Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Трофимов, Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 1, 175–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 07:26:10

УДК 512.542+512.544.42

В. И. Трофимов

Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. II

Статья является второй частью работы, в которой завершается описание конечных стабилизаторов вершин связных графов с проективными подорбитами и как следствие стабилизаторов вершин связных конечных графов в транзитивных на 2-дугах группах автоморфизмов. В этой части завершается рассмотрение случая коллинеации при условии, что проективная размерность подорбиты равна 3, а также случая корреляции.

Библиография: 11 наименований.

Введение

Настоящая статья является второй частью работы, общие цели которой были изложены во введении к первой части [1]. Используемые здесь обозначения те же, что в [1], [2]. В частности, если Γ – неориентированный связный граф (в работе под неориентированным графом понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер), то $d_\Gamma(\cdot, \cdot)$ – естественная метрика на множестве $V(\Gamma)$ его вершин, и для $x \in V(\Gamma)$ и $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Gamma_i(x) &= \{y \in V(\Gamma) \mid d_\Gamma(x, y) \leq i\}, \\ \Gamma(x) &= \{y \in V(\Gamma) \mid [x, y] \in E(\Gamma)\} = \Gamma_1(x) \setminus \{x\}.\end{aligned}$$

Если, кроме того, $G \leq \text{Aut } \Gamma$, то для $x, y, \dots \in V(\Gamma)$ и $X, Y, \dots \subseteq V(\Gamma)$ через $G(x, y, \dots)$, $G_i(x, y, \dots)$ обозначаются поэлементные стабилизаторы в G множеств $\{x, y, \dots\}$, $\Gamma_i(x) \cup \Gamma_i(y) \cup \dots$ соответственно, а через $G(x, y, \dots, X, Y, \dots)$ – стабилизатор в $G(x, y, \dots)$ множеств $X, Y, \dots$; для $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *l-дугой* неориентированного графа Γ называется такая последовательность $(x_0, \dots, x_l)$ его вершин, что $x_{i+1} \in \Gamma(x_i)$ для всех $0 \leq i < l$ и $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ для всех $0 < i < l$.

Отсылая за соответствующими мотивировками к [3], [1], напомним, что в работе исследуется строение группы $G(x)$ при следующем предположении.

ОСНОВНОЕ УСЛОВИЕ. Γ – неориентированный связный граф, G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ , $x \in V(\Gamma)$, группа $G(x)$ конечна, группа $G(x)^{\Gamma(x)}$ (ограничение $G(x)$ на множество $\Gamma(x)$) содержит нормальную подгруппу, подстановочно изоморфную группе $\text{PSL}_n(q)$, где $n \geq 2$ и q – степень

Поддержано грантом Президента РФ (№ 96-15-96831) и грантом РФФИ (№ 96-01-00488).

простого числа p , в естественном дважды транзитивном представлении степени $1 + q + \dots + q^{n-1}$ на точках проективного пространства $\text{PG}_{n-1}(q)$.

Если Γ и G удовлетворяют основному условию, то для произвольной вершины $z \in V(\Gamma)$ на множестве $\Gamma(z)$ однозначно определена структура проективного пространства $\text{PG}_{n-1}(q)$ такого, что $G(z)^{\Gamma(z)}$ есть его группа коллинеаций. При этом для $z' \in \Gamma(z)$ на множестве $[z : z']$ прямых проективного пространства $\Gamma(z)$, содержащих точку z' , естественным образом определена структура проективного пространства $\text{PG}_{n-2}(q)$.

Предположим, что для Γ и G выполняется основное условие, причем группа G действует интранзитивно на множестве 3-дуг графа Γ и $n \geq 3$. Тогда (см. [2, ч. I, введение]) для произвольного ребра $[z, z'] \in E(\Gamma)$ существует единственная биекция $\varphi_{z,z'} : [z : z'] \rightarrow [z' : z]$, перестановочная с действием группы $G(z, z')$, причем $\varphi_{z,z'}$ является (независимо от выбора ребра $[z, z']$) коллинеацией или корреляцией проективного пространства $[z : z']$ на проективное пространство $[z' : z]$. В соответствии с этим при $n \geq 4$ различают *случай коллинеации*, когда $\varphi_{z,z'}$ – коллинеация для всех $[z, z'] \in E(\Gamma)$, и *случай корреляции*, когда $\varphi_{z,z'}$ – корреляция для всех $[z, z'] \in E(\Gamma)$.

После работ [4], [2] и ч. I настоящей работы [1] для завершения описания групп $G(x)$ при выполнении основного условия остается рассмотреть случай коллинеации при $q = 2$ и случай корреляции при $p = 2, 3$, причем в [2, ч. I, теорема 3] доказано, что в случае корреляции $G_2(x, y) = 1$ при $p = 2$ и $G_3(x, y) = 1$ при $p = 3$, где $y \in \Gamma(x)$. Отметим также, что строение групп $G(x)$ при выполнении основного условия известно в случае $G_2(x) = 1$ (см. [5], [1]). В приложении, помещенном в конце настоящей статьи¹, мы, используя [2, ч. I, теорема 3], завершаем рассмотрение случая корреляции, получая описание $G(x)$ в этом случае при $p = 2, 3$ и $G_2(x) \neq 1$. Основная же часть настоящей статьи посвящена рассмотрению случая коллинеации при $q = 2, n = 4$ (см. теорему ниже). Случай коллинеации при $q = 2, n = 5$ и случай коллинеации при $q = 2, n \geq 6$ будут рассмотрены в ч. III и ч. IV настоящей работы соответственно. Этим будет завершено описание групп $G(x)$ при выполнении основного условия.

Если выполнено основное условие, причем группа G действует интранзитивно на множестве 3-дуг графа Γ и $q = 2$, то согласно [4, предложение 2.3, 2)] (как было отмечено в [2, ч. I, §2], предложения 2.1–2.6 из [4] справедливы при любом q) имеем $G_1(x) = O_2(G(x))$ и $G(x)/O_2(G(x)) = G(x)/G_1(x) \cong \text{SL}_n(2)$. *Естественным (дуальным к естественному) $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модулем* называется нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль порядка 2^n такой, что для $y \in \Gamma(x)$ группа $G(x, y)/G_1(x)$ оставляет на месте его ненулевой вектор (соответственно гиперплоскость). Говоря о некоторой группе V , на которой действует группа $G(x)$, как о $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуле, мы подразумеваем, что V – элементарная абелева 2-группа, централизованная $G_1(x)$, с $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модульной структурой, определяемой естественным действием на ней группы $G(x)/G_1(x)$.

¹Приложение следует рассматривать как дополнение ко всей работе, частью II которой статья является.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ и G удовлетворяют основному условию, причем имеет место случай коллинеации, $q = 2$ и $n = 4$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) $G_2(x) = 1$;
- 2) $G_4(x) = 1$, $G_3(x)$ – группа порядка 2, $G_2(x)/G_3(x)$ – естественный $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модуль, $G_1(x)/G_2(x)$ – внешний квадрат естественного $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модуля;
- 3) $G_4(x) = 1$, $G_3(x)$ – дуальный к естественному $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модулю, $G_2(x)/G_3(x)$ – естественный $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модуль, $G_1(x)/G_2(x)$ – внешний квадрат естественного $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модуля.

Отметим, что в каждом из случаев 2), 3) теоремы группа $G(x)$ определяется единственным (с точностью до изоморфизма) образом (см. замечание 4.1).

Примером группы G , для которой имеет место случай 2) теоремы, является спорадическая простая группа Co_2 . Примером группы G , для которой имеет место случай 3) теоремы, является спорадическая простая группа J_4 .

§ 1. Предварительные замечания и используемые результаты

Как было указано выше, в настоящей работе используются обозначения из [2]. Так (см. [2, ч. I, § 4]), если для дерева Γ и группы его автоморфизмов G выполнено основное условие, причем имеет место случай коллинеации, то для $z', z'' \in V(\Gamma)$ через $\Phi_{z'}(z'')$ обозначается подпространство проективного пространства $\Gamma(z')$, определяемое индуктивно по $d_\Gamma(z', z'')$ следующим образом: $\Phi_{z'}(z'') = \emptyset$ при $z' = z''$; если $d_\Gamma(z', z'') \geq 1$ и $z' = z_0, z_1, \dots, z_{d_\Gamma(z', z'')} = z''$ – путь графа Γ длины $d_\Gamma(z', z'')$ (однозначно определенный, поскольку Γ – дерево), то $\Phi_{z'}(z'') = \varphi_{z_1, z'}(\langle \Phi_{z_1}(z''), z' \rangle)$. Кроме того напомним, что в этом случае для $z \in V(\Gamma)$ и подпространства Z проективного пространства $\Gamma(z)$ через Γ_Z обозначается поддерево дерева Γ с множеством вершин $V(\Gamma_Z) = \{z' \in V(\Gamma) \mid \Phi_z(z') \subseteq Z\}$. Ограничение на множество $V(\Gamma_Z)$ его стабилизатора в группе G является группой автоморфизмов Γ_Z , которая обозначается через G^{Γ_Z} .

Следующий результат легко извлечь из [6] (см. также [7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть Γ и G удовлетворяют основному условию, причем группа G действует интранзитивно на множестве 3-дуг графа Γ , $n = 3$ и $q = 2$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) $G_2(x) = 1$;
- 2) $G_3(x) = 1$, и группа $G(x)$ есть расщепляемое расширение элементарной абелевой группы $G_1(x)$ порядка 2^4 посредством группы $G(x)/G_1(x) \cong \text{SL}_3(2)$ такое, что относительно естественного действия $G(x)/G_1(x)$ группа $G_1(x)$ является (в аддитивной записи) прямой суммой естественного $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модуля и тривиального $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_2(x)$ порядка 2; при этом для произвольной 2-дуги (x, x', x'') графа Γ группа $G_2(x)$ действует на $\Gamma(x'')$ как $T_{x''}(x', \varphi_{x', x''}(\langle x, x'' \rangle))$, и для каждого элемента $h \in G_1(x) \setminus G_2(x)$ найдется вершина $x_h \in \Gamma(x)$ такая, что h действует на $\Gamma(x')$ тривиально при $x' = x_h$ и как неединичный элемент из $T_{x'}(x, \varphi_{x, x'}(\langle x_h, x' \rangle))$ при $x' \in \Gamma(x) \setminus \{x_h\}$.

Кроме того, нам потребуется следующее простое утверждение [8, лемма 2.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть T – неприводимая собственная подгруппа группы $SL_n(2)$ (действующей на естественном модуле), порожденная трансвекциями. Тогда различные (нетривиальные) трансвекции из T имеют различные оси и центры.

§ 2. Начало доказательства теоремы

С учетом [2, ч. I, § 1] теорему достаточно доказать в случае, когда Γ – дерево. В связи с этим, переходя к доказательству теоремы, предположим, что дерево Γ и группа его автоморфизмов G удовлетворяют условию теоремы и $G_2(x) \neq 1$.

Поскольку для Γ и G выполняется условие $(*)$ из [2, ч. I, § 4], причем $G_2(x) \neq 1$, то [2, ч. I, предложение 4.1] и предложение 1.1 влекут справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2.1. Если $z \in V(\Gamma)$ и Z – плоскость проективного пространства $\Gamma(z)$, то утверждение 2) предложения 1.1 справедливо для графа Γ_Z и группы его автоморфизмов G^{Γ_Z} .

Кроме того, выполнение условия $(*)$ из [2, ч. I, § 4] и $G(x)^{\Gamma(x)} \cong SL_4(2)$ позволяют согласно [2, ч. I, § 4] предполагать выполненным в дальнейшем условие $(**)$ из [2, ч. I, § 5]. В соответствии с этим через g далее обозначается такой элемент группы G , что $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, где $x_i = g^i(x)$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ – регулярный g -трек.

Напомним (см. [4, предложение 2.3]), что если $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$, то $G_1(z_0)^{\Gamma(z_1)} = T_{z_1}(z_0)$, причем $G_1(z_0) = O_2(G(z_0))$.

ЛЕММА 2.2. Если $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$, то:

- 1) $G_1(z_0, z_1)^{\Gamma(z)} = T_z(z_1, \varphi_{z_1, z}(\langle z_0, z \rangle))$ для $z \in \Gamma(z_1) \setminus \{z_0\}$;
- 2) для произвольной прямой $Z \in [z_1 : z_0]$ в группе $G_1(z_0, z_1)$ найдется элемент, действующий на $\Gamma(z)$ тривиально при $z \in Z$ и как неединичный элемент из $T_z(z_1, \varphi_{z_1, z}(\langle Z, z \rangle))$ при $z \in \Gamma(z_1) \setminus Z$; каждый элемент из $G_1(z_0, z_1) \setminus G_2(z_1)$ имеет указанное действие при подходящем выборе прямой из $[z_1 : z_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) справедливо в силу замечания 2 из [2, ч. I, § 4] (в котором при печати допущена опечатка: вместо $\leq$ должно быть $\geq$; см. [9]). Справедливость утверждения 2) устанавливается дословным повторением доказательства утверждения 1) леммы 3 из [2, ч. I, § 6] (при этом вместо используемых там лемм 1 и 2, 2) следует использовать лемму 2.1 и уже доказанное утверждение 1)).

ЛЕММА 2.3. $G_1(x)/G_2(x)$ – внешний квадрат естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in \Gamma(x)$. Так как $|G_1(x)^{\Gamma(y)}| = |T_y(x)| = 2^3$ и согласно лемме 2.2 $|G_1(x, y)^{\Gamma_2(x)}| = 2^3$, то для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль $G_1(x)/G_2(x)$ неприводим. Пусть $K \trianglelefteq G(x)$ и

$G_2(x) < K \leq G_1(x)$. Тогда в силу $K^{\Gamma(y)} \leq T_y(x)$ группа $G(x)/G_1(x) \cong \text{SL}_4(2)$ действует нетривиально на $K/G_2(x)$, и потому $|K/G_2(x)| \geq 2^4$. Из $|K^{\Gamma(y)}| \leq |G_1(x)^{\Gamma(y)}| = 2^3$ теперь следует $K \cap G_1(x, y) \not\leq G_2(x)$, что согласно лемме 2.2 влечет $K = G_1(x)$. Таким образом, $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль $G_1(x)/G_2(x)$ неприводим, и лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *Группа $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$ централизуется $G_1(x)^{\Gamma_3(x)}$ и является естественным $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модулем; для каждого элемента $h \in G_2(x) \setminus G_3(x)$ найдется вершина $x_h \in \Gamma(x)$ такая, что, во-первых, $h \in G_2(x_h)$ и, во-вторых, для произвольной вершины $x' \in \Gamma(x) \setminus \{x_h\}$ элемент h действует на $\Gamma(x'')$ тривиально при $x'' \in \varphi_{x, x'}(\langle x_h, x' \rangle)$ и как неединичный элемент из $T_{x''}(x', \Phi_{x''}(x_h))$ при $x'' \in \Gamma(x') \setminus \varphi_{x, x'}(\langle x_h, x' \rangle)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2, 2) группа $G_1(x)^{\Gamma_3(x)}$ централизует группу $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$. Пусть $y \in \Gamma(x)$. Тогда ввиду $G_2(x) \neq 1$ имеем $G_2(x)^{\Gamma_2(y)} \neq 1$, откуда с учетом леммы 2.2, 2) и транзитивности действия $G(x, y)$ на $[y : x]$ заключаем, что $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$ – нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль (в частности, $|G_2(x)^{\Gamma_3(x)}| \geq 2^4$) и $|G_2(x)^{\Gamma_2(y)}| = 2^3$. Пусть $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$. Тогда ввиду $|G_2(x)^{\Gamma_3(x)}| \geq 2^4$, $|G_2(x)^{\Gamma_2(y)}| = 2^3$ и транзитивности действия $G(x, y)$ на $\Gamma(x) \setminus \{y\}$ имеем $G_2(x, y)^{\Gamma_2(z)} \neq 1$. Если $G_2(x, y)^{\Gamma(z')} \neq 1$ для некоторой вершины $z' \in \varphi_{x, z}(\langle y, z \rangle)$, то с учетом того, что $\Phi_{z'}(y)$ – прямая проективного пространства $\Gamma(z')$, найдется плоскость Z этого пространства, содержащая $\Phi_{z'}(y)$, которая не стабилизируется поточечно группой $G_2(x, y)$. Последнее, однако, противоречит лемме 2.1, применяемой к графу Γ_Z . Следовательно, $G_2(x, y)^{\Gamma(z')} = 1$ для каждой вершины $z' \in \varphi_{x, z}(\langle y, z \rangle)$, что ввиду леммы 2.2, 2) и $G_2(x, y)^{\Gamma_2(z)} \neq 1$ влечет $|G_2(x, y)^{\Gamma_2(z)}| = 2$. Для завершения доказательства леммы теперь достаточно доказать равенство $G_2(x, y, z) = G_3(x)$.

Если x' – произвольная вершина из $\Gamma(x) \setminus \langle y, z \rangle$, то согласно доказанному для каждой вершины $x'' \in \varphi_{x, x'}(\langle y, x' \rangle) \cup \varphi_{x, x'}(\langle z, x' \rangle)$ имеем $G_2(x, y, z)^{\Gamma(x'')} = 1$, откуда $G_2(x, y, z)^{\Gamma_2(x')} = 1$ в силу леммы 2.2, 2). Поскольку при этом в группе $G(x, y)$ найдется элемент, отображающий вершину z в вершину x' , а вершину x' в вершину из $\langle y, z \rangle \setminus \{y, z\}$, то $G_2(x, y, z) = G_3(x)$, что и требовалось доказать.

§ 3. Основная лемма

В предыдущем параграфе были определены элемент g группы G и регулярный g -трек $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$. Мы фиксируем до конца доказательства теоремы эти и производные от них обозначения x_i^j , V_i , P_i , e_i^j , вводимые в соответствии с [2, ч. I, § 4]. При этом мы предполагаем выполненными следующие равенства (соответствующие обоснования см. в [2, ч. I, § 4]):

$$g^k(P_i(\mu_1 e_i^1 + \dots + \mu_4 e_i^4)) = P_{i+k}(\mu_1 e_{i+k}^1 + \dots + \mu_4 e_{i+k}^4) \quad (3.1)$$

для всех $i, k \in \mathbb{Z}$, $(\mu_1, \dots, \mu_4) \in \mathbf{F}_2^4 \setminus \{(0, \dots, 0)\}$;

$$x_i^j = P_i(e_i^j) \quad (3.2)$$

для всех $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq 4$;

$$\varphi_{x_i, x_{i+1}}(P_i(\langle e_i^4, \mu_1 e_i^1 + \dots + \mu_4 e_i^4 \rangle)) = P_{i+1}(\langle e_{i+1}^1, \mu_1 e_{i+1}^2 + \dots + \mu_3 e_{i+1}^4 \rangle) \quad (3.3)$$

и

$$\varphi_{x_{i+1}, x_i}(P_{i+1}(\langle e_{i+1}^1, \mu_1 e_{i+1}^1 + \dots + \mu_4 e_{i+1}^4 \rangle)) = P_i(\langle e_i^4, \mu_2 e_i^1 + \dots + \mu_4 e_i^3 \rangle) \quad (3.4)$$

для всех $i \in \mathbb{Z}$ и $\mu_1, \dots, \mu_4$.

Ввиду $q = 2$ каждый элемент группы $G(x_i)^{\Gamma(x_i)}$, $i \in \mathbb{Z}$, представим (см. [2, ч. I, § 4]) единственной (4×4) -матрицей над полем $\mathbf{F}_2$.

Поскольку $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ – регулярный g -трек, то для произвольного $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^{\Gamma(x_i)} = G(x_i^1, \dots, x_i^4)^{\Gamma(x_i)} = 1.$$

Следовательно,

$$G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots). \quad (3.5)$$

ЛЕММА 3.1. $G_4(z_0, z_1) = 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G_4(z_0, z_1) \neq 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$. Если $G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = 1$, то получаем противоречие с [2, ч. I, предложение 5.2]. Следовательно, $G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \neq 1$. Положим

$$N = N_G(G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)).$$

Ясно, что

$$N \text{ действует интранзитивно на } E(\Gamma), \quad (3.6)$$

$$g \in N. \quad (3.7)$$

В силу конечности группы $G(x)$ по лемме 2.4 существует натуральное число $t \geq 5$, наибольшее со свойством $G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2})^{\Gamma(x_{i+t})} \neq 1$, где $i \in \mathbb{Z}$ (при этом t не зависит от выбора i). Для так выбранного числа t и произвольного $i \in \mathbb{Z}$ согласно лемме 2.4 имеем

$$\begin{aligned} G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2})^{\Gamma(x_{i+t})} &= T_{x_{i+t}}(x_{i+t-1}, \Phi_{x_{i+t}}(x_{i+t-3})) \\ &= T_{x_{i+t}}(x_{i+t-1}, \langle x_{i+t}^1, x_{i+t}^2, x_{i+t}^3 \rangle) \end{aligned}$$

и

$$G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}) \cap G_1(x_{i+t}) = G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-1}).$$

Так как для $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &|G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}) : G_2(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-2})| \\ &= |G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}) : G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-1})| > 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & |G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-1}) : G_2(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1})| \\ &= |G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-1}) : G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t})| = 1, \end{aligned}$$

то на основании леммы 2.4 заключаем, что t – наибольшее натуральное число со свойством $G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2})^{\Gamma(x_i)} \neq 1$, $i \in \mathbb{Z}$, причем

$$G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2})^{\Gamma(x_i)} = T_{x_i}(x_{i+1}, \Phi_{x_i}(x_{i+3})) = T_{x_i}(x_{i+1}, \langle x_i^2, x_i^3, x_i^4 \rangle)$$

и

$$G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}) \cap G_1(x_i) = G_2(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-2}).$$

Отсюда, в частности, следует

$$\begin{aligned} G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}) \cap G_1(x_{i+t}) &= G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-1}) \\ &= G_2(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned} & [G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}), G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)] \\ & \leq G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}) \cap G_1(x_{i+t}) \leq G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \end{aligned}$$

т.е. $G_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2}) \leq N$.

Таким образом, для $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$N_2(x_{i-t+2}, \dots, x_{i-2})^{\Gamma(x_i)} = T_{x_i}(x_{i-1}, \langle x_i^1, x_i^2, x_i^3 \rangle), \quad (3.8)$$

$$N_2(x_{i+2}, \dots, x_{i+t-2})^{\Gamma(x_i)} = T_{x_i}(x_{i+1}, \langle x_i^2, x_i^3, x_i^4 \rangle). \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) следует, в частности, существование в $N(x_0)$ таких элементов a , b , что $a^{\Gamma(x_0)}$, $b^{\Gamma(x_0)}$ представимы соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $(bab)^{\Gamma(x_0)}$ представим при этом матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, полагая $g_1 = (gbab)^2$, имеем $g_1 \in N(x_0, x_0^4)$. В то же время, если $P_0 \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_0^j \right)$ – произвольная, отличная от x_0^4 точка пространства $\Gamma(x_0)$, то с учетом (3.1)–(3.4) имеем

$$\begin{aligned} g_1 \left(P_0 \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_0^j \right) \right) &= gbag(P_0(\mu_4 e_0^1 + \mu_2 e_0^2 + \mu_3 e_0^3 + \mu_1 e_0^4)) \\ &= gbag(P_1(\mu_4 e_1^1 + \mu_2 e_1^2 + \mu_3 e_1^3 + \mu_1 e_1^4)) \\ &\in gbag(\varphi_{x_0, x_0^4}(P_0(\langle e_0^4, \mu_2 e_0^1 + \mu_3 e_0^2 + \mu_1 e_0^3 \rangle))) \\ &= g(\varphi_{x_0, x_0^1}(P_0(\langle e_0^1, \mu_3 e_0^2 + \mu_1 e_0^3 + \mu_2 e_0^4 \rangle))) \\ &= g(P_{-1}(\langle e_{-1}^4, \mu_3 e_{-1}^1 + \mu_1 e_{-1}^2 + \mu_2 e_{-1}^3 \rangle)) \\ &= P_0(\langle e_0^4, \mu_3 e_0^1 + \mu_1 e_0^2 + \mu_2 e_0^3 \rangle). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что элемент $g_1^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $g_2 = babg_1bab$, получаем, что элемент $g_2^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через T нормальную подгруппу группы $N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$, порожденную как нормальная подгруппа множеством

$$N(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cap (T_{x_0}(x_0^1) \cup T_{x_0}(x_0^4)),$$

и пусть X – непустое T -допустимое подпространство проективного пространства $\Gamma(x_0)$ наименьшей размерности. В зависимости от размерности X дальнейшее доказательство леммы распадается на четыре случая (в каждом из которых нашей целью будет получение противоречия).

Случай 1. $\dim X = 3$. Так как в силу (3.6) и (3.7) группа T действует интранзитивно на X , то согласно предложению 1.2 в T содержится не более одной (нетривиальной) трансвекции с центром x_0^1 . Ввиду (3.8) отсюда следует, что группа $N(x_0, x_0^1)$ стабилизирует плоскость $\langle x_0^1, x_0^2, x_0^3 \rangle$. Однако $g_2 \in N(x_0, x_0^1)$ и $g_2(\langle x_0^1, x_0^2, x_0^3 \rangle) = \langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle$. Полученное противоречие показывает, что случай 1 невозможен.

Случай 2. $\dim X = 2$. В этом случае из (3.8), (3.9) и T -инвариантности подпространства X следует $x_0^1 \in X$, $x_0^4 \in X$, а из минимальности X – его $N(x_0)$ -инвариантность. Но тогда $x_0^2 \in X$ в силу $g_1(x_0^1) \in X$ и $x_0^3 \in X$ в силу $g_1(x_0^2) \in X$.

Таким образом, получаем $X = \langle x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4 \rangle$, что противоречит предположению случая.

Случай 3. $\dim X = 1$. Пусть X' – произвольная T -допустимая прямая пространства $\Gamma(x_0)$. Тогда в силу (3.8), (3.9) при $X' \cap \langle x_0^1, x_0^4 \rangle \neq \emptyset$ имеем $X' = \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, а при $X' \cap \langle x_0^1, x_0^4 \rangle = \emptyset$ имеем $X' = \langle x_0^2, x_0^3 \rangle$. Если T -допустима прямая $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, то таковой является и прямая $g_1(\langle x_0^1, x_0^4 \rangle) = \langle x_0^2, x_0^4 \rangle$, отличная от $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, $\langle x_0^2, x_0^3 \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $\langle x_0^2, x_0^3 \rangle$ – единственная T -инвариантная, а потому и $N(x_0)$ -инвариантная прямая. Однако $g_1(\langle x_0^2, x_0^3 \rangle) \neq \langle x_0^2, x_0^3 \rangle$. Противоречие.

Случай 4. $\dim X = 0$. Пусть $x' = P_0(\theta_1 e_0^1 + \theta_2 e_0^2 + \theta_3 e_0^3 + \theta_4 e_0^4)$ – произвольная T -допустимая точка. Тогда из (3.8) и (3.9) следует $\theta_4 = 0$ и $\theta_1 = 0$. Таким образом, каждая T -допустимая точка содержится в $\langle x_0^2, x_0^3 \rangle$. Так как множество всех T -допустимых точек $N(x_0)$ -допустимо, то из $g_1(\langle x_0^2, x_0^3 \rangle) \leq \langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle$ и $\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle \cap \langle x_0^2, x_0^3 \rangle = \{x_0^3\}$ следует, что x_0^3 – $N(x_0)$ -допустимая точка. Однако $g_1(x_0^3) \neq x_0^3$. Противоречие.

Итак, ни один из случаев 1–4 не реализуется, что завершает доказательство леммы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Фактически выше посредством рассмотрения случаев 1–4 показывается совпадение группы $\langle a^{\Gamma(x_0)}, b^{\Gamma(x_0)}, g_1^{\Gamma(x_0)} \rangle$ с группой $G(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cong \text{PSL}_4(2)$ (что ввиду $g \in N$ противоречит интранзитивности действия N на $E(\Gamma)$).

§ 4. Завершение доказательства теоремы и заключительные замечания

ЛЕММА 4.1. *Справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ – группа порядка 2, причем если (x, x', x'') – 2-дуга графа Γ , то $G_3(x)^{\Gamma(x''')} = 1$ при $x''' \in \varphi_{x', x''}(\langle x, x'' \rangle)$ и $G_3(x)^{\Gamma(x''')} = T_{x'''}(x'', \Phi_{x'''}(x))$ при $x''' \in \Gamma(x'') \setminus \varphi_{x', x''}(\langle x, x'' \rangle)$;

2) группа $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ централизуется $G_1(x)^{\Gamma_4(x)}$ и является дуальным к естественному $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модулем; для каждого элемента $h \in G_3(x) \setminus G_4(x)$ найдется плоскость X_h проективного пространства $\Gamma(x)$ такая, что, во-первых, $h \in G_3(x')$ для произвольной вершины $x' \in X_h$ и, во-вторых, для произвольной вершины $x' \in \Gamma(x) \setminus X_h$ и произвольной вершины $x'' \in \Gamma(x') \setminus \{x\}$ элемент h действует на $\Gamma(x''')$ тривиально при $x''' \in \varphi_{x', x''}(\langle x, x'' \rangle)$ и как неединичный элемент из $T_{x'''}(x'', \Phi_{x'''}(x))$ при $x''' \in \Gamma(x'') \setminus \varphi_{x', x''}(\langle x, x'' \rangle)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(y_0, \dots, y_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что $y_3 \notin \varphi_{y_1, y_2}(\langle y_0, y_2 \rangle)$ и $y_4 \notin \Phi_{y_3}(y_0)$. Тогда, поскольку согласно лемме 2.4 подгруппа $G_2(y_0, y_1)$ группы $G(y_3)$ не стабилизирует вершину y_4 , имеем $[G_2(y_0, y_1), G_2(y_3, y_4)] \neq 1$. В то же время из леммы 2.4 следует, что $[G_2(y_0, y_1), G_2(y_3, y_4)] \leq G_2(y_1, y_2, y_3) = G_3(y_2)$. Таким образом, $G_3(x) \neq 1$.

Если $G_3(x, y)^{\Gamma_4(x)} = 1$, где $y \in \Gamma(x)$, то с учетом леммы 2.4 имеет место утверждение 1). Предположим поэтому, что для $y \in \Gamma(x)$ справедливо $G_3(x, y)^{\Gamma_4(x)} \neq 1$ (или, что то же самое, $G_3(x, y) \neq 1$). Тогда ввиду простоты и транзитивности группы $G(x)^{\Gamma(x)}$ централизатор группы $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ в группе

$G(x)^{\Gamma_4(x)}$ содержится в $G_1(x)^{\Gamma_4(x)}$ и потому в силу леммы 2.4 совпадает с $G_1(x)^{\Gamma_4(x)}$. Таким образом, $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ – нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль и, в частности, $|G_3(x)^{\Gamma_4(x)}| \geq 2^4$.

Далее, предположение $G_3(x, y) \neq 1$ для $y \in \Gamma(x)$ согласно [2, ч. I, (5.1)] влечет $1 \neq Z(O_2(G(x, y))) \leq G_3(x, y)$, и потому в силу леммы 3.1 имеем $Z(O_2(G(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_4)} \cap T_{z_4}(z_3) \neq 1$ для некоторой 4-дуги $(z_0, \dots, z_4)$ графа Γ . На основании транзитивности действия группы G на множестве 1-дуг графа Γ при этом можно предполагать, что $z_4 = x$, $z_3 = y$, откуда с учетом $G_3(x, y) \leq O_2(G(z_0, z_1))$ и $C_{G(x)}(G_3(x, y)) \leq G(x, y)$ получаем $T_x(y) \leq C_{G(x)}(G_3(x, y))^{\Gamma(x)}$. Следовательно, если $x'_1, \dots, x'_4$ – базис проективного пространства $\Gamma(x)$, то, во-первых, $C_{G(x)}(G_3(x, x'_1, \dots, x'_4))^{\Gamma(x)} = G(x)^{\Gamma(x)}$, в силу чего $G_3(x, x'_1, \dots, x'_4) = G_4(x)$, и, во-вторых, $C_{G(x)}(G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3))^{\Gamma(x)}$ содержит стабилизатор плоскости $\langle x'_1, x'_2, x'_3 \rangle$ в группе $G(x)^{\Gamma(x)}$, в силу чего $\langle x'_1, x'_2, x'_3 \rangle = \{x' \in \Gamma(x) \mid G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3) \leq G_3(x')\}$ при $G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3)^{\Gamma_4(x)} \neq 1$.

Ввиду нетривиальности $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ и леммы 2.4 для завершения доказательства теперь достаточно показать, что $G_3(x)^{\Gamma_4(x)} \cong G_3(x)/G_4(x) = G_3(x)/G_3(x, x'_1, \dots, x'_4)$ – группа порядка 2^4 и $G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3)^{\Gamma_4(x)} \cong G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3)/G_4(x) = G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3)/G_3(x, x'_1, \dots, x'_4)$ – группа порядка 2. Но согласно лемме 2.4 для $y \in \Gamma(x)$ имеем $|G_3(x) : G_3(x, y)| \leq 2$, откуда

$$\begin{aligned} |G_3(x)/G_3(x, x'_1, \dots, x'_4)| &\leq 2^4, \\ |G_3(x)/G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3)| &\leq 2^3, \\ |G_3(x, x'_1, x'_2, x'_3)/G_3(x, x'_1, \dots, x'_4)| &\leq 2. \end{aligned}$$

Поскольку, кроме того,

$$|G_3(x)/G_3(x, x'_1, \dots, x'_4)| = |G_3(x)^{\Gamma_4(x)}| \geq 2^4$$

(см. выше), то лемма доказана.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

ЛЕММА 4.2. $G_4(x) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если имеет место утверждение 1) леммы 4.1, то для $y \in \Gamma(x)$ справедливо $G_4(x)^{\Gamma_4(y)} \leq G_3(x, y)^{\Gamma_4(y)} = 1$, откуда $G_4(x) = 1$. Предположим поэтому, что имеет место утверждение 2) леммы 4.1 и $G_4(x) \neq 1$. Тогда найдется элемент $h \in G_4(x)$, для которого $1 \neq h^{\Gamma_5(x)} \in Z(O_2(G(x)^{\Gamma_5(x)})) = Z(G_1(x)^{\Gamma_5(x)})$. Поскольку, как было показано при доказательстве леммы 4.1, $C_{G(x)}(G_4(x))^{\Gamma(x)} = G(x)^{\Gamma(x)}$, то при этом $h^{\Gamma_5(x)} \in Z(G(x)^{\Gamma_5(x)})$. Пусть x' – такая вершина из $\Gamma(x)$, что $h \notin G_4(x')$. Тогда согласно утверждению 2) леммы 4.1 и ввиду $h^{\Gamma_5(x)} \in Z(G(x)^{\Gamma_5(x)})$ множество $\{x'' \in \Gamma(x') \mid h \in G_3(x'')\}$ есть $G(x, x')$ -допустимая плоскость проективного пространства $\Gamma(x')$. Однако группа $G(x, x')$ не стабилизирует плоскостей проективного пространства $\Gamma(x')$. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Можно показать, что в каждом из случаев 2), 3) теоремы группа $G(x)$ определяется единственным (с точностью до изоморфизма) образом. А именно справедливы следующие утверждения.

Предположим, что для Γ и G выполнены условия теоремы и имеет место утверждение 2) теоремы. Тогда $G_1(x) = E_1 \times E_2$, где E_1 – экстраспециальная группа 2_+^{1+6} (в обозначениях из [10]) и E_2 – нормальная элементарная абелева подгруппа порядка 2^4 группы $G(x)$, $G_3(x) = Z(E_1)$, $G_2(x) = Z(E_1) \times E_2$, $G(x)/Z(E_1) = G_1(x)/Z(E_1) \rtimes L$ – полупрямое произведение элементарной абелевой группы $G_1(x)/Z(E_1)$ порядка 2^{10} на группу $L \cong \text{SL}_4(2)$, причем $G_1(x)/Z(E_1)$ как $\mathbf{F}_2 L$ -модуль является неразложимым расширением естественного $\mathbf{F}_2 L$ -модуля $E_2 Z(E_1)/Z(E_1)$ посредством его внешнего квадрата $G_1(x)/E_2 Z(E_1)$ (так называемый $\mathbf{F}_2 L$ -модуль квадратичных форм на $E_2 Z(E_1)/Z(E_1)$). Наконец, полный прообраз группы $L \cong A_8$ при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/Z(E_1)$ изоморфен полной накрывающей $\hat{A}_8$ группы A_8 .

Предположим, что для Γ и G выполнены условия теоремы и имеет место утверждение 3) теоремы. Пусть $R = E \rtimes H$ – полупрямое произведение элементарной абелевой группы E порядка 2^{10} на группу $H \cong \text{SL}_5(2)$, причем E как $\mathbf{F}_2 H$ -модуль является внешним квадратом естественного $\mathbf{F}_2 H$ -модуля W . Пусть, кроме того, w – произвольный ненулевой элемент из W и H_w – централизатор w в H . Тогда группа $G(x)$ изоморфна подгруппе $E_1 \rtimes H_w$ группы R . При этом, полагая $H_w = E_1 \rtimes L$ и $E = E_2 \times E_3$, где $L \cong \text{SL}_4(2)$, E_1 – элементарная абелева группа порядка 2^4 (являющаяся естественным $\mathbf{F}_2 L$ -модулем), E_2 и E_3 – L -допустимые элементарные абелевы группы порядков 2^6 и 2^4 соответственно (являющиеся внешним квадратом $\mathbf{F}_2 L$ -модуля E_1 и дуальным к E_1 $\mathbf{F}_2 L$ -модулем), имеем $G_3(x) = E_3 = [E_1, E_2]$, $G_2(x) = E_1 \times E_3$, $G_1(x) = E_1 E_2 E_3$.

Приложение. Строение стабилизаторов вершин в случае корреляции

Предположим, что Γ и G удовлетворяют основному условию и имеет место случай корреляции (см. введение). Тогда при $p > 3$ согласно [4] справедливо равенство $G_2(x) = 1$ и группа $G(x)$, таким образом, известна (см. [1, введение]). В [2, ч. I] доказано, что при $p = 3$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$ справедливо равенство $G_3(x, y) = 1$, а при $p = 2$ – равенство $G_2(x, y) = 1$. Здесь мы, используя последние равенства, выясняем строение группы $G(x)$ при $p \leq 3$ и $G_2(x) \neq 1$ (при $G_2(x) = 1$ строение группы $G(x)$ известно; см. [1, введение]). А именно доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Γ и G удовлетворяют основному условию и имеет место случай корреляции. Предположим, что $p \leq 3$ и $G_2(x) \neq 1$. Тогда $q = 2$, $G_3(x) = 1$ и группа $G(x)$ есть расщепляемое расширение элементарной абелевой группы $G_1(x)$ порядка 2^{n+1} посредством группы $G(x)/G_1(x) \cong \text{SL}_n(2)$ такое, что относительно естественного действия $G(x)/G_1(x)$ группа $G_1(x)$ является (в аддитивной записи) прямой суммой естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля (т.е. нетривиального $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля порядка 2^n такого, что для $y \in \Gamma(x)$ группа $G(x, y)/G_1(x)$ оставляет на месте его подгруппу порядка 2) и тривиального $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_2(x)$ порядка 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно напомним, что предложение 2.3 из [4] остается в силе при $p = 2, 3$.

Согласно [2, ч. I, § 1] предложение достаточно доказать в случае, когда граф Γ является деревом. Имея это в виду, предположим, что дерево Γ и группа его автоморфизмов G удовлетворяют условию предложения. По теореме 3 из [2, ч. I] для $y \in \Gamma(x)$ имеем $G_2(x, y) = 1$ при $p = 2$ и $G_3(x, y) = 1$ при $p = 3$. Заметим, что леммы 2.1–2.3 из доказательства этой теоремы вместе с их доказательствами сохраняют силу в нашем случае (когда вместо $G_p(x, y) \neq 1$ предполагается лишь, что $G_2(x) \neq 1$). При этом из доказательств указанных лемм следует существование в нашем случае g -трека, $g \in G$, $(\dots, x_{-1}, x_0 = x, x_1, \dots)$ графа Γ со следующими свойствами:

- 1) $x_i \notin \varphi_{x_{i-2}, x_{i-1}}(\langle x_{i-3}, x_{i-1} \rangle) \cup \varphi_{x_{i+2}, x_{i+1}}(\langle x_{i+1}, x_{i+3} \rangle)$, $i \in \mathbb{Z}$;
- 2) пусть L – поэлементный стабилизатор в G множества вершин $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$, и пусть Δ – содержащая вершину x_0 связная компонента подграфа графа Γ , порожденного $N_G(L)$ -орбитой на $V(\Gamma)$, которая содержит x_0 ; тогда если S – глобальный стабилизатор в G множества $V(\Delta)$, то ограничение $\bar{S}$ группы S на $V(\Delta)$ есть транзитивная на $(2p+1)$ -дугах группа автоморфизмов Δ , причем для $i \in \mathbb{Z}$ $\Delta(x_i) = \langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$ и группа $\bar{S}(x_i)^{\Delta(x_i)}$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\text{PSL}_2(q)$ в естественном дважды транзитивном представлении;
- 3) $G(x_i, \dots, x_{i+2p+1}, \langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle) = G(x_i, \dots, x_{i+2p+1}, \langle x_{i+2p}, x_{i+2p+2} \rangle)$, $i \in \mathbb{Z}$;
- 4) $G_1(x_i, \dots, x_{i+2p-1}) = G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Напомним, что для $z \in V(\Gamma)$ через $G(z)^*$ обозначается наибольшая подгруппа группы $G(z)$, действующая на проективном пространстве $\Gamma(z)$ как подгруппа соответствующей проективной группы $\text{PGL}_n(q)$. Кроме того, мы следуем [2, ч. I, § 1] в использовании обозначения $G(z', z'', \dots)^*$, где $z', z'', \dots$ – произвольные вершины графа Γ . Через $G(x)_*$ в дальнейшем обозначается прообраз при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/O_p(G(x))$ единственной нормальной подгруппы группы $G(x)/O_p(G(x))$, изоморфной совершенному центральному расширению группы $\text{PSL}_n(q)$. Естественным (дуальным к естественному) $\mathbf{F}_p G(x)_*/O_p(G(x))$ -модулем называется нетривиальный $\mathbf{F}_p G(x)_*/O_p(G(x))$ -модуль порядка q^n такой, что для $y \in \Gamma(x)$ группа $G(x)_* \cap G(y)/O_p(G(x))$ оставляет на месте его подгруппу порядка q (соответственно q^{n-1}). Заметим, что наличие естественного или дуального к естественному $\mathbf{F}_p G(x)_*/O_p(G(x))$ -модуля влечет $G(x)_*/O_p(G(x)) \cong \text{SL}_n(q)$.

Если m – такое натуральное число, что $G_m(z_0, z_1) \neq 1 = G_{m+1}(z_0, z_1)$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$, то в силу [2, ч. II, теорема 3] и $G_2(x) \neq 1$ имеем $m = 1$ при $p = 2$ и $1 \leq m \leq 2$ при $p = 3$. Кроме того, так же как в [11, с. 669], для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$ доказываем справедливость включения

$$Z(O_p(G(z_0, z_1))) \leq G_m(z_0, z_1). \quad (\text{П.1})$$

Покажем, что для произвольной $(m+1)$ -дуги $(z_0, \dots, z_{m+1})$ графа Γ при $Z(O_p(G(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_{m+1})} \neq 1$ имеем

$$T_{z_{m+1}}(z_m, \varphi_{z_m, z_{m+1}}(\langle z_{m-1}, z_{m+1} \rangle)) \leq Z(O_p(G(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_{m+1})}. \quad (\text{П.2})$$

В силу (П.1) $m \leq 2$ для этого достаточно показать, что для произвольной 3-дуги $(z_0, \dots, z_3)$ графа Γ и $N \leq G(z_0, \dots, z_3)$ при $N^{\Gamma(z_3)} \cap T_{z_3}(z_2) \neq 1$ имеем

$$T_{z_3}(z_2, \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)) \leq N^{\Gamma(z_3)}. \quad (\text{П.3})$$

Пусть $h \in N$ и $1 \neq h^{\Gamma(z_3)} \in T_{z_3}(z_2, Z)$ для некоторой гиперплоскости Z проективного пространства $\Gamma(z_3)$. Тогда найдется базис $z_{2,1}, \dots, z_{2,n}$ проективного пространства $\Gamma(z_2)$ со свойствами: $z_{2,1}, \dots, z_{2,n-1}$ – базис $\varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle)$; $z_1 = z_{2,1}$; $z_3 \in \{z_{2,2}, \dots, z_{2,n}\}$; $Z = \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_3, z' \rangle)$, где $z' \in \{z_{2,1}, \dots, z_{2,n}\}$. Пусть H – холловская p' -подгруппа (разрешимой) группы $G(z_2, z_{2,1}, \dots, z_{2,n}) \cap G(z_2)^* = G(z_2, z_{2,1}, \dots, z_{2,n}) \cap G(z_3)^*$. Тогда H стабилизирует множество $\langle z_0, z_2 \rangle \setminus \{z_2\}$, что с учетом транзитивности действия группы $O_p(G(z_2))$ на $\langle z_0, z_2 \rangle \setminus \{z_2\}$ (см. [4, предложение 2.3, 2]) позволяет предполагать, что $H \leq G(z_0)$. Поскольку, кроме того, $H \leq G(z_3, z_{3,1}, \dots, z_{3,n})^*$, где $z_{3,1}, \dots, z_{3,n}$ – некоторый базис проективного пространства $\Gamma(z_3)$ такой, что $z_2 = z_{3,1}$ и $Z = \langle z_{3,1}, \dots, z_{3,n-1} \rangle$, то H – холловская p' -подгруппа группы $G(z_3, z_{3,1}, \dots, z_{3,n}) \cap G(z_3)^*$, содержащаяся в $G(z_0, \dots, z_3)$. Отсюда следует, что

$$T_{z_3}(z_2, Z) = \langle h_1^{-1} h h_1 \mid h_1 \in H \rangle^{\Gamma(z_3)} \leq N^{\Gamma(z_3)}$$

(причем все неединичные элементы из $T_{z_3}(z_2, Z)$ сопряжены элементами из $H^{\Gamma(z_3)}$). Теперь, если $Z \neq \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$ (при этом $z' \notin \langle z_1, z_3 \rangle$), то, взяв элемент $h' \in O_p(G(z_1)) \cap G(z_3) \leq G(z_0, \dots, z_3)$ такой, что $h'(z') \neq z'$, имеем

$$\begin{aligned} T_{z_3}(z_2, \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)) &\leq T_{z_3}(z_2, Z \cap \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)) \\ &= T_{z_3}(z_2, Z \cap h'(Z)) \leq N^{\Gamma(z_3)}. \end{aligned}$$

Поэтому как при $Z = \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$, так и при $Z \neq \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$ справедливо включение (П.3) (причем, как это следует теперь из предыдущих рассуждений, все неединичные элементы из $T_{z_3}(z_2, \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle))$ сопряжены элементами из $G(z_0, \dots, z_3)^{\Gamma(z_3)}$).

ЛЕММА П.1. $G_2(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G_2(x, y) \neq 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$. Тогда согласно [2, ч. I, теорема 3] имеем $p = 3$, $G_3(x, y) = 1$ и, следовательно, $m = 2$.

Поскольку в силу (П.1) и (П.2)

$$T_{z_3}(z_2, \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)) \leq Z(O_3(G(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_3)} \leq G_2(z_1)^{\Gamma(z_3)} \quad (\text{П.4})$$

для некоторой 3-дуги $(z_0, \dots, z_3)$ графа Γ , то с учетом транзитивности действия группы G на множестве 2-дуг графа Γ для произвольной 2-дуги (x, y_1, y_2) графа Γ справедливо

$$\begin{aligned} T_{y_1}(x) &\leq C_{G(x, y_1)}(G_2(x))^{\Gamma(y_1)}, \quad T_{y_2}(y_1) \leq C_{G(x, y_1, y_2)}(G_3(x))^{\Gamma(y_2)}, \\ T_{y_2}(y_1, \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle)) &\leq G_2(x)^{\Gamma(y_2)}. \end{aligned}$$

Кроме того, из (П.4) следует существование таких 2-дуг $(x, y_{1,i}, y_{2,i})$, $1 \leq i \leq n$, графа Γ , что

$$\mathrm{PSL}_n(q) \lesssim C_{G(x)}(G_2(x) \cap G_1(y_{2,1}) \cap \cdots \cap G_1(y_{2,n}))^{\Gamma(x)}.$$

В силу этого группа $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$ действует точно на $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \Gamma(y_{2,i})$, причем $G_2(x)^{\Gamma(y_2)} = T_{y_2}(y_1, \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle))$ для произвольной 2-дуги (x, y_1, y_2) графа Γ . С учетом $G_2(x, y)^{\Gamma_3(x)} \neq 1$ получаем, что $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$ – нетривиальный $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_3(G(x))$ -модуль порядка $\leq q^n$. Таким образом, $G(x)_*/O_3(G(x)) \cong \mathrm{SL}_n(q)$ и $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$ – естественный или дуальный к естественному $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_3(G(x))$ -модуль. В соответствии с этим реализуется одна из следующих возможностей:

а) для каждого элемента $h \in G_2(x) \setminus G_3(x)$ найдется вершина $x_h \in \Gamma(x)$ такая, что $h \in G_2(x_h)$ и $h \notin G_2(z)$ для всех $z \in \Gamma(x) \setminus \{x_h\}$ (случай, когда $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$ – естественный $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_3(G(x))$ -модуль);

б) для каждого элемента $h \in G_2(x) \setminus G_3(x)$ найдется гиперплоскость X_h проективного пространства $\Gamma(x)$ такая, что $h \in G_2(z)$ для всех $z \in X_h$ и $h \notin G_2(z)$ для всех $z \in \Gamma(x) \setminus X_h$ (случай, когда $G_2(x)^{\Gamma_3(x)}$ – дуальный к естественному $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_3(G(x))$ -модуль).

Прежде чем перейти к рассмотрению каждой из этих возможностей в отдельности, убедимся в том, что если $G_3(x) \neq 1$ и (x, y_1, y_2, y_3) – 3-дуга графа Γ , где $y_3 \notin \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle)$, то группа $G_3(x)$ действует точно на $\Gamma(y_3)$ как $T_{y_3}(y_2, \varphi_{y_2, y_3}(\langle y_1, y_3 \rangle))$, причем все неединичные элементы из $G_3(x)$ сопряжены в $G(x)$. В силу $\mathrm{PSL}_n(q) \lesssim C_{G(x)}(G_3(x))^{\Gamma(x)}$ и $T_{y_1}(x) \leq C_{G(x, y_1)}(G_3(x))^{\Gamma(y_1)}$ (см. выше) группа $G_3(x)$ действует точно на $\Gamma_2(y_2)$. Поэтому если для некоторой вершины $y' \in \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle)$ имеем $G_3(x) \not\leq G(y'')$, где $y'' \in \Gamma(y')$, то вопреки $[G_3(x), G_3(y'')] \neq 1$ получаем (с учетом $G_3(y'') \leq G_2(y') \leq G(x) \cap G_1(y_2)$ – см. выше) $[G_3(x), G_3(y'')] \leq G_3(x) \cap G_2(y_2) = 1$. Таким образом, $G_3(x) \leq G_1(y')$ для всех $y' \in \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle)$. Но теперь из $T_{y_1}(x) \leq C_{G(x, y_1)}(G_3(x))^{\Gamma(y_1)}$ и $T_{y_2}(y_1) \leq C_{G(x, y_1, y_2)}(G_3(x))^{\Gamma(y_2)}$ (см. выше) следует точность действия группы $G_3(x)$ на $\Gamma(y_3)$, причем

$$G_3(x)^{\Gamma(y_3)} \leq G_2(y_1)^{\Gamma(y_3)} = T_{y_3}(y_2, \varphi_{y_2, y_3}(\langle y_1, y_3 \rangle)).$$

Поскольку $G_3(x) \neq 1$, то отсюда, как было показано непосредственно перед леммой П.1, следует $G_3(x) \cong G_3(x)^{\Gamma(y_3)} = T_{y_3}(y_2, \varphi_{y_2, y_3}(\langle y_1, y_3 \rangle))$, причем все неединичные элементы из $G_3(x)$ сопряжены в $G(x)$, что и утверждалось.

Как следствие получаем, что группа $G_2(x)$, будучи расширением группы $G_3(x)$ (единичной или элементарной абелевой группы порядка q) посредством группы $G_2(x)/G_3(x)$ (естественного или дуального к естественному $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_3(G(x))$ -модуля), является элементарной абелевой группой. Кроме того, поскольку все неединичные элементы группы $G_3(x)$ сопряжены в $G(x)$, то $G_3(x) \leq Z(O_3(G(x)))$.

Предположим теперь, что реализуется возможность а).

Прежде всего заметим, что в этом случае $G_3(x) \neq 1$ (и, следовательно, $|G_3(x)| = q$ – см. выше). Действительно, для некоторой 4-дуги $(y_0, \dots, y_4)$ графа Γ имеем

$G_2(y_0, y_1) \not\leq G(y_4)$, и потому $[G_2(y_0, y_1), G_2(y_3, y_4)] \neq 1$. Поскольку в силу условия а)

$$[G_2(y_0, y_1), G_2(y_3, y_4)] \leq G_2(y_1, y_2, y_3) = G_3(y_2),$$

отсюда следует требуемое.

Заметим далее, что если $(y_0, \dots, y_3)$ – 3-дуга графа Γ , то при $y_3 \in \varphi_{y_1, y_2}(\langle y_0, y_2 \rangle)$ имеем $G_2(y_0, y_1) \leq G_1(y_3)$, а при $y_3 \notin \varphi_{y_1, y_2}(\langle y_0, y_2 \rangle)$ группа $G_2(y_0, y_1)^{\Gamma_3(y_1)}$ действует точно на $\Gamma(y_3)$ как $T_{y_3}(y_2, \varphi_{y_2, y_3}(\langle y_1, y_3 \rangle))$. Действительно, если $y_3 \in \varphi_{y_1, y_2}(\langle y_0, y_2 \rangle)$ и $G_2(y_0, y_1) \not\leq G(y')$, где $y' \in \Gamma(y_3)$, то $[G_2(y_0, y_1), G_3(y')] \neq 1$ вопреки

$$[G_2(y_0, y_1), G_3(y')] \leq G_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = 1$$

(последнее имеет место в силу доказанного ранее включения $G_3(y') \leq G(y_0)$ и условия а)). Если же $y_3 \notin \varphi_{y_1, y_2}(\langle y_0, y_2 \rangle)$, то $|G_2(y_0, y_1)^{\Gamma_3(y_1)}| = q$ (см. условие а)) и $T_{y_3}(y_2, \varphi_{y_2, y_3}(\langle y_1, y_3 \rangle)) = G_3(y_0)^{\Gamma(y_3)} \leq G_2(y_0, y_1)^{\Gamma(y_3)}$ (см. выше) влекут точность действия группы $G_2(y_0, y_1)^{\Gamma_3(y_1)}$ на $\Gamma(y_3)$ как $T_{y_3}(y_2, \varphi_{y_2, y_3}(\langle y_1, y_3 \rangle))$.

Нашей целью теперь будет доказать равенство

$$G_1(x, y)^{\Gamma(z)} = T_z(x, \varphi_{x, z}(\langle y, z \rangle)) \quad (\text{П.5})$$

для $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$, поскольку справедливость этого равенства позволяет следующим образом завершить рассмотрение возможности а). Из (П.5) следует, что для произвольных вершин $x' \in \Gamma(x)$, $y' \in \Gamma(x) \setminus \{x'\}$, $z' \in \Gamma(x) \setminus \langle x', y' \rangle$ справедливо

$$G_1(x, x', y')^{\Gamma(z')} \leq T_{z'}(x, \varphi_{x, z'}(\langle x', z' \rangle)) \cap T_{z'}(x, \varphi_{x, z'}(\langle y', z' \rangle)) = 1,$$

и потому $G_1(x, y, z) = G_2(x)$ для $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$. Таким образом (в случае справедливости (П.5)), группа $O_3(G(x))^{\Gamma_2(x)}$ порядка q^n является естественным $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_3(G(x))$ -модулем, и для каждого элемента $1 \neq u \in O_3(G(x))^{\Gamma_2(x)}$ найдется (единственная) вершина $z_u \in \Gamma(x)$ такая, что $u = h^{\Gamma_2(x)}$ для некоторого $h \in G_2(z_u)$. С учетом $[G_2(x), G_2(x)] = 1$, $G_3(x) \leq Z(O_3(G(x)))$ и условия а) отсюда следует $[O_3(G(x)), G_2(x)] = 1$ и $[O_3(G(x)), O_3(G(x))] \leq G_3(x)$, причем $[O_3(G(x)), O_3(G(x))] \neq 1$ (поскольку $[G_2(y), G_2(z)] \neq 1$ в силу того, что $G_2(z)^{\Gamma_3(z)}$ – естественный $\mathbf{F}_3 G(z)_*/O_3(G(z))$ -модуль и $G_2(y)^{\Gamma(z)} = T_z(x, \varphi_{x, z}(\langle y, z \rangle))$). Итак, если имеет место (П.5), то $G_3(x)$ – группа порядка q , $G_2(x) = Z(O_3(G(x)))$, $O_3(G(x))/G_2(x)$ – естественный $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_p(G(x))$ -модуль и $1 \neq [O_3(G(x)), O_3(G(x))] \leq G_3(x)$, что невозможно.

Перейдем к доказательству для $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ равенства (П.5). Предположим противное. Тогда $G_1(x, y)^{\Gamma(z)} = T_z(x)$ (см. [4, предложение 2.3, 5]). Для $i \in \mathbb{Z}$ положим $X_i^+ = \varphi_{x_{i-1}, x_i}(\langle x_{i-2}, x_i \rangle)$, $X_i^- = \varphi_{x_{i+1}, x_i}(\langle x_i, x_{i+2} \rangle)$, $X_i = X_i^+ \cap X_i^-$. Положим, кроме того, $K = G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$.

Покажем сначала, что $G_2(x_0) \cap K \leq G_2(x_4)$. Из $G_2(x_0) \cap K = G_2(x_0) \cap G_1(x_2, x_3, x_4)$ (см. 4)) следует, что $G_1(x_1, x_2) \cap G(x_4)$ нормализует $G_2(x_0) \cap K$. Поскольку в силу $(G_1(x_1, x_2) \cap G(x_4))^{\Gamma(x_3)} = T_{x_3}(x_2, \langle x_2, x_4 \rangle)$ и $T_{x_4}(x_3, X_4^+) = G_3(x_1)^{\Gamma(x_4)} \leq (G_1(x_1, x_2) \cap G(x_4))^{\Gamma(x_4)}$ группа $G_1(x_1, x_2) \cap G(x_4)$ действует

транзитивно на $\Gamma(x_4) \setminus X_4^+$, то отсюда вытекает $G_2(x_0) \cap K \leq G_1(x')$ для всех $x' \in \Gamma(x_4) \setminus (X_4^+ \setminus \{x_3\})$. Поскольку, кроме того, $[G_2(x_0) \cap K, G_3(x_7)] = 1$ (в силу $G_3(x_7) \leq Z(O_3(G(x_7)))$) и $G_3(x_7)^{\Gamma(x_4)} = T_{x_4}(x_5, X_4^-)$, то $G_2(x_0) \cap K \leq G_1(x')$ для всех $x' \in \Gamma(x_4) \setminus X_4$. Далее, из $G_2(x_0) \cap K = G_2(x_0) \cap G_1(x_2, x_3, x_4)$ следует, что $G(x_0) \cap G_1(x_2, x_3)$ нормализует $G_2(x_0) \cap K$. При этом из $G_1(x_2, x_3)^{\Gamma(x_1)} = T_{x_1}(x_2)$, $G_3(x_4)^{\Gamma(x_1)} = T_{x_1}(x_2, X_1^-)$ и $G_1(x_2, x_3)^{\Gamma(x_4)} = T_{x_4}(x_3)$ вытекает $(G(x_0) \cap G_1(x_2, x_3))^{\Gamma(x_4)} = T_{x_4}(x_3)$. Поскольку каждая $T_{x_4}(x_3)$ -орбита на $\Gamma(x_4)$ содержит вершину из $\Gamma(x_4) \setminus X_4$, получаем отсюда требуемое включение $G_2(x_0) \cap K \leq G_2(x_4)$.

Покажем теперь, что $G_2(x_0) \cap K$ – группа порядка q^{n-2} , совпадающая с $\bigcup_{x' \in X_0} (G_2(x_0, x') \cap G_1(x_3))$. Как было замечено в начале рассмотрения возможности а), $G_2(x_0) \cap G_1(x_{-2}, x_2) = \bigcup_{x' \in X_0} G_2(x, x')$ – группа порядка q^{n-1} . Так как $T_{x_3}(x_2, X_3^+) = G_3(x_0)^{\Gamma(x_3)} \leq (G_2(x_0) \cap G_1(x_{-2}, x_2))^{\Gamma(x_3)} \leq T_{x_3}(x_2)$, то с учетом $(G_2(x_0) \cap G_1(x_{-2}, x_2))^{\Gamma(x_{-3})} \leq T_{x_{-3}}(x_{-2})$ и $G(x_{-3}, \dots, x_4, \langle x_{-4}, x_{-2} \rangle) = G(x_{-3}, \dots, x_4, \langle x_3, x_5 \rangle)$ (см. 3)) имеем $(G_2(x_0) \cap G_1(x_{-2}, x_2))^{\Gamma(x_3)} = T_{x_3}(x_2, X_3^+)$. Следовательно, $G_2(x_0) \cap G_1(x_{-2}, x_2, x_3)$ – группа порядка q^{n-2} . Кроме того, $G_2(x_0) \cap K = G_2(x_0) \cap G_1(x_{-2}, \dots, x_3) = G_2(x_0) \cap G_1(x_{-2}, x_2, x_3) = \bigcup_{x' \in X_0} (G_2(x_0, x') \cap G_1(x_3))$. Таким образом, $G_2(x_0) \cap K = \bigcup_{x' \in X_0} (G_2(x_0, x') \cap G_1(x_3))$ – группа порядка q^{n-2} .

Из $G_2(x_0) \cap K = \bigcup_{x' \in X_0} (G_2(x_0, x') \cap G_1(x_3))$ следует, что $G_1(x_0, x_1) \cap G(x_3)$ нормализует $G_2(x_0) \cap K$. Теперь аргументы, аналогичные используемым выше при доказательстве включения $G_2(x_0) \cap K \leq G_2(x_4)$, дают $G_2(x_0) \cap K \leq G_2(x_3)$. (Транзитивность действия группы $G_1(x_0, x_1) \cap G(x_3)$ на $\Gamma(x_3) \setminus X_3^+$ влечет $G_2(x_0) \cap K \leq G_1(x')$ для всех $x' \in \Gamma(x_3) \setminus (X_3^+ \setminus \{x_2\})$. Поскольку, кроме того, $[G_2(x_0) \cap K, G_3(x_6)] = 1$ и $G_3(x_6)^{\Gamma(x_3)} = T_{x_3}(x_4, X_3^-)$, то $G_2(x_0) \cap K \leq G_1(x')$ для всех $x' \in \Gamma(x_3) \setminus X_3$. Так как $G_1(x_1, x_2) \cap G(x_4)$ нормализует $G_2(x_0) \cap K = G_2(x_0) \cap G_1(x_2, x_3, x_4)$ и $(G_1(x_1, x_2) \cap G(x_4))^{\Gamma(x_3)} = T_{x_3}(x_2, \langle x_2, x_4 \rangle)$, это дает $G_2(x_0) \cap K \leq G_1(x')$ для всех $x' \in \Gamma(x_3)$.)

Так как группа $G_1(x_0, x_1) \cap G(x_3)$ нормализует $G_2(x_0) \cap K$ и сдвигает вершину x_4 , то из доказанного включения $G_2(x_0) \cap K \leq G_2(x_3, x_4)$ и условия а) следует $G_2(x_0) \cap K \leq G_3(x_3)$. Однако, как было показано выше, группа $G_3(x_3)$ действует точно на $\Gamma(x_0)$. Следовательно, $G_2(x_0) \cap K \leq G_3(x_3) \cap K = 1$ вопреки доказанному ранее равенству $|G_2(x_0) \cap K| = q^{n-2}$.

Предположим, что реализуется возможность б).

Покажем, что в этом случае $G_3(x) = 1$. Если $1 \neq h \in G_3(x)$, то в силу $h \in G_2(x, y) \setminus G_3(y)$ и транзитивности действия группы $G(x, y)$ на $\frac{q^{n-1}-1}{q-1} > q$ гиперплоскостях проективного пространства $\Gamma(y)$, содержащих x , получаем $|G_3(x)| > |\{h_1^{-1}hh_1 \mid h_1 \in G(x, y)\}| > q$. Это, однако, противоречит доказанному ранее при $G_3(x) \neq 1$ равенству $|G_3(x)| = q$. Следовательно, $G_3(x) = 1$.

Пусть (x, y_1, y_2) – 2-дуга графа Γ . Тогда поскольку $G_2(y_2)^{\Gamma(x)} = T_x(y_1, \varphi_{y_1, x}(\langle x, y_2 \rangle))$ (см. выше) и $G_2(x)$ является дуальным к естественному $\mathbf{F}_3 G(x)_*/O_3(G(x))$ -модулем, то $||[G_2(x), G_2(y_2)]|| = q$. Если, однако, $1 \neq h \in [G_2(x), G_2(y_2)]$, то из $h \in G_2(x, y_1, y_2)$, $G(x, y_1, y_2)$ -допустимости группы

$[G_2(x), G_2(y_2)]$ и транзитивности действия группы $G(x, y_1, y_2)$ на $\frac{q^{n-2}-1}{q-1} > q$ гиперплоскостях проективного пространства $\Gamma(y_1)$, содержащих x и y_2 , следует

$$|[G_2(x), G_2(y_2)]| > |\{h_1^{-1}hh_1 \mid h_1 \in G(x, y_1, y_2)\}| > q.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы П.1.

ЛЕММА П.2. 1) Если $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(y_1) \setminus \{x\}$, то группа $G_2(x)$ действует точно на $\Gamma(y_2)$ как $T_{y_2}(y_1, \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle))$.

2) Группа $G(x)_*$ централизует $G_2(x)$, а группа $G(x)^*$ транзитивно переставляет неединичные элементы $G_2(x)$.

3) $p = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме П.1 имеем $m = 1$, и потому в силу (П.2)

$$T_{z_2}(z_1, \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle)) \leq Z(O_p(G(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_2)} \quad (\text{П.6})$$

для произвольной 2-дуги (z_0, z_1, z_2) графа Γ . Отсюда для $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(y_1) \setminus \{x\}$ получаем

$$T_{y_1}(x) \leq C_{G(x, y_1)}(G_2(x))^{\Gamma(y_1)},$$

что (с учетом $G_2(x)^{\Gamma(y_2)} \leq T_{y_2}(y_1)$ и [4, предложение 2.3, 6]) влечет

$$G_2(x)^{\Gamma(y_2)} = T_{y_2}(y_1, \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle)).$$

Поскольку, кроме того, из (П.6) следует, что $T_x(x') \leq C_{G(x)}(G_2(x))^{\Gamma(x)}$ для всех $x' \in \Gamma(x)$, и потому $\text{PSL}_n(q) \lesssim C_{G(x)}(G_2(x))^{\Gamma(x)}$, то группа $G_2(x)$ действует на $\Gamma(y_2)$ точно. Тем самым утверждение 1) леммы доказано.

Так как для $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(y_1) \setminus \{x\}$ группа $(G(x, y_1, y_2)^*)^{\Gamma(y_2)}$ есть стабилизатор в группе $(G(y_2)^*)^{\Gamma(y_2)}$ вершины y_1 и подпространства $\varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y_2 \rangle)$ (см. [4, предложение 2.3, 3]), то из утверждения 1) леммы следует транзитивность действия группы $G(x)^*$ на неединичных элементах группы $G_2(x)$. Поскольку, кроме того, $G_2(x) \cap Z(O_p(G(x))) \neq 1$, то $G_2(x) \leq Z(O_p(G(x)))$. Для завершения доказательства утверждения 2) леммы остается заметить, что в силу $\text{PSL}_n(q) \lesssim C_{G(x)}(G_2(x))^{\Gamma(x)}$ (см. выше) группа $G(x)_*/O_p(G(x))$ централизует $G_2(x)$.

Докажем утверждение 3) леммы. Так как группа L (см. начало доказательства предложения) поточечно стабилизирует множество $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$, то согласно утверждению 1) леммы имеем $[G_2(x), L] \leq G_2(x) \cap G_1(x_2) = 1$. Следовательно, $G_2(x) \leq S$, где S – стабилизатор в G множества $V(\Delta)$ (см. начало доказательства предложения). Так как $\bar{S} := S^{V(\Delta)}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Δ и $\bar{S}(x)^{\Delta(x)}$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\text{PSL}_2(q)$ в естественном дважды транзитивном представлении, то при $p = 3$ имеем $\bar{S}_2(x) = \bigcup_{x' \in \Delta(x)} \bar{S}_2(x, x')$ (действительно, если $p = 3$ и $\bar{S}_2(x) \neq 1$, то $|\bar{S}_2(x)^{\Delta_3(x)}| = q^2$, $|\bar{S}_2(x, x')^{\Delta_3(x)}| = q$ и $\bar{S}_2(x, x', x'')^{\Delta_3(x)} = 1$ для $x' \in \Delta(x)$, $x'' \in \Delta(x) \setminus \{x'\}$; см. [2, ч. I, предложение 2.1]). Но с учетом $G_2(x)^{V(\Delta)} \leq \bar{S}(x)$ и утверждения 1) леммы последнее невозможно. Лемма П.2 доказана.

ЛЕММА П.3. Если $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$, то группа $G_1(x, y)^{\Gamma_2(x)}$ действует точно на $\Gamma(z)$ как $T_z(x, \varphi_{x,z}(\langle y, z \rangle))$ и $O_2(G(x))^{\Gamma_2(x)}$ – естественный $\mathbf{F}_2 G(x)_*/O_2(G(x))$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что для произвольных вершин $y_0 \in \Gamma(x)$, $y_1 \in \Gamma(x) \setminus \{y_0\}$, $y_2 \in \langle y_0, y_1 \rangle$ справедливо $G_1(x, y_0, y_1) \leq G_1(y_2)$. Действительно, для $i = 0, 1$ и произвольной вершины $y'_i \in \Gamma(y_i) \setminus \{x\}$ имеем $G_1(x, y_0, y_1) \leq O_2(G(y_i, y'_i))$. При этом в силу $m = 1$ (см. лемму П.1) и (П.2) $T_x(y_i, \varphi_{y_i, x}(\langle x, y'_i \rangle)) \leq Z(O_2(G(y_i, y'_i)))^{\Gamma(x)}$. Следовательно, $T_x(y_i) \leq (C_{G(x)}(G_1(x, y_0, y_1)))^{\Gamma(x)}$, что с учетом транзитивности действия группы $\langle T_x(y_0), T_x(y_1) \rangle$ на $\langle y_0, y_1 \rangle$ влечет $G_1(x, y_0, y_1) \leq G_1(y_2)$.

Далее, второе утверждение леммы следует из первого. Действительно, из равенств

$$\begin{aligned} O_2(G(x))^{\Gamma(y)} &= T_y(x), & G_1(x, y)^{\Gamma(z)} &= T_z(x, \varphi_{x,z}(\langle y, z \rangle)), \\ G_1(x, y, z)^{\Gamma_2(x)} &= 1 \end{aligned}$$

для $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ вытекает, что группа $O_2(G(x))^{\Gamma_2(x)}$ является $\mathbf{F}_2 G(x)/O_2(G(x))$ -модулем порядка q^n , все ненулевые элементы которого сопряжены под действием группы $G(x)/O_2(G(x))$ и $G(x, y)/O_2(G(x))$ -допустимая подгруппа $G_1(x, y)^{\Gamma_2(x)}$ имеет порядок q .

Перейдем к доказательству первого утверждения леммы. Предположим, что для $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ имеем $G_1(x, y)^{\Gamma(z)} \neq T_z(x, \varphi_{x,z}(\langle y, z \rangle))$, т.е. $G_1(x, y)^{\Gamma(z)} = T_z(x)$ (см. [4, предложение 2.3, 5]). Согласно лемме П.2, 3) и [2, ч. I, §7, лемма 2] для некоторой 4-дуги $(z_0, \dots, z_4)$, $z_3 \notin \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle)$, $z_4 \notin \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$, графа Γ имеем $G_1(z_0, \dots, z_3) \leq G_1(z_4)$. Поскольку из $T_{z_2}(z_1) \leq G_1(z_1)^{\Gamma(z_2)}$ и $T_{z_3}(z_2) = G_1(z_1, z_2)^{\Gamma(z_3)}$ следует транзитивность действия группы $G(z_0, \dots, z_3)$ на $\Gamma(z_3) \setminus \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$, то с учетом замечания из начала доказательства леммы получаем $G_1(z_0, \dots, z_3) \leq G_2(z_3)$. Так как $G_2(z_3) \cap G_1(z_0, \dots, z_3) = 1$ в силу леммы П.2, 1), то имеем, следовательно, $G_1(z_0, \dots, z_3) = 1$. В то же время, если $z' \in \langle z_1, z_3 \rangle \setminus \{z_1, z_3\}$, то $(G_1(z_2, z_3) \cap G(z_0))^{\Gamma(z')}$ есть подгруппа индекса $\leq q$ группы $T_{z'}(z_2)$, что с учетом $(G_1(z_0, z_1) \cap G(z_3))^{\Gamma(z_2)} = T_{z_2}(z_1, \langle z_1, z_3 \rangle) = T_{z_2}(z_1, \langle z_1, z' \rangle)$ влечет $[G_1(z_0, z_1) \cap G(z_3), G_1(z_2, z_3) \cap G(z_0)]^{\Gamma(z')} \neq 1$. Противоречие с $[G_1(z_0, z_1) \cap G(z_3), G_1(z_2, z_3) \cap G(z_0)] \leq G_1(z_0, \dots, z_3) = 1$.

Таким образом, для $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ имеем $G_1(x, y)^{\Gamma(z)} = T_z(x, \varphi_{x,z}(\langle y, z \rangle))$. Если $x' \in \langle y, z \rangle$, то, как было замечено в начале доказательства леммы, $G_1(x, y, z) \leq G_1(x')$. Если $x' \in \Gamma(x) \setminus \langle y, z \rangle$, то

$$G_1(x, y, z)^{\Gamma(x')} \leq T_{x'}(x, \varphi_{x, x'}(\langle y, x' \rangle)) \cap T_{x'}(x, \varphi_{x, x'}(\langle z, x' \rangle)) = 1.$$

Следовательно, группа $G_1(x, y)^{\Gamma_2(x)}$ действует точно на $\Gamma(z)$. Лемма П.3 доказана.

Из лемм П.2 и П.3 следует, что $G_3(x) = 1$ и группа $G(x)^*$ есть расширение элементарной абелевой группы $O_2(G(x))$ порядка q^{n+1} посредством группы

$G(x)^*/O_2(G(x)) \cong \text{GL}_n(q)$, причем $O_2(G(x))/G_2(x)$ является естественным $\mathbf{F}_2G(x)^*/O_2(G(x))$ -модулем (т.е. нетривиальным $\mathbf{F}_2G(x)^*/O_2(G(x))$ -модулем порядка q^n таким, что для $y \in \Gamma(x)$ группа $G(x, y)^*/O_2(G(x))$ оставляет на месте его подгруппу порядка q), а $G_2(x)$ – группа порядка q , которая централизуется группой $G(x)_*/O_2(G(x)) \cong \text{SL}_n(q)$, и у которой неединичные элементы транзитивно переставляются группой $G(x)^*/O_2(G(x))$. Отсюда, в свою очередь, следует $O_2(G(x)) = U_x \times G_2(x)$, где $U_x = [O_2(G(x)), G(x)_*/O_2(G(x))]$. (Действительно, полагая

$$C = Z(G(x)^*/O_2(G(x))), \quad C_1 = C \cap G(x)_*/O_2(G(x)),$$

при $C_1 \neq 1$ имеем $O_2(G(x)) = [O_2(G(x)), C_1] \times C_{O_2(G(x))}(C_1)$ – требуемое разложение. Если же $C_1 = 1$, то действие C задает на $O_2(G(x))$ структуру $(n+1)$ -мерного векторного пространства над $\mathbf{F}_q$, согласованную со структурой естественного $\mathbf{F}_2G(x)^*/O_2(G(x))$ -модуля на $O_2(G(x))/G_2(x)$. В этом случае, исходя из сопряженности всех изоморфных $\text{SL}_n(q)$ подгрупп группы $\text{GL}_{n+1}(q)$, вновь приходим к требуемому разложению.)

Покажем, что $q = 2$ (ср. следующие рассуждения с [6, с. 115]). Пусть $y \in \Gamma(x)$. Тогда $G_1(x, y) = G_2(x)G_2(y)$ – элементарная абелева группа порядка q^2 (см. леммы П.2, П.3). Поскольку $O_2(G(x))/G_2(x)$ – естественный $\mathbf{F}_2G(x)^*/O_2(G(x))$ -модуль, то группа $G(x)_* \cap G(y)$ действует транзитивно на множестве неединичных элементов группы $G_1(x, y)/G_2(x)$, а потому действует транзитивно и на множестве неединичных элементов $G_2(y)$. При этом группа $G(x)_* \cap G(y)$ централизует $G_2(x)$. Аналогично, группа $G(y)_* \cap G(x)$ действует транзитивно на множестве неединичных элементов $G_2(x)$ и централизует $G_2(y)$. Отсюда следует, что, если $q > 2$, то лишь $G_2(x)$ и $G_2(y)$ являются подгруппами порядка q группы $G_1(x, y)$, допустимыми относительно $G(x, y)$. Но для $U_y = [O_2(G(y)), G(y)_*/O_2(G(y))]$ подгруппа $[U_x, U_y]$ группы $G_1(x, y)$ также $G(x, y)$ -допустима, причем в силу $|[U_x, U_y]^{\Gamma_2(x)}| = |[U_x, U_y]^{\Gamma_2(y)}| = q$ и $|[U_x, U_y]| \leq |U_x \cap G_1(y)| = q$ эта подгруппа имеет порядок q и отлична как от $G_2(x)$, так и от $G_2(y)$. Таким образом, $q = 2$.

Из $q = 2$ с учетом [4, предложение 2.3, 2)] следует, что $O_2(G(x)) = G_1(x)$ и $G_2(x)$ – группа порядка 2. Для произвольной вершины z графа Γ обозначим через c_z инволюцию группы $G_2(z)$. Тогда если $z' \in \Gamma(z)$, $z'' \in \Gamma(z') \setminus \{z\}$, то $1 \neq c_z^{\Gamma(z'')}\in T_{z''}(z', \varphi_{z', z''}(\langle z, z'' \rangle))$. Кроме того, для $[z', z''] \in E(\Gamma)$ неединичными элементами группы $G_1(z', z'')$ являются в точности элементы $c_{z'}, c_{z''}, c_{z'}c_{z''}$.

Покажем, что если $z \in V(\Gamma)$, $z_1 \in \Gamma(z)$, $z_2 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$, $z_3 \in \langle z_1, z_2 \rangle \setminus \{z_1, z_2\}$, то

$$c_{z_1}c_{z_2} = c_zc_{z_3}. \quad (\text{П.7})$$

Пусть $z_4 \in \Gamma(z_3) \setminus \varphi_{z, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$. Тогда $c_{z_1}c_{z_2} = [c_{z_1}, c_{z_4}]$ – инволюция из $G_1(z, z_3)$, перестановочная с элементом группы G , отображающим 3-дугу (z_1, z, z_3, z_4) в 3-дугу (z_4, z_3, z, z_1) . Следовательно, $c_{z_1}c_{z_2} = c_zc_{z_3}$, что и утверждалось.

В качестве следствия (П.7) получаем, что неединичными элементами группы U_x являются в точности элементы $c_xc_{x'}$, где $x' \in \Gamma(x)$.

Покажем теперь, что если $(z_0, \dots, z_3)$ – 3-дуга графа Γ и $z_3 \in \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle)$, то для всех $z_4 \in \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$

$$c_{z_0} \in G(z_4). \quad (\text{П.8})$$

Для этого заметим, что если $z_4 \in \varphi_{z_2, z_3}(\langle z_1, z_3 \rangle)$ и $c_{z_0} \notin G(z_4)$, то согласно (П.7) $[c_{z_0}, c_{z_4}] = c_{z_3} c_{z'}$ для некоторой вершины $z' \in \Gamma(z_3)$ и, следовательно, $[c_{z_0}, c_{z_4}] \notin G_2(z_2)$. Но в силу леммы П.3 имеем $[c_{z_0}, c_{z_4}] \in G_1(z_1, z_3) = G_2(z_2)$. Отсюда следует (П.8).

Докажем теперь дополняемость подгруппы $G_1(x)$ в группе $G(x)$. Пусть $y \in \Gamma(x)$, X – не содержащая y гиперплоскость проективного пространства $\Gamma(x)$, Y – не содержащая x гиперплоскость проективного пространства $\Gamma(y)$. Тогда группа $G(x, y, X)$ (стабилизатор X в $G(x, y)$) индуцирует на $[x : y]$ группу, изоморфную $\text{SL}_{n-1}(2)$, а потому индуцирует и на $[y : x]$ группу, изоморфную $\text{SL}_{n-1}(2)$. С учетом равенства $G_1(x)^{\Gamma(y)} = T_y(x)$ отсюда следует $G(x, y, X)^{\Gamma(y)} = G(x, y)^{\Gamma(y)}$. Поэтому, обозначая через D стабилизатор Y в $G(x, y, X)$, имеем $D^{\Gamma(x) \cup \Gamma(y)} \cong \text{SL}_{n-1}(2)$, причем $D \cap G_1(x, y) = G_1(x, y) = G_2(x)G_2(y)$.

Если подгруппа $G_2(x)G_2(y)$ имеет дополнение D' в группе D , то, учитывая (П.7), $D' \langle c_y c_{y'} \mid y' \in Y \rangle$ – дополнение для $G_1(x)$ в $G(x, y)$. Поскольку по теореме Гашюца из дополняемости $G_1(x)$ в $G(x, y)$ следует дополняемость $G_1(x)$ в $G(x)$, то для завершения доказательства предложения остается доказать дополняемость подгруппы $G_2(x)G_2(y)$ в группе D .

При $n > 5$ дополняемость $G_2(x)G_2(y)$ в D следует из тривиальности мультипликатора Шура группы $\text{SL}_{n-1}(2)$. Докажем дополняемость $G_2(x)G_2(y)$ в D при $n \leq 5$. Предварительно заметим, что если $z \in X$ и Z – прямая из $\varphi_{x, z}(\langle y, z \rangle)$, содержащая x , то для некоторой вершины $z' \in Z \setminus \{x\}$ элемент $c_z c_{z'}$ оставляет на месте гиперплоскость Y (т.е. $c_z c_{z'} \in D$). Действительно, согласно (П.7) и (П.8) элементарная абелева группа $\langle c_z c_{z'} \mid z' \in Z \rangle$ порядка 4 поточечно стабилизирует подпространство $Y \cap \varphi_{x, y}(\langle y, z \rangle)$ проективного пространства $\Gamma(y)$. Поскольку среди гиперплоскостей проективного пространства $\Gamma(y)$ помимо Y лишь $c_z c_x(Y)$ обладает тем свойством, что не содержит x и пересекается с $\varphi_{x, y}(\langle y, z \rangle)$ по $Y \cap \varphi_{x, y}(\langle y, z \rangle)$, то найдется вершина $z' \in Z \setminus \{x\}$, для которой элемент $c_z c_{z'}$ оставляет Y на месте.

Если $n = 4$, то отсутствие дополнения для $G_2(x)G_2(y)$ в D означает, что D есть прямое произведение группы, изоморфной $\text{SL}_2(7)$ (полной накрывающей группе для $\text{SL}_3(2)$), и циклической группы порядка 2. С учетом $D^{\Gamma(x)} \cong \text{SL}_3(2)$ в группе D нет инволюций, действующих на $\Gamma(x)$ нетривиально. Поскольку, как было замечено, для некоторых $z \in X$, $z' \in \Gamma(z) \setminus \{x\}$ инволюция $c_z c_{z'}$ содержится в D , то $(c_z c_{z'})^{\Gamma(x)} = c_{z'}^{\Gamma(x)} \neq 1$ влечет дополняемость $G_2(x)G_2(y)$ в D .

Если $n = 5$, то отсутствие дополнения для $G_2(x)G_2(y)$ в D означает, что D есть прямое произведение группы, изоморфной $\hat{A}_8$ (полной накрывающей группе для $\text{SL}_4(2) \cong A_8$), и циклической группы порядка 2. С учетом $D^{\Gamma(x)} \cong \text{SL}_4(2)$ в группе D нет инволюций, действующих на $\Gamma(x)$ как произведение двух (нетривиальных) коммутирующих трансвекций с различными центрами и осями. Пусть $z_1, \dots, z_4$ – базис X , $Z_1 = \varphi_{x, z_1}(\langle y, z_1, z_2, z_3 \rangle)$ и $Z_2 = \varphi_{x, z_2}(\langle y, z_1, z_2, z_4 \rangle)$. Как было замечено, для некоторых $z'_1 \in Z_1 \setminus \{x\}$, $z'_2 \in Z_2 \setminus \{x\}$ инволюции $c_{z_1} c_{z'_1}$, $c_{z_2} c_{z'_2}$

содержатся в D , причем согласно (П.8) эти инволюции коммутируют. Поскольку, кроме того, $(c_{z_1}c_{z'_1})^{\Gamma(x)} = c_{z'_1}^{\Gamma(x)}$ – неединичный элемент из $T_x(z_1, \langle y, z_1, z_2, z_3 \rangle)$ и $(c_{z_2}c_{z'_2})^{\Gamma(x)} = c_{z'_2}^{\Gamma(x)}$ – неединичный элемент из $T_x(z_2, \langle y, z_1, z_2, z_4 \rangle)$, то $G_2(x)G_2(y)$ дополняема в D . Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ П.1. Если для Γ и G выполнены условия доказанного предложения, то из этого предложения и лемм П.2, 1), П.3 (последние, хотя и были доказаны в случае, когда Γ – дерево, сохраняют силу без этого предположения; действительно, их справедливость для Γ и G вытекает из их справедливости для накрывающего дерева $\tilde{\Gamma}$ и соответствующей накрывающей группы $\tilde{G}$; см. [2, ч. I, § 1]) следует, что для произвольной 2-дуги (x, x', x'') графа Γ группа $G_2(x)$ действует точно на $\Gamma(x'')$ как $T_{x''}(x', \varphi_{x', x''}(\langle x, x'' \rangle))$ и для каждого элемента $h \in G_1(x) \setminus G_2(x)$ найдется вершина $x_h \in \Gamma(x)$ такая, что h действует на $\Gamma(x')$ тривиально при $x' = x_h$ и как неединичный элемент из $T_{x'}(x, \varphi_{x, x'}(\langle x_h, x' \rangle))$ при $x' \in \Gamma(x) \setminus \{x_h\}$.

В заключение приведем для каждого натурального числа $n \geq 4$ пример графа Γ и группы его автоморфизмов G , для которых выполнены условия предложения. Определим следующим образом автоморфизмы σ_1, σ_2 прямого произведения $H_1 \times H_2$ групп H_1, H_2 , совпадающих с матричной группой $SL_{n+1}(2)$. Для произвольного элемента $(A, B) \in H_1 \times H_2$ полагаем $\sigma_1((A, B)) = (B, A)$, $\sigma_2((A, B)) = ((A^t)^{-1}, (B^t)^{-1})$, где A^t и B^t – матрицы, транспонированные к A и B соответственно. Обозначим через G подгруппу $(H_1 \times H_2) \ltimes \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ голоморфа группы $H_1 \times H_2$. Пусть X – подгруппа группы G , порожденная σ_1 и всеми элементами вида $(A, A) \in H_1 \times H_2$, где матрица $A = (\alpha_{ij})$ такова, что $\alpha_{i, n+1} = 0$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть, кроме того, $Y = h^{-1}Xh$ – подгруппа, сопряженная с X элементом $h \in G$ таким, что $\sigma_2 h = (M', M'') \in H_1 \times H_2$, где

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & E & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & E & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

E – единичная $((n-1) \times (n-1))$ -матрица. Тогда, если Γ – граф, вершинами которого являются все подгруппы $g^{-1}Xg$, где $g \in G$, а ребрами – все неупорядоченные пары $\{g^{-1}Xg, g^{-1}Yg\}$, где $g \in G$, то нетрудно убедиться в том, что для Γ и группы его автоморфизмов G (G действует на вершинах и ребрах Γ сопряжениями) выполнены условия предложения. Группа $G_2(X)$ при этом совпадает с $\langle \sigma_1 \rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ П.2. Аналогичная конструкция в случае $n = 3$ доставляет пример графа Γ и группы его автоморфизмов G , для которых выполнено основное условие с $n = 3, q = 2$, причем реализуется случай (iii) из [1, введение] (т.е. $n = 3$ и G действует интранзитивно на множестве 3-дуг Γ) и $G_2(x) \neq 1$. Этот пример соответствует четвертой строке таблицы из [1, введение].

Список литературы

1. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. I // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №6. С. 159–222.
2. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами. Случаи малых характеристик. I–II // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №5. С. 124–171; 1994. Т. 58. №6. С. 137–156.
3. Трофимов В. И. Стабилизаторы вершин графов с проективными подорбитами // ДАН СССР. 1990. Т. 315. №3. С. 544–546.
4. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №4. С. 890–916.
5. Trofimov V. I. More on the vertex stabilizers of the symmetric graphs with projective subconstituents // Intern. Conf. Algebr. Combin.: Abstracts. Vladimir, 1991. P. 36–37.
6. Timmesfeld F. Amalgams with rank 2 groups of Lie-type in characteristic 2. Preprint. Justus–Liebig–Univ. Giessen Math. Inst., 1984.
7. Meierfrankenfeld U., Stellmacher B. Pushing up weak BN-pairs of rank two // Commun. Algebra. 1993. V. 21. P. 825–934.
8. McLaughlin J. Some subgroup of $SL_n(F_2)$ // Ill. J. Math. 1969. V. 13. P. 108–115.
9. Трофимов В. И. Письмо в редакцию // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №4. С. 221.
10. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. ATLAS of finite groups. Oxford e.a.: Oxford Univ. Press, 1985.
11. Weiss R. Graphs with subconstituents containing $L_3(p)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 85. P. 666–672.

Поступило в редакцию
23.IV.1998