Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Равномерное распределение неделимых векторов в целочисленном пространстве, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 21–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 10:15:35

УДК 511+517.938

В. И. Арнольд

Равномерное распределение неделимых векторов в целочисленном пространстве

Вектор целочисленного пространства называется *делимым*, если он получается из какого-либо вектора этого пространства умножением на большее единицы целое число.

Равномерная распределенность множества целочисленных векторов означает, что число точек этого множества в гомотетично растянутой в N раз области n -мерного пространства становится асимптотически пропорциональным произведению объема этой области на число N^n при $N \rightarrow \infty$.

Коэффициент этой пропорциональности (плотность) оказывается для множества неделимых векторов n -мерного целочисленного пространства (где $n > 1$) равным $1/\zeta(n)$. Например, плотность множества неделимых векторов на плоскости составляет $1/\zeta(2) = 6/\pi^2 \approx 2/3$. Это открытие привело Эйлера к изобретению им дзета-функции.

Доказательство равномерной распределенности множества неделимых целочисленных векторов публикуется здесь потому, что существуют сколь угодно большие области, вовсе не содержащие неделимых векторов.

Настоящая работа показывает, что такие области имеются только вдали от начала координат, да и там редки: их распределение, тоже равномерное, имеет своеобразный автомодельно-фрактальный характер (который ожидает хотя бы эмпирически-компьютерного исследования даже в случае $n = 2$).

Ключевые слова: кристаллическая решетка, дзета-функция, тригонометрические суммы, включение/исключение, простые числа, плотность распределения, теорема Лежандра/Чебышева.

§ 1. Неделимые векторы

Рассмотрим целочисленное пространство $\mathbb{Z}^n$ размерности $n > 1$. Вектор этого пространства называется *делимым на целое число m* , если все его компоненты делятся на m , так что $x \in m\mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор называется *неделимым*, если он не делится ни на какое целое число $m > 1$.

ПРИМЕР 1. На рис. 1 показаны все неделимые векторы плоскости $\mathbb{Z}^2$ с координатами $0 < x_j \leq 100$.

Эйлер установил, что неделимые векторы имеют среди всех целочисленных векторов пространства $\mathbb{Z}^n$ плотность

$$\rho_n = \frac{1}{\zeta(n)} \quad (\text{например, } \rho_2 = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.607).$$

Это утверждение о плотности означает следующее. Рассмотрим шар $B(R)$ радиуса R , $\|x\| \leq R$, в пространстве $\mathbb{Z}^n$. Обозначим через $M \subset \mathbb{Z}^n$ множество

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-01-00388).

Рис. 1

всех неделимых векторов пространства $\mathbb{Z}^n$. Обозначим через $m(R)$ и через $b(R)$ число неделимых векторов и число всех целочисленных векторов в шаре радиуса R :

$$m(R) = |M \cap B(R)|, \quad b(R) = |\mathbb{Z}^n \cap B(R)|.$$

Тогда *плотностью* множества $M \subset \mathbb{Z}^n$ называется предел $\rho(M) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{m(R)}{b(R)}$.

§ 2. Равномерная распределенность

Целью настоящей работы является доказательство равномерной распределенности множества всех неделимых векторов в пространстве $\mathbb{Z}^n$, $n > 1$.

Смысл равномерной распределенности множества $M \subset \mathbb{Z}^n$ состоит в одинаковости плотностей распределения этого множества в разных местах пространства.

Точное определение состоит в следующем.

Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами X_j куб

$$I^n = \{X \in \mathbb{R}^n: 0 \leq X_j < 1\}.$$

Зафиксируем целое число N .

Кристаллической решеткой с шагом $1/N$ мы будем называть попавшую в куб I^n часть сжатой в N раз целочисленной решетки, $\mathbb{Z}^n/N \subset \mathbb{R}^n$. Эта кристаллическая решетка состоит из точек с координатами $X_j = n_j/N$, с целыми $n_j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Рассмотрим внутри куба I^n какую-либо область G (например, многогранник). Сосчитаем числа $m_G(N)$ попавших в G точек изучаемого множества M и $b_G(N)$ всех попавших в G точек решетки:

$$m_G(N) = |(M/N) \cap G|, \quad b_G(N) = |(\mathbb{Z}^n/N) \cap G|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $M \subset \mathbb{Z}^n$ *распределено в пространстве $\mathbb{Z}^n$ равномерно*, если для любого многогранника G предел

$$\rho_G(M) = \lim_{N \rightarrow \infty} (m_G(N)/b_G(N)) \quad (1)$$

существует, положителен и не зависит от многогранника G .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любой области G с гладкой границей предел (1) будет таким же. Его значение совпадает с плотностью ρ множества M , определенной в § 1.

§ 3. Средние значения

Определение равномерной распределенности можно переформулировать как утверждение о средних значениях функций: для равномерно распределенного множества средние значения по его точкам ведут себя асимптотически так же, как средние значения по всему пространству. Легко доказывается

ТЕОРЕМА. Если множество $M \subset \mathbb{Z}^n$ равномерно распределено, а $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, то средние арифметические значения $\hat{f}_M(N)$ этой функции по $m_{I^n}(N)$ точкам множества M/N в кубе I^n мало отличаются от средних арифметических значений $\hat{f}_{\mathbb{Z}^n}(N)$ этой функции по всем N^n точкам нашей кристаллической решетки в кубе I^n :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\hat{f}_M(N) - \hat{f}_{\mathbb{Z}^n}(N)) = 0. \quad (2)$$

Обратно, если соотношение (2) выполняется (для любой гладкой функции f), то множество M равномерно распределено в пространстве $\mathbb{Z}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Любую гладкую функцию $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно для любого $\varepsilon > 0$ “аппроксимировать” тригонометрическими многочленами $\underline{f}$ и $\bar{f}$ снизу и сверху так, что в кубе I^n будут везде выполняться неравенства

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x), \quad \int (\bar{f} - \underline{f}) dx < \varepsilon.$$

Так же можно аппроксимировать в I^n некоторые разрывные функции, например характеристические функции многогранников (или гладких областей).

Из этого замечания следует, что условие (2) достаточно проверить для гармоник Фурье

$$f(x) = e^{2\pi i(k,x)}, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

тогда оно выполняется и для всех гладких функций f .

СЛЕДСТВИЕ. Чтобы множество $M \subset \mathbb{Z}^n$ было равномерно распределенным в пространстве $\mathbb{Z}^n$, достаточно выполнения соотношений

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{x \in (M/N) \cap I^n} f(x) \right) / N^n = 0 \quad (3)$$

для гармоник с ненулевыми волновыми векторами:

$$f(x) = e^{2\pi i(k,x)}, \quad k \neq 0,$$

а для $k = 0$ предел должен быть отличен от нуля.

§ 4. Иерархия делимых точек

Наше доказательство равномерной распределенности множества M неделимых векторов пространства $\mathbb{Z}^n$ будет основано на следующем анализе дополнительного множества $\mathbb{Z}^n \setminus M$ делимых векторов.

Каждый делимый вектор делится на какое-либо простое число p , так что

$$\mathbb{Z}^n \setminus M = \bigcup_p (p\mathbb{Z}^n).$$

Введем обозначение M_p для множества $p\mathbb{Z}^n$ делящихся на (не обязательно простое) число p векторов пространства $\mathbb{Z}^n$. Обозначим через χ_p характеристическую функцию этого множества: она равна 1 в точках множества M_p и 0 во всех остальных местах.

Зафиксируем какие-либо r различных простых чисел $\{p_1, \dots, p_r\}$ и составим иерархию множеств M_P и функций χ_P следующим образом: P означает некоторое подмножество выбранного множества простых чисел, $P = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_s}\}$. Соответственно, мы определяем подрешетки

$$M_{p_i} = p_i \mathbb{Z}^n, \quad M_{p_i p_j} = p_i p_j \mathbb{Z}^n, \quad M_{p_i p_j p_h} = p_i p_j p_h \mathbb{Z}^n, \quad \dots,$$

произведение чисел $p_{i_1}, \dots, p_{i_s}$ мы будем тоже обозначать через P .

Соответствующие характеристические функции таковы: $\chi_{p_i} = 1$ в делящихся на p_i точках (и равно 0 в не делящихся), $\chi_{p_i p_j} = 1$ в точках, делящихся и на p_i , и на p_j , и т.д. Характеристическую функцию всей решетки $\mathbb{Z}^n$ мы будем обозначать через χ_1 .

ЛЕММА. Альтернированная сумма функций

$$\mu = \chi_1 - \sum_i \chi_{p_i} + \sum_{i < j} \chi_{p_i p_j} - \sum_{i < j < h} \chi_{p_i p_j p_h} + \dots \quad (4)$$

равна нулю в каждой делимой на хотя бы одно из наших простых чисел точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вектор $z \in \mathbb{Z}^n$, делящийся в точности на простые числа $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ из нашего набора. Вычислим значение $\mu(z)$.

Мы имеем $\chi_1(z) = 1$, так как $z \in \mathbb{Z}^n$. Из слагаемых первого ранга, χ_{p_i} , в точке z равны 1 ровно s штук, χ_{q_j} , а остальные такие слагаемые равны 0. Из слагаемых второго ранга, $\chi_{p_i p_j}$, в точке z равны 1 ровно C_s^2 штук, $\chi_{q_u q_v}$, а остальные слагаемые ранга 2 равны 0. И так далее, до единственного слагаемого ранга s (где $C_s^s = 1$), $\chi_{q_1 q_2 \dots q_s} = 1$.

Собирая все эти слагаемые всех рангов (от 0 до s), мы получим значение

$$\mu(z) = 1 - C_s^1 + C_s^2 - \dots \pm C_s^s = (1 - 1)^s = 0,$$

что и доказывает лемму (поскольку $s > 0$, так как по условию z делится на хотя бы одно из наших простых чисел).

§ 5. От неделимых векторов к делимым

Рассмотрим все простые числа $\{p_1, \dots, p_r\}$, не превосходящие числа N . Составим альтернированную сумму

$$\mu_N: ((\mathbb{Z}^n/N) \cap I^n) \rightarrow \mathbb{Z},$$

определив ее значение как

$$\mu_N(x) = \mu(Nx)$$

(т. е. перенеся μ с $\mathbb{Z}^n$ на $\mathbb{Z}^n/N$, отождествляя их гомотетией).

Из леммы следует, что $\mu_N(x) = 0$ во всех делимых точках, т. е. в точках $x \in ((\mathbb{Z}^n \setminus M)/N) \cap I^n$. В то же время в неделимых точках, $x \in (M/N) \cap I^n$, функция μ_N принимает значение 1, так как в этой точке в сумме (4) все слагаемые, кроме χ_1 , равны 0, а χ_1 принимает значение 1.

Итак, функция μ_N есть характеристическая функция множества $(M/N) \cap I^n$, по которому суммируются значения гармоник f в формуле (3).

Выражение (4) для функции μ доставляет аналогичное представление для перенесенной в куб I^n функции, μ_N . Этим доказана

ЛЕММА. Сумма, входящая в формулу (3),

$$\Sigma = \sum_{x \in (M/N) \cap I^n} f(x),$$

равна альтернированной сумме (6) аналогичных сумм Σ_P , в каждой из которых суммирование производится не по множеству неделимых векторов решетки, а, наоборот, по множеству делящихся на число P векторов:

$$\Sigma_P = \sum_{x \in (P\mathbb{Z}^n/N) \cap I^n} f(x), \quad (5)$$

где $P = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}$ — произведение каких либо $s = |P|$ разных простых чисел из набора $\{p_1, \dots, p_r\}$ всех не превосходящих N простых чисел:

$$\Sigma = \sum_{s=0}^r \left((-1)^s \sum_{|P|=s} (\Sigma_P) \right). \quad (6)$$

Разумеется, при равном нулю ранге s произведение P (нулевого числа сомножителей) считается равным единице.

§ 6. Вычисление тригонометрических сумм

Начнем с простейшего слагаемого формулы (6), ранга $s = 0$:

$$\Sigma_1 = \sum_{x \in (\mathbb{Z}^n/N) \cap I^n} f(x).$$

Точка x имеет декартовы координаты $x_j = n_j/N$ ($j = 1, \dots, n$), где целые числа $n_1, \dots, n_n$ принадлежат множеству $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Волновой вектор k из формулы (3) имеет целочисленные декартовы координаты, $k_j \in \mathbb{Z}$.

Входящие в тригонометрическую сумму Σ_1 слагаемые имеют, в этих обозначениях, вид

$$f(x) = e^{2\pi i \sum (k_j n_j)/N} = e^{\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_n n_n},$$

где $\lambda_j = 2\pi i k_j/N$.

Предположим, что $N > |k_j|$ (для всех $j = 1, \dots, n$) и что все k_j отличны от нуля. Тогда все $e^{\lambda_j} \neq 1$. Суммируя n геометрических прогрессий, мы находим

$$\Sigma_1 = \left(\sum_{n_1=0}^{N-1} e^{\lambda_1 n_1} \right) \dots \left(\sum_{n_n=0}^{N-1} e^{\lambda_n n_n} \right) = \frac{e^{N\lambda_1} - 1}{e^{\lambda_1} - 1} \dots \frac{e^{N\lambda_n} - 1}{e^{\lambda_n} - 1} = 0, \quad (7)$$

поскольку $N\lambda_j = 2\pi i k_j$.

Если некоторые (но не все) компоненты k_j волнового вектора k обращаются в нуль, то сумма Σ_1 равна нулю, поскольку равен нулю один из сомножителей произведения (7).

Мы вычислили сумму Σ_1 ранга 0:

$$\Sigma_1 = 0 \quad \text{при } k \neq 0.$$

Рассмотрим теперь какое-либо из слагаемых Σ_P формулы (6), где ранг $|P| = s > 0$ произволен. В этом случае в (5) суммируются значения $f(x)$ в точках x с координатами $x_j = Pn_j/N$ (где целые числа n_j принимают значения $\{0, 1, \dots\}$, меньшие числа N/P).

Соответственно, слагаемые суммы Σ_P имеют вид

$$f(x) = e^{\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_n n_n},$$

где $\lambda_j = 2\pi i P k_j/N$, $j = 1, \dots, n$.

Чтобы оценить получающуюся тригонометрическую сумму Σ_P , рассмотрим отдельно случаи больших и малых множителей P .

Если множитель P велик, то сумма окажется не слишком большой потому, что в ней будет не слишком много слагаемых.

Если же множитель P не велик (т.е. близок к значению $P = 1$), то оценку суммы сверху доставит, как и в случае $P = 1$, суммирование геометрической прогрессии, похожей на (7).

Случай 1: $P \geq N^\alpha$. Значение α будет выбрано ниже, $0 \leq \alpha \leq 1$.

В этом случае $N/P \leq N^{1-\alpha}$. Поэтому число всех точек кристалла с шагом P/N в кубе I^n (т.е. слагаемых в сумме (5)) не превосходит $N^{n(1-\alpha)}$. Каждое слагаемое $f(x)$ по модулю равно 1, так что в этом случае имеет место неравенство

$$|\Sigma_P| \leq N^{n(1-\alpha)}. \quad (8)$$

Случай 2: $P < N^\alpha$. В этом случае аргумент значения рассматриваемой комплексной гармоникой мал:

$$|\lambda_j/(2\pi i)| = |Pk_j/N| < |k_j|/N^{1-\alpha}.$$

При достаточно больших значениях N получается $|\lambda_j| \leq \pi$, $j = 1, \dots, n$, и тогда (для любого j)

$$|e^{\lambda_j} - 1| = |2 \sin(\lambda_j/(2i))| \geq |(4/\pi)(\lambda_j/2)| = 4|k_j|(P/N). \quad (9)$$

Обозначим через $N'(N, P)$ наименьшее целое число, превосходящее все целые числа, меньшие числа N/P (т. е. превосходящее все допустимые значения параметров n_j).

Тогда $|N' - N/P| \leq 1$, поэтому число $\lambda_j N' = 2\pi i k_j N'(P/N)$ близко к числу $2\pi i k_j$:

$$|\lambda_j N' - 2\pi i k_j| \leq 2\pi |k_j|(P/N),$$

и выполняются все n неравенств ($j = 1, \dots, n$):

$$|e^{\lambda_j N'} - 1| \leq 2\pi |k_j|(P/N). \quad (10)$$

Суммируя геометрическую прогрессию Σ_P , мы получим, аналогично формуле (7), явную формулу

$$\Sigma_P = \frac{e^{N'\lambda_1} - 1}{e^{\lambda_1} - 1} \cdots \frac{e^{N'\lambda_n} - 1}{e^{\lambda_n} - 1}.$$

Из доказанных неравенств (9) и (10) вытекает поэтому при $k_1 \cdots k_n \neq 0$ оценка суммы Σ_P не зависящей от чисел P и N постоянной C :

$$|\Sigma_P| \leq (2\pi/4)^n = C. \quad (11)$$

Если некоторые компоненты k_j волнового вектора k равны нулю, то соответствующая геометрическая прогрессия состоит из единиц, поэтому соответствующий сомножитель произведения Σ_P равен числу этих единиц, N' .

В этом случае оценка (11) заменяется оценкой

$$|\Sigma_P| \leq C(N')^{n-1} \leq CN^{n-1}, \quad (12)$$

поскольку хотя бы одна из компонент волнового вектора k отлична от нуля.

§ 7. Оценка альтернированной суммы (5)

Из соотношений (7), (8) и (12) мы получаем

$$|\Sigma| \leq \sum_{P < N^\alpha} CN^{n-1} + \sum_{N^\alpha \leq P \leq N} N^{n(1-\alpha)}, \quad (13)$$

где суммирование происходит по всевозможным наборам $s > 0$ (различных) простых чисел $(p_1, \dots, p_s)$, а $P = p_1 \cdots p_s$ — их произведение, удовлетворяющее неравенствам формулы (13).

Обозначим число таких наборов, для которых $P \leq N$, через $\#_s(N)$. Оценим это число сверху.

При $s = 1$ вопрос решается теоремой Лежандра–Чебышева: для подходящей постоянной $C_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\#_1(N) \leq C_1 N / \ln N.$$

Обобщение этой оценки на случай $s > 1$ таково.

ТЕОРЕМА. *Имеет место неравенство*

$$\#_s(N) \leq CN(\ln N)^{s-2}, \quad (14_s)$$

где $C > 0$ – не зависящая от N и от s постоянная (значение которой доставляет приведенное ниже доказательство).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $s = 1$ неравенство проверено выше. При $s > 1$ оно получается индукцией по s . Считая верным неравенство (14_s) , выведем из него неравенство (14_{s+1}) .

Зафиксируем значение простого числа $p_{s+1} = z$. Мы должны пересчитать наборы простых чисел $(p_1, \dots, p_s; p_{s+1})$, для которых $p_1 p_2 \cdots p_{s+1} \leq N$. Поскольку значение $p_{s+1} = z$ фиксировано, то остается пересчитать наборы различных простых чисел $(p_1, \dots, p_s)$, для которых $p_1 \cdots p_s \leq N/z$.

Предположение индукции доставляет для их числа $\#_s(N/z)$ оценку сверху

$$\#_s(N/z) \leq C(N/z)(\ln(N/z))^{s-2} \leq CN(\ln N)^{s-2}/z \quad (15)$$

при $s \geq 2$ (поскольку $\ln(N/z) \leq \ln N$ и значение функции x^{s-2} растет с x).

При $s = 1$ воспользуемся неравенством $\ln(N/z) \geq (\ln N)/2$ при $z \leq \sqrt{N}$. Цепочка (15) в этом случае доставляет неравенство

$$\#_1(N/z) \leq (2CN / \ln N) / z \quad (16)$$

при $z \leq \sqrt{N}$.

Таким образом, суммируя по $\#_1(N) \leq 2CN / \ln N$ (простым) значениям z , мы получаем при $s \geq 2$ из оценки (14_s) , что

$$\#_{s+1}(N) \leq CN(\ln N)^{s-2} \sum_z (1/z).$$

Поскольку $2 \leq z \leq N$, последняя сумма не превосходит $\int_1^N \frac{dz}{z} = \ln N$, и мы получаем (при $s \geq 2$) неравенство

$$\#_{s+1}(N) \leq CN(\ln N)^{s-1}. \quad (14_{s+1})$$

В случае $\#_2$ из симметричности условия $p_1 p_2 \leq N$ видно, что поскольку либо $p_1 \leq \sqrt{N}$, либо $p_2 \leq \sqrt{N}$, то

$$\#_2(N) \leq 2 \sum_{z \leq \sqrt{N}} \#_1(N/z).$$

Теперь из оценки (16) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \#_2(N) &\leq 2 \sum_{z \leq \sqrt{N}} ((CN/\ln N)/z) \\ &\leq 2C(N/\ln N) \sum_{z \leq \sqrt{N}} (1/z) \leq 2C(N/\ln N) \ln \sqrt{N}. \end{aligned} \quad (14_2)$$

Поскольку $\ln \sqrt{N} \leq \ln N$, мы получаем неравенство (14₂) в виде

$$\#_2(N) \leq CN.$$

Формула (14_s) доказана теперь по индукции при всех $s \geq 1$:

$$(14_1) \rightarrow (14_2) \rightarrow (14_3) \rightarrow \dots$$

Теорема доказана.

§ 8. Среднее значение непостоянной гармоник по неделимым точкам

Из неравенства (13) мы получаем для тригонометрической суммы (5) следующую оценку сверху:

$$|\Sigma| \leq \sum_{s=1}^{\sigma} (CN^{n-1} \#_s(N^\alpha) + N^{n(1-\alpha)} \#_s(N)), \quad (17)$$

где σ – наибольшая длина цепочки разных простых чисел с произведением P , не превосходящим числа N .

Поскольку j -е простое число больше j , произведение σ разных простых чисел больше $\sigma!$. Поэтому наибольшая длина цепочки, σ , оценивается сверху условием

$$\sigma! \leq N, \quad \text{т. е. } (\sigma/e)^\sigma < N, \quad e^{\sigma(\ln \sigma - 1)} < N.$$

Во всяком случае $\sigma < \ln N$.

Подставляя в формулу (17) оценку сверху для σ и неравенства (14_s), мы приходим к выводу:

$$\begin{aligned} |\Sigma| &\leq \sum_{s=1}^{\ln N} (CN^{n-1+\alpha} (\ln N^\alpha)^{s-2} + N^{n(1-\alpha)} CN (\ln N)^{s-2}) \\ &\leq \tilde{C} [N^{n-1+\alpha} (\ln N)^{\sigma-1} + N^{n+1-n\alpha} (\ln N)^{\sigma-1}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Выберем теперь параметр α так, чтобы $n+1-n\alpha < n$, $n-1+\alpha < n$, т. е. $\frac{1}{n} < \alpha < 1$ (например, оптимально значение $\alpha = \frac{2}{n+1}$). Тогда оценка (18) примет вид

$$|\Sigma| \leq 2\tilde{C} N^\beta (\ln N)^{(\ln N)-1}, \quad (19)$$

где $\beta < n$ (например, выбор $\alpha = \frac{2}{n+1}$ приводит к $\beta = \frac{n^2+1}{n+1}$).

Из неравенства (19) вытекает, что предел (3) равен нулю:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Sigma}{N^n} = 0, \quad \text{поскольку } \beta < n.$$

Тем самым равномерная распределенность множества неделимых векторов доказана: предел (3) равен нулю для любой гармоник с ненулевым волновым вектором k , а для $k = 0$ этот предел отличен от нуля (а именно, он равен плотности $\rho_n = 1/\zeta(n)$ множества неделимых векторов в $\mathbb{Z}^n$ по теореме Эйлера).

В. И. АРНОЛЬД (V. I. ARNOLD)
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
21.02.2008