Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ковалевский, Ю. С. Горбань, О T -решениях вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств с L^1 -данными, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 1, 101–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:57:29

УДК 517.9

А. А. Ковалевский, Ю. С. Горбань

О T -решениях вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств с L^1 -данными

Введены понятия T -решения и сдвигового T -решения вариационного неравенства, соответствующего нелинейному вырождающемуся анизотропному эллиптическому оператору второго порядка, множеству ограничений из достаточно широкого класса и L^1 -правой части. Доказаны теоремы о существовании и единственности таких решений и описаны их свойства. Понятие T -решения связано с условием, что рассматриваемое множество ограничений содержит ограниченные функции, а для понятия сдвигового T -решения такого условия не требуется. Даны результаты о связи этих понятий, а также установлено, что в случае достаточно регулярных правых частей введенные типы решений вариационного неравенства совпадают с решением вариационного неравенства в обычном смысле.

Библиография: 49 наименований.

Ключевые слова: вырождающиеся анизотропные эллиптические вариационные неравенства, L^1 -данные, T -решение, сдвиговое T -решение, существование и единственность решений.

§ 1. Введение

Общая постановка задачи о решении эллиптического вариационного неравенства предполагает наличие трех основных объектов: оператора A , действующего из некоторого банахова пространства W в соответствующее сопряженное пространство W^* и порождающего левую часть неравенства, элемента $F \in W^*$ (“правая часть” неравенства) и непустого множества $V \subset W$. При этом сама задача состоит в нахождении элемента $u \in V$ такого, что

$$\forall v \in V \quad \langle Au, u - v \rangle \leq \langle F, u - v \rangle. \quad (1.1)$$

Известные результаты о разрешимости вариационных неравенств, приводимых к виду (1.1), можно найти, например, в монографиях [1], [2]. В соответствующих теоремах основными требованиями являются определенная монотонность и коэрцитивность оператора A , а также замкнутость и выпуклость множества V .

Пусть, например, W – соболевское пространство $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$, где $p \in (1, n)$ и Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $A: W \rightarrow W^*$ – оператор дивергентного вида со стандартными условиями роста, эллиптичности и монотонности относительно коэффициентов; $f \in L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$, где $p^* = np/(n-p)$;

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (проект № 05-1000008-7921).

V – непустое замкнутое выпуклое множество в W . Тогда, учитывая, что функция f естественным образом порождает элемент $F \in W^*$, из упомянутых абстрактных результатов получим существование функции $u \in V$ такой, что

$$\forall v \in V \quad \langle Au, u - v \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v) dx. \quad (1.2)$$

Если функция f не принадлежит $L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$, например, $f \in L^1(\Omega)$ и $f \notin L^\lambda(\Omega)$ для любого $\lambda > 1$, то правая часть неравенства (1.2), вообще говоря, утрачивает смысл. При этом исследование вопроса о разрешимости вариационного неравенства, соответствующего оператору A , множеству V и такой функции f , сталкивается с теми же проблемами, которые имеют место и в случае уравнений. Прежде всего изучение данного вопроса требует уточнения самого понятия решения вариационного неравенства и расширения множества, в котором это решение ищется.

Как известно, эффективный подход к решению проблемы о разрешимости дивергентных уравнений второго порядка с L^1 -правыми частями был предложен в [3]. В рамках этого подхода введено понятие энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1 -данными и рассмотрены более широкие, чем соответствующие энергетические соболевские пространства, классы функций, которым такие решения должны принадлежать. В связи с этим отметим ряд других близких исследований нелинейных уравнений второго порядка с L^1 -данными, мерами и ренормализованными решениями [4]–[18]. Известные нам результаты, касающиеся эллиптических вариационных неравенств с подобного рода особенностями, получены преимущественно с помощью тех же подходов и техники, которые используются и в случае уравнений. Эти результаты относятся в основном к односторонним задачам Дирихле (см., например, [19]–[32]). Такие задачи соответствуют нелинейному эллиптическому оператору A второго порядка, определенному на подходящем соболевском пространстве, и множеству V функций v из этого пространства, удовлетворяющих условию $v \geq \psi$, где ψ – заданная функция. При этом в большинстве случаев предполагается, что оператор A является невырождающимся (по пространственным переменным) и изотропным, а множество V содержит ограниченные функции.

Приведем типичный результат (см., например, [20]). Пусть $2 - 1/n < p < n$, $\alpha, \beta > 0$, $b \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $b \geq 0$ на Ω , и пусть заданы функции Каратеодори $A_i: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n A_i(x, \xi) \xi_i \geq \alpha |\xi|^p, \quad \sum_{i=1}^n |A_i(x, \xi)| \leq \beta [b(x) + |\xi|^{p-1}]$$

и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$,

$$\sum_{i=1}^n [A_i(x, \xi) - A_i(x, \xi')](\xi_i - \xi'_i) > 0.$$

Кроме того, пусть $\psi \in \dot{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $V = \{v \in \dot{W}^{1,p}(\Omega) : v \geq \psi \text{ п. в. на } \Omega\}$. Тогда если $f \in L^1(\Omega)$, то существует единственное решение u следующей задачи:

$$\begin{aligned} u &\in \dot{W}^{1,\lambda}(\Omega) \quad \forall \lambda \in \left(1, \frac{n(p-1)}{n-1}\right), \\ u &\geq \psi \quad \text{п. в. на } \Omega, \quad T_k(u) \in \dot{W}^{1,p}(\Omega) \quad \forall k > 0, \\ \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(x, \nabla u) D_i T_k(u-v) \right\} dx &\leq \int_{\Omega} f T_k(u-v) dx \quad \forall v \in V \cap L^\infty(\Omega), \quad \forall k > 0. \end{aligned}$$

Здесь T_k – стандартная срезающая функция ($T_k(s) = s$, если $|s| \leq k$, и $T_k(s) = k \operatorname{sign} s$, если $|s| > k$). Функция u , удовлетворяющая описанным требованиям, и есть решение вариационного неравенства, соответствующего оператору $A: \dot{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow (\dot{W}^{1,p}(\Omega))^*$ дивергентного вида с коэффициентами A_i , множеству ограничений V и правой части f (т. е. решение односторонней задачи Дирихле).

Разрешимость нелинейных вырождающихся изотропных вариационных неравенств с L^1 -данными и двусторонними ограничениями вида $\varphi \leq v \leq \psi$ установлена в [33], [34], причем в предположении, что само множество ограничений содержит ограниченные функции.

Насколько нам известно, вопрос о разрешимости вариационных неравенств с L^1 -данными и ограничениями, отличными от односторонних и двусторонних, другими авторами не изучался. К тому же классы операторов, рассматриваемые в известных работах по вариационным неравенствам с L^1 -данными, не являются достаточно общими с точки зрения допустимых вырождений и анизотропии. Эти обстоятельства и связанная с ними задача определения общей концепции решения вариационного неравенства, соответствующего заданным оператору, множеству ограничений из как можно более широкого класса и L^1 -правой части, послужили побудительной причиной для исследования, предлагаемого в настоящей работе.

Отметим, что результаты, полученные в настоящей статье, являются новыми для вариационных неравенств с вырождающимися операторами, поскольку объединяют две особенности: вырождение и анизотропию коэффициентов операторов, и, кроме того, относятся к более широкому классу множеств ограничений по сравнению с рассматривавшимся ранее. Ввиду последнего обстоятельства результаты статьи новы для вариационных неравенств даже с невырождающимися изотропными операторами. С другой стороны, в силу тех же особенностей они новы и для уравнений, поскольку допускают в качестве множества ограничений соответствующее весовое анизотропное пространство Соболева. Предшествующие известные нам результаты для уравнений с L^1 -данными или мерами в качестве правых частей, кроме невырождающегося и изотропного случая, как в [3]–[5], относятся или к невырождающимся анизотропным (см., например, [6]), или вырождающимся изотропным (см., например, [35]) уравнениям. Здесь речь идет об уравнениях второго порядка. Исследования нелиней-

ных уравнений высшего порядка с L^1 -данными, в том числе вырождающихся анизотропных, можно найти в [36]–[40].

Структура настоящей работы следующая. В § 2 введены соболевское пространство $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и более широкое множество $\dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$, характеризующиеся наборами показателей $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ и весовых функций $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, и относительно их элементов установлены результаты, полезные в последующих рассмотрениях. Заметим, что множество $\dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ состоит из функций, суперпозиции которых со стандартными срезками T_k принадлежат $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Это множество есть обобщение в весовом и анизотропном случае соответствующего класса функций, введенного в [3].

В § 3 введен нелинейный вырождающийся анизотропный эллиптический оператор $\mathcal{A}: \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \rightarrow (\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega))^*$ дивергентного вида с коэффициентами $a_i: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющими следующему условию коэрцитивности: для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq c_2 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} - g_2(x),$$

где $c_2 > 0$ и $g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_2 \geq 0$ на Ω , и соответствующим условиям роста и строгой монотонности. Здесь также введено замкнутое выпуклое множество $V \subset \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, содержащее ограниченные функции и обладающее тем свойством, что для любых $u, v \in V$ и $k > 0$ имеет место включение $u - T_k(u - v) \in V$. Заметим, что множества, определяемые односторонними ограничениями вида $v \geq \psi$ или $v \leq \psi$ и двусторонними ограничениями вида $\varphi \leq v \leq \psi$, обладают таким свойством. Однако этим примеры множеств с указанным свойством далеко не исчерпываются (см. § 8). Для функции $f \in L^1(\Omega)$ в параграфе определено понятие T -решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Таким решением называется функция $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющая для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$ включению $v - T_k(v - u) \in V$ и неравенству

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx,$$

где $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В § 3 установлено, что при достаточной регулярности функций $1/\nu_i$ и f T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, совпадает с решением вариационного неравенства для той же тройки в обычном смысле и, в частности, принадлежит множеству V (см. предложение 3.1).

В § 4 доказано, что для любой функции $f \in L^1(\Omega)$ T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, существует (теорема 4.1). Единственность такого решения установлена в § 5 (теорема 5.1). Отметим, что, доказывая основные результаты из § 4, 5, мы придерживались подхода, предложенного в [3]. Кроме того, были использованы некоторые идеи из работы [36].

В § 6 описаны свойства суммируемости T -решений рассматриваемых вариационных неравенств. Эти свойства аналогичны соответствующим свойствам энтропийных решений задачи Дирихле для невырождающихся изотропных эллиптических уравнений второго порядка [3]. Отметим, что в следствии 6.3

даны достаточные условия для чисел q_i и показателей суммируемости функций $1/\nu_i$, обеспечивающие принадлежность T -решений исследуемых вариационных неравенств с L^1 -правыми частями пространству $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$. В невырождающемся изотропном случае ($q_i = q_1$, $\nu_i = 1$, $i = 1, \dots, n$) полученные условия сводятся к требованию $q_1 > 2 - 1/n$, гарантирующему, как известно, существование слабых решений (т.е. решений из $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$) невырождающихся изотропных уравнений второго порядка с L^1 -правыми частями (см., например, [4]), причем при нарушении последнего требования такие решения существуют не для всякой правой части из $L^1(\Omega)$ (см. [3]). В общем случае из упомянутых условий следует неравенство

$$q_- > \frac{(n-1)\bar{q}}{n(\bar{q}-1)}, \quad (1.3)$$

где q_- – минимальное из чисел q_i , а $\bar{q}$ – их среднее гармоническое. Неравенство (1.3), в свою очередь, влечет оценку $q_- > n^2/(n^2 - n + 1)$ и определенное ограничение для зазора между минимальным и максимальным из чисел q_i . Легко видеть, что в изотропном случае ($q_i = q_1$, $i = 1, \dots, n$) неравенство (1.3) эквивалентно неравенству $q_1 > 2 - 1/n$. Отметим, что требование (1.3) предполагалось выполненным в [6] при доказательстве существования слабых решений из $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$ невырождающихся анизотропных уравнений второго порядка с мерами в качестве правых частей.

Заметим также, что из условий следствия 6.3 и теоремы 4.1 вытекает существование для рассматриваемых вариационных неравенств T -решений, принадлежащих пространству $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$. Подобный результат, но при более сильных предположениях относительно чисел q_i , весовых функций ν_i и множества V , ранее был получен в работе [41]. Кроме того, заметим, что из теорем 4.1, 5.1 и предложения 6.1 следует приведенный выше результат из статьи [20].

В § 7 предположение о том, что множество V содержит ограниченные функции, снимается. В этом случае для функции $f \in L^1(\Omega)$ и элемента $\psi \in V$ введено понятие ψ -сдвигового T -решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Таким решением называется функция $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая для любых $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$ включению $v + \psi + T_k(u - v - \psi) \in V$ и неравенству

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx,$$

где $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Заметим (см. предложение 7.8), что если $f \in L^1(\Omega)$, $\psi \in V$ и $u - \psi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, то для любой функции $\varphi \in V$ имеем $u - \varphi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. На основе результатов из § 4, 5 установлено, что если $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$, то ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, существует (теорема 7.1), а если $f \in L^1(\Omega)$, $\psi, \varphi \in V$ и $\psi - \varphi \in L^\infty(\Omega)$, то ψ -сдвиговое и φ -сдвиговое T -решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, совпадают почти всюду на Ω (теорема 7.3). Кроме того, в § 7 показано, что понятие сдвигового T -решения вариационного неравенства является естественным расширением в случае L^1 -правых частей обычного

понятия решения вариационного неравенства, и если $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \emptyset$, $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$, то ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, совпадает с T -решением того же неравенства.

Наконец, в § 8 рассмотрены примеры выполнения основных предположений работы, а также условий, относящихся к отдельным ее результатам. Здесь же подробно изложен пример, демонстрирующий, что нарушение условия (1.3) приводит к нарушению свойства принадлежности T -решения соответствующего вариационного неравенства пространству $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$.

Результаты работы представлены в препринте [42] и анонсированы в заметке [43].

§ 2. Функциональные пространства и множества

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $q_i \in (1, n)$.

Положим $q = \{q_i : i = 1, \dots, n\}$, $q_- = \min\{q_i : i = 1, \dots, n\}$, $q_+ = \max\{q_i : i = 1, \dots, n\}$,

$$\bar{q} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} \right)^{-1}, \quad \hat{q} = \frac{n(\bar{q} - 1)}{(n-1)\bar{q}}.$$

Пусть ν_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, – неотрицательные функции на Ω такие, что $\nu_i > 0$ п. в. на Ω ,

$$\nu_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu_i} \right)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega). \quad (2.1)$$

Положим $\nu = \{\nu_i : i = 1, \dots, n\}$. Через $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^1(\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$ и $\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega)$.

Пусть $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ – отображение $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ в $\mathbb{R}$ такое, что для любой функции $u \in W^{1,q}(\nu, \Omega)$

$$\|u\|_{1,q,\nu} = \int_{\Omega} |u| dx + \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}.$$

Отображение $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ есть норма в $W^{1,q}(\nu, \Omega)$, и ввиду второго из включений (2.1) множество $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ есть банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. Кроме того, в силу первого из включений (2.1) имеем $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Через $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{1,q}(\nu, \Omega)$. Очевидно, что множество $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ является банаховым пространством относительно нормы, индуцированной нормой $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$.

Положим

$$c_{q,\nu} = 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\nu_i} \right)^{1/(q_i-1)} dx \right)^{(q_i-1)/q_i}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(i) $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \dot{W}^{1,1}(\Omega)$ и для любой функции $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq c_{q,\nu} \|u\|_{1,q,\nu};$$

(ii) если $u_j \rightarrow u$ слабо в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то $u_j \rightarrow u$ сильно в $L^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in W^{1,q}(\nu, \Omega)$. Имеем $u \in L^1(\Omega)$. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$. Используя неравенство Юнга, получаем $|D_i u| \leq (1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} + \nu_i |D_i u|^{q_i}$ п.в. на Ω . Отсюда, учитывая второе из включений (2.1) и суммируемость функции $\nu_i |D_i u|^{q_i}$ на Ω , выводим, что $D_i u \in L^1(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Кроме того, используя неравенство Гёльдера, устанавливаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} &= \int_{\Omega} |u| dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\nu_i} \right)^{1/q_i} \nu_i^{1/q_i} |D_i u| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u| dx + \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\nu_i} \right)^{1/(q_i-1)} dx \right)^{(q_i-1)/q_i} \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/q_i} \\ &\leq c_{q,\nu} \|u\|_{1,q,\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения (i). Из этого утверждения и компактности вложения $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$ следует справедливость утверждения (ii). Предложение доказано.

Напомним (см., например, [44]), что $\dot{W}^{1,1}(\Omega) \subset L^{n/(n-1)}(\Omega)$ и существует положительная постоянная $\bar{c}$, зависящая только от n , такая, что для любой функции $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq \bar{c} \int_{\Omega} |\nabla u| dx. \quad (2.2)$$

Отсюда и из утверждения (i) предложения 2.1 вытекает, что $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset L^{n/(n-1)}(\Omega)$ и для любой функции $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ справедливо неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq \bar{c} c_{q,\nu} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}. \quad (2.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пространство $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ рефлексивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в [42]. Отметим, что в нем использована одна идея, применяемая в доказательстве теоремы 5.13 из [45, гл. 1].

Далее, пусть T_k – функция на $\mathbb{R}$ для любого $k > 0$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Аналогично известным результатам для невесовых соболевских пространств (см., например, [2, гл. 2]) имеем: если $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $k > 0$, то $T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (2.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $u, v \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $w_k = v + T_k(u - v)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $w_k \rightarrow u$ сильно в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на использование теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и (2.4).

Через $\dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ имеем $T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Ясно, что

$$\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (2.5)$$

Для любых $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим $k(u, x) = \min\{l \in \mathbb{N}: |u(x)| \leq l\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\delta_i u$ — функция на Ω такая, что $\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)(x)$ для любого $x \in \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Если $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то δu — отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что $(\delta u(x))_i = \delta_i u(x)$ для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \dots, n\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любого $k > 0$ имеем $D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}}$ п. в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично изложенному в [46] доказательству для невесового случая (см. также [37]).

Из (2.4), (2.5) и предложения 2.4 вытекает, что если $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п. в. на Ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $v \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда $u - v \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $k > 0$ имеем

$$D_i T_k(u - v) = \delta_i u - D_i v \quad \text{п. в. на } \{|u - v| < k\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [42], где используются утверждение (ii) предложения 2.1, предложения 2.2, 2.4 и (2.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Тогда $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i u = \delta_i u$ п. в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [42], где используются утверждение (i) предложения 2.1, предложение 2.4 и (2.2).

Далее, приведем один полезный результат, являющийся основой некоторых теорем вложения для анизотропных соболевских пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $t_i \geq 1$, причем $\sum_{i=1}^n (1/t_i) > 1$. Пусть $t_* = n(\sum_{i=1}^n (1/t_i) - 1)^{-1}$. Тогда для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\|u\|_{L^{t_*}(\Omega)} \leq \tilde{c} \prod_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^{t_i}(\Omega)}^{1/n},$$

где $\tilde{c}$ – положительная постоянная, зависящая только от n и t_i , $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из [47, теорема 1.2].

Приведем следствие из предложения 2.7 для пространства $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Для любого $m \in \mathbb{R}^n$ такого, что $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, положим

$$p_m = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1 + m_i}{m_i q_i} - 1 \right)^{-1}. \quad (2.6)$$

Заметим, что если $m \in \mathbb{R}^n$ и $m_i \geq 1/(q_i - 1)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, то $p_m > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$ и выполняется условие: для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $m_i \geq 1/(q_i - 1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Тогда $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset L^{p_m}(\Omega)$ и существует положительная постоянная c , зависящая только от n , q , m и $\|1/\nu_i\|_{L^{m_i}(\Omega)}$, $i = 1, \dots, n$, такая, что для любой функции $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ справедливо неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p_m} dx \right)^{1/p_m} \leq c \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/(nq_i)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [42].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Существует положительная постоянная c_0 , зависящая только от n , q и $\|1/\nu_i\|_{L^{1/(q_i-1)}(\Omega)}$, $i = 1, \dots, n$, такая, что для любой функции $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ имеем

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq c_0 \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/(nq_i)}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из второго из включений (2.1) и предложения 2.8.

Заметим, что из (2.7) и неравенства Юнга вытекает неравенство вида (2.3).

§ 3. Понятие Т-решения вариационных неравенств

Пусть $c_1, c_2 > 0$, $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \geq 0$ на Ω , и пусть a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Будем предполагать, что

для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\nu_i} \right)^{1/(q_i-1)} (x) |a_i(x, \xi)|^{q_i/(q_i-1)} \leq c_1 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} + g_1(x), \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq c_2 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} - g_2(x). \quad (3.2)$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что в силу (3.1) для любых $u, v \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $a_i(x, \nabla u) D_i v$ суммируема на Ω .

Пусть $\mathcal{A}$ – оператор из $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ в $(\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i v \right\} dx.$$

Пусть V – замкнутое выпуклое множество в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$V \cap L^\infty(\Omega) \neq \emptyset, \quad (3.4)$$

$$\text{если } u, v \in V, \quad k > 0, \quad \text{то } u - T_k(u - v) \in V. \quad (3.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$. T -решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, будем называть функцию $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такую, что:

- (i) для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$ имеем $v - T_k(v - u) \in V$;
- (ii) если $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$ и выполняется условие:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad m_i \geq \frac{1}{q_i - 1}, \quad \frac{1}{\nu_i} \in L^{m_i}(\Omega). \quad (3.6)$$

Пусть $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. Тогда u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u \in V$ и для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{A}u, u - v \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v) dx. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in V$ и для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство (3.7). Очевидно, что $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$, и ввиду (3.5) выполняется условие (i) определения 3.1. Пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Согласно (3.5) имеем $u - T_k(u - v) \in V$. Тогда в силу (3.7) получаем

$$\langle \mathcal{A}u, T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (3.8)$$

Но ввиду (2.4) имеем $\langle \mathcal{A}u, T_k(u - v) \rangle = \langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle$. Отсюда и из неравенства (3.8) вытекает, что выполняется условие (ii) определения 3.1. Таким образом, $u - T$ -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

Пусть теперь $u - T$ -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Значит, $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$, и выполняются условия (i), (ii) определения 3.1.

Пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$ и положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу условия (ii) определения 3.1 имеем

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (3.9)$$

В силу предложения 2.5 верно включение $T_k(u - v) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда, учитывая условие (3.6), из предложения 2.8 и неравенства Юнга выводим, что

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(u - v)|^{p_m} dx \right)^{1/p_m} \leq c \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(u - v)|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}. \quad (3.10)$$

Положим

$$I_k = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-v|<k\}} \nu_i |D_i T_{k_1}(u)|^{q_i} dx,$$

и пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Используя предложения 2.4, 2.5 и неравенство Юнга, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(u - v)|^{q_i} dx \right)^{1/q_i} &\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{\{|u-v|<k\}} \nu_i |D_i T_{k_1}(u)|^{q_i} dx \right)^{1/q_i} + \|v\|_{1,q,\nu} \\ &\leq \varepsilon I_k + n\varepsilon^{-1/(q-1)} + \|v\|_{1,q,\nu}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.9)–(3.11) и неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle \leq c \|f\|_{L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)} \{ \varepsilon I_k + n\varepsilon^{-1/(q-1)} + \|v\|_{1,q,\nu} \}. \quad (3.12)$$

Далее, положим

$$J_k = \int_{\{|u-v|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla T_{k_1}(u))| |D_i v| \right\} dx.$$

Используя предложения 2.4, 2.5 и неравенство (3.2), получаем

$$c_2 I_k \leq \langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle + J_k + \|g_2\|_{L^1(\Omega)}. \quad (3.13)$$

Кроме того, в силу (3.1) и неравенства Юнга имеем $J_k \leq \varepsilon c_1 I_k + n\varepsilon^{-q+}(1 + \|v\|_{1,q,\nu})^{q+} + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}$. Отсюда и из (3.12), (3.13), выбирая ε подходящим образом, выводим, что $I_k \leq C$, где C – положительная постоянная, зависящая только от $n, q-, c, c_1, c_2, \|g_1\|_{L^1(\Omega)}, \|g_2\|_{L^1(\Omega)}, \|f\|_{L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)}$ и $\|v\|_{1,q,\nu}$.

Тогда, учитывая предложение 2.4, получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\{|u-v|<k\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \leq C.$$

Отсюда, используя лемму Фату, заключаем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $\nu_i |\delta_i u|^{q_i}$ суммируема на Ω . Тогда, учитывая условие (3.6) и используя предложения 2.8, 2.4, а также лемму Фату, устанавливаем, что $u \in L^1(\Omega)$ и последовательность $\{T_k(u)\}$ ограничена в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Теперь, воспользовавшись предложением 2.2 и утверждением (ii) предложения 2.1, получаем, что $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда $v - T_k(v - u) \rightarrow u$ сильно в $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ в силу предложения 2.3. Кроме того, ввиду условия (i) определения 3.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $v - T_k(v - u) \in V$. Следовательно, учитывая, что множество V замкнуто в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, получаем $u \in V$. Заметим, что вследствие (2.4) и условия (ii) определения 3.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle Au, T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $T_k(u - v) \rightarrow u - v$ сильно в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и поточечно на Ω , а функция $f(u - v)$ в силу условий предложения суммируема на Ω , выводим, что

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v) dx. \quad (3.14)$$

Неравенство (3.14) доказано для произвольной функции $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Пусть теперь $v \in V$. Зафиксируем функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $v_k = \psi - T_k(\psi - v)$. Из условия (3.5) вытекает, что $\{v_k\} \subset V \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу (3.14) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle Au, u - v_k \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v_k) dx. \quad (3.15)$$

Заметим, что $v_k \rightarrow v$ сильно в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ вследствие предложения 2.3. Тогда

$$\langle Au, u - v_k \rangle \rightarrow \langle Au, u - v \rangle. \quad (3.16)$$

Ввиду поточечной сходимости $\{v_k\}$ к v , условий предложения и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем $\int_{\Omega} f(u - v_k) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(u - v) dx$. Отсюда и из (3.15), (3.16) выводим неравенство (3.14). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Предложение 3.1 показывает, что при достаточной регулярности функций $1/\nu_i$, $i = 1, \dots, n$, и f T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, совпадает с решением вариационного неравенства для той же тройки в обычном смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $f \in L^n(\Omega)$. Тогда u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u \in V$ и для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство (3.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = 1/(q_i - 1)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда в силу второго из включений (2.1) выполняется условие (3.6) предложения 3.1. Кроме того, ввиду (2.6) имеем $p_m = n/(n - 1)$ и, следовательно, $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. Теперь из предложения 3.1 выводим требуемый результат.

§ 4. Существование T -решения

Прежде всего приведем один результат о существовании решений вариационных неравенств в обычном смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, $m_i \geq 1/(q_i - 1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$ и W – непустое замкнутое выпуклое множество в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда существует функция $u \in W$ такая, что для любой функции $v \in W$ справедливо неравенство

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v) dx.$$

Этот результат следует из неравенств (3.1)–(3.3), (2.3), предложения 2.8 и [1, гл. 2, теоремы 8.1, 8.2].

Из предложений 4.1, 3.1 вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$ и $m_i \geq 1/(q_i - 1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. Тогда существует T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, и это решение принадлежит множеству V .

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $f \in L^n(\Omega)$. Тогда существует T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, и это решение принадлежит множеству V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = 1/(q_i - 1)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда в силу второго из включений (2.1) и (2.6) выполняются условия предложения 4.2, из которого и выводим требуемый результат.

В предложении 4.2 и следствии 4.1, связанных с непосредственным применением стандартных результатов теории монотонных операторов, для утверждения о существовании T -решений вариационных неравенств требуются, как видим, довольно сильные предположения относительно регулярности функций $1/\nu_i$, $i = 1, \dots, n$, и f . Однако, как показывает следующая основная теорема, эти предположения могут быть заменены на минимально возможное условие относительно суммируемости функции f , хотя при этом о существующих T -решениях, вообще говоря, нельзя сказать, что они обладают такой же регулярностью, как и решения, о которых идет речь в предложении 4.2 и следствии 4.1.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда существует T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать подход, предложенный в [3] для изучения разрешимости невырожденных (по пространственным переменным) изотропных уравнений второго порядка с L^1 -правыми частями. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Для любого $l \in \mathbb{N}$ положим $f_l = T_l(f)$. Очевидно, что $\{f_l\} \subset L^\infty(\Omega)$,

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad \|f_l\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad (4.1)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_l - f\|_{L^1(\Omega)} = 0. \quad (4.2)$$

Учитывая второе из включений (2.1), из предложения 4.1 выводим: если $l \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_l \in V$ такая, что для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{A}u_l, u_l - v \rangle \leq \int_{\Omega} f_l(u_l - v) dx. \quad (4.3)$$

Зафиксируем произвольную функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Через c_i , $i = 3, 4, \dots$, обозначим положительные постоянные, зависящие только от n , q , c_1 , c_2 , $\|g_1\|_{L^1(\Omega)}$, $\|g_2\|_{L^1(\Omega)}$, $\|f\|_{L^1(\Omega)}$, $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|\psi\|_{1,q,\nu}$ и $\|1/\nu_i\|_{L^1/(q_i-1)(\Omega)}$, $i = 1, \dots, n$.

Покажем, что для любых $k \geq 1$ и $l \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\int_{\{|u_l| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i u_l|^{q_i} \right\} dx \leq c_3 k, \quad (4.4)$$

$$\text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq c_4 k^{-\hat{q}}. \quad (4.5)$$

Действительно, пусть $k \geq 1$ и $l \in \mathbb{N}$. Положим $k_1 = k + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Вследствие условия (3.5) имеем $u_l - T_{k_1}(u_l - \psi) \in V$. Тогда в силу (4.3) и (4.1) получаем

$$\langle \mathcal{A}u_l, T_{k_1}(u_l - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f_l T_{k_1}(u_l - \psi) dx \leq c_5 k. \quad (4.6)$$

Положим

$$I_l = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u_l - \psi| < k_1\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx, \quad J_l = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u_l - \psi| < k_1\}} |a_i(x, \nabla u_l)| |D_i \psi| dx.$$

Используя (2.4) и (3.2), устанавливаем, что

$$\langle \mathcal{A}u_l, T_{k_1}(u_l - \psi) \rangle \geq c_2 I_l - J_l - \|g_2\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.7)$$

Кроме того, с помощью (3.1) и неравенства Юнга находим, что

$$J_l \leq \frac{c_2}{2} I_l + 2^n n \left(1 + \frac{c_1}{c_2}\right)^n (1 + \|\psi\|_{1,q,\nu})^n + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из (4.6), (4.7) вытекает, что $I_l \leq c_3 k$. Теперь, учитывая, что почти все точки множества $\{|u_l| < k\}$ принадлежат множеству $\{|u_l - \psi| < k_1\}$, получаем неравенство (4.4).

Далее, имеем $|T_k(u_l)| = k$ на $\{|u_l| \geq k\}$ и, следовательно,

$$k^{n/(n-1)} \text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u_l)|^{n/(n-1)} dx. \quad (4.8)$$

Используя предложение 2.9 и соотношения (2.4), (4.4), получаем

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(u_l)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq c_0 \prod_{i=1}^n \left(\int_{\{|u_l| < k\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx \right)^{1/(nq_i)} \leq c_0 (c_3 k)^{1/\bar{q}}.$$

Отсюда и из (4.8) вытекает неравенство (4.5).

Покажем теперь, что для любых $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \geq 1$ и $l \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| \geq k\} \leq c_6 k^{-q_i \hat{q}/(1+\hat{q})}. \quad (4.9)$$

Действительно, пусть $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \geq 1$ и $l \in \mathbb{N}$. Положим $k_* = k^{q_i/(1+\hat{q})}$, $G = \{|u_l| < k_*, \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| \geq k\}$. Имеем

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| \geq k\} \leq \text{meas}\{|u_l| \geq k_*\} + \text{meas } G. \quad (4.10)$$

В силу (4.5) получаем

$$\text{meas}\{|u_l| \geq k_*\} \leq c_4 k_*^{-\hat{q}}. \quad (4.11)$$

Кроме того, в силу определения множества G и неравенства (4.4) имеем

$$k^{q_i} \text{meas } G \leq \int_{\{|u_l| < k_*\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx \leq c_3 k_*.$$

Отсюда и из (4.10), (4.11) вытекает неравенство (4.9).

Шаг 2. Вследствие (2.4) и (4.4) для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{T_k(u_l)\}$ ограничена в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду рефлексивности пространства $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ существуют возрастающая последовательность $\{l_h\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{z_k\} \subset \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u_{l_h}) \rightarrow z_k$ слабо в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Учитывая это, без ограничения общности можем считать, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad T_k(u_l) \rightarrow z_k \quad \text{слабо в } \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (4.12)$$

Шаг 3. Покажем, что последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна по мере.

Действительно, зафиксируем $t > 0$, и пусть $k \geq 1$, $l, j \in \mathbb{N}$. Положим $G' = \{|u_l| < k, |u_j| < k, |u_l - u_j| \geq t\}$. Имеем

$$\text{meas}\{|u_l - u_j| \geq t\} \leq \text{meas}\{|u_l| \geq k\} + \text{meas}\{|u_j| \geq k\} + \text{meas } G'. \quad (4.13)$$

Поскольку $t \leq |T_k(u_l) - T_k(u_j)|$ на G' , имеем $t \text{meas } G' \leq \int_{\Omega} |T_k(u_l) - T_k(u_j)| dx$. Отсюда и из неравенств (4.5) и (4.13) вытекает, что для любых $k \geq 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u_l - u_j| \geq t\} \leq 2c_4 k^{-\hat{q}} + t^{-1} \int_{\Omega} |T_k(u_l) - T_k(u_j)| dx. \quad (4.14)$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$2c_4 k^{-\hat{q}} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.15)$$

Ввиду (4.12) и утверждения (ii) предложения 2.1 имеем $T_k(u_l) \rightarrow z_k$ сильно в $L^1(\Omega)$ и, следовательно, существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geq N$, справедливо неравенство $\int_{\Omega} |T_k(u_l) - T_k(u_j)| dx \leq \varepsilon t/2$. Отсюда и из (4.14) и (4.15) выводим, что $\text{meas}\{|u_l - u_j| \geq t\} \leq \varepsilon$ для любых $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geq N$. Значит, последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна по мере.

Шаг 4. Покажем теперь, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_l\}$ фундаментальна по мере. Для любых $t > 0$ и $l, j \in \mathbb{N}$ положим

$$N_t(l, j) = \text{meas} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l - D_i u_j| \geq t \right\}.$$

Кроме того, для любых $t > 0$, $h, k \geq 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$ положим

$$E_{t,h,k}(l, j) = \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l - D_i u_j| \geq t, \quad \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| \leq h, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i} |D_i u_j| \leq h, \quad |u_l - u_j| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Используя (4.9), находим, что для любых $t > 0$, $h \geq n$, $k \geq 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$

$$N_t(l, j) \leq 2c_6 n^{n+1} h^{-q-\hat{q}/(1+\hat{q})} + \text{meas} \left\{ |u_l - u_j| \geq \frac{1}{k} \right\} + \text{meas } E_{t,h,k}(l, j). \quad (4.16)$$

Теперь получим одну оценку для некоторых интегралов, связанных с множествами $E_{t,h,k}(l, j)$. Для этого введем ряд вспомогательных функций и множеств.

Пусть для произвольного $x \in \Omega$ функция Φ_x на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ является такой, что для любой пары $(\xi, \xi') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\Phi_x(\xi, \xi') = \sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \xi')] (\xi_i - \xi'_i).$$

Поскольку a_i , $i = 1, \dots, n$, — функции Каратеодори и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство (3.3), существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что:

- (i) для любого $x \in \Omega \setminus E$ функция Φ_x непрерывна на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;
- (ii) для любых $x \in \Omega \setminus E$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, имеем $\Phi_x(\xi, \xi') > 0$.

Положим для любых $t > 0$, $h > t$ и $x \in \Omega$

$$G_{t,h}(x) = \left\{ (\xi, \xi') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x) |\xi_i| \leq h, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x) |\xi'_i| \leq h, \quad \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x) |\xi_i - \xi'_i| \geq t \right\}.$$

Поскольку $\nu_i > 0$ п. в. на Ω , $i = 1, \dots, n$, существует множество $\tilde{E} \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любых $t > 0$, $h > t$ и $x \in \Omega \setminus \tilde{E}$ множество $G_{t,h}(x)$ непустое.

Пусть для любых $t > 0$ и $h > t$ функция $\mu_{t,h}$ на Ω является такой, что

$$\mu_{t,h}(x) = \begin{cases} \min_{G_{t,h}(x)} \Phi_x, & \text{если } x \in \Omega \setminus (E \cup \tilde{E}), \\ 0, & \text{если } x \in E \cup \tilde{E}. \end{cases}$$

Для любых $t > 0$ и $h > t$ имеем $\mu_{t,h} > 0$ п. в. на Ω и $\mu_{t,h} \in L^1(\Omega)$.

Пусть $t > 0$, $h \geq t + 1$, $k \geq 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $x \in E_{t,h,k}(l, j) \setminus (E \cup \tilde{E})$ и положим $\xi = \nabla u_l(x)$, $\xi' = \nabla u_j(x)$. Имеем $(\xi, \xi') \in G_{t,h}(x)$ и, следовательно, $\mu_{t,h}(x) \leq \Phi_x(\xi, \xi')$. Отсюда и из определения функции Φ_x вытекает, что

$$\mu_{t,h}(x) \leq \sum_{i=1}^n [a_i(x, \nabla u_l(x)) - a_i(x, \nabla u_j(x))] (D_i u_l(x) - D_i u_j(x)).$$

Тогда, учитывая (3.3) и (2.4), получаем

$$\int_{E_{t,h,k}(l,j)} \mu_{t,h} dx \leq \langle \mathcal{A}u_l, T_{1/k}(u_l - u_j) \rangle - \langle \mathcal{A}u_j, T_{1/k}(u_l - u_j) \rangle. \quad (4.17)$$

Поскольку $u_l, u_j \in V$, в силу (3.5) имеем $u_l - T_{1/k}(u_l - u_j) \in V$, $u_j - T_{1/k}(u_j - u_l) \in V$. Отсюда и из (4.3) следует, что

$$\langle \mathcal{A}u_l, T_{1/k}(u_l - u_j) \rangle \leq \int_{\Omega} f_l T_{1/k}(u_l - u_j) dx, \quad (4.18)$$

$$\langle \mathcal{A}u_j, T_{1/k}(u_j - u_l) \rangle \leq \int_{\Omega} f_j T_{1/k}(u_j - u_l) dx. \quad (4.19)$$

Из (4.17)–(4.19) выводим, что для любых $t > 0$, $h \geq t + 1$, $k \geq 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\int_{E_{t,h,k}(l,j)} \mu_{t,h} dx \leq \frac{1}{k} \int_{\Omega} |f_l - f_j| dx. \quad (4.20)$$

Далее, поскольку последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна по мере, существует возрастающая последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geq n_k$, имеем

$$\text{meas} \left\{ |u_l - u_j| \geq \frac{1}{k} \right\} \leq \frac{1}{k}. \quad (4.21)$$

Пусть теперь $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $h \geq t + n$ такое, что

$$2c_6 n^{n+1} h^{-q-\hat{q}/(1+\hat{q})} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4.22)$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $\alpha_k = \sup_{l,j \geq n_k} \text{meas } E_{t,h,k}(l, j)$. Покажем, что $\alpha_k \rightarrow 0$. Предположим, что это не так. Тогда существуют $\tau > 0$, возрастающая последовательность $\{k_s\} \subset \mathbb{N}$ и последовательности $\{l_s\}, \{j_s\} \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $l_s, j_s \geq n_{k_s}$ и

$$\text{meas } E_{t,h,k_s}(l_s, j_s) \geq \tau. \quad (4.23)$$

Положим $G_s = E_{t,h,k_s}(l_s, j_s)$ для любого $s \in \mathbb{N}$. В силу (4.20) и (4.1) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\int_{G_s} \mu_{t,h} dx \leq (2/k_s) \|f\|_{L^1(\Omega)}$ и, следовательно, $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{G_s} \mu_{t,h} dx = 0$. Отсюда, учитывая, что $\mu_{t,h} \in L^1(\Omega)$ и $\mu_{t,h} > 0$ п.в. на Ω , выводим, что $\text{meas } G_s \rightarrow 0$. Однако это противоречит (4.23). Полученное противоречие доказывает, что $\alpha_k \rightarrow 0$.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \alpha_k \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.24)$$

и пусть $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geq n_k$. Тогда из (4.16), (4.21), (4.22) и (4.24) вытекает, что $N_t(l, j) \leq \varepsilon$.

Полученный результат позволяет заключить, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_l\}$ фундаментальна по мере.

Отметим, что на проведенном шаге доказательства теоремы использовались некоторые идеи из [36, § 7].

Шаг 5. В силу результатов, полученных на шагах 3, 4 доказательства, и теоремы Ф. Рисса существуют измеримые функции $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $v^{(i)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, такие, что последовательность $\{u_l\}$ сходится к u по мере и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_l\}$ сходится к $v^{(i)}$ по мере. Тогда, как известно, из рассматриваемых последовательностей можно извлечь подпоследовательности, сходящиеся к соответствующим функциям почти всюду на Ω . Учитывая это, без ограничения общности можем считать, что

$$u_l \rightarrow u \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad (4.25)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \nu_i^{1/q_i} D_i u_l \rightarrow v^{(i)} \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (4.26)$$

Из (4.25), (4.12) и утверждения (ii) предложения 2.1 вытекает, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega), \quad (4.27)$$

$$T_k(u_l) \rightarrow T_k(u) \quad \text{слабо в } \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (4.28)$$

Покажем, что $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Действительно, пусть $k > 0$. Возьмем $h \in \mathbb{N}$ такое, что $h > k$. В силу (4.27) имеем $T_h(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду (2.5) получаем $T_k(T_h(u)) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда и из равенства $T_k(u) = T_k(T_h(u))$ следует, что $T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и, значит, $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Шаг 6. Покажем, что

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad D_i u_l \rightarrow \delta_i u \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (4.29)$$

Действительно, пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. В силу (4.25) существует множество $E' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E' \quad u_l(x) \rightarrow u(x), \quad (4.30)$$

а в силу (4.26) существует множество $E'' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E'' \quad \nu_i^{1/q_i}(x) D_i u_l(x) \rightarrow v^{(i)}(x). \quad (4.31)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Вследствие (2.4) имеем: если $l \in \mathbb{N}$, то существует множество $E^{(l)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \{|u_l| < k\} \setminus E^{(l)} \quad D_i T_k(u_l)(x) = D_i u_l(x). \quad (4.32)$$

Обозначим через $\widehat{E}$ объединение множеств E' , E'' и $E^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\text{meas } \widehat{E} = 0$. Пусть $x \in \{|u| < k\} \setminus \widehat{E}$. В силу (4.30) существует $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_0$, имеем $|u_l(x)| < k$. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_0$. Тогда $x \in \{|u_l| < k\} \setminus E^{(l)}$ и согласно (4.32) имеем $\nu_i^{1/q_i}(x) D_i T_k(u_l)(x) = \nu_i^{1/q_i}(x) D_i u_l(x)$. Отсюда и из (4.31) выводим, что $\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l)(x) \rightarrow v^{(i)}(x)$ и, следовательно,

$$\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) \rightarrow v^{(i)} \quad \text{п. в. на } \{|u| < k\}. \quad (4.33)$$

Кроме того, в силу (2.4) и (4.4) для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(u_l)|^{q_i} dx \leq c_3 k. \quad (4.34)$$

Используя лемму Фату, из (4.33) и (4.34) выводим, что функция $|v^{(i)}|^{q_i}$ суммируема на множестве $\{|u| < k\}$.

Далее, пусть φ — измеримая функция на Ω такая, что $|\varphi| \leq 1$ на Ω , и пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $|v^{(i)}|$ суммируема на множестве $\{|u| < k\}$, существует $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \{|u| < k\}$, $\text{meas } G \leq \varepsilon_1$, имеем

$$\int_G |v^{(i)}| dx \leq \varepsilon. \quad (4.35)$$

Кроме того, в силу (4.33) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega' \subset \{|u| < k\}$ такое, что

$$\text{meas}(\{|u| < k\} \setminus \Omega') \leq \varepsilon_1, \quad (4.36)$$

$$\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) \rightarrow v^{(i)} \quad \text{равномерно на } \Omega'. \quad (4.37)$$

Из (4.35) и (4.36) вытекает, что

$$\int_{\{|u| < k\} \setminus \Omega'} |v^{(i)}| dx \leq \varepsilon, \quad (4.38)$$

а вследствие (4.37) существует $l_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_1$, имеем

$$\int_{\Omega'} |\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) - v^{(i)}| dx \leq \varepsilon. \quad (4.39)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_1$. Используя (4.38), (4.39), неравенство Гёльдера, а также неравенства (4.36) и (4.34), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{|u| < k\}} [\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) - v^{(i)}] \varphi dx \right| &\leq 2\varepsilon + \int_{\{|u| < k\} \setminus \Omega'} \nu_i^{1/q_i} |D_i T_k(u_l)| dx \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon^{(q_i-1)/q_i} \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(u_l)|^{q_i} dx \right)^{1/q_i} \leq 2\varepsilon + \varepsilon^{(q_i-1)/q_i} (c_3 k)^{1/q_i}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ε вытекает, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\{|u| < k\}} [\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) - v^{(i)}] \varphi dx = 0. \quad (4.40)$$

С другой стороны, пусть F – функционал на $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такой, что $\langle F, v \rangle = \int_{\{|u| < k\}} \nu_i^{1/q_i} D_i v \cdot \varphi dx$ для любой функции $v \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Легко видеть, что $F \in (\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega))^*$. Тогда ввиду (4.28) имеем $\langle F, T_k(u_l) \rangle \rightarrow \langle F, T_k(u) \rangle$. Отсюда и из определения функционала F следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\{|u| < k\}} \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) \cdot \varphi dx = \int_{\{|u| < k\}} \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u) \cdot \varphi dx. \quad (4.41)$$

Из (4.40) и (4.41) выводим, что $\int_{\{|u| < k\}} [v^{(i)} - \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u)] \varphi dx = 0$. В свою очередь, из этого равенства и предложения 2.4 вытекает, что $v^{(i)} = \nu_i^{1/q_i} \delta_i u$ п. в. на $\{|u| < k\}$. Отсюда в силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ следует, что

$$v^{(i)} = \nu_i^{1/q_i} \delta_i u \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (4.42)$$

Из (4.26) и (4.42), учитывая, что $\nu_i > 0$ п. в. на Ω , получаем $D_i u_l \rightarrow \delta_i u$ п. в. на Ω . Тем самым утверждение (4.29) доказано.

В силу (4.29) и того, что $a_i, i = 1, \dots, n$, – функции Каратеодори, имеем

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad a_i(x, \nabla u_l) \rightarrow a_i(x, \delta u) \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (4.43)$$

Шаг 7. Покажем, что для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$ имеет место включение

$$v - T_k(v - u) \in V. \quad (4.44)$$

Действительно, пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$. Для любого $l \in \mathbb{N}$ положим $v_l = v - T_k(v - u_l)$. В силу условия (3.5) имеем

$$\{v_l\} \subset V. \quad (4.45)$$

Кроме того, ввиду (4.25)

$$v_l \rightarrow v - T_k(v - u) \quad \text{сильно в } L^1(\Omega). \quad (4.46)$$

Заметим также, что вследствие (2.4), (4.4) последовательность $\{v_l\}$ ограничена в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда в силу рефлексивности пространства $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ существуют возрастающая последовательность $\{l_h\} \subset \mathbb{N}$ и функция $z \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такие, что $v_{l_h} \rightarrow z$ слабо в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда, из утверждения (ii) предложения 2.1 и (4.46) вытекает, что $z = v - T_k(v - u)$ п. в. на Ω . Следовательно, $v_{l_h} \rightarrow v - T_k(v - u)$ слабо в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда, учитывая (4.45) и слабую замкнутость множества V , выводим (4.44).

Шаг 8. Пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Покажем, что

$$\langle \mathcal{A} T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (4.47)$$

Положим $H = \{|u-v| < k\}$, $H_0 = \{|u-v| = k\}$, и пусть $H_l = \{|u_l-v| < k\} \setminus H_0$, $E_l = \{|u_l-v| < k\} \cap H_0$ для любого $l \in \mathbb{N}$.

Прежде всего докажем, что для любой функции $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\int_{H_l} \varphi dx \rightarrow \int_H \varphi dx. \quad (4.48)$$

Действительно, пусть $\varphi \in L^1(\Omega)$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$H^{(j)} = \left\{ |u-v| < k - \frac{1}{j} \right\}, \quad \tilde{H}^{(j)} = \left\{ |u-v| > k + \frac{1}{j} \right\}.$$

Имеем

$$\text{meas}(H \setminus H^{(j)}) \rightarrow 0, \quad \text{meas}(\{|u-v| > k\} \setminus \tilde{H}^{(j)}) \rightarrow 0. \quad (4.49)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и (4.49) существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\int_{H \setminus H^{(j)}} |\varphi| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_{\{|u-v| > k\} \setminus \tilde{H}^{(j)}} |\varphi| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4.50)$$

Кроме того, вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега, (4.25) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega' \subset \Omega$ такое, что

$$\int_{\Omega \setminus \Omega'} |\varphi| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad (4.51)$$

$$u_l \rightarrow u \text{ равномерно на } \Omega'. \quad (4.52)$$

Ввиду (4.52) найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_0$, и $x \in \Omega'$ имеем

$$|u_l(x) - u(x)| < \frac{1}{j}. \quad (4.53)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_0$. Из (4.53) вытекает, что $(H^{(j)} \setminus H_l) \cap \Omega' = \emptyset$, $\{|u_l-v| < k\} \cap \tilde{H}^{(j)} \cap \Omega' = \emptyset$. Тогда $H \setminus H_l \subset (H \setminus H^{(j)}) \cup (\Omega \setminus \Omega')$, $H_l \setminus H \subset (\{|u-v| > k\} \setminus \tilde{H}^{(j)}) \cup (\Omega \setminus \Omega')$. Отсюда и из (4.50) и (4.51) выводим, что $\int_{H \setminus H_l} |\varphi| dx \leq \varepsilon/2$, $\int_{H_l \setminus H} |\varphi| dx \leq \varepsilon/2$. Следовательно, $|\int_{H_l} \varphi dx - \int_H \varphi dx| \leq \varepsilon$, и, значит, имеет место (4.48).

Далее, положим $\varphi_1 = \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_1+1}(u)) D_i v$, и пусть для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\psi_l = \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l) D_i u_l + g_2,$$

$$S'_l = \int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, \nabla u_l) - a_i(x, \nabla T_{k_1+1}(u))] D_i v \right\} dx,$$

$$S''_l = \int_{E_l} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v) [D_i u_l - D_i v] \right\} dx.$$

Зафиксируем произвольное $l \in \mathbb{N}$. В силу (3.5) имеем $u_l - T_k(u_l - v) \in V$. Тогда вследствие (4.3) получаем

$$\langle \mathcal{A}u_l, T_k(u_l - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f_l T_k(u_l - v) dx. \quad (4.54)$$

Используя (2.4) и (3.3), находим, что

$$\langle \mathcal{A}u_l, T_k(u_l - v) \rangle \geq \int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l) [D_i u_l - D_i v] \right\} dx + S_l''.$$

Отсюда и из (4.54) получаем

$$\int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l) D_i u_l \right\} dx \leq \int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l) D_i v \right\} dx + \int_{\Omega} f_l T_k(u_l - v) dx - S_l''.$$

Следовательно, для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{H_l} \psi_l dx \leq \int_{\Omega} f_l T_k(u_l - v) dx + \int_{H_l} (\varphi_1 + g_2) dx + S_l' - S_l''. \quad (4.55)$$

Заметим, что ввиду (4.2) и (4.25) имеет место $f_l T_k(u_l - v) \rightarrow f T_k(u - v)$ сильно в $L^1(\Omega)$, и поэтому

$$\int_{\Omega} f_l T_k(u_l - v) dx \rightarrow \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (4.56)$$

Поскольку $\varphi_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, в силу (4.48) имеем

$$\int_{H_l} (\varphi_1 + g_2) dx \rightarrow \int_H (\varphi_1 + g_2) dx. \quad (4.57)$$

Докажем, что

$$S_l' \rightarrow 0. \quad (4.58)$$

Действительно, пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега, соотношений (4.25), (4.43) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_1} \left\{ |\varphi_1| + \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i v|^{q_i} \right\} dx \leq \varepsilon^n, \quad (4.59)$$

$$u_l \rightarrow u \quad \text{равномерно на } \Omega_1, \quad (4.60)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l) D_i v \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i v \quad \text{равномерно на } \Omega_1. \quad (4.61)$$

Ввиду (4.60) найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_0$, и $x \in \Omega_1$

$$|u_l(x) - u(x)| \leq \varepsilon. \quad (4.62)$$

Кроме того, в силу (4.61) существует $l_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_1$, имеем

$$\int_{\Omega_1} \left| \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l) D_i v - \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i v \right| dx \leq \varepsilon. \quad (4.63)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geq \max(l_0, l_1)$. Поскольку $v \in L^\infty(\Omega)$, существует множество $\widehat{E} \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus \widehat{E}$ имеем $|v(x)| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Отсюда и из (4.62) вытекает, что $(H_l \cap \Omega_1) \setminus \widehat{E} \subset \{|u| < k_1 + 1\}$. Используя это включение, а также предложение 2.4 и неравенство (4.63), получаем

$$\int_{H_l \cap \Omega_1} \left| \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l) D_i v - \varphi_1 \right| dx \leq \varepsilon.$$

В силу последнего неравенства и (4.59) имеем

$$|S'_l| \leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^n \int_{H_l \setminus \Omega_1} |a_i(x, \nabla u_l)| |D_i v| dx. \quad (4.64)$$

Используя неравенство Гёльдера, (3.1), включение $H_l \setminus \widehat{E} \subset \{|u_l| < k_1\}$ и неравенства (4.4), (4.59), устанавливаем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_{H_l \setminus \Omega_1} |a_i(x, \nabla u_l)| |D_i v| dx \leq (c_1 c_3 k_1 + 1 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}) \varepsilon.$$

Отсюда и из (4.64) вытекает, что $|S'_l| \leq 2\varepsilon + n(c_1 c_3 k_1 + 1 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}) \varepsilon$. Следовательно, (4.58) справедливо.

Покажем теперь, что

$$S''_l \rightarrow 0. \quad (4.65)$$

Достаточно считать, что $\text{meas } H_0 > 0$. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $v \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу предложения 2.5 имеем включение $u - v \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду предложения 2.4 получаем

$$D_i T_k(u - v) = 0 \quad \text{п. в. на } H_0. \quad (4.66)$$

С другой стороны, для почти всех $x \in H_0$ имеем $|u(x)| < k_1 + 1$. Поэтому $T_k(u - v) = T_{k_1+1}(u) - v$ п. в. на H_0 и, следовательно, $D_i T_k(u - v) = D_i T_{k_1+1}(u) - D_i v$ п. в. на H_0 . Тогда, учитывая (4.66), получаем, что $D_i T_{k_1+1}(u) = D_i v$ п. в. на H_0 . Отсюда и из предложения 2.4 вытекает, что $\delta_i u = D_i v$ п. в. на H_0 . Полученный результат и (4.29) позволяют заключить, что $D_i u_l \rightarrow D_i v$ п. в. на H_0 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v) [D_i u_l - D_i v] \rightarrow 0 \quad \text{п. в. на } H_0. \quad (4.67)$$

Далее, положим

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla v)| |D_i v|, \quad \varphi_3 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\nu_i} \right)^{1/(q_i-1)} |a_i(x, \nabla v)|^{q_i/(q_i-1)}.$$

В силу (3.1) функции φ_2 и φ_3 суммируемы на Ω .

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега, (4.67) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega_2 \subset H_0$ такое, что

$$\int_{H_0 \setminus \Omega_2} (\varphi_2 + \varphi_3) dx \leq \varepsilon, \quad (4.68)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v) [D_i u_l - D_i v] \rightarrow 0 \quad \text{равномерно на } \Omega_2.$$

Ввиду последнего свойства найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_0$,

$$\int_{\Omega_2} \left| \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v) [D_i u_l - D_i v] \right| dx \leq \varepsilon. \quad (4.69)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_0$. Используя (4.68) и (4.69), находим, что

$$|S_l''| \leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^n \int_{E_l \setminus \Omega_2} |a_i(x, \nabla v)| |D_i u_l| dx. \quad (4.70)$$

С помощью неравенства Гёльдера и соотношений (4.68), (4.4) получаем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \int_{E_l \setminus \Omega_2} |a_i(x, \nabla v)| |D_i u_l| dx &\leq \left(\int_{E_l \setminus \Omega_2} \varphi_3 dx \right)^{(q_i-1)/q_i} \left(\int_{\{|u_l| < k_1\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx \right)^{1/q_i} \\ &\leq \varepsilon^{(q_i-1)/q_i} (c_3 k_1)^{1/q_i}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.70), учитывая произвольность ε , выводим, что (4.65) справедливо.

Далее, пусть $\chi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества H , и пусть $\chi_l: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества H_l для любого $l \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \chi_l \geq \chi \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (4.71)$$

Действительно, в силу (4.25) существует множество $E_0 \subset \Omega$ меры нуль такое, что выполнено $u_l(x) \rightarrow u(x)$ для любого $x \in \Omega \setminus E_0$. Пусть $x \in \Omega \setminus E_0$. Если $x \notin H$, то $\chi(x) = 0$, а тогда $\chi(x) \leq \chi_l(x)$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Пусть $x \in H$. Поскольку $u_l(x) \rightarrow u(x)$, найдется $l_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_1$, имеем $|u_l(x) - u(x)| < k - |u(x) - v(x)|$. Тогда, взяв произвольное $l \in \mathbb{N}$, $l \geq l_1$, получаем, что $|u_l(x) - v(x)| < k$ и, следовательно, $x \in H_l$. Поэтому $\chi_l(x) = 1 = \chi(x)$. Теперь можно заключить, что в любом случае $\chi(x) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \chi_l(x)$, а значит, (4.71) справедливо.

Из (4.71), (4.29), (4.43) и (3.2) вытекает, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\psi_l \chi_l) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u + g_2 \right) \chi \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (4.72)$$

Используя (3.2), (4.55)–(4.58), (4.65), лемму Фату и (4.72), устанавливаем, что функция $(\sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u + g_2) \chi$ суммируема на Ω и

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u + g_2 \right\} \chi dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx + \int_H (\varphi_1 + g_2) dx.$$

Отсюда, учитывая предложения 2.4 и 2.5, выводим неравенство (4.47).

Таким образом, установлено, что $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и справедливы свойства (i) и (ii) определения 3.1. Значит, u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Теорема доказана.

§ 5. Единственность T -решения

Приведем сначала два вспомогательных результата, которые будут использованы в доказательстве теоремы о единственности T -решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, $f \in L^1(\Omega)$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда существуют неотрицательные числа M_1 и M_2 такие, что для любого $k \geq 1$ справедливы неравенства

$$\int_{\{|u| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |\delta_i u|^{q_i} \right\} dx \leq M_1 k, \quad (5.1)$$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq M_2 k^{-\hat{q}}. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и положим

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{c_2} \left\{ \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^1(\Omega)} + 2^n \left(\frac{c_1}{c_2} + 1 \right)^n \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + (1 + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}) \|f\|_{L^1(\Omega)} \right\}, \\ M_2 &= (c_0 M_1^{1/\bar{q}})^{n/(n-1)}. \end{aligned}$$

Пусть $k \geq 1$. Положим $k_1 = k + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$, $k_2 = k_1 + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-\psi| < k_1\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx, \quad J = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-\psi| < k_1\}} |a_i(x, \delta u)| |D_i \psi| dx.$$

В силу п. (ii) из определения 3.1 имеем $\langle \mathcal{A} T_{k_2}(u), T_{k_1}(u - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_{k_1}(u - \psi) dx$. Отсюда, учитывая предложения 2.4 и 2.5 и используя (3.2), получаем, что

$$c_2 I \leq k_1 \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^1(\Omega)} + J.$$

В свою очередь, используя неравенство Юнга и (3.1), находим, что

$$J \leq \frac{c_2}{2} I + \frac{1}{2} \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + 2^{n-1} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right)^n \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx.$$

Из последних двух оценок выводим неравенство

$$I \leq M_1 k. \quad (5.3)$$

Далее, поскольку $|T_k(u)| = k$ на $\{|u| \geq k\}$, имеем

$$k^{n/(n-1)} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx, \quad (5.4)$$

а так как $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то в силу предложений 2.9, 2.4 и неравенства (5.3) получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} &\leq c_0 \prod_{i=1}^n \left(\int_{\{|u| < k\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \right)^{1/(nq_i)} \\ &\leq c_0 \prod_{i=1}^n \left(\int_{\{|u-\psi| < k\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \right)^{1/(nq_i)} \leq c_0 I^{1/\bar{q}} \leq c_0 (M_1 k)^{1/\bar{q}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.4) выводим неравенство (5.2). Кроме того, учитывая, что почти все точки множества $\{|u| < k\}$ содержатся во множестве $\{|u - \psi| < k_1\}$, из (5.3) получаем неравенство (5.1). Тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, и пусть $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $h \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\{h \leq |u-\psi| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |\delta_i u|^{q_i} \right\} dx &\leq \frac{2k}{c_2} \int_{\{|u-\psi| \geq h\}} |f| dx \\ &+ \frac{2^n}{c_1} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right)^n \int_{\{h \leq |u-\psi| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} + g_1 + g_2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v = \psi - T_h(\psi - u)$, $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Из определения 3.1 и предложения 2.4 следует, что

$$\int_{\{|u-v| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_1}(u)) D_i T_k(u-v) \right\} dx \leq k \int_{\{|u-\psi| \geq h\}} |f| dx. \quad (5.6)$$

Положим $G_1 = \{h \leq |u - \psi| < h + k\}$, $G_2 = \{|u - \psi| < h\}$. Заметим, что

$$\{|u - v| < k\} = G_1 \cup G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset. \quad (5.7)$$

Имеем $T_k(u - v) = T_{k_1}(u) - \psi - T_h(u - \psi)$ п. в. на G_1 , $T_k(u - v) = 0$ на G_2 . Следовательно, $D_i T_k(u - v) = D_i T_{k_1}(u) - D_i \psi$ п. в. на G_1 , $D_i T_k(u - v) = 0$ п. в. на G_2 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда и из (5.6), (5.7) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_1}(u)) D_i T_{k_1}(u) \right\} dx \\ \leq \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_1}(u)) D_i \psi \right\} dx + k \int_{\{|u-\psi| \geq h\}} |f| dx. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Обозначим через I_1 интеграл в левой части неравенства (5.8), а через I_2 – первый интеграл в правой части неравенства (5.8). В силу (3.2) имеем

$$I_1 \geq c_2 \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_{k_1}(u)|^{q_i} \right\} dx - \int_{G_1} g_2 dx.$$

Отсюда и из (5.8) следует неравенство

$$c_2 \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_{k_1}(u)|^{q_i} \right\} dx \leq k \int_{\{|u-\psi| \geq h\}} |f| dx + \int_{G_1} g_2 dx + I_2. \quad (5.9)$$

Используя (3.1) и неравенство Юнга, находим, что

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{c_2}{2} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_{k_1}(u)|^{q_i} \right\} dx + \int_{G_1} g_1 dx \\ &\quad + 2^{n-1} \left(\frac{c_1}{c_2} + 1 \right)^{n-1} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Заметим, что в силу предложения 2.4 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место $D_i T_{k_1}(u) = \delta_i u$ п. в. на G_1 . Учитывая это, из (5.9), (5.10) выводим (5.5). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u_1, u_2 – T -решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u_1 = u_2$ п. в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через c_i , $i = 3, 4, \dots$, обозначим положительные постоянные, зависящие только от n , c_1 и c_2 . Зафиксируем произвольную функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и положим

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} + g_1 + g_2 + |f|.$$

Из леммы 5.2 следует, что если $k \geq 1$ и $h \geq k + 1$, то

$$\int_{\{h-k \leq |u_j - \psi| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |\delta_i u_j|^{q_i} \right\} dx \leq c_3 k \int_{\{|u_j - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx, \quad j = 1, 2. \quad (5.11)$$

Зафиксируем произвольные $k \geq 1$ и $h \geq k + 1$. Положим

$$\begin{aligned} G &= \{|u_1 - u_2| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| < h\}, \\ G_1 &= \{|u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| < h\}, \quad G_2 = \{|u_1 - \psi| \geq h\} \cup \{|u_2 - \psi| \geq h\}, \\ v &= \psi - T_h(\psi - u_2), \quad l = k + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

В силу определения 3.1 имеем

$$\langle AT_l(u_1), T_k(u_1 - v) \rangle \leq \int_{G_1} f T_k(u_1 - u_2) dx + k \int_{G_2} |f| dx. \quad (5.12)$$

Оценим снизу левую часть этого неравенства. Введем множества

$$E' = \{|u_1 - v| < k, |u_2 - \psi| < h\}, \quad E'' = \{|u_1 - v| < k, |u_2 - \psi| \geq h\}.$$

Легко видеть, что

$$G \subset E'. \quad (5.13)$$

Кроме того, имеем

$$E' \setminus G \subset \{h \leq |u_1 - \psi| < h + k\} \cap \{h - k \leq |u_2 - \psi| < h\}, \quad (5.14)$$

$$E'' \subset \{h - k \leq |u_1 - \psi| < h + k\}. \quad (5.15)$$

Действительно, пусть $x \in E' \setminus G$. Тогда $|u_1(x) - u_2(x)| < k$, $|u_2(x) - \psi(x)| < h$, $|u_1(x) - \psi(x)| \geq h$. Следовательно, $h \leq |u_1(x) - \psi(x)| \leq |u_1(x) - u_2(x)| + |u_2(x) - \psi(x)| < k + |u_2(x) - \psi(x)| < h + k$. Отсюда вытекает, что (5.14) справедливо. Пусть теперь $x \in E''$. Значит,

$$|u_1(x) - v(x)| < k, \quad |u_2(x) - \psi(x)| \geq h. \quad (5.16)$$

В силу второго из этих неравенств и определения функции v имеем $v(x) = \psi(x) - h \operatorname{sign}(\psi(x) - u_2(x))$. Тогда, учитывая первое из неравенств (5.16), получаем

$$|u_1(x) - \psi(x)| \leq |u_1(x) - v(x)| + |v(x) - \psi(x)| < h + k,$$

$$h = |\psi(x) - v(x)| \leq |u_1(x) - \psi(x)| + |u_1(x) - v(x)| < |u_1(x) - \psi(x)| + k.$$

Следовательно, включение (5.15) справедливо.

Далее, поскольку $T_k(u_1 - v) = T_l(u_1) - T_l(u_2)$ п. в. на E' , для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$D_i T_k(u_1 - v) = D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2) \quad \text{п. в. на } E'. \quad (5.17)$$

Аналогично, $T_k(u_1 - v) = T_l(u_1) - \psi - T_h(u_2 - \psi)$ п. в. на E'' , следовательно, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$D_i T_k(u_1 - v) = D_i T_l(u_1) - D_i \psi \quad \text{п. в. на } E''. \quad (5.18)$$

Учитывая (5.17) и (5.18), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}T_l(u_1), T_k(u_1 - v) \rangle &= \int_{E'} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_l(u_1)) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx \\ &\quad + \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_l(u_1)) [D_i T_l(u_1) - D_i \psi] \right\} dx. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (5.13) и (3.2), выводим, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}T_l(u_1), T_k(u_1 - v) \rangle &\geq \int_G \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_l(u_1)) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx \\ &\quad - \int_{(E' \setminus G) \cup E''} g_2 dx - \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla T_l(u_1))| |D_i T_l(u_2)| \right\} dx \\ &\quad - \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla T_l(u_1))| |D_i \psi| \right\} dx. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Обозначим через I' и I'' соответственно третий и четвертый интегралы в правой части неравенства (5.19). Используя неравенство Юнга и (3.1), получаем

$$I' \leq c_1 \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_l(u_1)|^{q_i} \right\} dx + \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_l(u_2)|^{q_i} \right\} dx + \int_{E' \setminus G} g_1 dx, \quad (5.20)$$

$$I'' \leq c_1 \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_l(u_1)|^{q_i} \right\} dx + \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx + \int_{E''} g_1 dx. \quad (5.21)$$

Заметим, что в силу предложения 2.4, включений (5.14), (5.15) и неравенства (5.11) имеем

$$\begin{aligned} \int_{(E' \setminus G) \cup E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_l(u_1)|^{q_i} \right\} dx &= \int_{(E' \setminus G) \cup E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |\delta_i u_1|^{q_i} \right\} dx \\ &\leq c_3 k \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_l(u_2)|^{q_i} \right\} dx &= \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |\delta_i u_2|^{q_i} \right\} dx \\ &\leq c_3 k \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Из (5.20)–(5.23) и (5.14), (5.15) вытекает, что

$$\int_{(E' \setminus G) \cup E''} g_2 dx + I' + I'' \leq c_4 k \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx \right\}.$$

Отсюда и из (5.19) получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}T_l(u_1), T_k(u_1 - v) \rangle &\geq \int_G \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_l(u_1)) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx \\ &\quad - c_4 k \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx \right\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Учитывая, что $\nabla T_l(u_j) = \delta u_j$ п. в. на G , $j = 1, 2$, в силу предложения 2.4, из (5.24) и (5.12) выводим, что

$$\begin{aligned} \int_G \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u_1) [\delta_i u_1 - \delta_i u_2] \right\} dx &\leq \int_{G_1} f T_k(u_1 - u_2) dx \\ &\quad + c_5 k \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично этому имеем

$$\int_G \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u_2) [\delta_i u_2 - \delta_i u_1] \right\} dx \leq \int_{G_1} f T_k(u_2 - u_1) dx + c_5 k \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx \right\}.$$

Складывая последние два неравенства, заключаем, что для любых $k \geq 1$ и $h \geq k+1$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u_1 - u_2| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| < h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, \delta u_1) - a_i(x, \delta u_2)] [\delta_i u_1 - \delta_i u_2] \right\} dx \leq 2c_5 k \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx \right\}. \quad (5.25)$$

Заметим, что если $k \geq 1$, то $\text{meas}\{|u_j - \psi| \geq h-k\} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$, $j = 1, 2$. Этот факт является следствием леммы 5.1. Из него, в свою очередь, вытекает, что если $k \geq 1$, то

$$\int_{\{|u_j - \psi| \geq h-k\}} \Phi dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2. \quad (5.26)$$

Учитывая (3.3) и используя лемму Фату, из (5.25) и (5.26) выводим, что

$$\delta u_1 = \delta u_2 \quad \text{п. в. на} \quad \Omega. \quad (5.27)$$

Пусть снова $k \geq 1$ и $h \geq k+1$. Положим $w = T_h(u_1 - \psi) - T_h(u_2 - \psi)$. Ясно, что $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и, следовательно, $T_k(w) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда в силу неравенства (2.3) имеем

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(w)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq \bar{c} c_{q,\nu} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(w)|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}. \quad (5.28)$$

Введем множества

$$\begin{aligned} H_1 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| < h\}, \\ H_2 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| \geq h\}, \\ H_3 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| \geq h, |u_2 - \psi| < h\}, \\ H_4 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| \geq h, |u_2 - \psi| \geq h\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что эти множества попарно не пересекаются и их объединение есть множество $\{|w| < k\}$.

Зафиксируем произвольное $i \in \{1, \dots, n\}$. Учитывая (2.4) и сказанное относительно множеств H_m , $m = 1, \dots, 4$, получаем

$$\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(w)|^{q_i} dx = \sum_{m=1}^4 \int_{H_m} \nu_i |D_i w|^{q_i} dx. \quad (5.29)$$

В силу предложения 2.5 и соотношения (5.27) имеем

$$D_i w = 0 \quad \text{п. в. на} \quad H_1. \quad (5.30)$$

Относительно множеств H_2 и H_3 прежде всего заметим, что

$$H_2 \subset \{h - k < |u_1 - \psi| < h\}, \quad H_3 \subset \{h - k < |u_2 - \psi| < h\}. \quad (5.31)$$

Кроме того, ввиду предложений 2.5, 2.4 имеем

$$D_i w = \delta_i u_1 - D_i \psi \quad \text{п. в. на} \quad H_2, \quad D_i w = D_i \psi - \delta_i u_2 \quad \text{п. в. на} \quad H_3. \quad (5.32)$$

Используя (5.31), (5.32) и (5.11), устанавливаем, что

$$\int_{H_2} \nu_i |D_i w|^{q_i} dx \leq 2^n (c_3 + 1) k \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h - k\}} \Phi dx, \quad (5.33)$$

$$\int_{H_3} \nu_i |D_i w|^{q_i} dx \leq 2^n (c_3 + 1) k \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h - k\}} \Phi dx. \quad (5.34)$$

Наконец, в силу предложений 2.5, 2.4 имеем

$$D_i w = 0 \quad \text{п. в. на} \quad H_4. \quad (5.35)$$

Из (5.29), (5.30) и (5.33)–(5.35) вытекает, что

$$\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(w)|^{q_i} dx \leq 2^n (c_3 + 1) k \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h - k\}} \Phi dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h - k\}} \Phi dx \right\}.$$

Отсюда и из (5.28) следует, что для любых $k \geq 1$ и $h \geq k + 1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\{|u_1 - u_2| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| < h\}} |u_1 - u_2|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \\ & \leq c_6 c_{q, \nu} k \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geq h - k\}} \Phi dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geq h - k\}} \Phi dx \right\}^{1/q_i}. \end{aligned}$$

Полученный результат и утверждение (5.26) позволяют заключить, что для любого $k \geq 1$ интеграл функции $|u_1 - u_2|^{n/(n-1)}$ по множеству $\{|u_1 - u_2| < k\}$ равен нулю. Следовательно, $u_1 = u_2$ п. в. на Ω . Тем самым теорема доказана.

§ 6. Свойства суммируемости Т-решений

Прежде всего напомним один общий результат относительно суммируемости функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, для которых имеется квалифицированная оценка мер множеств $\{|u| \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 6.1. Пусть u — измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\gamma > 0$, и пусть $\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq Mk^{-\gamma}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [36, лемма 2.6] или [17, лемма 2.1].

Основным в данном параграфе является следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$ и выполняется следующее условие:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad m_i \geq \frac{1}{q_i - 1}, \quad \frac{1}{\nu_i} \in L^{m_i}(\Omega). \quad (6.1)$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (A, V, f) . Тогда:

- 1) для любого λ , $0 < \lambda < p_m(\bar{q} - 1)/\bar{q}$, имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 2) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и λ , $0 < \lambda < \frac{q_i p_m(\bar{q} - 1)}{p_m(\bar{q} - 1) + \bar{q}}$, имеем $\nu_i^{1/q_i} \delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5.1 существует $M_1 > 0$ такое, что для любого $k \geq 1$

$$\int_{\{|u| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |\delta_i u|^{q_i} \right\} dx \leq M_1 k. \quad (6.2)$$

Пусть $k \geq 1$. Поскольку $u \in \tilde{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$, имеем $T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда, используя условие (6.1), предложения 2.8, 2.4, а также неравенство (6.2), получаем

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p_m} dx \right)^{1/p_m} \leq c \prod_{i=1}^n \left(\int_{\{|u| < k\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \right)^{1/(nq_i)} \leq c(M_1 k)^{1/\bar{q}}. \quad (6.3)$$

Кроме того, аналогично (5.4) имеем $k^{p_m} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u)|^{p_m} dx$.

Отсюда и из (6.3) выводим, что для любого $k \geq 1$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c^{p_m} M_1^{p_m/\bar{q}} k^{-p_m(\bar{q}-1)/\bar{q}}. \quad (6.4)$$

Полученный результат и лемма 6.1 приводят к заключению, что утверждение 1) справедливо.

Далее, положим $\bar{p}_m = p_m(\bar{q} - 1)/\bar{q}$, и пусть $i \in \{1, \dots, n\}$ и $0 < \lambda < q_i \bar{p}_m / (\bar{p}_m + 1)$. Зафиксируем произвольное $k \geq 1$ и положим $h = k^{q_i / (\bar{p}_m + 1)}$. В силу (6.4) имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq h\} \leq c^{p_m} M_1^{p_m/\bar{q}} h^{-\bar{p}_m}, \quad (6.5)$$

а из (6.2) следует, что $\int_{\{|u| < h\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \leq M_1 h$. Однако ясно, что

$$k^{q_i} \text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |\delta_i u| \geq k, |u| < h\} \leq \int_{\{|u| < h\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx.$$

Из последних двух неравенств вытекает, что $\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |\delta_i u| \geq k, |u| < h\} \leq M_1 h^{-\bar{p}_m}$.

Отсюда и из (6.5) выводим, что для любого $k \geq 1$

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |\delta_i u| \geq k\} \leq (c^{p_m} M_1^{p_m/\bar{q}} + M_1) k^{-q_i \bar{p}_m / (\bar{p}_m + 1)}.$$

Полученный результат и лемма 6.1 позволяют заключить, что $\nu_i^{1/q_i} \delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 2) справедливо. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда:

- 1) для любого $\lambda \in (0, \hat{q})$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 2) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и λ , $0 < \lambda < \frac{q_i \hat{q}}{\hat{q}+1}$, имеем $\nu_i^{1/q_i} \delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = 1/(q_i - 1)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда ввиду второго из включений (2.1) выполняется условие (6.1). Учитывая это, из предложения 6.1 и равенства (2.6) выводим, что утверждения 1), 2) справедливы. Следствие доказано.

Как видно, формулировка следствия 6.1 не предполагает никаких дополнительных условий относительно чисел q_i и весовых функций ν_i , $i = 1, \dots, n$, и поскольку $\hat{q} < 1$, из этого следствия, вообще говоря, нельзя заключить, что для любой функции $f \in L^1(\Omega)$ T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, есть суммируемая функция. Условия принадлежности T -решений пространству $L^1(\Omega)$ легко вывести из предложения 6.1. Именно, имеет место следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем выполняется условие (6.1) и

$$\sum_{i=1}^n \frac{1 + 2m_i}{m_i q_i} < n + 1. \quad (6.6)$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u \in L^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.6), (6.6) имеем $1 < p_m(\bar{q} - 1)/\bar{q}$. Отсюда и из утверждения 1) предложения 6.1 выводим, что $u \in L^1(\Omega)$. Следствие доказано.

Следующий результат дает условия принадлежности T -решений пространству $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{1}{m_i} + \frac{\bar{q}}{n(\bar{q} - 1)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j q_j} < q_i - 1 - \frac{n - \bar{q}}{n(\bar{q} - 1)}, \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{\nu_i} \in L^{m_i}(\Omega). \quad (6.8)$$

Пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, и $f \in L^1(\Omega)$. Тогда $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6.7), (6.8) вытекает, что выполняется условие (6.1). Тогда справедливо утверждение 2) предложения 6.1.

Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$ и положим $t_i = \frac{m_i q_i}{m_i q_i - 1}$. Из (2.6) и (6.7) следует, что $t_i < \frac{q_i p_m(\bar{q} - 1)}{p_m(\bar{q} - 1) + \bar{q}}$. Отсюда и из утверждения 2) предложения 6.1 получаем, что $\nu_i^{1/q_i} \delta_i u \in L^{t_i}(\Omega)$. Из этого включения, (6.8) и того, что ввиду неравенства Юнга $|\delta_i u| \leq (\frac{1}{\nu_i})^{m_i} + |\nu_i^{1/q_i} \delta_i u|^{t_i}$ п. в. на Ω , выводим включение $\delta_i u \in L^1(\Omega)$.

Теперь можно заключить, что $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Отсюда и из предложения 2.6 получаем, что $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Очевидно, что необходимым условием для того, чтобы для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имело место неравенство (6.7), является требование

$$q_- > \frac{(n-1)\bar{q}}{n(\bar{q}-1)}. \quad (6.9)$$

В свою очередь, необходимыми для выполнения неравенства (6.9) являются следующие условия:

$$\bar{q} > 2 - \frac{1}{n}, \quad (6.10)$$

$$q_- > \frac{n^2}{n^2 - n + 1}, \quad (6.11)$$

$$q_+ - q_- < \frac{q_+}{q_+ - 1} \left(q_+ - 2 + \frac{1}{n} \right). \quad (6.12)$$

Действительно, пусть неравенство (6.9) справедливо. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\frac{1}{q_i} < \frac{n(\bar{q}-1)}{(n-1)\bar{q}}$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} < \frac{n^2(\bar{q}-1)}{(n-1)\bar{q}}$. Отсюда и из определения числа $\bar{q}$ выводим неравенство (6.10). Далее, поскольку $q_+ < n$, имеем $\frac{1}{\bar{q}} > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{q_-} + \frac{n-1}{n} \right)$. Тогда $\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{n} \right) > \frac{\bar{q}-1}{\bar{q}}$. Из этого неравенства и (6.9) вытекает, что $1 - \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{q_-}$. Отсюда получаем неравенство (6.11). Наконец, так как $q_+ \geq \bar{q}$, то $\frac{\bar{q}}{\bar{q}-1} \geq \frac{q_+}{q_+-1}$. Из этого неравенства и (6.9) следует, что $q_- > \frac{(n-1)q_+}{n(q_+-1)}$. Отсюда выводим неравенство (6.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В случае $q_- = q_+$ условие (6.9) эквивалентно требованию $q_- > 2 - 1/n$, обеспечивающему существование слабых решений (т.е. решений из $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$) невырождающихся изотропных уравнений второго порядка с L^1 -правыми частями (см., например, [4]), причем при нарушении последнего требования такие решения существуют не для всякой правой части из $L^1(\Omega)$ (см. [3]).

Приведем два простых результата, вытекающих из следствия 6.3.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. Пусть справедливо неравенство (6.9) и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $1/\nu_i \in L^\infty(\Omega)$. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m_* – положительное число такое, что

$$\frac{1}{m_*} < \frac{\bar{q}-1}{\bar{q}} \left\{ q_- - \frac{(n-1)\bar{q}}{n(\bar{q}-1)} \right\},$$

и пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = m_*$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеют место соотношения (6.7) и (6.8). Отсюда и из следствия 6.3 вытекает требуемый результат. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Пусть $q_- = q_+ > 2 - 1/n$, $t > (q_+ - 2 + 1/n)^{-1}$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $1/\nu_i \in L^t(\Omega)$. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = t$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеют место соотношения (6.7) и (6.8). Отсюда и из следствия 6.3 выводим требуемый результат. Следствие доказано.

В заключение параграфа отметим, что результаты об улучшении свойств суммируемости T -решений рассматриваемых вариационных неравенств в зависимости от улучшения таких свойств для функции f могут быть получены с использованием приемов, предложенных в [48], [49] и [17] в отношении решений изотропных уравнений второго порядка.

§ 7. Сдвиговые T -решения вариационных неравенств

В § 3–6 предполагалось, что V – замкнутое выпуклое множество в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющее условиям (3.4), (3.5). При этом само определение T -решения вариационного неравенства и доказательства его существования и единственности были существенно связаны с требованием непустоты пересечения множества V с пространством $L^\infty(\Omega)$, т. е. условием (3.4). В настоящем параграфе мы освобождаемся от указанного условия. Для этого более общего случая дается другое определение решения вариационного неравенства с L^1 -данными. Вводится понятие сдвигового T -решения и с использованием результатов из предыдущих параграфов устанавливаются существование и единственность такого решения.

7.1. Понятие сдвигового T -решения. Пусть V – непустое замкнутое выпуклое множество в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющее условию

$$u, v \in V, \quad k > 0 \implies u - T_k(u - v) \in V. \quad (7.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$; ψ -сдвиговым T -решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, будем называть функцию $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

- (i) если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$, то $v + \psi + T_k(u - v - \psi) \in V$;
- (ii) если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Пусть u – ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u - \psi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \geq 1$. Тогда в силу условия (i) определения 7.1 имеем $\psi + T_k(u - \psi) \in V$. Следовательно, $T_k(u - \psi) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Очевидно, что и

$$T_1(u - \psi) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (7.2)$$

Пусть теперь $h > 0$. Если $h \geq 1$, то ввиду изложенного выше имеем $T_h(u - \psi) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Если $h < 1$, то $T_h(u - \psi) = T_h(T_1(u - \psi))$. Отсюда и из (7.2) вытекает, что $T_h(u - \psi) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Таким образом, последнее включение справедливо для любого $h > 0$. Следовательно, $u - \psi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, $\psi, \varphi \in V$ и $\psi - \varphi \in L^\infty(\Omega)$. Пусть $u - \psi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u - \varphi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in (-\varphi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$. Положим $v_1 = v + \varphi - \psi$. Ясно, что $v_1 \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу условия (i) определения 7.1 имеем $v_1 + \psi + T_k(u - v_1 - \psi) \in V$. Значит, $v + \varphi + T_k(u - v - \varphi) \in V$.

Далее, положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, $k_2 = k + \|v_1\|_{L^\infty(\Omega)}$. Из условия (ii) определения 7.1 следует, что

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_2}(u - \psi)), T_k(u - v_1 - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v_1 - \psi) dx. \quad (7.3)$$

Кроме того, заметим, что

$$\psi + T_{k_2}(u - \psi) = \varphi + T_{k_1}(u - \varphi) \quad \text{п. в. на } \{|u - v_1 - \psi| < k\}. \quad (7.4)$$

Поскольку $u - \psi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $\varphi - \psi \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу предложения 2.5 имеем $u - \varphi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду (7.4) получаем $\nabla(\psi + T_{k_2}(u - \psi)) = \nabla(\varphi + T_{k_1}(u - \varphi))$ п. в. на $\{|u - v_1 - \psi| < k\}$. Учитывая это и используя определение оператора $\mathcal{A}$ и предложение 2.4, находим, что $\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_2}(u - \psi)), T_k(u - v_1 - \psi) \rangle = \langle \mathcal{A}(\varphi + T_{k_1}(u - \varphi)), T_k(u - v_1 - \psi) \rangle$. Отсюда и из (7.3), учитывая определение функции v_1 , выводим неравенство $\langle \mathcal{A}(\varphi + T_{k_1}(u - \varphi)), T_k(u - v - \varphi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \varphi) dx$.

Теперь можно заключить, что $u - \varphi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \emptyset$, $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Пусть $u - \psi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u - T$ -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 7.1 имеем $u - \psi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда, учитывая, что $\psi \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, и используя предложение 2.5, выводим включение $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Далее, пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$. Положим $w = v - \psi$. Ясно, что $w \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда ввиду условия (i) определения 7.1 имеем $w + \psi + T_k(u - w - \psi) \in V$. Значит, $v - T_k(v - u) \in V$. Положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, $k_2 = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу условия (ii) определения 7.1 имеем

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_2}(u - \psi)), T_k(u - w - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w - \psi) dx. \quad (7.5)$$

Легко видеть, что $\psi + T_{k_2}(u - \psi) = T_{k_1}(u)$ п. в. на $\{|u - w - \psi| < k\}$. Отсюда вытекает, что $\nabla(\psi + T_{k_2}(u - \psi)) = \nabla T_{k_1}(u)$ п. в. на $\{|u - w - \psi| < k\}$. Учитывая

это и используя определение оператора $\mathcal{A}$ и предложение 2.4, устанавливаем, что $\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_2}(u - \psi)), T_k(u - w - \psi) \rangle = \langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - w - \psi) \rangle$. Из этого равенства, неравенства (7.5) и определения функции w выводим, что

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx.$$

Теперь ввиду установленных фактов и определения 3.1 заключаем, что u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Пусть $V \cap L^{\infty}(\Omega) \neq \emptyset$, $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Пусть u – T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u - \psi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что ввиду определения 3.1 имеем $u \in \tilde{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Пусть $w \in V$ и $k \geq 1$. Покажем, что

$$w + T_k(u - w) \in V. \quad (7.6)$$

Действительно, зафиксируем $\varphi \in V \cap L^{\infty}(\Omega)$ и положим для любого $j \in \mathbb{N}$

$$w_j = \varphi + T_j(w - \varphi). \quad (7.7)$$

В силу условия (7.1) имеем

$$\{w_j\} \subset V, \quad (7.8)$$

и ясно, что

$$w_j \rightarrow w \quad \text{на } \Omega. \quad (7.9)$$

Кроме того, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $|w_j - w| \leq |w - \varphi|$ на Ω . Отсюда и из сходимости (7.9), используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$w_j \rightarrow w \quad \text{сильно в } L^1(\Omega), \quad (7.10)$$

а используя (2.4), устанавливаем, что

$$\int_{\Omega} \nu_i |D_i(w_j - w)|^{q_i} dx \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.11)$$

Далее, положим $z = w + T_k(u - w)$, и пусть $z_j = w_j + T_k(u - w_j)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Поскольку $\{w_j\} \subset L^{\infty}(\Omega)$, учитывая (7.8), из условия (i) определения 3.1 выводим, что

$$\{z_j\} \subset V. \quad (7.12)$$

Кроме того, ввиду (7.9) и (7.10) имеем

$$z_j \rightarrow z \quad \text{сильно в } L^1(\Omega). \quad (7.13)$$

Докажем, что

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|z_j\|_{1,q,\nu} < +\infty. \quad (7.14)$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и положим $l = k + \|w_j\|_{L^\infty(\Omega)}$. Учитывая (7.8), из условия (ii) определения 3.1 выводим, что

$$\langle \mathcal{A}T_l(u), T_k(u - w_j) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w_j) dx. \quad (7.15)$$

Поскольку $z_j = T_l(u)$ п. в. на $\{|u - w_j| < k\}$, имеем $\nabla z_j = \nabla T_l(u)$ п. в. на $\{|u - w_j| < k\}$. Тогда, учитывая определения оператора $\mathcal{A}$ и функции z_j и используя предложение 2.4, получаем $\langle \mathcal{A}T_l(u), T_k(u - w_j) \rangle = \langle \mathcal{A}z_j, z_j - w_j \rangle$. Отсюда и из (7.15) вытекает, что

$$\langle \mathcal{A}z_j, z_j - w_j \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w_j) dx. \quad (7.16)$$

Следовательно, $\langle \mathcal{A}z_j, z_j - w_j \rangle \leq k \|f\|_{L^1(\Omega)}$. Из этого неравенства, используя (3.1), (3.2) и неравенство Юнга, выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i z_j|^{q_i} \right\} dx &\leq \frac{2k}{c_2} \int_{\Omega} |f| dx + \frac{1}{c_1} \int_{\Omega} g_1 dx \\ &+ \frac{2}{c_2} \int_{\Omega} g_2 dx + \frac{2}{c_2} \left(\frac{2c_1}{c_2} + 1 \right)^{n-1} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i w_j|^{q_i} \right\} dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из сходимости (7.11) вытекает, что существует $M > 0$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i z_j|^{q_i} \right\} dx \leq M. \quad (7.17)$$

Полученный результат и (7.13) позволяют заключить, что (7.14) справедливо. Тогда из предложения 2.2, утверждения (ii) предложения 2.1 и (7.13) следует, что $z \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $z_j \rightarrow z$ слабо в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда и из (7.12), учитывая, что множество V замкнутое и выпуклое, получаем $z \in V$. Значит, включение (7.6) справедливо.

Покажем теперь, что

$$\langle \mathcal{A}(w + T_k(u - w)), T_k(u - w) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w) dx. \quad (7.18)$$

Зафиксируем $h \in \mathbb{N}$, и пусть $j \in \mathbb{N}$, $j \geq h$. В силу (7.7) и определений функций z и z_j имеем $w_j = w$ и $z_j = z$ на $\{|w - \varphi| < h\}$. Следовательно, $\nabla w_j = \nabla w$ и $\nabla z_j = \nabla z$ п. в. на $\{|w - \varphi| < h\}$. Тогда, используя (3.2), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}z_j, z_j - w_j \rangle &\geq \int_{\{|w-\varphi|<h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla z) [D_i z - D_i w] \right\} dx \\ &- \int_{\{|w-\varphi|\geq h\}} g_2 dx - \int_{\{|w-\varphi|\geq h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla z_j)| |D_i w| \right\} dx \\ &- \int_{\{|w-\varphi|\geq h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla z_j)| |D_i w_j - D_i w| \right\} dx. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Заметим, что в силу (3.1), неравенства Гёльдера и соотношения (7.17) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\{|w-\varphi| \geq h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla z_j)| |D_i w| \right\} dx \\ & \leq (c_1 M + 1 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}) \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\{|w-\varphi| \geq h\}} \nu_i |D_i w|^{q_i} dx \right\}^{1/q_i}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7.16) и (7.19) вытекает, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq h$,

$$\begin{aligned} & \int_{\{|w-\varphi| < h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla z) [D_i z - D_i w] \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w_j) dx \\ & + \int_{\{|w-\varphi| \geq h\}} g_2 dx + (c_1 M + 1 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}) \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\{|w-\varphi| \geq h\}} \nu_i |D_i w|^{q_i} dx \right\}^{1/q_i} \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla z_j)| |D_i w_j - D_i w| \right\} dx, \end{aligned} \quad (7.20)$$

причем ввиду (7.9) имеем $\int_{\Omega} f T_k(u - w_j) dx \rightarrow \int_{\Omega} f T_k(u - w) dx$, а в силу неравенств (3.1), (7.17) и сходимости (7.11) имеем

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |a_i(x, \nabla z_j)| |D_i(w_j - w)| dx \rightarrow 0.$$

Из этих предельных соотношений и (7.20) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{|w-\varphi| < h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla z) [D_i z - D_i w] \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w) dx \\ & + \int_{\{|w-\varphi| \geq h\}} g_2 dx + (c_1 M + 1 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}) \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\{|w-\varphi| \geq h\}} \nu_i |D_i w|^{q_i} dx \right\}^{1/q_i}. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $h \rightarrow +\infty$, получаем $\langle \mathcal{A}z, z - w \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w) dx$. Тем самым справедливость неравенства (7.18) установлена.

Пусть теперь $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$. Из (7.6) и (7.18) следует, что

$$v + \psi + T_k(u - v - \psi) \in V, \quad (7.21)$$

$$\langle \mathcal{A}(v + \psi + T_k(u - v - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx. \quad (7.22)$$

Положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Легко видеть, что $v + \psi + T_k(u - v - \psi) = \psi + T_{k_1}(u - \psi)$ п.в. на $\{|u - v - \psi| < k\}$. Следовательно, $\nabla(v + \psi + T_k(u - v - \psi)) = \nabla(\psi + T_{k_1}(u - \psi))$ п.в. на $\{|u - v - \psi| < k\}$. Тогда, учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ и используя предложение 2.4, получаем, что $\langle \mathcal{A}(v + \psi + T_k(u - v - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle = \langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle$. Из этого равенства и (7.22) вытекает, что

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx.$$

Отсюда и из (7.21) заключаем, что u — ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$ и выполняется следующее условие:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad m_i \geq \frac{1}{q_i - 1}, \quad \frac{1}{\nu_i} \in L^{m_i}(\Omega). \quad (7.23)$$

Пусть $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$ и $\psi \in V$. Тогда u — ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u \in V$ и для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{A}u, u - v \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v) dx. \quad (7.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u — ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Покажем, что $u \in V$. Положим $u_k = \psi + T_k(u - \psi)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Из условия (i) определения 7.1 следует, что

$$\{u_k\} \subset V. \quad (7.25)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и положим

$$I_k = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i u_k|^{q_i} \right\} dx.$$

В силу условия (ii) определения 7.1 имеем

$$\langle \mathcal{A}u_k, u_k \rangle \leq \langle \mathcal{A}u_k, \psi \rangle + \int_{\Omega} f(u_k - \psi) dx. \quad (7.26)$$

Используя (3.2), получаем

$$\langle \mathcal{A}u_k, u_k \rangle \geq c_2 I_k - \int_{\Omega} g_2 dx, \quad (7.27)$$

а используя (3.1) и неравенство Юнга, находим, что

$$\langle \mathcal{A}u_k, \psi \rangle \leq \frac{c_2}{4} I_k + \frac{c_2}{4c_1} \int_{\Omega} g_1 dx + \left(\frac{4c_1}{c_2} + 1 \right)^{n-1} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx. \quad (7.28)$$

Из неравенств (7.26)–(7.28) вытекает, что

$$\frac{3c_2}{4} I_k \leq \int_{\Omega} f(u_k - \psi) dx + \left(\frac{4c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_1} + 1 \right)^n \int_{\Omega} \left\{ g_1 + g_2 + \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx. \quad (7.29)$$

Заметим, что ввиду условия (7.23) и предложения 2.8

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u_k - \psi|^{p_m} dx \right)^{1/p_m} &\leq c \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i u_k|^{q_i} dx \right)^{1/q_i} \\ &\quad + c \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i \psi|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Используя это неравенство, а также неравенства Гёльдера и Юнга, устанавливаем, что

$$\int_{\Omega} f(u_k - \psi) dx \leq \frac{c_2}{4} I_k + \tau c \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx + 2\tau c n \left(\frac{4c\tau}{c_2} + 1 \right)^{1/(q_- - 1)},$$

где $\tau = \|f\|_{L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)}$. Отсюда и из (7.29) выводим, что

$$\begin{aligned} I_k \leq & \frac{2}{c_2} \left[c\tau + \left(\frac{4c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_1} + 1 \right)^n \right] \int_{\Omega} \left\{ g_1 + g_2 + \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx \\ & + n \left(\frac{4c\tau}{c_2} + 1 \right)^{q_-/(q_- - 1)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (7.30) вытекает, что последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. При этом, учитывая, что $u_k \rightarrow u$ на Ω , имеем $u \in L^1(\Omega)$ и $u_k \rightarrow u$ сильно в $L^1(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $u_k \rightarrow u$ слабо в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда и из (7.25), учитывая замкнутость и выпуклость множества V , выводим, что $u \in V$.

Далее, пусть $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу условия (ii) определения 7.1 имеем

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx. \quad (7.31)$$

Легко видеть, что $\psi + T_{k_1}(u - \psi) = u$ п.в. на $\{|u - v - \psi| < k\}$. Поэтому, учитывая, что $u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, имеем $\nabla(\psi + T_{k_1}(u - \psi)) = \nabla u$ п.в. на $\{|u - v - \psi| < k\}$. Используя это соотношение, а также определение оператора $\mathcal{A}$ и (2.4), получаем, что $\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle = \langle \mathcal{A}u, T_k(u - v - \psi) \rangle$. Из этого равенства и (7.31) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\langle \mathcal{A}u, T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx.$$

Отсюда и из того, что $T_k(u - v - \psi) \rightarrow u - v - \psi$ сильно в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и поточечно на Ω , выводим неравенство

$$\langle \mathcal{A}u, u - v - \psi \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v - \psi) dx. \quad (7.32)$$

Итак, для любой функции $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство (7.32).

Далее, пусть $v \in V$. Положим $v_j = \psi + T_j(v - \psi)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Используя условие (7.1), получаем, что $v_j - \psi \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Отсюда и из (7.32) вытекает, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\langle \mathcal{A}u, u - v_j \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v_j) dx. \quad (7.33)$$

Заметим, что $v_j \rightarrow v$ сильно в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ ввиду предложения 2.3. Тогда, учитывая условие (7.23), используя предложение 2.8 и переходя в (7.33) к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем неравенство (7.24).

Пусть теперь $u \in V$ и для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство (7.24). Зафиксируем $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$. Ввиду (7.1) имеем

$$v + \psi + T_k(u - v - \psi) \in V, \quad (7.34)$$

а также $u - T_k(u - v - \psi) \in V$. Из последнего включения и (7.24) следует, что

$$\langle \mathcal{A}u, T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx. \quad (7.35)$$

Положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Легко видеть, что $u = \psi + T_{k_1}(u - \psi)$ п. в. на $\{|u - v - \psi| < k\}$. Тогда $\nabla u = \nabla(\psi + T_{k_1}(u - \psi))$ п. в. на $\{|u - v - \psi| < k\}$. Поэтому, учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ и (2.4), имеем $\langle \mathcal{A}u, T_k(u - v - \psi) \rangle = \langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle$. Из этого равенства и (7.35) вытекает, что

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx.$$

Отсюда и из (7.34) выводим, что $u - \psi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. Пусть $f \in L^n(\Omega)$ и $\psi \in V$. Тогда $u - \psi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u \in V$ и для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство (7.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = 1/(q_i - 1)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда ввиду второго из включений (2.1) выполняется условие (7.23). Кроме того, в силу (2.6) имеем $p_m = n/(n - 1)$ и, следовательно, $f \in L^{p_m/(p_m - 1)}(\Omega)$. Теперь из предложения 7.5 выводим требуемый результат.

7.2. О существовании и единственности сдвигового T -решения. Из предложений 4.1, 7.5 вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. Пусть выполняются все условия предложения 7.5. Тогда существует ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, и это решение принадлежит множеству V .

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $f \in L^n(\Omega)$ и $\psi \in V$. Тогда существует ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, и это решение принадлежит множеству V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = 1/(q_i - 1)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда ввиду второго из включений (2.1) и (2.6) выполняются все условия предложения 7.5. Отсюда и из предложения 7.7 выводим требуемый результат.

Как видно, в условиях предложения 7.7 и следствия 7.1 для существования сдвиговых T -решений рассматриваемых вариационных неравенств требуется повышенная суммируемость функции f . При этом само доказательство существования таких решений просто сводится к непосредственному применению одного результата о разрешимости вариационных неравенств в обычном смысле (см. предложение 4.1).

Перейдем к рассмотрению общего случая.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Тогда существует ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть $\tilde{a}_i$ – функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой пары $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$

$$\tilde{a}_i(x, \xi) = a_i(x, \nabla\psi(x) + \xi).$$

Ясно, что $\tilde{a}_i$ – функция Каратеодори, $i \in \{1, \dots, n\}$. В силу предположений относительно чисел c_1, c_2 и функций g_1, g_2 и неравенств (3.1), (3.2) существуют $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ и $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in L^1(\Omega)$, $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \geq 0$ на Ω , такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\nu_i} \right)^{1/(q_i-1)} (x) |\tilde{a}_i(x, \xi)|^{q_i/(q_i-1)} &\leq \tilde{c}_1 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} + \tilde{g}_1(x), \\ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \xi) \xi_i &\geq \tilde{c}_2 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} - \tilde{g}_2(x). \end{aligned}$$

Кроме того, ввиду (3.3) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, имеем

$$\sum_{i=1}^n [\tilde{a}_i(x, \xi) - \tilde{a}_i(x, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0.$$

Как видно, функции $\tilde{a}_i$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют таким же условиям, что и функции a_i , $i = 1, \dots, n$.

Далее, в силу предположений относительно множества V , сделанных в начале п. 7.1, имеем $-\psi + V$ – замкнутое выпуклое множество в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (а) $(-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega) \neq \emptyset$;
- (б) если $u, v \in -\psi + V$ и $k > 0$, то $u - T_k(u - v) \in -\psi + V$.

Значит, множество $-\psi + V$ удовлетворяет условиям (3.4) и (3.5).

Учитывая сказанное относительно функций $\tilde{a}_i$, $i = 1, \dots, n$, и множества $-\psi + V$, из теоремы 4.1 выводим, что существует функция $w \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такая, что:

- (i) для любых $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$ имеем $v + T_k(w - v) \in -\psi + V$;
- (ii) если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \nabla T_{k_1}(w)) D_i T_k(w - v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(w - v) dx.$$

Положим $u = \psi + w$, и пусть $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$. Ввиду свойства (i) имеем $v + \psi + T_k(u - v - \psi) \in V$. Положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу определений оператора $\mathcal{A}$ и функций $\tilde{a}_i$, $i = 1, \dots, n$, имеем

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \nabla T_{k_1}(w)) D_i T_k(w - v) \right\} dx.$$

Отсюда и из свойства (ii) следует, что

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u - \psi)), T_k(u - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \psi) dx.$$

Теперь можно заключить, что $u - \psi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Пусть u_1 и u_2 — ψ -сдвиговые T -решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u_1 = u_2$ п. в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 7.1 вытекает, что $u_1, u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и справедливы следующие утверждения:

- (*)₁ если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$, то $v + \psi + T_k(u_j - v - \psi) \in V$, $j = 1, 2$;
- (*)₂ если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u_j - \psi)), T_k(u_j - v - \psi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u_j - v - \psi) dx, \quad j = 1, 2.$$

Определим для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функцию $\tilde{a}_i$ на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ таким же образом, как и в доказательстве теоремы 7.1. Кроме того, положим $w_j = u_j - \psi$, $j = 1, 2$. В силу предложения 7.1 имеем $w_1, w_2 \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, а из утверждений (*)₁ и (*)₂ вытекает, что справедливы следующие утверждения:

- (*)₃ если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$, то $v + T_k(w_j - v) \in -\psi + V$, $j = 1, 2$;
- (*)₄ если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \nabla T_{k_1}(w_j)) D_i T_k(w_j - v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(w_j - v) dx, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку функции $\tilde{a}_i$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют таким же условиям, что и функции a_i , $i = 1, \dots, n$, а множество $-\psi + V$ удовлетворяет условиям (3.4) и (3.5), из теоремы 5.1 и утверждений (*)₃ и (*)₄ выводим, что $u_1 = u_2$ п. в. на Ω . Теорема доказана.

Из предложения 7.2 и теоремы 7.2 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, $\psi, \varphi \in V$ и $\psi - \varphi \in L^\infty(\Omega)$. Пусть u_1 — ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, а u_2 — φ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u_1 = u_2$ п. в. на Ω .

7.3. Дальнейшие результаты. Сформулируем ряд утверждений, дающих дополнительную информацию о свойствах сдвиговых T -решений рассматриваемых вариационных неравенств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Пусть u — ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда для любой функции $\varphi \in V$ имеем $u - \varphi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функции $\tilde{a}_i: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, тем же образом, что и в доказательстве теоремы 7.1, и положим $V_1 = -\psi + V$ и $w = u - \psi$. В силу предложения 7.1 и определения 7.1 имеем $w \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и справедливы утверждения:

- (i) для любых $v \in V_1 \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$ имеем $v + T_k(w - v) \in V_1$;
- (ii) если $v \in V_1 \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \nabla T_{k_1}(w)) D_i T_k(w - v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(w - v) dx.$$

Отсюда и из предложений 7.4, 7.1 выводим, что $w - v \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ для любого $v \in V_1$. Следовательно, для любой функции $\varphi \in V$ имеем $u - \varphi \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Предложение доказано.

Вопрос о безусловной принадлежности сдвиговых T -решений рассматриваемых вариационных неравенств множеству $\dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ пока остается открытым. Интересующее нас включение удастся доказать лишь при некоторых дополнительных предположениях. Одно из таких предположений содержит следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.9. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Пусть u — ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предположим, что выполняется следующее условие:

$$\exists \varphi \in V, \varepsilon > 0, h_0 > 0: \quad \forall h \geq h_0 \quad \{|\varphi| > h\} \subset \{|u - \varphi| > (1 + \varepsilon)h\}. \quad (7.36)$$

Тогда $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k > 0$. Положим $l_1 = \max\{h_0, k/\varepsilon\}$ и $l = k + l_1$. Покажем, что

$$\{|u| < k\} \subset \{|u - \varphi| < l\}. \quad (7.37)$$

Действительно, пусть $x \in \{|u| < k\}$. Предположим, что

$$|u(x) - \varphi(x)| \geq l. \quad (7.38)$$

Тогда $|\varphi(x)| > l_1$. Зафиксируем τ такое, что $0 < \tau < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(|\varphi(x)| - l_1)$, и положим $l_2 = |\varphi(x)| - \tau$. Имеем

$$l_1 < l_2 < |\varphi(x)| < l_2 + \varepsilon(l_2 - l_1). \quad (7.39)$$

Поскольку $l_2 > h_0$, то $\{|\varphi| > l_2\} \subset \{|u - \varphi| > (1 + \varepsilon)l_2\}$ в силу условия (7.36). Отсюда, учитывая, что $x \in \{|\varphi| > l_2\}$ ввиду (7.39), выводим,

что $|u(x) - \varphi(x)| > (1 + \varepsilon)l_2$. Из этого неравенства и (7.39) вытекает, что $(1 + \varepsilon)l_2 < |u(x)| + |\varphi(x)| < k + l_2 + \varepsilon(l_2 - l_1)$. Следовательно, $\varepsilon l_1 < k$, что противоречит определению числа l_1 . Полученное противоречие доказывает, что неравенство (7.38) не верно. Значит, $x \in \{|u - \varphi| < l\}$. Тем самым справедливость включения (7.37) установлена.

Далее, положим $w = \varphi + T_l(u - \varphi)$, и пусть $w_h = T_k(u - \varphi + T_h(\varphi))$ для любого $h \in \mathbb{N}$. В силу предложений 7.8, 2.5 имеем $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $\{w_h\} \subset \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Зафиксируем $h \in \mathbb{N}$, $h \geq l_1$. Пусть

$$x \in \{|u - \varphi + T_h(\varphi)| < k\}. \quad (7.40)$$

Предположим, что $|\varphi(x)| > h$. Тогда, используя условие (7.36) и включение (7.40), получаем

$$(1 + \varepsilon)h < |u(x) - \varphi(x)| \leq |u(x) - \varphi(x) + T_h(\varphi(x))| + |T_h(\varphi(x))| < k + h.$$

Следовательно, $\varepsilon h < k$. Но это противоречит тому, что $h \geq l_1$. Полученное противоречие доказывает, что $|\varphi(x)| \leq h$. Отсюда и из (7.40) и (7.37) вытекает, что $|u(x) - \varphi(x)| < l$. Тогда $w_h(x) = w(x)$.

Таким образом, $w_h = w$ на $\{|u - \varphi + T_h(\varphi)| < k\}$. Отсюда и из предложения 2.4 выводим, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $|D_i w_h| \leq |D_i w|$ п. в. на Ω .

Теперь можно заключить, что последовательность $\{w_h\}$ ограничена в пространстве $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду предложений 2.2, 2.1 существуют возрастающая последовательность $\{h_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $z \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такие, что $w_{h_j} \rightarrow z$ сильно в $L^1(\Omega)$. Однако очевидно, что $w_h \rightarrow T_k(u)$ сильно в $L^1(\Omega)$. Следовательно, $T_k(u) = z$ п. в. на Ω . Поэтому $T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Поскольку в этом включении k – произвольное положительное число, получаем, что $u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.10. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi, \varphi \in V$. Пусть u – ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предположим, что выполняется условие:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0, \quad h_0 > 0, \quad E \subset \Omega, \quad \text{meas } E = 0: \\ \forall h \geq h_0 \quad \{|\varphi - \psi| > h\} \setminus E \subset \{|u - \psi| > (1 + \varepsilon)h\}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Тогда u – φ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in (-\varphi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Положим $l_1 = \max\{h_0, k_1/\varepsilon\}$ и $l = k_1 + l_1$. Покажем, что

$$\{|u - \varphi| < k_1\} \setminus E \subset \{|u - \psi| < l\}. \quad (7.42)$$

Действительно, пусть $x \in \{|u - \varphi| < k_1\} \setminus E$. Предположим, что

$$|u(x) - \psi(x)| \geq l. \quad (7.43)$$

Тогда $|\varphi(x) - \psi(x)| > l_1$. Положим $l_2 = |\varphi(x) - \psi(x)| - \tau$ и зафиксируем τ такое, что $0 < \tau < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(|\varphi(x) - \psi(x)| - l_1)$. Имеем

$$l_1 < l_2 < |\varphi(x) - \psi(x)| < l_2 + \varepsilon(l_2 - l_1). \quad (7.44)$$

Поскольку $l_2 > h_0$, в силу условия (7.41) выполнено $\{|\varphi - \psi| > l_2\} \setminus E \subset \{|u - \psi| > (1 + \varepsilon)l_2\}$. Отсюда и из (7.44) получаем

$$(1 + \varepsilon)l_2 < |u(x) - \psi(x)| \leq |u(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \psi(x)| < k_1 + l_2 + \varepsilon(l_2 - l_1).$$

Следовательно, имеем $\varepsilon l_1 < k_1$, что противоречит определению числа l_1 . Полученное противоречие доказывает, что неравенство (7.43) не верно. Значит, $x \in \{|u - \psi| < l\}$. Тем самым справедливость включения (7.42) установлена.

Далее, положим $v_1 = v + \varphi - \psi$, $w = T_l(u - \psi) - v_1$, и для любого $h \in \mathbb{N}$ пусть $w_h = T_k(u - \psi - T_h(v_1))$. Очевидно, что $v_1 \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда и из предложений 7.1, 2.5 вытекает, что $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $\{w_h\} \subset \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Ясно, что существует измеримое множество $E_1 \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E_1 \quad |v(x)| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (7.45)$$

Зафиксируем $h \in \mathbb{N}$, $h \geq l_1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Пусть

$$x \in \{|u - \psi - T_h(v_1)| < k\} \setminus (E \cup E_1). \quad (7.46)$$

Предположим, что $|v_1(x)| > h$. Тогда ввиду (7.45) выполнено неравенство

$$|\varphi(x) - \psi(x)| > h - \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Из этого неравенства и условия (7.41) выводим, что

$$|u(x) - \psi(x)| > (1 + \varepsilon)(h - \|v\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Тогда, учитывая (7.46) и сделанное предположение, получаем

$$(1 + \varepsilon)(h - \|v\|_{L^\infty(\Omega)}) < |u(x) - \psi(x) - T_h(v_1(x))| + |T_h(v_1(x))| < k + h.$$

Следовательно, $h < l_1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, что противоречит исходному неравенству для h . Полученное противоречие доказывает, что $|v_1(x)| \leq h$. Поэтому ввиду (7.46) имеем $w_h(x) = u(x) - \psi(x) - v_1(x)$ и $|u(x) - \varphi(x) - v(x)| < k$. Отсюда и из (7.45), (7.42) вытекает, что $w_h(x) = w(x)$. Таким образом, $w_h = w$ п.в. на $\{|u - \psi - T_h(v_1)| < k\}$. Тогда, учитывая предложение 2.4, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $|D_i w_h| \leq |D_i w|$ п.в. на Ω .

Полученный результат позволяет заключить, что

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} \|w_h\|_{1,q,\nu} < +\infty. \quad (7.47)$$

Заметим, что $T_k(u - v - \varphi) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ в силу предложений 7.8, 2.5. Наконец, очевидно, что $w_h \rightarrow T_k(u - v - \varphi)$ сильно в $L^1(\Omega)$. Отсюда и из (7.47), используя предложения 2.2, 2.1, выводим, что

$$w_h \rightarrow T_k(u - v - \varphi) \quad \text{слабо в} \quad \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (7.48)$$

Пусть снова $h \in \mathbb{N}$, $h \geq l_1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Поскольку ψ , $v_1 + \psi \in V$, в силу условия (7.1) имеем $\psi + T_h(v_1) \in V$. Следовательно,

$$T_h(v_1) \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega). \quad (7.49)$$

Положим $h_1 = k + \|T_h(v_1)\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ввиду (7.49) и определения 7.1 имеем

$$\psi + T_h(v_1) + w_h \in V, \quad (7.50)$$

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{h_1}(u - \psi)), w_h \rangle \leq \int_{\Omega} f w_h dx. \quad (7.51)$$

Ясно, что существует измеримое множество $E_2 \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E_2 \quad |T_h(v_1(x))| \leq h_1 - k. \quad (7.52)$$

Пусть

$$x \in \{|u - \psi - T_h(v_1)| < k\} \setminus (E \cup E_1 \cup E_2). \quad (7.53)$$

В силу изложенного выше при выводе утверждения (7.47) имеем $|u(x) - \varphi(x) - v(x)| < k$. Отсюда и из (7.45), (7.52) и (7.53) вытекает, что $(\psi + T_{h_1}(u - \psi))(x) = (\varphi + T_{k_1}(u - \varphi))(x)$. Теперь можно заключить, что выполнено равенство

$$\nabla(\psi + T_{h_1}(u - \psi)) = \nabla(\varphi + T_{k_1}(u - \varphi)) \quad \text{п. в. на } \{|u - \psi - T_h(v_1)| < k\}.$$

Тогда, используя определение оператора $\mathcal{A}$ и функции w_h , а также предложение 2.4, получаем $\langle \mathcal{A}(\psi + T_{h_1}(u - \psi)), w_h \rangle = \langle \mathcal{A}(\varphi + T_{k_1}(u - \varphi)), w_h \rangle$. Поэтому, учитывая (7.51), имеем

$$\langle \mathcal{A}(\varphi + T_{k_1}(u - \varphi)), w_h \rangle \leq \int_{\Omega} f w_h dx. \quad (7.54)$$

Принимая во внимание, что $T_h(v_1) \rightarrow v_1$ сильно в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, из соотношений (7.48) и (7.50) выводим, что

$$v + \varphi + T_k(u - v - \varphi) \in V. \quad (7.55)$$

Кроме того, из (7.54), (7.48) и сильной сходимости в $L^1(\Omega)$ последовательности $\{f w_h\}$ к $f T_k(u - v - \varphi)$ вытекает, что

$$\langle \mathcal{A}(\varphi + T_{k_1}(u - \varphi)), T_k(u - v - \varphi) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v - \varphi) dx.$$

Отсюда и из (7.55) следует, что $u - \varphi$ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предложение доказано.

Легко видеть, что если $\psi - \varphi \in L^\infty(\Omega)$, то существует измеримое множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $h \geq \|\psi - \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$ множество $\{|\varphi - \psi| > h\} \setminus E$ пусто. Поэтому, если $\psi - \varphi \in L^\infty(\Omega)$, условие (7.41) предложения 7.10 выполняется. Таким образом, предложение 7.2 является следствием предложения 7.10. Заметим, что условие (7.41) может выполняться и в случае, когда $\psi - \varphi \notin L^\infty(\Omega)$. Соответствующий пример будет рассмотрен в следующем параграфе.

Из предложения 7.10 и теоремы 7.2 выводим результат, обобщающий теорему 7.3.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi, \varphi \in V$. Пусть u – ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (A, V, f) , а w – φ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (A, V, f) . Предположим, что выполняется условие (7.41). Тогда $u = w$ п.в. на Ω .

§ 8. Примеры

В этом параграфе рассматриваются примеры выполнения основных предположений работы, а также условий, относящихся к отдельным ее результатам. Кроме того, даются примеры, связанные со свойствами T -решений исследованных вариационных неравенств.

Рассмотрим простой пример функций Каратеодори $a_i: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющих неравенствам (3.1)–(3.3).

ПРИМЕР 8.1. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть a_i – функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такая, что $a_i(x, \xi) = \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i-1} \operatorname{sign} \xi_i$ для любой пары $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Легко проверить, что a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства (3.1) и (3.2) при $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ и $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ на Ω .

Далее, заметим, что если $p > 1$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$(|\alpha|^{p-1} \operatorname{sign} \alpha - |\beta|^{p-1} \operatorname{sign} \beta)(\alpha - \beta) \geq (|\alpha|^{p-1} - |\beta|^{p-1})(|\alpha| - |\beta|).$$

Используя это неравенство, получаем, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо (3.3).

Теперь рассмотрим примеры замкнутых выпуклых множеств в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющих условию (3.5), или, что то же, условию (7.1). Очевидно, что простейшим таким примером является само пространство $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Ясно также, что это пространство удовлетворяет условию (3.4).

Обозначим через $\mathcal{K}$ совокупность всех непустых замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 8.2. Пусть K – отображение Ω в $\mathcal{K}$, $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $w(x) \in K(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Пусть

$$V = \{u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : u(x) \in K(x) \text{ для почти всех } x \in \Omega\}. \quad (8.1)$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условию (3.5).

Действительно, $w \in V$ и, следовательно, $V \neq \emptyset$. Замкнутость и выпуклость множества V вытекают из аналогичных свойств элементов области значений отображения K . Покажем, что множество V удовлетворяет условию (3.5). Пусть $u, v \in V$ и $k > 0$. Ясно, что $u - T_k(u - v) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E \quad u(x), v(x) \in K(x). \quad (8.2)$$

Зафиксируем $x \in \Omega \setminus E$. Предположим, что $|u(x) - v(x)| \leq k$. Тогда $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = v(x)$. Отсюда и из (8.2) следует, что $u(x) - T_k(u(x) - v(x))$ принадлежит $K(x)$. Пусть теперь $|u(x) - v(x)| > k$. Тогда

$$u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = u(x) - k \operatorname{sign}(u(x) - v(x)). \quad (8.3)$$

Предположим, что $u(x) - v(x) > 0$. Тогда $u(x) - k \in [v(x), u(x)]$. Отсюда, учитывая (8.2) и выпуклость множества $K(x)$, получаем, что $u(x) - k \in K(x)$. Из этого включения и (8.3) вытекает, что $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) \in K(x)$. Наконец, пусть $u(x) - v(x) < 0$. Тогда $u(x) + k \in [u(x), v(x)]$. Отсюда, учитывая (8.2) и выпуклость множества $K(x)$, выводим, что $u(x) + k \in K(x)$. Из этого включения и (8.3) следует, что $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) \in K(x)$. Проведенные рассуждения позволяют заключить, что $(u - T_k(u - v))(x) \in K(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Теперь ясно, что $u - T_k(u - v) \in V$. Значит, множество V удовлетворяет условию (3.5). Очевидно, что если $w \in L^\infty(\Omega)$, то множество V удовлетворяет и условию (3.4).

Дадим конкретные реализации множества из примера 8.2.

ПРИМЕР 8.3. Пусть $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $V = \{u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : u \geq w \text{ п. в. на } \Omega\}$. Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условию (3.5). Действительно, пусть K – отображение Ω в $\mathcal{K}$ такое, что $K(x) = [w(x), +\infty)$ для любого $x \in \Omega$. Очевидно, что $w(x) \in K(x)$ для любого $x \in \Omega$ и множество V представимо в виде (8.1). Отсюда и из примера 8.2 следует требуемое утверждение.

Заметим, что если $w_+ \in L^\infty(\Omega)$, то множество V удовлетворяет условию (3.4). Действительно, $w_+ \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $w_+ \geq w$ на Ω . Следовательно, $w_+ \in V$, и если $w_+ \in L^\infty(\Omega)$, то $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \emptyset$, а значит, множество V удовлетворяет условию (3.4). Заметим также, что если $w_+ \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ и $u - T$ -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, то в силу определения 3.1 для любого $k \geq 1$ имеем $w_+ - T_k(w_+ - u) \geq w$ п. в. на Ω и, следовательно, $u \geq w$ п. в. на Ω .

ПРИМЕР 8.4. Пусть $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $V = \{u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : u \leq w \text{ п. в. на } \Omega\}$. Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условию (3.5). Действительно, пусть K – отображение Ω в $\mathcal{K}$ такое, что $K(x) = (-\infty, w(x)]$ для любого $x \in \Omega$. Очевидно, что $w(x) \in K(x)$ для любого $x \in \Omega$ и множество V представимо в виде (8.1). Отсюда и из примера 8.2 следует требуемое утверждение.

Заметим, что если $w_- \in L^\infty(\Omega)$, то множество V удовлетворяет условию (3.4). Действительно, $w_- \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $w_- \geq -w$ на Ω . Следовательно, $-w_- \in V$, и если $w_- \in L^\infty(\Omega)$, то $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \emptyset$, а значит, множество V удовлетворяет условию (3.4).

ПРИМЕР 8.5. Пусть $w_1, w_2 \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, $w_1 \leq w_2$ п. в. на Ω и

$$V = \{u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : w_1 \leq u \leq w_2 \text{ п. в. на } \Omega\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет (3.5). Действительно, поскольку $w_1 \leq w_2$ п. в. на Ω , существует множество $E \subset \Omega$ меры

нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E$ имеем $w_1(x) \leq w_2(x)$. Пусть K – отображение Ω в $\mathcal{K}$ такое, что $K(x) = [w_1(x), w_2(x)]$ для любого $x \in \Omega \setminus E$. Ясно, что $w_1(x) \in K(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ и множество V представимо в виде (8.1). Отсюда и из примера 8.2 вытекает требуемое утверждение. Легко видеть, что если хотя бы одна из функций w_1, w_2 принадлежит $L^\infty(\Omega)$, то множество V удовлетворяет условию (3.4).

Далее, обозначим через $\mathcal{K}_n$ совокупность всех непустых замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$.

ПРИМЕР 8.6. Пусть K – отображение Ω в $\mathcal{K}_n$, $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $\nabla w(x) \in K(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Пусть

$$V = \{u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : \nabla u(x) \in K(x) \text{ для почти всех } x \in \Omega\}. \quad (8.4)$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условию (3.5). Действительно, $w \in V$ и, следовательно, $V \neq \emptyset$. Замкнутость и выпуклость множества V вытекают из аналогичных свойств элементов области значений отображения K . Покажем, что множество V удовлетворяет условию (3.5). Пусть $u, v \in V$ и $k > 0$. Ясно, что $u - T_k(u - v) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E \quad \nabla u(x), \nabla v(x) \in K(x). \quad (8.5)$$

Кроме того, в силу (2.4) имеем

$$\nabla(u - T_k(u - v)) = \nabla u - 1_{\{|u-v|<k\}} \cdot (\nabla u - \nabla v) \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Отсюда и из (8.5) следует, что $\nabla(u - T_k(u - v))(x) \in K(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Поэтому $u - T_k(u - v) \in V$. Значит, множество V удовлетворяет условию (3.5). Очевидно, что если $w \in L^\infty(\Omega)$, то множество V удовлетворяет и (3.4).

Приведем конкретные реализации множества из примера 8.6.

ПРИМЕР 8.7. Пусть φ – неотрицательная функция на Ω и

$$V = \{u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : |\nabla u| \leq \varphi \text{ п. в. на } \Omega\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условиям (3.4) и (3.5). Действительно, пусть K – отображение Ω в $\mathcal{K}_n$ такое, что $K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq \varphi(x)\}$ для любого $x \in \Omega$. Кроме того, пусть w – функция на Ω такая, что $w(x) = 0$ для любого $x \in \Omega$. Очевидно, что $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $\nabla w(x) \in K(x)$ для любого $x \in \Omega$. Ясно также, что множество V представимо в виде (8.4). Отсюда и из примера 8.6 следует требуемое утверждение.

ПРИМЕР 8.8. Пусть $w \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и

$$V = \{u \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : D_i u \geq D_i w \text{ п. в. на } \Omega, i = 1, \dots, n\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условию (3.5). Действительно, пусть K – отображение Ω в $\mathcal{K}_n$ такое, что для любого $x \in \Omega$ имеем

$$K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \geq D_i w(x), i = 1, \dots, n\}.$$

Легко видеть, что $\nabla w(x) \in K(x)$ для любого $x \in \Omega$ и множество V представимо в виде (8.4). Отсюда и из примера 8.6 вытекает требуемое утверждение. Очевидно, что если $w \in L^\infty(\Omega)$, то множество V удовлетворяет и условию (3.4).

Заметим, что если V_1 и V_2 – непустые замкнутые выпуклые множества в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющие условию (3.5) и имеющие непустое пересечение, то множество $V_1 \cap V_2$ также замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условию (3.5).

Учитывая последнее замечание и рассмотренные выше примеры, можно заключить, что непустые замкнутые выпуклые множества в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющие условию (3.5) или условиям (3.4) и (3.5) вместе, образуют довольно обширные классы.

Перейдем к примерам, связанным с материалом из § 6. Согласно следствию 6.3 условия (6.7) и (6.8) обеспечивают принадлежность T -решений рассматривавшихся вариационных неравенств пространству $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$. Некоторые примеры выполнения этих условий даны в следствиях 6.4, 6.5. Необходимым для выполнения условия (6.7) является условие (6.9) (см. замечание 6.1). В свою очередь, из (6.9) следуют неравенства (6.10)–(6.12). В связи с этим приведем пример, показывающий, что необходимое для выполнения (6.9) условие (6.11) является точным.

ПРИМЕР 8.9. Пусть α и β – вещественные числа такие, что

$$\frac{n^2}{n^2 - n + 1} < \alpha < 2 - \frac{1}{n}, \quad \frac{\alpha(n-1)}{(\alpha-1)n} < \beta < n, \quad (8.6)$$

и пусть $q_1 = \alpha$ и $q_i = \beta$, $i = 2, \dots, n$. Тогда $q_- = \alpha$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{n}(\frac{1}{\alpha} + \frac{n-1}{\beta})$. Используя это, из второго неравенства в (8.6) выводим, что имеет место неравенство (6.9). При этом за счет выбора α число q_- может быть сколь угодно близким к $n^2/(n^2 - n + 1)$. Кроме того, в данной ситуации $q_- < 2 - 1/n$, а $q_+ > 2 - 1/n$.

Заметим, что в силу сказанного в замечании 6.2 необходимое для выполнения (6.9) условие (6.10) также является точным.

Рассмотрим пример, в котором $q_- \neq q_+$ и нарушение условия (6.9) сопровождается тем, что T -решение соответствующего вариационного неравенства не принадлежит пространству $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$.

ПРИМЕР 8.10. Пусть $n \geq 3$ и α – вещественное число такое, что

$$2 - \frac{4n+1}{4n^2} < \alpha < 2 - \frac{1}{n}. \quad (8.7)$$

В силу неравенства (8.7) имеем $0 < n\alpha - 2(n-1) < 1$. Следовательно,

$$1 < \alpha < \frac{\alpha}{n\alpha - 2(n-1)}. \quad (8.8)$$

Пусть y_+ – положительный корень уравнения

$$(n^2 - 1 - \alpha n)y^2 - [\alpha(n^2 - 2n - 1) + n - 1]y - \alpha = 0.$$

Ввиду неравенства (8.7) имеем

$$\frac{\alpha}{n\alpha - 2(n-1)} < y_+ < n. \quad (8.9)$$

Из неравенств (8.8) и (8.9) вытекает, что $\alpha < y_+$. Пусть β – вещественное число такое, что

$$\alpha < \beta < y_+. \quad (8.10)$$

Тогда в силу определения числа y_+ имеем

$$(n^2 - 1 - \alpha n)\beta^2 - [\alpha(n^2 - 2n - 1) + n - 1]\beta - \alpha < 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\alpha(\beta - 1)}{n} \left(\frac{n-1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) < \alpha(n-2) - \beta(n-1-\alpha). \quad (8.11)$$

Пусть $q_i = \alpha$, $i = 1, \dots, n-1$, и $q_n = \beta$. Заметим, что ввиду неравенств (8.8)–(8.10) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $q_i \in (1, n)$. Ясно, что $\frac{1}{q} = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$. Отсюда и из (8.11) вытекает, что

$$(\beta - \alpha) \frac{(n-1)\bar{q}}{\alpha(\bar{q}-1)} < \beta - 1.$$

Заметим, что, поскольку $n \geq 3$, в силу (8.7) имеем $\alpha > 3/2$. Поэтому $2 - \alpha < \alpha - 1$, а также $2 - \beta < \beta - 1$. Пусть τ и γ – вещественные числа такие, что

$$2 - \alpha < \tau < \alpha - 1, \quad (8.12)$$

$$\max \left\{ (\beta - \alpha) \frac{(n-1)\bar{q}}{\alpha(\bar{q}-1)}, 2 - \beta \right\} < \gamma < \beta - 1. \quad (8.13)$$

Обозначим через B открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Пусть $\Omega = B$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ функция ν_i определена на Ω формулой $\nu_i(x) = |x_i|^\tau$, $x \in \Omega$, а функция ν_n определена на Ω формулой $\nu_n(x) = |x_n|^\gamma$, $x \in \Omega$. Заметим, что неравенства $0 < \tau < \alpha - 1$ и $0 < \gamma < \beta - 1$, вытекающие из (8.12) и (8.13), обеспечивают выполнение включений (2.1).

Далее, пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция a_i определена на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$a_i(x, \xi) = \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i-1} \operatorname{sign} \xi_i, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

и пусть $V = \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Положим

$$\sigma = \frac{(n-1)\bar{q}}{\alpha(\bar{q}-1)} - 1.$$

Поскольку $\alpha < \bar{q} < n$, имеем $\sigma > 0$.

Пусть f – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (\tau + \alpha - 1)\sigma^{\alpha-1}|x|^{-(\sigma+2)(\alpha-1)} \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^{\tau+\alpha-2} \\ &\quad - (\sigma + 2)(\alpha - 1)\sigma^{\alpha-1}|x|^{-(\sigma+2)(\alpha-1)-2} \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^{\tau+\alpha} \\ &\quad + (\gamma + \beta - 1)\sigma^{\beta-1}|x|^{-(\sigma+2)(\beta-1)} |x_n|^{\gamma+\beta-2} \\ &\quad - (\sigma + 2)(\beta - 1)\sigma^{\beta-1}|x|^{-(\sigma+2)(\beta-1)-2} |x_n|^{\gamma+\beta}. \end{aligned}$$

Для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq (n-1)(\sigma+4)\sigma^{\alpha-1}|x|^{-[(\sigma+1)(\alpha-1)-\tau+1]} \\ &\quad + (n-1)(\sigma+4)\sigma^{\beta-1}|x|^{-[(\sigma+1)(\beta-1)-\gamma+1]}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Легко видеть, что

$$(\sigma+1)(\alpha-1)+1 < n. \quad (8.15)$$

Отсюда, учитывая положительность числа τ , получаем неравенство

$$(\sigma+1)(\alpha-1)-\tau+1 < n. \quad (8.16)$$

Ввиду (8.13) имеем $\gamma > (\beta-\alpha)(\sigma+1)$. Из этого неравенства и (8.15) вытекает, что

$$(\sigma+1)(\beta-1)-\gamma+1 < n. \quad (8.17)$$

Оценка (8.14) и неравенства (8.16) и (8.17) позволяют заключить, что $f \in L^1(\Omega)$.

Пусть u – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u(x) = |x|^{-\sigma} - 1.$$

Покажем, что функция u есть T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

Обозначим через $\bar{u}$ сужение функции u на $\Omega \setminus \{0\}$. Имеем $\bar{u} \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$ и для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$D_i \bar{u}(x) = -\sigma x_i |x|^{-\sigma-2}. \quad (8.18)$$

Зафиксируем произвольное $k > 0$, и пусть z – функция из $C^1(\mathbb{R})$ со свойствами: $z(s) = s$, если $|s| \leq k$; $z(s) = \frac{3}{2}k \operatorname{sign} s$, если $|s| \geq 2k$; $0 \leq z' \leq 1$ на $\mathbb{R}$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ пусть φ_j – функция из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \varphi_j \leq 1$ в Ω ; $\varphi_j(x) = 1$, если $|x| \leq 1 - \frac{1}{2j}$; $\varphi_j(x) = 0$, если $1 - \frac{1}{3j} \leq |x| < 1$; $|\nabla \varphi_j| \leq \hat{c}j$ на Ω , где положительная постоянная $\hat{c}$ зависит только от n . Пусть теперь u_j – функция на Ω для любого $j \in \mathbb{N}$ такая, что

$$u_j(x) = \begin{cases} z(\bar{u}(x)\varphi_j(x)), & \text{если } x \in \Omega \setminus \{0\}, \\ \frac{3}{2}k, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В силу свойств функций $z, \bar{u}$ и φ_j , $j \in \mathbb{N}$, имеем $\{u_j\} \subset C_0^1(\Omega)$. Поэтому, учитывая очевидное включение $C_0^1(\Omega) \subset \dot{W}^{1,q_+}(\Omega)$ и вытекающее из ограниченности функций ν_i , $i = 1, \dots, n$, включение $\dot{W}^{1,q_+}(\Omega) \subset \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, имеем $\{u_j\} \subset \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, но тогда и $\{T_k(u_j)\} \subset \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Заметим, что $T_k(z(u(x))) = T_k(u(x))$, $u_j(x) \rightarrow z(u(x))$ для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$, следовательно,

$$T_k(u_j) \rightarrow T_k(u) \quad \text{сильно в } L^1(\Omega). \quad (8.19)$$

Кроме того, в силу (2.4), свойств функций φ_j , $j \in \mathbb{N}$, и z , определения функции u и (8.18) последовательность $\{T_k(u_j)\}$ ограничена в $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда, учитывая предложения 2.2, 2.1, а также (8.19), выводим, что $T_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Теперь можно заключить, что

$$u \in \dot{T}^{1,q}(\nu, \Omega). \quad (8.20)$$

Ввиду включения (8.20), предложения 2.4 и определения функции u имеем: если $i \in \{1, \dots, n\}$, то для почти всех $x \in \Omega$

$$\delta_i u(x) = -\sigma x_i |x|^{-\sigma-2}. \quad (8.21)$$

Далее, пусть w_i – функция на $\Omega \setminus \{0\}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ такая, что для $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$w_i(x) = a_i(x, \nabla \bar{u}(x)).$$

Учитывая определение функций a_i , $i = 1, \dots, n$, равенство (8.18) и неравенства $\tau > 2 - \alpha$ и $\gamma > 2 - \beta$, справедливые в силу (8.12) и (8.13), устанавливаем, что

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad w_i \in C^1(\Omega \setminus \{0\}), \quad (8.22)$$

$$\forall x \in \Omega \setminus \{0\} \quad \sum_{i=1}^n D_i w_i(x) = -f(x). \quad (8.23)$$

Положим $G_j = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/(1+j) < |x| < 1\}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Используя (8.22), формулу интегрирования по частям, определение функций w_i , $i = 1, \dots, n$, а также (8.16), (8.17) и (8.23), получаем, что для любой функции $v \in C_0^1(\Omega)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{G_j} w_i D_i v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (8.24)$$

Пусть теперь $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ввиду (8.20) и предложения 2.5 имеем $T_k(u - v) \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, следовательно,

$$v - T_k(v - u) \in V. \quad (8.25)$$

Кроме того, используя (8.18), (8.20), (8.21), предложения 2.4, 2.5, определение функций w_i , $i = 1, \dots, n$, и оператора $\mathcal{A}$ и то, что $\text{meas}(\Omega \setminus G_j) \rightarrow 0$, устанавливаем равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{G_j} w_i D_i T_k(u - v) \, dx = \langle \mathcal{A} T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle. \quad (8.26)$$

С другой стороны, посредством (8.24) находим, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{G_j} w_i D_i T_k(u-v) dx = \int_{\Omega} f T_k(u-v) dx.$$

Отсюда и из (8.26) вытекает, что $\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u-v) \rangle = \int_{\Omega} f T_k(u-v) dx$. Это равенство и включения (8.20), (8.25) позволяют заключить, что функция u есть T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

Заметим, что в силу (8.21) для почти всех $x \in \Omega$

$$|\delta u|(x) = \sigma |x|^{-(\sigma+1)}. \quad (8.27)$$

Отметим также, что неравенства $\beta > \frac{\alpha}{n\alpha-2(n-1)}$ и $q_- > \frac{(n-1)\bar{q}}{n(\bar{q}-1)}$ равносильны. То же самое верно относительно неравенств $q_- > \frac{(n-1)\bar{q}}{n(\bar{q}-1)}$ и $\sigma + 1 < n$.

Таким образом, если $\beta > \frac{\alpha}{n\alpha-2(n-1)}$, то $\sigma + 1 < n$. Тогда $|\delta u| \in L^1(\Omega)$ ввиду (8.27), следовательно, учитывая предложение 2.6, имеем $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$. Если же $\beta \leq \frac{\alpha}{n\alpha-2(n-1)}$, то $\sigma + 1 \geq n$. Тогда $|\delta u| \notin L^1(\Omega)$ в силу (8.27). Следовательно, $u \notin \dot{W}^{1,1}(\Omega)$, тем более, $u \notin \dot{W}^{1,1}(\Omega)$.

Как видно, при переходе от значений β , больших $\beta_0 = \frac{\alpha}{n\alpha-2(n-1)}$, к значениям, не превосходящим β_0 , неравенство $q_- > \frac{(n-1)\bar{q}}{n(\bar{q}-1)}$ (т. е. (6.9)) меняется на противоположное. При этом и свойство принадлежности T -решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, пространству $\dot{W}^{1,1}(\Omega)$, справедливое для $\beta > \beta_0$, перестает быть верным для $\beta \leq \beta_0$.

В заключение рассмотрим простой пример, иллюстрирующий выполнение условий (7.36) и (7.41) для сдвиговых T -решений вариационных неравенств, причем для условия (7.41) разность соответствующих функций ψ и φ не будет принадлежать $L^\infty(\Omega)$.

ПРИМЕР 8.11. Пусть $n \geq 3$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $q_i = 2$ и $\nu_i = 1$ на Ω . Легко видеть, что $\dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) = \dot{W}^{1,2}(\Omega)$.

Далее, пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция a_i определена на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ следующим образом: $a_i(x, \xi) = \xi_i$, $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Зафиксируем $\alpha \in (0, (n-2)/2)$, и пусть ψ – функция на Ω такая, что $\psi(0) = 0$ и для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$\psi(x) = |x|^{-\alpha} \left(\ln \frac{e}{|x|} \right)^{-1} - 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\psi \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Положим $V = \{v \in \dot{W}^{1,q}(\nu, \Omega) : v \geq \psi \text{ п. в. на } \Omega\}$. В силу изложенного в примере 8.3 множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условию (7.1). Очевидно также, что $\psi \in V$ и $V \cap L^\infty(\Omega) = \emptyset$.

Пусть f – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$f(x) = |x|^{-n} \left\{ (n-2) \left(\ln \frac{e}{|x|} \right)^{-2} - 2 \left(\ln \frac{e}{|x|} \right)^{-3} \right\}.$$

Имеем $f \in L^1(\Omega)$, и для любого $\lambda > 1$ функция f не принадлежит $L^\lambda(\Omega)$.

Пусть u — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u(x) = |x|^{2-n} \left(\ln \frac{e}{|x|} \right)^{-1} - 1.$$

Функция u есть ψ -сдвиговое T -решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Доказательство этого факта дано в [42].

Теперь положим $h_0 = 3^{\alpha/(n-2-\alpha)}$ и зафиксируем произвольное $h \geq h_0$. Ясно, что

$$h^{(n-2-\alpha)/\alpha} \geq 3. \quad (8.28)$$

Пусть $x \in \{|\psi| > h\}$. Тогда $x \in \Omega \setminus \{0\}$ и

$$|x|^{-\alpha} \left(\ln \frac{e}{|x|} \right)^{-1} > h. \quad (8.29)$$

Ввиду неравенств (8.29) и (8.28) имеем $|x|^{2-n+\alpha} > 3$. Отсюда и из (8.29) получаем, что $|u(x) - \psi(x)| > 2h$. Это позволяет заключить, что

$$\forall h \geq h_0 \quad \{|\psi| > h\} \subset \{|u - \psi| > 2h\}. \quad (8.30)$$

Значит, условие (7.36) выполняется.

Наконец, положим $\varphi = \psi + \psi_+$. Ясно, что $\varphi \in V$ и $\psi - \varphi \notin L^\infty(\Omega)$. Кроме того, для любого $h > 0$ имеем $\{|\varphi - \psi| > h\} \subset \{|\psi| > h\}$. Отсюда и из (8.30) следует, что условие (7.41) выполняется.

Список литературы

1. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
2. Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure Appl. Math., **88**, Academic Press, New York–London, 1980.
3. Ph. Bénilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vazquez, “An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **22**:2 (1995), 241–273.
4. L. Boccardo, Th. Gallouët, “Nonlinear elliptic equations with right hand side measures”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:3–4 (1992), 641–655.
5. L. Boccardo, Th. Gallouët, “Summability of the solutions of nonlinear elliptic equations with right hand side measures”, *J. Convex Anal.*, **3**:2 (1996), 361–365.
6. L. Boccardo, Th. Gallouët, P. Marcellini, “Anisotropic equations in L^1 ”, *Differential Integral Equations*, **9**:1 (1996), 209–212.
7. L. Boccardo, Th. Gallouët, L. Orsina, “Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **13**:5 (1996), 539–551.
8. F. Murat, “Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales”, *Publ. Laboratoire d’Analyse Numérique*, R93023, Univ. Paris VI, Paris, 1993.

9. F. Murat, “Équations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure”, *Actes du 26ème Congrès National d'Analyse Numérique* (Les Karelis, France, 1994), A12–A24.
10. G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, “Definition and existence of renormalized solutions of elliptic equations with general measure data”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325**:5 (1997), 481–486.
11. G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, “Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **28**:4 (1999), 741–808.
12. M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M. M. Porzio, “Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side a measure”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **82**:1 (2003), 90–124.
13. A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti, “Nonlinear elliptic equations with lower-order terms”, *Differential Integral Equations*, **14**:10 (2001), 1169–1180.
14. A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, G. Trombetti, “Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **182**:1 (2003), 53–79.
15. A. Porretta, “Nonlinear equations with natural growth terms and measure data”, *Proceedings of the 2002 Fez conference on partial differential equations*, Electron. J. Differ. Equ. Conf., **9**, Southwest Texas State Univ., San Marcos, TX, 2002, 183–202.
16. S. Segura de León, “Existence and uniqueness for L^1 data of some elliptic equations with natural growth”, *Adv. Differential Equations*, **8**:11 (2003), 1377–1408.
17. A. A. Kovalevsky, “General conditions for limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1 -data”, *Nonlinear Anal.*, **64**:8 (2006), 1885–1895.
18. А. А. Ковалевский, “Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1 -данными”, *СМФН*, **16** (2006), 47–67; англ. пер.: A. A. Kovalevsky, “A priori properties of solutions of nonlinear equations with degenerate coercivity and L^1 -data”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **149**:5 (2008), 1517–1538.
19. L. Boccardo, Th. Gallouët, “Problèmes unilatéraux avec données dans L^1 ”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **311**:10 (1990), 617–619.
20. L. Boccardo, G. R. Cirmi, “Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1 data”, *J. Convex Anal.*, **6**:1 (1999), 195–206.
21. P. Oppezzi, A. M. Rossi, “Existence of solutions for unilateral problems with multi-valued operators”, *J. Convex Anal.*, **2**:1–2 (1995), 241–261.
22. P. Oppezzi, A. M. Rossi, “Esistenza di soluzioni per problemi unilateri con dato misura o in L^1 ”, *Ricerche Mat.*, **45**:2 (1996), 491–513.
23. P. Oppezzi, A. M. Rossi, “Renormalized solutions for divergence problems with L^1 data”, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **46**, suppl. (1998), 889–914.
24. P. Oppezzi, M. Rossi, “Unilateral problems with measure data: links and convergence”, *Differential Integral Equations*, **14**:9 (2001), 1051–1076.
25. P. Oppezzi, A. M. Rossi, “Non coercive unilateral problems with lower order terms and measure data”, *Ricerche Mat.*, **51**:2 (2002), 357–379.
26. Ch. Leone, “Existence and uniqueness of solutions for nonlinear obstacle problems with measure data”, *Nonlinear Anal.*, Ser. A: Theory Methods, **43**:2 (2001), 199–215.
27. B. Brandolini, L. Randazzo, “An existence result for a class of variational inequalities with L^1 data”, *Ricerche Mat.*, **50**:2 (2001), 195–207.
28. A. Benkirane, J. Bennouna, “Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1 -data in Orlicz spaces”, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, **16** (2004), 87–102.
29. L. Aharouch, Y. Akdim, E. Azroul, “Quasilinear degenerate elliptic unilateral problems”, *Abstr. Appl. Anal.*, 2005, № 1, 11–31.

30. L. Aharouch, Y. Akdim, "Strongly nonlinear elliptic unilateral problems without sign condition and L^1 data", *J. Convex Anal.*, **13**:1 (2006), 135–149.
31. L. Aharouch, E. Azroul, M. Rhoudaf, "Nonlinear unilateral problems in Orlicz spaces", *Appl. Math. (Warsaw)*, **33**:2 (2006), 217–241.
32. A. Elmahi, D. Meskine, "Elliptic inequalities with lower order terms and L^1 data in Orlicz spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **328**:2 (2007), 1417–1434.
33. Y. Atik, J.-M. Rakotoson, "Local T -sets and degenerate variational problems. I", *Appl. Math. Lett.*, **7**:4 (1994), 49–53.
34. Y. Atik, "Local T -sets and degenerate quasilinear elliptic bilateral problems with an L^1 -datum", *Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods*, **38**:7 (1999), 827–867.
35. L. Aharouch, E. Azroul, A. Benkirane, "Quasilinear degenerated equations with L^1 datum and without coercivity in perturbation terms", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2006, № 19.
36. А. А. Ковалевский, "Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 -правыми частями", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 27–80; англ. пер.: A. A. Kovalevskii, "Entropy solutions of the Dirichlet problem for a class of non-linear elliptic fourth-order equations with right-hand sides in L^1 ", *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 231–283.
37. А. А. Ковалевский, "О суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 35–48; англ. пер.: A. A. Kovalevskii, "On the summability of entropy solutions for the Dirichlet problem in a class of non-linear elliptic fourth-order equations", *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 881–894.
38. A. Kovalevsky, F. Nicolosi, "Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic fourth-order equations with L^1 -right-hand sides", *Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods*, **50**:5 (2002), 581–619.
39. A. Kovalevsky, F. Nicolosi, "Solvability of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic equations with L^1 -right-hand sides", *Nonlinear Anal.*, **59**:3 (2004), 347–370.
40. A. Kovalevsky, F. Nicolosi, "Solvability of Dirichlet problem for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1 -data", *Nonlinear Anal.*, **47**:1 (2001), 435–446.
41. Ю. С. Горбань, "Существование решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств с L^1 -правыми частями", *Нелинейные граничные задачи*, **13** (2003), 63–77.
42. А. А. Ковалевский, Ю. С. Горбань, *Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с L^1 -данными*, Препринт 2007.01, Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 2007.
43. A. A. Kovalevsky, Yu. S. Gorban, "Degenerate anisotropic variational inequalities with L^1 -data", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **345**:8 (2007), 441–444.
44. D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
45. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
46. А. А. Ковалевский, "О точном условии предельной суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с L^1 -правыми частями", *Укр. матем. вісн.*, **2**:4 (2005), 502–540; англ. пер.: A. A. Kovalevsky, "On a sharp condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1 -right-hand sides", *Ukr. Math. Bull.*, **2**:4 (2005), 507–545.
47. M. Troisi, "Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi", *Ricerche Mat.*, **18** (1969), 3–24.

48. А. А. Ковалевский, “О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 ”, *Матем. заметки*, **70**:3 (2001), 375–385; англ. пер.: А. А. Kovalevskii, “Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from classes close to L^1 ”, *Math. Notes*, **70**:3 (2001), 337–346.
49. А. А. Ковалевский, “О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из логарифмических классов”, *Матем. заметки*, **74**:5 (2003), 676–685; англ. пер.: А. А. Kovalevskii, “Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from logarithmic classes”, *Math. Notes*, **74**:5 (2003), 637–646.

А. А. КОВАЛЕВСКИЙ (А. А. KOVALEVSKY)
Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: alexkv1@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило в редакцию
03.03.2008

Ю. С. ГОРБАНЬ (YU. S. GORBAN)
Донецкий национальный университет, Украина