)$$

будет полным исключительным набором в категории $\mathcal{D}^G(X)$.

Эта теорема является следствием теоремы 2.16 из следующего пункта.

2.2. Случай алгебраических групп. Развита выше теория с небольшими изменениями переносится на случай действия алгебраических групп. Мы сформулируем и докажем обобщения теорем 2.1–2.3.

Первая теорема: случай исключительного набора в $\mathcal{D}(X)$ из эквивариантных пучков. Пусть X – алгебраическое многообразие, G – алгебраическая группа, действующая на X . Пусть $\mathcal{E}$ – G -эquivариантный пучок на X , являющийся исключительным в категории $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}^b(\text{coh}(X))$. Построим с его помощью вложение категории $\text{Repr}(G)$ конечномерных алгебраических представлений группы G в категорию $\text{coh}^G(X)$. Рассмотрим функтор $F_{\mathcal{E}}: \text{Repr}(G) \rightarrow \text{coh}^G(X)$,

сопоставляющий представлению V эквивариантный пучок $\mathcal{E} \otimes V$. Очевидно, что $F_{\mathcal{E}}$ – точный функтор, производный функтор от $F_{\mathcal{E}}$ мы будем также обозначать через $F_{\mathcal{E}}$.

ЛЕММА 2.4. *Функторы $R\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{E})^*$ и $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \cdot)$ из $\mathcal{D}^G(X)$ в $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$ являются соответственно сопряженными слева и справа к $F_{\mathcal{E}}$. Функтор $F_{\mathcal{E}}: \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G)) \rightarrow \mathcal{D}^G(X)$ строго полный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $V \in \mathrm{Repr}(G)$, $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}^G(X)$ имеются изоморфизмы векторных пространств

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E} \otimes V) &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \otimes V \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E})^*, V), \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{E} \otimes V, \mathcal{F}) &\cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})),\end{aligned}$$

согласованные с действием группы. Переходя к инвариантам, получаем сопряженность функторов $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{E})^*$ к $F_{\mathcal{E}}$ и $F_{\mathcal{E}}$ к $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \cdot)$ на абелевых категориях. Согласно [5, лемма 15.6] производные функторы также будут сопряжены. Проверим строгую полноту $F_{\mathcal{E}}$. Пусть $V, U \in \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$. Поскольку $\mathcal{E}$ – исключительный пучок, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(\mathcal{E} \otimes V, \mathcal{E} \otimes U) &= \mathrm{Hom}_G(V, R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes U)) \\ &= \mathrm{Hom}_G(V, R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \otimes U) = \mathrm{Hom}_G(V, U),\end{aligned}$$

следовательно, $F_{\mathcal{E}}$ – вложение категорий. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{E} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$ образ категории $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$ при вложении $F_{\mathcal{E}}$. Отметим, что подкатегория $\mathcal{E} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G)) \subset \mathcal{D}^G(X)$ является допустимой.

ЛЕММА 2.5. *Если $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – эквивариантные пучки, являющиеся исключительными в $\mathcal{D}(X)$ и такими, что $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 0$ при всех i , то подкатегория $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$ в $\mathcal{D}^G(X)$ полуортогональна слева к подкатегории $\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя сопряженность функторов $F_{\mathcal{E}_1}$ и $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \cdot)$, для $V, U \in \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$ мы получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(\mathcal{E}_1 \otimes V, \mathcal{E}_2 \otimes U) &= \mathrm{Hom}_G(V, R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \otimes U)) \\ &= \mathrm{Hom}_G(V, R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes U) = \mathrm{Hom}_G(V, 0) = 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь мы сформулируем аналог теоремы 2.1 для алгебраических групп. Здесь, вообще говоря, категория представлений группы уже не будет полупростой, поэтому вместо исключительного набора мы получаем полуортогональное разложение.

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть X – алгебраическое многообразие над k и G – алгебраическая группа, действующая на X . Пусть $(E_1, \dots, E_n)$ – полный исключительный набор из пучков в категории $\mathcal{D}(X)$. Предположим, что на каждом*

пучке E_i можно ввести G -эквивариантную структуру; обозначим полученный G -эквивариантный пучок через $\mathcal{E}_i$. Тогда производная категория G -эквивариантных пучков на X допускает полуортогональное разложение:

$$\mathcal{D}^G(X) = \langle \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G)), \dots, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G)) \rangle,$$

в котором компоненты эквивалентны производной категории $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$ конечномерных представлений группы G над k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше были определены подкатегории $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$, доказаны полуортогональность этих категорий и их эквивалентность категории $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$. Необходимо проверить, что они порождают всю категорию $\mathcal{D}^G(X)$. Как мы видели, категории $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$ допустимы справа. Согласно предложению 1.14 достаточно проверить, что любой объект в $\mathcal{D}^G(X)$, ортогональный справа ко всем этим подкатегориям, равен нулю. Действительно, пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^G(X)$, $\mathcal{F} \neq 0$. Поскольку набор $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ порождает обычную производную категорию $\mathcal{D}(X)$, найдутся номер i и число $p \in \mathbb{Z}$ такие, что $\mathrm{Hom}^p(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}) \neq 0$. Отсюда мы заключаем, что $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}) \neq 0$. Обозначим через V объект $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})$ производной категории $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G))$. В силу сопряженности функторов $\mathcal{E}_i \otimes \cdot$ и $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \cdot)$ имеем

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{E}_i \otimes V, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_G(V, R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})) \neq 0,$$

т. е. мы пришли к противоречию.

Вторая теорема: случай исключительного набора в $\mathcal{D}(X)$ из пучков, сохраняемых группой. Пусть теперь нам известно, что действие G на X сохраняет исключительный пучок E . Мы будем понимать под этим следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Действие алгебраической группы G на многообразии X сохраняет простой (т. е. такой, что $\mathrm{End} \mathcal{F} = k$) пучок $\mathcal{F}$ на X , если существует линейное расслоение $\mathcal{L}$ на G такое, что пучки $p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{F}$ и $a^* \mathcal{F}$ на $G \times X$ изоморфны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Определение 2.7 имеет смысл не только для простых пучков. Однако для таких $\mathcal{F}$, что $\dim_k \mathrm{End} \mathcal{F} > 1$, оно неправильно, так как его требования являются слишком сильными.

Ниже мы увидим, как связано определение 2.7 с тем “наивным” определением пучка, сохраняемого действием группы, которым мы пользовались в п. 2.1. Пока лишь видно, что условие сохранения пучка при действии группы более слабое, чем условие его эквивариантности.

Покажем, что исключительный пучок E , сохраняемый действием группы, будет эквивариантным пучком относительно некоторого коцикла на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть E – исключительный пучок на X , сохраняемый действием группы G . Тогда для некоторого коцикла $(\mathcal{L}, \alpha)$ на G существует $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантная структура на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем изоморфизм $\theta: p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* E \rightarrow a^* E$. На тройном произведении $G \times G \times X$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E & \xrightarrow{\text{Id} \otimes p_{23}^* \theta} & p_1^* \mathcal{L} \otimes (ap_{23})^* E \xrightarrow{(\text{Id} \times a)^* \theta} (a(\text{Id} \times a))^* E \\ \alpha' \downarrow & & \parallel \\ (\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E & \xrightarrow{(\mu \times \text{Id})^* \theta} & (a(\mu \times \text{Id}))^* E \end{array}$$

где $\alpha': p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E \rightarrow (\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E$ – некоторый изоморфизм. Поскольку пучок E на X исключительный, α' имеет вид $p_{12}^* \alpha \otimes \text{Id}$, где α – изоморфизм $p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \rightarrow \mu^* \mathcal{L}$ на $G \times G$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E, (\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E) \\ &= \text{Hom}(p_3^* E, (p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L})^{-1} \otimes (\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E) \\ &= \text{Hom}(E, p_{3*}((p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L})^{-1} \otimes (\mu p_{12})^* \mathcal{L} \otimes p_3^* E)) \\ &= \text{Hom}(E, p_{3*}((p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L})^{-1} \otimes (\mu p_{12})^* \mathcal{L}) \otimes E) \\ &= \text{Hom}(E, H^0(G \times G, (p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L})^{-1} \otimes \mu^* \mathcal{L}) \otimes E) = \text{Hom}(p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}, \mu^* \mathcal{L}), \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство выполнено по теореме о плоской замене базы.

Рассматривая пучки и их морфизмы на $G \times G \times G \times X$, мы получаем условие ассоциативности: на $G \times G \times G$ изоморфизмы

$$(\text{Id} \times \mu)^* \alpha \circ (\text{Id} \otimes p_{23}^* \alpha), \quad (\mu \times \text{Id})^* \alpha \circ (p_{12}^* \alpha \otimes \text{Id})$$

между пучками $p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* \mathcal{L}$ и $(\mu(\text{Id} \times \mu))^* \mathcal{L}$ равны. Предложение доказано.

Таким образом, E – скрученный эквивариантный пучок относительно некоторого коцикла $(\mathcal{L}, \alpha)$ на группе G в смысле определения 1.5. Это позволяет нам сформулировать и доказать аналог теоремы 2.2. Основная идея остается той же: получить из E эквивариантные пучки, тензорно домножая E на $((\mathcal{L}, \alpha)^{-1})$ -представления группы G .

Итак, введем на E структуру $(\mathcal{L}, \alpha)$ - G -эквивариантного пучка, обозначим полученный объект через $\mathcal{E}$. Построим вложение $F_{\mathcal{E}}$ категории конечномерных $((\mathcal{L}, \alpha)^{-1})$ -представлений G в категорию эквивариантных пучков, для этого определим функтор $F_{\mathcal{E}}$ из $\text{Repr}(G, \mathcal{L}^*, \alpha^*)$ в $\text{coh}^G(X)$:

$$F_{\mathcal{E}}(V) = \mathcal{E} \otimes V.$$

Поскольку $\mathcal{E}$ – $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантный пучок, а V – $(\mathcal{L}^*, \alpha^*)$ -представление, то по предложению 1.8 пучок $\mathcal{E} \otimes V$ будет (обычным) эквивариантным пучком. Функтор $F_{\mathcal{E}}$ является точным, соответствующий производный функтор также будет обозначаться $F_{\mathcal{E}}$. Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 2.4.

ЛЕММА 2.10. *Функтор $F_{\mathcal{E}}: \mathcal{D}(\text{Repr}(G, \mathcal{L}^*, \alpha^*)) \rightarrow \mathcal{D}^G(X)$ является строго полным вложением, левым и правым сопряженными к $F_{\mathcal{E}}$ будут функторы $R\text{Hom}(\cdot, \mathcal{E})^*$ и $R\text{Hom}(\mathcal{E}, \cdot)$ соответственно.*

Обозначим через $\mathcal{E} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}^*, \alpha^*))$ образ категории $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}^*, \alpha^*))$ при вложении $F_{\mathcal{E}}$.

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть X – алгебраическое многообразие, G – алгебраическая группа, действующая на X . Пусть $(E_1, \dots, E_n)$ – полный исключительный набор из пучков в категории $\mathcal{D}(X)$. Предположим, что каждый пучок E_i сохраняется действием группы. Введем на E_i структуру $(\mathcal{L}_i, \alpha_i)$ -эквивариантного пучка относительно некоторого коцикла $(\mathcal{L}_i, \alpha_i)$ группы G , полученный объект обозначим $\mathcal{E}_i$. Тогда категория $\mathcal{D}^G(X)$ допускает следующее полуортогональное разложение:

$$\mathcal{D}^G(X) = \langle \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}_1^*, \alpha_1^*)), \dots, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}_n^*, \alpha_n^*)) \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подкатегории $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$ были определены выше. Проверка их полуортогональности дословно повторяет доказательство леммы 2.5. Остается проверить, что указанные подкатегории порождают всю категорию $\mathcal{D}^G(X)$. Согласно лемме 2.10 все они допустимы справа. Поэтому (см. предложение 1.14) достаточно показать, что любой объект в $\mathcal{D}^G(X)$, ортогональный справа ко всем подкатегориям $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$, равен нулю. Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^G(X)$, $\mathcal{F} \neq 0$. Набор $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ порождает категорию $\mathcal{D}(X)$, следовательно, найдутся i и p такие, что $\mathrm{Hom}^p(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}) \neq 0$. Значит, $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}) \neq 0$. Обозначим объект $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})$ категории $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$ через V . Тогда, используя сопряженность $\mathcal{E}_i \otimes \cdot$ и $R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \cdot)$, получаем

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{E}_i \otimes V, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_G(V, R\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})) = \mathrm{Hom}_G(V, V) \neq 0.$$

Значит, $\mathcal{F}$ не ортогонален справа к подкатегории $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Предположим, что группа G конечна, поле k алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}(k)$ не делит порядок группы. Тогда категории ее конечномерных скрученных представлений полупросты согласно предложению 1.1 и порождены конечным числом ортогональных друг другу исключительных объектов – неприводимых представлений группы. Поэтому теоремы 2.1 и 2.2 являются частными случаями теоремы 2.11.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.13. Для редуктивной группы G в случае $k = \bar{k}$, $\mathrm{char}(k) = 0$ категория конечномерных представлений G полупроста. Более того, если $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл на редуктивной группе G , то категория $\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}, \alpha)$ также полупроста. Действительно, коциклу соответствует центральное расширение $\tilde{G}$ группы G с помощью тора k^* , оно также редуктивно. Как мы видели выше, категория $\mathrm{Repr}(\tilde{G})$ раскладывается в прямую сумму, одним из слагаемых в которой является категория $\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}, \alpha)$, следовательно, последняя категория также полупроста. Таким образом, в случае редуктивной группы G теорема 2.11 позволяет построить не просто полуортогональное разложение $\mathcal{D}^G(X)$, но и исключительный набор блочного вида в $\mathcal{D}^G(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Если в замечаниях 2.12, 2.13 не требовать алгебраической замкнутости поля k , то категории представлений группы будут раскладываться в прямые суммы категорий модулей над эндоморфизмами неприводимых

представлений. Мы получим полуортогональное разложение $\mathcal{D}^G(X)$ блочного вида, в котором подкатегории эквивалентны производным категориям векторных пространств над телами над k .

Третья теорема: случай исключительного набора в $\mathcal{D}(X)$ из блоков, сохраняемых группой. Пусть, как обычно, X – многообразие, G – алгебраическая группа, действующая на X , H – алгебраическая подгруппа группы G , имеющая конечный индекс. Нам понадобится понятие индуцированного эквивариантного пучка, необходимые свойства которого изложены ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15. *Функтор забывания Res_H^G из $\text{coh}^G(X)$ в $\text{coh}^H(X)$ имеет правый сопряженный функтор, обозначаемый Coind_H^G . Функтор Coind_H^G точен. Имеется точная тройка функторов из $\text{coh}^H(X)$ в $\text{coh}^H(X)$:*

$$0 \rightarrow F' \rightarrow \text{Res}_H^G \text{Coind}_H^G \rightarrow \text{Id} \rightarrow 0,$$

где F' – некоторый функтор $\text{coh}^H(X) \rightarrow \text{coh}^H(X)$. При этом если G разбивается в объединение правых смежных классов по H , то $F'(\cdot) = \bigoplus_{g \in J} g^*(\cdot)$, где J – множество представителей в $G(k)$ нетривиальных правых смежных классов G по H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду отсутствия удобных ссылок мы приводим доказательство.

Рассмотрим коммутативную диаграмму многообразий с действиями групп:

$$\begin{array}{ccccc} HX & \xleftarrow{p_2} & G \times_H G \times X & \xrightarrow{\pi} & {}_G G \times^H X & \xrightarrow{\bar{a}} & GX \\ & \searrow \bar{p} = \sqcup \text{Id}_X & & \parallel & \uparrow \sqcup g & & \\ & & G \bigsqcup_{g \in J} X_g & & & & \end{array}$$

Она приводит к следующей диаграмме категорий и функторов:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{coh}^H(X) & \xrightarrow[p_2^*]{\sim} & \text{coh}^{G \times H}(G \times X) & \xleftarrow[\sim]{\pi^*} & \text{coh}^G(G \times^H X) & \xrightleftharpoons[\bar{a}^* = \text{Res}]{\bar{a}_* = \text{Coind}} & \text{coh}^G(X) \\ & \searrow \bar{p}^* & & & \parallel & & \\ & & & & \text{coh}^G(\bigsqcup_{g \in J} X_g) & & \end{array}$$

Приведем необходимые пояснения. На $G \times X$ действует группа $G \times H$ по правилу $(g', h) \cdot (g, x) = (g'gh^{-1}, hx)$. Проекция $p_2: G \times X \rightarrow X$ является факторизацией по свободному действию G и H -эквивариантна, следовательно, p_2^* дает эквивалентность категорий $\text{coh}^H(X)$ и $\text{coh}^{G \times H}(G \times X)$. Отображение π – это проекция на фактор $G \times X$ по свободному действию H . Поскольку π эквивариантно, π^* дает эквивалентность категорий $\text{coh}^G(G \times^H X) \rightarrow \text{coh}^{G \times H}(G \times X)$. Отображение $\bar{a}$ индуцировано морфизмом действия $a: G \times X \rightarrow X$. Оно G -эквивариантно, значит, имеются сопряженные функторы $\bar{a}^*: \text{coh}^G(X) \rightarrow \text{coh}^G(G \times^H X)$ и $\bar{a}_*: \text{coh}^G(G \times^H X) \rightarrow \text{coh}^G(X)$. При описанной выше эквивалентности между $\text{coh}^H(X)$ и $\text{coh}^G(G \times^H X)$ функтору Res_H^G соответствует $\bar{a}^*$, а функтор $\bar{a}_*$ является искомым Coind_H^G .

Если G/H имеет множество представителей J в $G(k)$, то мы можем отождествить $G \times^H X$ с $\bigsqcup_{g \in J} X_g$, где $X_g = X$. При этом отождествлении $\bar{a}$ на X_g совпадает с действием g , а для набора тождественных морфизмов $\bar{p}: \bigsqcup X_g \rightarrow X$ будем иметь $\bar{p}\pi = p_2$. Получаем, что

$$\mathrm{Coind}_H^G \mathcal{F} = \bar{a}_* \bar{p}^* \mathcal{F} = \bigoplus_{g \in J} g_* \mathcal{F} = \bigoplus_{g \in J^{-1}} g^* \mathcal{F}.$$

При этом сумма по нетривиальным смежным классам будет H -инвариантным подпучком, откуда следует утверждение, касающееся F' . Предложение доказано.

В терминах стеков функтор Res_H^G – это обратный образ при морфизме $X//H \rightarrow X//G$, а сопряженный к нему справа функтор Coind_H^G – это прямой образ.

Производный функтор от точного функтора Coind_H^G мы также будем обозначать Coind_H^G .

ТЕОРЕМА 2.16. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k и G – алгебраическая группа, действующая на X . Предположим, что в категории $\mathcal{D}(X)$ имеется полный исключительный набор блочного вида

$$\begin{pmatrix} E_1^{(1)} & E_1^{(2)} & & E_1^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{k_1}^{(1)} & E_{k_2}^{(2)} & & E_{k_n}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

состоящий из пучков и такой, что действие группы $G(k)$ транзитивно переставляет пучки в пределах каждого блока. Пусть $H_i \subset G$ – подгруппа конечного индекса такая, что фактор $H_i \backslash G$ имеет множество представителей в $G(k)$, пучок $E_1^{(i)}$ сохраняется действием H_i и $H_i(k)$ является стабилизатором пучка $E_1^{(i)}$ в $G(k)$. Введем на $E_1^{(i)}$ эквивариантную структуру относительно некоторого коцикла $(\mathcal{L}_i, \alpha_i)$ группы H_i и полученный $(\mathcal{L}_i, \alpha_i)$ - H_i -эквивариантный пучок обозначим через $\mathcal{E}^{(i)}$. Тогда категория $\mathcal{D}^G(X)$ допускает полуортogonalное разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^G(X) = & \langle \mathrm{Coind}_{H_1}^G(\mathcal{E}^{(1)} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_1, \mathcal{L}_1^*, \alpha_1^*))), \dots \\ & \dots, \mathrm{Coind}_{H_n}^G(\mathcal{E}^{(n)} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_n, \mathcal{L}_n^*, \alpha_n^*))) \rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

в котором подкатегории $\mathrm{Coind}_{H_i}^G(\mathcal{E}^{(i)} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*)))$ эквивалентны категориям $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перед доказательством теоремы 2.11 были построены вложения категорий $F_{\mathcal{E}^{(i)}}: \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$ в $\mathcal{D}^{H_i}(X)$, обладающие левым сопряженным функтором. Образы функторов $F_{\mathcal{E}^{(i)}}$ были обозначены через $\mathcal{E}^{(i)} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$. Проверим, что функтор $\mathrm{Coind}_{H_i}^G$ дает строго полное вложение категории $\mathcal{E}^{(i)} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$ в $\mathcal{D}^G(X)$. Пусть $V, U \in \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$. Тогда (мы не используем индексы i , G и H для краткости)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Coind}(\mathcal{E} \otimes V), \mathrm{Coind}(\mathcal{E} \otimes U)) &= \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res} \mathrm{Coind}(\mathcal{E} \otimes V), \mathcal{E} \otimes U) \\ &= \mathrm{Hom}_H(\mathcal{E} \otimes V, \mathcal{E} \otimes U). \end{aligned}$$

Во втором равенстве мы использовали существование точной тройки функторов $0 \rightarrow F' \rightarrow \text{Res Coind} \rightarrow \text{Id} \rightarrow 0$ и то, что $\text{Hom}_H^i(F'(\mathcal{E} \otimes V), \mathcal{E} \otimes U) = \text{Hom}_H^i(\bigoplus_{g \in J} g^*(\mathcal{E} \otimes V), \mathcal{E} \otimes U) = 0$ при $i = -1, 0$ (см. предложение 2.15). Действительно, $\text{Hom}_H(\cdot, \cdot) = \text{Hom}_H(\mathbf{k}, \text{Hom}(\cdot, \cdot))$, где $\mathbf{k}$ – тривиальное представление группы H . Существует спектральная последовательность с $E_2^{pq} = \text{Ext}_H^q(\mathbf{k}, \text{Hom}^p(\bigoplus_{g \in J} g^*(\mathcal{E} \otimes V), \mathcal{E} \otimes U))$, сходящаяся к $E^\infty = \text{Hom}^n(\bigoplus_{g \in J} g^*(\mathcal{E} \otimes V), \mathcal{E} \otimes U)$. Однако $\text{Hom}^p(g^*(\mathcal{E} \otimes V), \mathcal{E} \otimes U) = 0$ при $g \in J$, так как по условию $\mathcal{E}$ и $g^*\mathcal{E}$ – различные исключительные пучки в одном блоке разложения (2.2).

Теперь проверим полуортогональность подкатегорий в разложении (2.3). Пусть $i < j$, $V \in \mathcal{D}(\text{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$, $U \in \mathcal{D}(\text{Repr}(H_j, \mathcal{L}_j^*, \alpha_j^*))$. Тогда

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_G(\text{Coind}_{H_j}^G(\mathcal{E}^{(j)} \otimes U), \text{Coind}_{H_i}^G(\mathcal{E}^{(i)} \otimes V)) \\ &= \text{Hom}_{H_i}(\text{Res}_{H_i}^G \text{Coind}_{H_j}^G(\mathcal{E}^{(j)} \otimes U), \mathcal{E}^{(i)} \otimes V) = 0. \end{aligned}$$

Действительно, к $\text{Hom}_{H_i}^n(\text{Res}_{H_i}^G \text{Coind}_{H_j}^G(\mathcal{E}^{(j)} \otimes U), \mathcal{E}^{(i)} \otimes V)$ сходится спектральная последовательность со вторым членом

$$E_2^{pq} = \text{Ext}_{H_i}^q(\mathbf{k}, \text{Hom}^p(\text{Coind}_{H_j}^G(\mathcal{E}^{(j)} \otimes U), \mathcal{E}^{(i)} \otimes V)).$$

Однако в этой последовательности $\text{Hom}^p(\text{Coind}_{H_j}^G(\mathcal{E}^{(j)} \otimes U), \mathcal{E}^{(i)} \otimes V) = 0$, так как в производной категории пучков

$$F'(\mathcal{E}^{(j)} \otimes U) \cong \left(\bigoplus_{l=2}^{k_j} E_l^{(j)} \right) \otimes U, \quad \mathcal{E}^{(j)} \otimes U \cong E_1^{(j)} \otimes U$$

и пучки $E_l^{(j)}$ ортогональны слева к $\mathcal{E}^{(i)} = E_1^{(i)}$ по условию.

Наконец, проверим, что триангулированная категория, порожденная (2.3), совпадает со всей $\mathcal{D}^G(X)$. Как мы видели, функторы

$$F_{\mathcal{E}^{(i)}} : \mathcal{D}(\text{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*)) \rightarrow \mathcal{D}^{H_i}(X), \quad \text{Coind}_{H_i}^G : \mathcal{D}^{H_i}(X) \rightarrow \mathcal{D}^G(X)$$

имеют левые сопряженные. Следовательно, подкатегории

$$\text{Coind}_{H_i}^G(\mathcal{E}^{(i)} \otimes \mathcal{D}(\text{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))) \subset \mathcal{D}^G(X)$$

допустимы слева. Проверим равенство нулю левого ортогонала к подкатегории, стоящей в правой части (2.3). Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^G(X)$, $\mathcal{F} \neq 0$. Набор (2.2) порождает категорию $\mathcal{D}(X)$, следовательно, найдутся i , p и l такие, что $\text{Hom}^p(\mathcal{F}, E_l^{(i)}) \neq 0$. Поскольку $G(\mathbf{k})$ транзитивно переставляет пучки в блоках (2.2), мы можем считать, что $l = 1$. Следовательно, $R\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{(i)}) \neq 0$. Обозначим объект $R\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{(i)})^*$ категории $\mathcal{D}(\text{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))$ через V . Тогда, используя сопряженность $R\text{Hom}(\cdot, \mathcal{E}^{(i)})^*$ и $F_{\mathcal{E}^{(i)}}$, получаем

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\mathcal{F}, \text{Coind}_{H_i}^G(\mathcal{E}^{(i)} \otimes V)) &= \text{Hom}_{H_i}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{(i)} \otimes V) = \text{Hom}_{H_i}(R\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{(i)})^*, V) \\ &= \text{Hom}_{H_i}(V, V) \neq 0. \end{aligned}$$

Значит, $\mathcal{F}$ не ортогонален слева к подкатегории

$$\text{Coind}_{H_i}^G(\mathcal{E}^{(i)} \otimes \mathcal{D}(\text{Repr}(H_i, \mathcal{L}_i^*, \alpha_i^*))).$$

Применение предложения 1.14 завершает доказательство теоремы.

Критерий инвариантности исключительного пучка в смысле определения 2.7 в терминах действия точек группы. В п. 2.1 мы говорили, что пучок $\mathcal{F}$ сохраняется действием конечной группы G , если $g^*\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ при всех $g \in G$. Для алгебраических групп это определение непригодно, так как группа может иметь слишком мало рациональных точек. Более правильным оказывается определение 2.7, данное выше: пучок $\mathcal{F}$ на X сохраняется действием группы G , если существует линейное расслоение $\mathcal{L}$ на G такое, что пучки $p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{F}$ и $a^*\mathcal{F}$ на $G \times X$ изоморфны. Ниже мы связываем это определение с инвариантностью пучка под действием отдельных точек группы и получаем тем самым критерий для проверки определения 2.7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.17. *Пусть алгебраическая группа G действует на проетивном многообразии X . Пусть $\mathcal{F}$ – исключительный когерентный пучок на X такой, что для любой рациональной точки $g \in G(k)$ выполнено $g^*\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$. Предположим также, что указанные условия для пучка $\mathcal{F}$ остаются верными при переходе к любому конечному расширению поля k . Тогда пучок $\mathcal{F}$ сохраняется действием группы в смысле определения 2.7.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пучок $\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F})$ на $G \times X$. Мы утверждаем, что комплекс $Rp_{1*}R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F})$ является обратимым пучком на G , сосредоточенным в нулевой степени.

Пусть g – замкнутая точка схемы G . Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X_g & \xrightarrow{i} & G \times X \\ \downarrow p & & \downarrow p_1 \\ g & \xrightarrow{i} & G \end{array}$$

Поскольку $G \times X$ гладко, то $p_2^*\mathcal{F}$ – совершенный комплекс и пучки $p_2^*\mathcal{F}$, $a^*\mathcal{F}$ плоские над G . Мы имеем

$$\begin{aligned} Li^*R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F}) &= \mathcal{O}_{X_g} \otimes^L (p_2^*\mathcal{F})^* \otimes^L a^*\mathcal{F} = (p_2^*\mathcal{F}|_{X_g})^* \otimes^L a^*\mathcal{F}|_{X_g} \\ &= R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}|_{X_g}, a^*\mathcal{F}|_{X_g}) = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}', g^*\mathcal{F}'), \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}'$ – пучок на X_g , полученный расширением скаляров из $\mathcal{F}$. Далее,

$$Rp_*Li^*R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F}) = R\mathrm{Hom}(\mathcal{F}', g^*\mathcal{F}') = k(g)[0].$$

Пусть $H^\bullet$ обозначает когомологии комплекса. Существует спектральная последовательность векторных пространств со вторым членом

$$E_2^{pq} = L_{-q}i^*H^p(Rp_{1*}R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F}))$$

и дифференциалом d_2 степени $(-1, 2)$, сходящаяся к пространству

$$\begin{aligned} E_\infty^n &= H^n(Li^*Rp_{1*}R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F})) \\ &= H^n(Rp_*Li^*R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F})) = \begin{cases} k(g) & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

где второе равенство выполнено по теореме о плоской замене базы.

Поскольку морфизм p_1 проективен, когомологии комплекса $Rp_{1*}R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F})$ являются когерентными пучками. Пусть H^p – старшая ненулевая когомология этого комплекса. Если $p > 0$, то из спектральной последовательности мы получаем, что $E_2^{p0} = E_\infty^p = 0$, т.е. $i^*H^p = 0$ для вложения любой замкнутой точки g . Следовательно, H^p – нулевой пучок. Противоречие. Если $p = 0$, то $E_2^{00} = E_\infty^0 = k(g)$ и пространство i^*H^0 одномерно при всех $g \in G$, отсюда следует, что $H^0 = \mathcal{L}$ – линейное расслоение на G .

Поскольку функтор p_{1*} точен слева, получаем

$$p_{1*}\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F}) = H^0(Rp_{1*}R\mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F})) = \mathcal{L}.$$

Теперь рассмотрим композицию отображений

$$p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om(p_2^*\mathcal{F}, a^*\mathcal{F}) \otimes p_2^*\mathcal{F} \rightarrow a^*\mathcal{F},$$

очевидно, она является изоморфизмом. Предложение доказано.

§ 3. Применения

Доказанные теоремы могут быть применены ко многим классам многообразий. Здесь мы покажем, что к числу таких многообразий относятся проективные пространства, квадрики, многообразия Грассмана и поверхности дель Пеццо степени $d \geq 5$. Тем самым, в случае действия алгебраических групп на указанных многообразиях удастся построить полуортогональные разложения производных категорий эквивариантных пучков.

3.1. Проективные пространства. Пусть V – n -мерное векторное пространство над полем k , $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ – его проективизация. Предположим, что группа G действует на $\mathbb{P}(V)$. Известно, что в категории $\mathcal{D}(\mathbb{P}^{n-1})$ имеется полный исключительный набор

$$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n-1)).$$

Этот набор сохраняется автоморфизмами $\mathbb{P}^{n-1}$, и мы можем применить теорему 2.11.

Построим коцикл, отвечающий за действие G на пучке $\mathcal{O}(-1)$. Рассмотрим группу $\tilde{G} = G \times_{\mathrm{PGL}(V)} \mathrm{GL}(V)$ и обозначим через π проекцию $\tilde{G}$ на G . Отображение π превращает $\tilde{G}$ в главное $\mathbb{G}_m$ -расслоение над G . Обозначим соответствующее линейное расслоение на G через $\mathcal{L}$. Умножение в $\tilde{G}$ вводит на $\mathcal{L}$ структуру коцикла, обозначим его $(\mathcal{L}, \alpha)$. Другими словами, $\tilde{G}$ является центральным расширением G с помощью $\mathbb{G}_m$, отвечающим коциклу $(\mathcal{L}, \alpha)$.

На $\mathbb{P}(V)$ возникает действие $\tilde{G}$, индуцированное действием G . С другой стороны, проекция $\tilde{G}$ на $\mathrm{GL}(V)$ позволяет определить тавтологическое представление $\tilde{G}$ в пространстве V . Рассмотрим соответствующее $\tilde{G}$ -расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes V$ на $\mathbb{P}(V)$ и его инвариантное подрасслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$. Мы видим, что $\mathcal{O}(-1)$ является $\tilde{G}$ -эквивариантным расслоением на $\mathbb{P}(V)$. При этом подгруппа $\mathbb{G}_m = \pi^{-1}(e) \subset \tilde{G}$ действует на $\mathcal{O}(-1)$ линейно. Следовательно, на пространстве V имеется $(\mathcal{L}, \alpha)$ -действие группы G , а $\mathcal{O}(-1)$ является $(\mathcal{L}, \alpha)$ -пучком на $\mathbb{P}(V)$. Согласно предложению 1.8 расслоения $\mathcal{O}(k)$ будут $((\mathcal{L}, \alpha)^{-k})$ -эквивариантными на $\mathbb{P}(V)$.

Мы можем также рассмотреть группу $\bar{G} = G \times_{\mathrm{PGL}(V)} \mathrm{SL}(V)$. Она является замкнутой подгруппой в $\tilde{G}$ и расширением G с помощью алгебраической группы μ_n . Нетрудно видеть, что $\bar{G}$ совпадает с конечным расширением G из предложения 1.13.

Таким образом, теорема 2.11 в нашем случае с учетом предложений 1.9 и 1.13 приобретает следующий вид.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть алгебраическая группа G действует на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$, пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ – коцикл, отвечающий за действие G на пучке $\mathcal{O}(-1)$. Тогда производная категория G -эквивариантных пучков на $\mathbb{P}(V)$ допускает полуортогональное разложение:

$$\mathcal{D}^G(\mathbb{P}(V)) = \langle \mathcal{O} \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G)), \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}, \alpha)), \dots, \mathcal{O}(n-1) \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}^{n-1}, \alpha^{n-1})) \rangle. \quad (3.1)$$

Положим $\tilde{G} = G \times_{\mathrm{PGL}(V)} \mathrm{GL}(V)$ и $\bar{G} = G \times_{\mathrm{PGL}(V)} \mathrm{SL}(V)$. Тогда группа $\tilde{G}$ есть расширение G , соответствующее коциклу $(\mathcal{L}, \alpha)$ в смысле предложения 1.9, и компоненты $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(G, \mathcal{L}^i, \alpha^i))$ в разложении (3.1) эквивалентны категориям $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}_{(i)}(\tilde{G}))$ и $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}_{(i)}(\bar{G}))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Интересно, что компоненты разложения (3.1)

$$\mathcal{D}(\mathrm{Repr}_{(0)}(\bar{G})), \dots, \mathcal{D}(\mathrm{Repr}_{(n-1)}(\bar{G}))$$

– это в точности компоненты разложения категории $\mathcal{D}(\mathrm{Repr}(\bar{G}))$ на прямые слагаемые из предложения 1.13.

Построенное разложение можно рассматривать как “некоммутативный вариант” полуортогонального разложения, построенного М. Бернардарой в [2] для относительных схем Севери–Брауэра. Если $X \xrightarrow{p} S$ – относительная схема Севери–Брауэра размерности n над S , то это разложение имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}(X) = \langle \mathcal{O} \otimes p^* \mathcal{D}(S), \mathcal{O}(1) \otimes p^* \mathcal{D}(S, \alpha^{-1}), \dots, \mathcal{O}(n) \otimes p^* \mathcal{D}(S, \alpha^{-n}) \rangle.$$

Здесь $\mathcal{O}(1)$ обозначает относительный пучок $\mathcal{O}_{X/S}(1)$ на X , он является пучком, скрученным на коцикл $p^* \alpha$, где $\alpha \in H_{\mathrm{et}}^2(S, \mathbb{G}_m)$ – некоторый элемент группы Брауэра, а $\mathcal{D}(S, \alpha^k)$ – ограниченная производная категории пучков на S , скрученных на коцикл α^k .

Разложение, полученное нами, имеет такой же вид, если считать $\mathbb{P}(V) // G$ некоммутативным относительным многообразием Севери–Брауэра над $\mathrm{pt} // G$.

3.2. Квадрики. Пусть k – алгебраически замкнутое поле, $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Пусть V – векторное пространство над k размерности $n, n \geq 3$, Q – невырожденная квадрика в $\mathbb{P}(V)$. Полные исключительные наборы в $\mathcal{D}(Q)$ были построены М. М. Капрановым. Один из таких наборов имеет вид

$$(E_{\pm}, \mathcal{O}(-n+3), \dots, \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}), \quad (3.2)$$

где $\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_Q$ – линейные расслоения на Q , ограниченные с $\mathbb{P}(V)$, а $E_{\pm}$ – подкрученное спинорное расслоение $E = \Sigma(-n+2)$ при нечетном n и

блок из двух ортогональных друг другу подкрученных спинорных расслоений $E_+ = \Sigma_+(-n+2)$ и $E_- = \Sigma_-(-n+2)$ при четном n (подробности см. в [6] или в [7, § 4]).

Мы утверждаем, что набор (3.2) сохраняется при автоморфизмах Q . Точнее, каждое расслоение $\mathcal{O}(k)$ переводится в себя автоморфизмами Q , расслоение E переводится в себя (при нечетном n), и расслоения E_+ и E_- переводятся в себя или друг в друга (при четном n).

Действительно, пусть g – автоморфизм Q . Тогда g продолжается до автоморфизма всего $\mathbb{P}(V)$, а пучки $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)$ сохраняются автоморфизмами проективного пространства. Следовательно, для каждого из пучков $\mathcal{O}(-n+3), \dots, \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}$ на Q мы имеем $g^*\mathcal{O}(k) \cong \mathcal{O}(k)$. Подкатегория в $\mathcal{D}(Q)$, порожденная пучками $\mathcal{O}(-n+3), \dots, \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}$, инвариантна относительно g , следовательно, правый ортогонал к ней также инвариантен. В силу полноты набора (3.2) имеем $\langle \mathcal{O}(-n+3), \dots, \mathcal{O} \rangle^\perp = \langle E_\pm \rangle$. При нечетном n категория $\langle E_\pm \rangle = \langle E \rangle$ порождена одним исключительным объектом, все исключительные объекты в ней – это сдвиги E в производной категории, значит, $g^*E \cong E$. При четном n категория $\langle E_\pm \rangle = \langle E_+, E_- \rangle$ порождена двумя ортогональными друг другу исключительными объектами, все исключительные объекты в ней суть сдвиги E_+ или E_- . Следовательно, $g^*E_+ \cong E_+$, $g^*E_- \cong E_-$ или $g^*E_+ \cong E_-$, $g^*E_- \cong E_+$.

Пусть группа G действует на Q . Мы видим, что исключительный набор (3.2) удовлетворяет условиям теоремы 2.16 и с ее помощью можно получить полуортогональное разложение категории $\mathcal{D}^G(Q)$.

3.3. Поверхности дель Пеццо. Пусть X – неособая поверхность дель Пеццо степени d , $1 \leq d \leq 9$, G – группа, действующая на X . Мы будем предполагать, что основное поле k алгебраически замкнуто и $\text{char}(k) = 0$. Доказанные теоремы позволяют получать полуортогональные разложения производной категории G -эквивариантных когерентных пучков на поверхности X в случае $d \geq 5$.

Хорошо известно, что неособая поверхность дель Пеццо является раздутием проективной плоскости в $r = 9 - d$ общих точках или неособой квадрикой (и тогда $d = 8$). Случаи проективной плоскости и квадрики были рассмотрены в предыдущих пунктах. Ниже при $1 \leq r \leq 4$ для X – раздутия $\mathbb{P}^2$ в r точках, никакие три из которых не лежат на одной прямой, – мы укажем примеры полных исключительных наборов пучков на X , удовлетворяющих условиям теорем 2.3 и 2.16.

Нам понадобится следующий результат, вытекающий из общей теоремы Д. О. Орлова о раздутиях (см. [8]).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие проективной плоскости в r различных точках $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{P}^2$, $E_i = \sigma^{-1}(x_i)$ – исключительные дивизоры раздутия. Тогда в производной категории когерентных пучков на X имеется полный исключительный набор

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{O}_{E_1}(-1) \\ \dots\dots\dots, \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \\ \mathcal{O}_{E_r}(-1) \end{array} \right), \quad (3.3)$$

в котором пучки $\mathcal{O}_{E_1}(-1), \dots, \mathcal{O}_{E_r}(-1)$ попарно ортогональны, т. е. образуют блок.

Мы будем пользоваться обозначениями теоремы 3.3. Пусть также L_{ij} обозначает собственный прообраз прямой $x_i x_j$ при отображении σ , а L – прообраз класса дивизоров прямой при σ . Тогда $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = \mathcal{O}_X(L)$ и $L \sim L_{ij} + E_i + E_j$. Разберем последовательно случаи.

Случай $r = 1$. Пусть X – раздутие $\mathbb{P}^2$ в точке x_1 . Действие группы G на X спускается до действия G на проективной плоскости, сохраняющего точку x_1 . Все пучки исключительного набора $(\mathcal{O}_{E_1}(-1), \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ сохраняются действием группы, и мы можем применить теорему 2.11. Отметим, что $\mathcal{O}_{E_1}(-1)$ является G -эквивариантным пучком на X , соответствующее действие возникает из линейного действия G на касательном пространстве $T_{x_1} \mathbb{P}^2$.

В действительности мы получаем полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^G(X) = \langle \mathcal{O}_{E_1}(-1) \otimes \mathcal{D}(\text{Repr}(G)) , \sigma^* \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^2) \rangle.$$

Случай $r = 2$. Пусть X – плоскость с двумя раздутыми точками x_1 и x_2 . Тогда на X есть ровно три (-1) -кривые: E_1, E_2 и L_{12} . Конфигурация из этих кривых должна переводиться автоморфизмами поверхности в себя, поэтому все автоморфизмы X получаются из автоморфизмов $\mathbb{P}^2$, сохраняющих множество $\{x_1, x_2\}$. Таким образом, в наборе (3.3) пучки $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ сохраняются действием группы, а пучки $\mathcal{O}_{E_1}(-1)$ и $\mathcal{O}_{E_2}(-1)$, образующие блок, переходят в себя или друг в друга. Применяя теорему 2.16, получаем полуортогональное разложение категории $\mathcal{D}^G(X)$:

$$\mathcal{D}^G(X) = \left\langle \begin{array}{c} \mathcal{O}_{E_1}(-1) \otimes \mathcal{D}(\text{Repr}(G)) \\ \mathcal{O}_{E_2}(-1) \otimes \mathcal{D}(\text{Repr}(G)) \end{array} , \sigma^* \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^2) \right\rangle$$

или

$$\mathcal{D}^G(X) = \langle \text{Coind}_H^G(\mathcal{O}_{E_1}(-1) \otimes \mathcal{D}(\text{Repr}(H))) , \sigma^* \mathcal{D}^G(\mathbb{P}^2) \rangle,$$

в зависимости от того, сохраняет ли группа каждую из точек $x_1, x_2 \in \mathbb{P}^2$ в отдельности или переставляет их, во втором случае H – стабилизатор точки x_1 .

Случай $r = 3$. Пусть X – раздутие плоскости в трех точках x_1, x_2, x_3 , не лежащих на одной прямой. Здесь ситуация отлична от той, что была выше: не все автоморфизмы поверхности X поднимаются с автоморфизмов плоскости, и набор (3.3) не будет сохраняться произвольной группой, действующей на X . Однако инвариантный набор можно построить из (3.3) перестройками. Рассмотрим набор расслоений на X :

$$\left(\mathcal{O} , \begin{array}{cc} \mathcal{O}(L) & \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2) \\ \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3) & \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3) \\ & \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3) \end{array} \right). \quad (3.4)$$

Он является полным исключительным набором, состоящим из трех блоков, и может быть получен перестройками из набора (3.3) (подробнее о блочных исключительных наборах на поверхностях дель Педро см. [9, § 4]).

ЛЕММА 3.4. *Блоки расслоений $(\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3))$ и $(\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3), \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3))$ сохраняются любыми автоморфизмами поверхности X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На X имеется ровно шесть (-1) -кривых, они образуют кольцо. Перечислим эти кривые в порядке обхода по кольцу: $E_1, L_{12}, E_2, L_{23}, E_3, L_{13}$. Это кольцо должно переводиться автоморфизмами поверхности X в себя. При этом автоморфизмы X , сохраняющие множество кривых $\{E_1, E_2, E_3\}$, приходят из автоморфизмов $\mathbb{P}^2$ и поэтому переводят L в L . Такие автоморфизмы сохраняют каждое расслоение в блоке $(\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3))$ и переставляют расслоения в пределах блока $(\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3), \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3))$. Для завершения доказательства осталось рассмотреть какой-нибудь автоморфизм поверхности X , меняющий множества кривых $\{E_1, E_2, E_3\}$ и $\{L_{12}, L_{13}, L_{23}\}$. Например, автоморфизм f , реализующий на кольце (-1) -кривых “центральную симметрию” (т.е. такой, что $f(E_1) = L_{23}, f(E_2) = L_{13}, \dots$). Примером такого f является автоморфизм поверхности X порядка 2, индуцированный квадратичным преобразованием $\mathbb{P}^2$ с центрами в точках x_1, x_2, x_3 . Отметим, что $f(L) = 2L - E_1 - E_2 - E_3$ и $f(2L - E_1 - E_2 - E_3) = L$, т.е. пучки из набора $(\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_2 - E_3))$ переводятся автоморфизмом f друг в друга. Для расслоения $\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2)$ мы вычисляем, что

$$f(2L - E_1 - E_2) = 2(2L - E_1 - E_2 - E_3) - (L - E_2 - E_3) - (L - E_1 - E_3) = 2L - E_1 - E_2.$$

Следовательно (в силу симметрии), расслоения из блока $(\mathcal{O}(2L - E_1 - E_2), \mathcal{O}(2L - E_1 - E_3), \mathcal{O}(2L - E_2 - E_3))$ сохраняются при автоморфизме f . Лемма доказана.

Итак, исключительный набор (3.4) удовлетворяет условиям теорем 2.3 и 2.16, и мы можем получить полуортогональные разложения производных эквивариантных категорий.

Случай $r = 4$. Пусть X – раздутие плоскости в четырех точках, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пусть K_X – канонический класс на X , $K_X = -3L + E_1 + E_2 + E_3 + E_4$. Мы снова будем использовать полный исключительный набор пучков на X из работы [9, § 4]:

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{O}(L) \\ \mathcal{O}(E_1 - K_X - L) \\ \mathcal{O}, F, \mathcal{O}(E_2 - K_X - L) \\ \mathcal{O}(E_3 - K_X - L) \\ \mathcal{O}(E_4 - K_X - L) \end{array} \right), \quad (3.5)$$

где F – расслоение ранга 2, которое может быть получено с помощью расширения

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-K_X - L) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}(L) \rightarrow 0.$$

Мы покажем ниже, что автоморфизмы X переводят пучки правого блока в (3.5) друг в друга. Отсюда автоматически будет следовать, что расслоение F сохраняется автоморфизмами X в силу того, что набор (3.5) полный.

ЛЕММА 3.5. *Любой автоморфизм поверхности X переводит расслоения*

$$\mathcal{O}(L), \mathcal{O}(E_1 - K_X - L), \mathcal{O}(E_2 - K_X - L), \mathcal{O}(E_3 - K_X - L), \mathcal{O}(E_4 - K_X - L)$$

друг в друга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На X имеется ровно десять (-1) -кривых, а именно это четыре E_i и шесть L_{ij} . Эти десять кривых порождают группу Пикара X , так что достаточно проверить, что любой автоморфизм конфигурации (-1) -кривых переводит расслоения правой пятерки из набора (3.5) друг в друга. Сперва заметим, что сказанное верно для автоморфизмов, сохраняющих множество $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Пусть f – автоморфизм порядка два, сохраняющий E_4 и действующий центральной симметрией на кольце из шести (-1) -кривых, не пересекающихся с E_4 . Нетрудно видеть, что автоморфизмы, сохраняющие множество $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, вместе с f порождают группу автоморфизмов конфигурации из десяти кривых. Итак, нам осталось проверить инвариантность блока для автоморфизма f . При этом нужные вычисления были проведены при рассмотрении случая $r = 3$. Мы имеем

$$f(L) = 2L - E_1 - E_2 - E_3 = E_4 - K_X - L,$$

и так как f имеет порядок 2, выполнено $f(E_4 - K_X - L) = L$. Далее,

$$f(E_1 - K_X - L) = f(2L - E_2 - E_3) - E_4 = 2L - E_2 - E_3 - E_4 = E_1 - K_X - L.$$

Аналогично,

$$f(E_2 - K_X - L) = E_2 - K_X - L, \quad f(E_3 - K_X - L) = E_3 - K_X - L.$$

Лемма доказана.

Таким образом, набор (3.5) удовлетворяет условиям теорем 2.3 и 2.16.

3.4. Многообразие Грассмана. Пусть V – векторное пространство над полем k характеристики 0, $\dim(V) = n$, $\text{Gr} = \text{Gr}(k, V)$ – грассманиан k -мерных подпространств в V .

Для применения теорем 2.2 и 2.11 мы используем исключительный набор на Gr , построенный М. М. Капрановым в [10] (см. также [7, §3]). Введем сначала некоторые обозначения. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ – диаграмма Юнга, образованная r строками длин $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ – натуральные числа. Общее число клеток мы обозначим через $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$. С каждой диаграммой Юнга λ связана тензорная операция, сопоставляющая векторному пространству V пространство, которое мы будем обозначать $\Sigma^\lambda V$. А именно, если λ содержит $r \leq \dim(V)$ строк, то $\Sigma^\lambda V$ можно определить как пространство неприводимого представления группы $\text{GL}(V)$ со старшим весом λ (дополняя, если нужно, λ нулевыми строками). В противном случае $\Sigma^\lambda V = 0$. Это пространство можно построить явно, занумеровав клетки таблицы λ , как факторпредставление естественного представления $V^{\otimes |\lambda|}$ (см. [11, гл. 8]). Как следствие, соответствие Σ^λ является ковариантным функтором от аргумента V . Кроме того, Σ^λ определяет операцию на векторных расслоениях.

Пусть S – тавтологическое векторное расслоение на $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}(k, V)$. Тогда, как показал Капранов, категория $\mathcal{D}(\mathrm{Gr})$ допускает полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}(\mathrm{Gr}) = \langle \mathcal{D}_{k(n-k)}, \mathcal{D}_{k(n-k)-1}, \dots, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_0 \rangle, \quad (3.6)$$

в котором $\mathcal{D}_i$ – подкатегория, порожденная попарно ортогональными исключительными расслоениями $\Sigma^\lambda S$, где λ пробегает такие диаграммы Юнга с не более чем k строками и не более чем $n - k$ столбцами, что $|\lambda| = i$.

Нас интересуют действия группы на грассманиане. При $1 \leq k \leq n - 1$, $k \neq n/2$, и при $k = n/2 = 1$ естественное отображение $\mathrm{PGL}(V) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}(k, V))$ является изоморфизмом, а при четном $n > 2$ и $k = n/2$ подгруппа $\mathrm{PGL}(V)$ имеет индекс 2 в $\mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}(k, V))$. Примером автоморфизма $\mathrm{Gr}(n/2, V)$, не лежащего в образе $\mathrm{PGL}(V)$, может служить отображение $U \mapsto U^\perp$, где $\perp$ обозначает ортогональное дополнение относительно невырожденной квадратичной формы на V .

Мы будем рассматривать только те действия G , которые индуцированы гомоморфизмом $G \rightarrow \mathrm{PGL}(V)$. В этом случае расслоение S и все полученные из него расслоения $\Sigma^\lambda S$ сохраняются действием группы и исключительный набор (3.6) удовлетворяет условиям теорем 2.2 и 2.11.

Пусть $(\mathcal{L}, \alpha)$ – такой коцикл на группе G , что действие G на $\mathbb{P}(V)$ поднимается до $(\mathcal{L}, \alpha)$ -представления G в пространстве V (а $\mathcal{O}(-1)$ является $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантным подпучком в $\mathcal{O} \otimes V$). Как мы видели в п. 3.1, этому коциклу отвечает расширение $\tilde{G} = G \times_{\mathrm{PGL}(V)} \mathrm{GL}(V)$ группы G . Заметим, что S является G -подрасслоением в $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}} \otimes V$, следовательно, S является $(\mathcal{L}, \alpha)$ -эквивариантным расслоением, а $\Sigma^\lambda S = (\mathcal{L}, \alpha)^{|\lambda|}$ -эквивариантным расслоением. С помощью применения теоремы 2.11 и предложения 1.9 доказывается следующая

ТЕОРЕМА 3.6. *В сделанных предположениях производная эквивариантная категория $\mathcal{D}^G(\mathrm{Gr})$ допускает полуортогональное разложение:*

$$\mathcal{D}^G(\mathrm{Gr}) = \langle \mathcal{D}'_{k(n-k)}, \mathcal{D}'_{k(n-k)-1}, \dots, \mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_0 \rangle,$$

в котором $\mathcal{D}'_i = \mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}_{(-i)}(\tilde{G}))$ – набор попарно ортогональных подкатегорий вида $\Sigma^\lambda S \otimes \mathcal{D}(\mathrm{Repr}_{(-i)}(\tilde{G}))$, где λ пробегает диаграммы Юнга из i клеток, содержащие не более k строк и не более $n - k$ столбцов.

Список литературы

1. A. Samokhin, “Some remarks on the derived categories of coherent sheaves on homogeneous spaces”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **76**:1 (2007), 122–134.
2. M. Bernardara, *A semiorthogonal decomposition for Brauer Severi schemes*, [arXiv: math.AG/0511497](https://arxiv.org/abs/math/0511497).
3. К. С. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Grad. Texts in Math., **87**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
4. А. И. Бондал, “Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 25–44; англ. пер.: A. I. Bondal, “Representation of associative algebras and coherent sheaves”, *Math. USSR-Izv.*, **34**:1 (1990), 23–42.

5. B. Keller, “Derived categories and their use”, *Handbook of algebra*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1996, 671–701.
6. М. М. Капранов, “Производная категория когерентных пучков на квадрике”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:2 (1986), 67; англ. пер.: М. М. Kapranov, “The derived category of coherent sheaves on the square”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:2 (1986), 141–142.
7. М. М. Капранов, “On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces”, *Invent. Math.*, **92**:3 (1988), 479–508.
8. Д. О. Орлов, “Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:4 (1992), 852–862; англ. пер.: D. O. Orlov, “Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **41**:1 (1993), 133–141.
9. Б. В. Карпов, Д. Ю. Ногин, “Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 3–38; англ. пер.: B. V. Karpov, D. Yu. Nogin, “Three-block exceptional collections over Del Pezzo surfaces”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 429–463.
10. М. М. Капранов, “О производной категории когерентных пучков на многообразиях Грассмана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:1 (1984), 192–202; англ. пер.: М. М. Kapranov, “On the derived category of coherent sheaves on Grassmann manifolds”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:1 (1985), 183–192.
11. У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, М., 2006; пер. с англ.: W. Fulton, *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry*, London Math. Soc. Stud. Texts, **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

А. Д. Елагин (A. D. ELAGIN)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: alexelagin@rambler.ru

Поступило в редакцию
21.02.2008