Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, А. С. Печенцов, Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 6, 107–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:34:14

УДК 517.94

А. И. Козко, А. С. Печенцов

Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$

Исследуется спектральная функция самосопряженного полуограниченного снизу дифференциального оператора в гильбертовом пространстве $L_2[0, \infty)$. Предъявлены формулы спектральной функции оператора $(-1)^m y^{(2m)}(x)$ с общими краевыми условиями в нуле. В частности, при краевых условиях $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0$ найден явный вид спектральной функции $\Theta_{mB'}(x, x, \lambda)$ на диагонали $x = y$ при $\lambda \geq 0$.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: спектральная функция, собственные значения, самосопряженный дифференциальный оператор, регуляризованные следы, сингулярные дифференциальные операторы, функция Грина.

§ 1. Введение и основной результат

В гильбертовом пространстве $L_2[0, \infty)$ рассмотрим самосопряженный полуограниченный снизу оператор $\mathbb{L}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$\ell(y) \equiv (-1)^m y^{(2m)}(x) + p_{2m-2}(x)y^{(2m-2)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$B_l(y) \equiv \sum_{s=1}^{2m} a_{ls} y^{(s-1)}(0) = 0, \quad l = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Коэффициенты $p_i(x)$, $i = \overline{0, 2m-2}$, дифференциального выражения (1) являются действительнозначными локально интегрируемыми на полуоси $[0, +\infty)$ функциями.

Коэффициенты $a_{ls} \in \mathbb{C}$, $l = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, 2m}$, краевых условий (2) обеспечивают самосопряженное расширение $\mathbb{L}$ минимального симметрического оператора, порожденного операцией $\ell(y)$.

Пусть E_λ – совокупность проекционных операторов спектрального разложения оператора $\mathbb{L}$:

$$\mathbb{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Л. Гординг [1] показал, что для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ проекционный оператор E_λ является интегральным оператором с ядром Карлемана $\Theta_\mathbb{L}(x, y, \lambda)$: для любой

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00442-а) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (НШ-7322.2010.1).

функции $f \in L_2[0, \infty)$ и почти всех y выполнено

$$E_\lambda f(y) = \int_0^{+\infty} \Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda) f(x) dx.$$

При фиксированном λ ядро $\Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda)$ принадлежит $L_2[0, \infty)$ по каждой переменной x, y . Ядро $\Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda)$ называется *спектральной функцией* оператора $\mathbb{L}$.

Если оператор $\mathbb{L}$ полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\sigma(\mathbb{L}) = \{\lambda\}_{k=1}^\infty$, где $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, – собственные значения оператора $\mathbb{L}$, занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности, то спектральная функция $\Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda)$ имеет вид

$$\Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \varphi_n(x) \varphi_n(y);$$

здесь $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормированная система собственных функций оператора $\mathbb{L}$, отвечающая собственным значениям $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$.

Обозначим через $B \equiv (a_{ls}), l = \overline{1, m}, s = \overline{1, 2m}$, матрицу краевых условий (2) и через $\Theta_{mB}(x, y, \lambda)$ спектральную функцию оператора в $L_2[0, +\infty)$, порождаемого операций

$$\mathbb{L}_{mB} := (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$$

и краевыми условиями (2).

Для оператора Штурма–Лиувилля ($m = 1$) Б. М. Левитан [2] и В. А. Марченко [3] доказали равномерную в каждой ограниченной области переменных x и y асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ спектральной функции

$$\Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda) = \Theta_{1B}(x, y, \lambda) + o(1).$$

В случае всей оси для равномерно локально суммируемого потенциала $p_0(x)$, т. е. удовлетворяющего условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |p_0(y)| dy < +\infty,$$

В. А. Ильин [4] установил равномерную на всей плоскости переменных x и y оценку

$$\Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-y))}{x-y} + O(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Затем А. Г. Костюченко [5] перенес этот результат на сингулярные самосопряженные дифференциальные операторы произвольного порядка $2m$, т. е. доказал равномерную на любом компакте оценку

$$\Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda) = \Theta_{mB}(x, y, \lambda) + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Изучению асимптотики по спектральному параметру λ спектральной функции обыкновенных дифференциальных операторов, операторов в частных производных и псевдодифференциальных операторов посвящено значительное число фундаментальных работ [6]–[13].

Явный вид спектральной функции $\Theta_{1B}(x, y, \lambda)$ в случае $m = 1$ для краевых условий $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$ был найден Б. М. Левитаном [14, с. 396]:

$$\Theta_{1B}(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-y))}{x-y} \mp \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x+y))}{x+y} \right),$$

где знак “минус” берется при $y(0) = 0$ и знак “плюс” – при $y'(0) = 0$. Для $m = 2$ и краевых условий $y(0) = y''(0) = 0$ при $x = y$ спектральная функция была найдена А. Г. Костюченко [15]:

$$\Theta_{2B}(x, x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt[4]{\lambda} - \frac{\sin(2\sqrt[4]{\lambda}x)}{2x} \right).$$

В работе авторов [16] найден явный вид спектральной функции $\Theta_{mB}(x, y, \lambda)$ в двух частных случаях краевых условий (2):

1) если $y(0) = y''(0) = y^{(4)}(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0$ и B^* – матрица этих краевых условий, то

$$\Theta_{mB^*}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} - \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x+y))}{x+y} \right), & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0; \end{cases}$$

2) если $y'(0) = y'''(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0) = 0$ и B^{**} – матрица этих краевых условий, то

$$\Theta_{mB^{**}}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} + \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x+y))}{x+y} \right), & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Пусть z – произвольное комплексное число, лежащее в верхней полуплоскости, $z = \sigma + i\xi$, $\xi > 0$. Обозначим через τ_k^+ , $k = 1, 2, \dots, m$, корни степени $2m$ из комплексного числа z , лежащие в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned} \tau_k^+ &= \sqrt[2m]{|z|} \exp \left\{ i \left(\frac{\varphi}{2m} + \frac{\pi(k-1)}{m} \right) \right\} \\ &= r \exp \left\{ i \left(\frac{\varphi}{2m} + \frac{\pi(k-1)}{m} \right) \right\} = r \exp \left\{ i \frac{\varphi}{2m} \right\} \varkappa_k, \\ \varphi &= \arg z, \quad \varkappa_k = e^{i\pi \frac{k-1}{m}}. \end{aligned}$$

Определим матрицу

$$\begin{aligned} S(z) &= \begin{pmatrix} 1 & i\tau_1^+ & \dots & (i\tau_1^+)^{2m-1} \\ 1 & i\tau_2^+ & \dots & (i\tau_2^+)^{2m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\tau_m^+ & \dots & (i\tau_m^+)^{2m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,2m} & a_{2,2m} & \dots & a_{m,2m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{m1} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1m} & s_{2m} & \dots & s_{mm} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$s_{jl} = \sum_{s=1}^{2m} a_{js} (i\tau_l^+)^{s-1}.$$

Обозначим $\Delta(\sigma) = \det S(\sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \det S(z)$. Будем рассматривать краевые условия (2), для которых

$$\Delta(\sigma) \neq 0 \quad \text{при } \sigma \neq 0. \quad (4)$$

Этому требованию удовлетворяют, например, краевые условия

$$y^{(k_1)}(0) = y^{(k_2)}(0) = \dots = y^{(k_l)}(0) = \dots = y^{(k_m)}(0) = 0,$$

где $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq 2m-1$, $k_l \in \mathbb{Z}$, $l = 1, \dots, m$. В этом случае определитель матрицы $S(z)$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \det S(z) &= \begin{vmatrix} (i\tau_1^+)^{k_1} & (i\tau_1^+)^{k_2} & \dots & (i\tau_1^+)^{k_m} \\ (i\tau_2^+)^{k_1} & (i\tau_2^+)^{k_2} & \dots & (i\tau_2^+)^{k_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i\tau_m^+)^{k_1} & (i\tau_m^+)^{k_2} & \dots & (i\tau_m^+)^{k_m} \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{l=1}^m (i\tau_l^+)^{k_1} \right) \begin{vmatrix} 1 & (i\tau_1^+)^{k_2-k_1} & \dots & (i\tau_1^+)^{k_m-k_1} \\ 1 & (i\tau_2^+)^{k_2-k_1} & \dots & (i\tau_2^+)^{k_m-k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\tau_m^+)^{k_2-k_1} & \dots & (i\tau_m^+)^{k_m-k_1} \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{l=1}^m (i\tau_l^+)^{k_1} \right) \left(\prod_{l=1}^m (i\tau_l^+)^{k_l-k_1} \right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_{21} & \dots & \omega_{l1} & \dots & \omega_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_{21}^{s-1} & \dots & \omega_{l1}^{s-1} & \dots & \omega_{m1}^{s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_{21}^{m-1} & \dots & \omega_{l1}^{m-1} & \dots & \omega_{m1}^{m-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $\omega_{l1} = e^{\frac{k_l-k_1}{m}\pi i}$, $l = \overline{1, m}$. Определитель Вандермонда попарно различных чисел ω_{l1} , $l = \overline{1, m}$, не обращается в нуль, и, следовательно, $\Delta(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$. Для операторов второго порядка ($m = 1$) краевое условие

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$$

удовлетворяет требованию (4) при $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, в этом случае определитель $\Delta(\sigma)$ матрицы $S(\sigma)$ принимает вид

$$\Delta(\sigma) = \cos \alpha + i\sqrt{|\sigma|} e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \alpha,$$

$\varphi = 0$, если $\sigma > 0$, и $\varphi = \pi$, если $\sigma < 0$. При $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем $\Delta(\sigma) = (-1)^n$ и, следовательно, требование (4) выполняется. При $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, равенство $\Delta(\sigma) = 0$ эквивалентно уравнению $i\sqrt{|\sigma|} e^{i\frac{\varphi}{2}} = -\operatorname{ctg} \alpha$, которое имеет нетривиальное решение $\sigma = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{ctg} \alpha > 0$. Таким образом, если $\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$, т.е. при $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, то условие (4) выполняется.

Для формулировки основных результатов введем следующее обозначение:

$$\widehat{\Delta}(x, y, z) = \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\tau_k^+ y}}{(\tau_k^+)^{2m-1}} \times \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(-i\tau_k^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(-i\tau_k^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(-i\tau_k^+)^{s-1} & 0 \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(i\tau_1^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(i\tau_1^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(i\tau_1^+)^{s-1} & e^{i\tau_1^+ x} \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(i\tau_2^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(i\tau_2^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(i\tau_2^+)^{s-1} & e^{i\tau_2^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(i\tau_m^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(i\tau_m^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(i\tau_m^+)^{s-1} & e^{i\tau_m^+ x} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Если $\Delta(\sigma) \neq 0$ для любого $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то

$$\Theta_{mB}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} + \frac{(-1)^m}{2m\pi} \int_0^\lambda \operatorname{Re} \left(\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \mu)}{\Delta(\mu)} \right) d\mu, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

След спектральной функции $\Theta_{mB'}(x, y, \lambda)$ оператора

$$\mathbb{L}_{mB'} := (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0, \quad (6)$$

на диагонали $x = y$ принимает вид

$$\Theta_{mB'}(x, x, \lambda) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2m}}}{\pi} + \frac{(-1)^m \cdot 2^{2m-3}}{\pi m x} \sum_{k,l=1}^m \frac{\prod_{s=1}^m \cos\left(\frac{l-s}{2m}\pi\right) \cos\left(\frac{k-s}{2m}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{k-l}{2m}\pi\right)} \times \sin\left(x(\cos B_l + \cos B_k)\lambda^{\frac{1}{2m}} + \frac{\pi}{2}(m+l+k+1)\right) e^{-(\sin B_l + \sin B_k)x\lambda^{\frac{1}{2m}}},$$

где $B_s = \frac{s-1}{m}\pi$.

Определитель $\Delta(\sigma)$ матрицы $S(\sigma)$ является полиномом от $r = {}^{2m}\sqrt{|\sigma|}$, т. е. представим в виде $\Delta(\sigma) = A \prod_{s=1}^p (r - r_s)^{q_s}$, где $A \in \mathbb{C}$, p – число различных корней полинома $\Delta(\sigma)$, q_s – кратность корня r_s . Следовательно, отношение $\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)}$ представимо в виде

$$\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} = \frac{1}{r^{2m-1}} \sum_{k,l=1}^m e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)r} \left(b_{kl0} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{q_s} \frac{b_{klsj}}{(r - r_s)^j} \right), \quad (7)$$

где $b_{kl0}, b_{klsj} \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{L}$ – самосопряженный полуограниченный снизу оператор, задаваемый дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями (2), где $p_i(x) \in L_{1,\text{loc}}[0, +\infty)$, $i = \overline{0, 2m-2}$, – действительнзначные функции и $a_{ls} \in \mathbb{C}$, $l = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, 2m}$. Если $\Delta(\sigma) \neq 0$ для любого $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то

справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbb{L}}(x, y, \lambda) = & \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} + \frac{(-1)^m}{\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{k,l=1}^m b_{kl0} \frac{e^{i(\kappa_k y + \kappa_l x) \lambda^{\frac{1}{2m}}} - 1}{i(\kappa_k y + \kappa_l x)} \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{q_s} b_{klsj} \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2m}}} \frac{e^{i(\kappa_k y + \kappa_l x)r}}{(r-r_s)^j} dr \right) + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где комплекснозначные коэффициенты b_{kl0} , b_{klsj} определены разложением (7). Полученная оценка является равномерной по переменным x, y на любом компакте $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

§ 2. Спектральная функция оператора $\mathbb{L}_{mB}$

Обозначим через $K_j(x, \lambda)$, $j = 1, \dots, m$, решения дифференциального уравнения, заданного на полуоси $x \geq 0$:

$$(-1)^m K_j^{(2m)}(x, \lambda) - \lambda K_j(x, \lambda) = 0,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$B_l(K_j) = \delta_{lj}, \quad l = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где δ_{lj} – символ Кронекера, и принадлежащие пространству $L_2[0, +\infty)$. Если $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, то m корней $\tau_1^+, \dots, \tau_m^+$ характеристического уравнения

$$(-1)^m (i\tau)^{2m} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \tau^{2m} - \lambda = 0$$

лежат в открытой верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и m корней $\tau_1^-, \dots, \tau_m^-$ лежат в открытой нижней полуплоскости. Поэтому решение $K_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, m}$, является линейной комбинацией решений $e^{i\tau_k^+ x} \in L_2[0, +\infty)$, $k = \overline{1, m}$:

$$K_j(x, \lambda) = \sum_{l=1}^m c_{jl} e^{i\tau_l^+ x}.$$

Постоянные c_{jl} , $l = \overline{1, m}$, определяются по правилу Крамера из системы m линейных алгебраических уравнений, задаваемых краевыми условиями (8):

$$c_{jl} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} s_{11} & \dots & s_{j-1,1} & s_{j1} & s_{j+1,1} & \dots & s_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1,l-1} & \dots & s_{j-1,l-1} & s_{j,l-1} & s_{j+1,l-1} & \dots & s_{m,l-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_{1,l+1} & \dots & s_{j-1,l+1} & s_{j,l+1} & s_{j+1,l+1} & \dots & s_{m,l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1m} & \dots & s_{j-1,m} & s_{jm} & s_{j+1,m} & \dots & s_{mm} \end{vmatrix},$$

в предположении, что $\Delta(\lambda) = \det S(\lambda) \neq 0$. Поэтому

$$K_j(x, \lambda) = \sum_{l=1}^m c_{jl} e^{i\tau_l^+ x}$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} s_{11} & \dots & s_{j-1,1} e^{i\tau_1^+ x} & s_{j+1,1} & \dots & s_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1,l-1} & \dots & s_{j-1,l-1} e^{i\tau_{l-1}^+ x} & s_{j+1,l-1} & \dots & s_{m,l-1} \\ s_{1l} & \dots & s_{j-1,l} e^{i\tau_l^+ x} & s_{j+1,l} & \dots & s_{ml} \\ s_{1,l+1} & \dots & s_{j-1,l+1} e^{i\tau_{l+1}^+ x} & s_{j+1,l+1} & \dots & s_{m,l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1m} & \dots & s_{j-1,m} e^{i\tau_m^+ x} & s_{j+1,m} & \dots & s_{mm} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

ЛЕММА 1. Пусть $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ и $\Delta(\lambda) \neq 0$. Тогда функция Грина $H_{mB}(x, y, \lambda)$ оператора L_{mB} имеет следующее представление:

$$H_{mB}(x, y, \lambda) = \frac{i}{2m} \left(\sum_{k=1}^m \frac{e^{i\tau_k^+ |x-y|}}{(\tau_k^+)^{2m-1}} + (-1)^m \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \right),$$

где

$$\widehat{\Delta}(x, y, \lambda) = \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\tau_k^+ y}}{(\tau_k^+)^{2m-1}}$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{2m} a_{1s} (-i\tau_k^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s} (-i\tau_k^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms} (-i\tau_k^+)^{s-1} & 0 \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s} (i\tau_1^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s} (i\tau_1^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms} (i\tau_1^+)^{s-1} & e^{i\tau_1^+ x} \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s} (i\tau_2^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s} (i\tau_2^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms} (i\tau_2^+)^{s-1} & e^{i\tau_2^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s} (i\tau_m^+)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s} (i\tau_m^+)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms} (i\tau_m^+)^{s-1} & e^{i\tau_m^+ x} \end{vmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция Грина $H_{mB}(x, y, \lambda)$ оператора L_{mB} при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ имеет представление (см. [15, с. 37])

$$H_{mB}(x, y, \lambda) = K_0(x, y, \lambda) - \sum_{j=1}^m K_j(x, \lambda) B_j(K_0),$$

где

$$K_0(x, y, \lambda) = \frac{i}{2m} \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\tau_k^+ |x-y|}}{(\tau_k^+)^{2m-1}},$$

$$B_j(K_0) = \sum_{s=1}^{2m} a_{js} \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} (K_0(x, y, \lambda)) \Big|_{x=0}.$$

Производные $\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} (K_0(x, y, \lambda))$ в точке $x = 0$ при $y > 0$ имеют вид

$$\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} (K_0(x, y, \lambda)) \Big|_{x=0} = \frac{i}{2m} \sum_{k=1}^m (-i\tau_k^+)^{s-1} \frac{e^{i\tau_k^+ y}}{(\tau_k^+)^{2m-1}}.$$

Поэтому

$$B_j(K_0) = \frac{i}{2m} \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\tau_k^+ y}}{(\tau_k^+)^{2m-1}} \sum_{s=1}^{2m} a_{js} (-i\tau_k^+)^{s-1} = \frac{i}{2m} F_j(y),$$

где через $F_j(y)$ обозначена сумма $\sum_{k=1}^m \frac{e^{i\tau_k^+ y}}{(\tau_k^+)^{2m-1}} \sum_{s=1}^{2m} a_{js} (-i\tau_k^+)^{s-1}$. Отсюда, учитывая равенство (9), получаем утверждение леммы:

$$H_{mB}(x, y, \lambda) = \frac{i}{2m} \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\tau_k^+ |x-y|}}{(\tau_k^+)^{2m-1}} + (-1)^m \frac{i}{2m\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) & \dots & F_m(y) & 0 \\ s_{11} & s_{21} & \dots & s_{m1} & e^{i\tau_1^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1m} & s_{2m} & \dots & s_{mm} & e^{i\tau_m^+ x} \end{vmatrix}.$$

Спектральная функция $\Theta_{mB}(x, y, \mu)$ оператора $\mathbb{L}_{mB}$ при $\mu \geq 0$ выражается из [5, формула (8.8.1)]:

$$\Theta_{mB}(x, y, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \operatorname{Im} \left(\lim_{\xi \rightarrow 0+} H_{mB}(x, y, \sigma + i\xi) \right) d\sigma.$$

Обозначим $\lim_{\xi \rightarrow 0+} \tau_k^+ = \sigma^{\frac{1}{2m}} e^{i\frac{k-1}{m}\pi}$ через ω_k . Если $\Delta(\sigma) \neq 0$ при $\sigma > 0$, то из леммы 1 следует

$$\lim_{\xi \rightarrow 0+} H_{mB}(x, y, \sigma + i\xi) = \frac{i}{2m} \left(\sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k |x-y|}}{(\omega_k)^{2m-1}} + (-1)^m \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} \right).$$

Поэтому

$$\Theta_{mB}(x, y, \mu) = \frac{1}{2m\pi} \int_0^\mu \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k |x-y|}}{(\omega_k)^{2m-1}} + (-1)^m \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} \right) d\sigma.$$

Доказательство теоремы 1 завершает

ЛЕММА 2. *Имеем*

$$\frac{1}{2m\pi} \int_0^\mu \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k |x-y|}}{(\omega_k)^{2m-1}} \right) d\sigma = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\mu^{\frac{1}{2m}}(x-y)\right)}{x-y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{e^{i\omega_{m-(k-2)} |x-y|}}{(\omega_{m-(k-2)})^{2m-1}} &= \operatorname{Re} \frac{e^{i\sigma^{\frac{1}{2m}} e^{i\frac{(m-k+1)}{m}\pi} |x-y|}}{\sigma^{\frac{2m-1}{2m}} e^{i\frac{(m-k+1)}{m}(2m-1)\pi}} \\ &= -\frac{1}{\sigma^{\frac{2m-1}{2m}}} \operatorname{Re} \frac{e^{-i\sigma^{\frac{1}{2m}} |x-y| e^{-i\frac{k-1}{m}\pi}}}{e^{i\frac{k-1}{m}\pi}} \\ &= -\frac{1}{\sigma^{\frac{2m-1}{2m}}} \operatorname{Re} e^{-i\left(\sigma^{\frac{1}{2m}} |x-y| \left(\cos\left(\frac{k-1}{m}\pi\right) - i \sin\left(\frac{k-1}{m}\pi\right)\right) + \frac{k-1}{m}\pi\right)} \\ &= -\frac{e^{-\sigma^{\frac{1}{2m}} |x-y| \sin\left(\frac{k-1}{m}\pi\right)} \cos\left(\sigma^{\frac{1}{2m}} |x-y| \cos\left(\frac{k-1}{m}\pi\right) + \frac{k-1}{m}\pi\right)}{\sigma^{2m-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\omega_{m-(k-2)} |x-y|}}{(\omega_{m-(k-2)})^{2m-1}} = -\operatorname{Re} \frac{e^{i\omega_k |x-y|}}{(\omega_k)^{2m-1}}, \quad k = 2, \dots, \left[\frac{m}{2}\right] + 1.$$

Следовательно, под знаком интеграла останется одно слагаемое (остальные попарно сократятся), соответствующее $k = 1$, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi m} \int_0^\mu \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\omega_1|x-y|}}{(\omega_1)^{2m-1}} \right) d\sigma &= \frac{1}{2\pi m} \int_0^\mu \frac{\cos(\sigma^{\frac{1}{2m}}|x-y|)}{\sigma^{\frac{2m-1}{2m}}} d\sigma \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\mu^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Следствия из теоремы 1

Найдем явный вид спектральной функции $\Theta_{mB^*}(x, y, \lambda)$ оператора

$$\mathbb{L}_{mB^*} := (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}, \quad y(0) = y''(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеем*

$$\Theta_{mB^*}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} - \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x+y))}{x+y} \right), & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краевых условий $y(0) = y''(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0$ находим

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & (i\omega_1)^2 & (i\omega_1)^4 & \dots & (i\omega_1)^{2m-2} \\ 1 & (i\omega_2)^2 & (i\omega_2)^4 & \dots & (i\omega_2)^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\omega_m)^2 & (i\omega_m)^4 & \dots & (i\omega_m)^{2m-2} \end{vmatrix}.$$

Теперь вычислим:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} &= \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k y}}{\Delta(\sigma)(\omega_k)^{2m-1}} \\ &\times \begin{vmatrix} 1 & (i\omega_k)^2 & (i\omega_k)^4 & \dots & (i\omega_k)^{2m-2} & 0 \\ 1 & (i\omega_1)^2 & (i\omega_1)^4 & \dots & (i\omega_1)^{2m-2} & e^{i\omega_1 x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\omega_m)^2 & (i\omega_m)^4 & \dots & (i\omega_m)^{2m-2} & e^{i\omega_m x} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{m+1} e^{i\omega_k(x+y)}}{(\omega_k)^{2m-1}}. \end{aligned}$$

Аналогично лемме 2 получаем

$$\frac{1}{2m\pi} \int_0^\mu \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{m+1} e^{i\omega_k(x+y)}}{(\omega_k)^{2m+1}} \right) d\sigma = (-1)^{m+1} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\mu^{\frac{1}{2m}}(x+y))}{x+y},$$

и явная формула спектральной функции $\Theta_{mB^*}(x, y, \lambda)$ следует из теоремы 1.

Найдем явный вид спектральной функции $\Theta_{mB^{**}}(x, y, \lambda)$ оператора

$$\mathbb{L}_{mB^{**}} = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}, \quad y'(0) = y'''(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеем*

$$\Theta_{mB^{**}}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} + \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x+y))}{x+y} \right), & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краевых условий

$$y'(0) = y'''(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0) = 0$$

находим

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} i\omega_1 & (i\omega_1)^3 & \dots & (i\omega_1)^{2m-1} \\ i\omega_2 & (i\omega_2)^3 & \dots & (i\omega_2)^{2m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i\omega_m & (i\omega_m)^3 & \dots & (i\omega_m)^{2m-1} \end{vmatrix}.$$

Теперь вычислим:

$$\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} = \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k y}}{\Delta(\sigma)(\omega_k)^{2m-1}} \begin{vmatrix} -i\omega_k & (-i\omega_k)^3 & \dots & (-i\omega_k)^{2m-1} & 0 \\ i\omega_1 & (i\omega_1)^3 & \dots & (i\omega_1)^{2m-1} & e^{i\omega_1 x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i\omega_m & (i\omega_m)^3 & \dots & (i\omega_m)^{2m-1} & e^{i\omega_m x} \end{vmatrix}.$$

Прибавив к первой строке определителя $(k+1)$ -ю строку, получаем

$$\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^m e^{i\omega_k(x+y)}}{(\omega_k)^{2m-1}}.$$

Формула для спектральной функции теоремы 1 с использованием леммы 2 доказывает следствие.

Найдем вид спектральной функции $\Theta_{mB'}(x, y, \lambda)$ оператора (6). В этом случае определитель $\Delta(\sigma)$ является определителем Вандермонда:

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & i\omega_1 & (i\omega_1)^2 & \dots & (i\omega_1)^{m-1} \\ 1 & i\omega_2 & (i\omega_2)^2 & \dots & (i\omega_2)^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\omega_m & (i\omega_m)^2 & \dots & (i\omega_m)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Теперь вычислим:

$$\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} = \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k y}}{\Delta(\sigma)(\omega_k)^{2m-1}} \begin{vmatrix} 1 & -i\omega_k & (-i\omega_k)^2 & \dots & (-i\omega_k)^{m-1} & 0 \\ 1 & i\omega_1 & (i\omega_1)^2 & \dots & (i\omega_1)^{m-1} & e^{i\omega_1 x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\omega_k & (i\omega_k)^2 & \dots & (i\omega_k)^{m-1} & e^{i\omega_k x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\omega_m & (i\omega_m)^2 & \dots & (i\omega_m)^{m-1} & e^{i\omega_m x} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по последнему столбцу и перемещая 1-ю строку на l -е место, получим

$$\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} = \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k y}}{(\omega_k)^{2m-1}} \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^{m-1} e^{i\omega_l x}}{\Delta(\sigma)} \times \begin{vmatrix} 1 & i\omega_1 & (i\omega_1)^2 & \dots & (i\omega_1)^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\omega_{l-1} & (i\omega_{l-1})^2 & \dots & (i\omega_{l-1})^{m-1} \\ 1 & -i\omega_k & (-i\omega_k)^2 & \dots & (-i\omega_k)^{m-1} \\ 1 & i\omega_{l+1} & (i\omega_{l+1})^2 & \dots & (i\omega_{l+1})^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\omega_m & (i\omega_m)^2 & \dots & (i\omega_m)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Пусть

$$\omega_s^* = \begin{cases} \omega_s, & \text{если } s \neq l, \\ -\omega_k, & \text{если } s = l. \end{cases}$$

Выпишем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(\sigma)} \begin{vmatrix} 1 & i\omega_1^* & (i\omega_1^*)^2 & \dots & (i\omega_1^*)^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\omega_s^* & (i\omega_s^*)^2 & \dots & (i\omega_s^*)^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i\omega_m^* & (i\omega_m^*)^2 & \dots & (i\omega_m^*)^{m-1} \end{vmatrix} &= \frac{\prod_{1 \leq r < s \leq m} (\omega_s^* - \omega_r^*)}{\prod_{1 \leq r < s \leq m} (\omega_s - \omega_r)} \\ &= \frac{(\omega_m + \omega_k) \dots (\omega_{l+1} + \omega_k)(-\omega_k - \omega_{l-1}) \dots (-\omega_k - \omega_1)}{(\omega_m - \omega_l) \dots (\omega_{l+1} - \omega_l)(\omega_l - \omega_{l-1}) \dots (\omega_l - \omega_1)} \\ &= \frac{\prod_{s=1, s \neq l}^m (\omega_s + \omega_k)}{\prod_{s=1, s \neq l}^m (\omega_s - \omega_l)} = \prod_{s=1, s \neq l}^m \left(\frac{\omega_s + \omega_k}{\omega_s - \omega_l} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^{m-1} e^{i(\omega_k y + \omega_l x)}}{(\omega_k)^{2m-1}} \prod_{s=1, s \neq l}^m \frac{\omega_s + \omega_k}{\omega_s - \omega_l}.$$

Положим

$$\chi_{klm} = (-1)^{m-1} \prod_{s=1, s \neq l}^m \frac{\omega_s + \omega_k}{\omega_s - \omega_l} = (-1)^{m-1} \prod_{s=1, s \neq l}^m \frac{e^{i \frac{s-1}{m} \pi} + e^{i \frac{k-1}{m} \pi}}{e^{i \frac{s-1}{m} \pi} - e^{i \frac{l-1}{m} \pi}}.$$

Из равенства

$$\begin{aligned} 1 - x^{2m} &= - \prod_{s=0}^{m-1} \left(e^{\frac{is\pi}{m}} - x \right) \prod_{s=0}^{m-1} \left(e^{\frac{i(m+s)\pi}{m}} - x \right) \\ &= (-1)^{m+1} \prod_{s=0}^{m-1} \left(e^{\frac{is\pi}{m}} - x \right) \prod_{s=0}^{m-1} \left(e^{\frac{is\pi}{m}} + x \right) \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{1}{\prod_{s=0, s \neq l-1}^{m-1} \left(e^{\frac{is\pi}{m}} - x \right)} = (-1)^{m+1} \frac{e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}} - x}{1 - x^{2m}} \prod_{s=0}^{m-1} \left(e^{\frac{is\pi}{m}} + x \right).$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \rightarrow e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}}$, получаем тождество

$$\frac{1}{\prod_{s=1, s \neq l}^m (e^{\frac{i(s-1)\pi}{m}} - e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}})} = \frac{(-1)^{m+1}}{2m} e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}} \prod_{s=1}^m (e^{\frac{i(s-1)\pi}{m}} + e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}}).$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} & (-1)^{m+l} \prod_{s=1, s \neq l}^m \frac{e^{\frac{i(s-1)\pi}{m}} + e^{\frac{i(k-1)\pi}{m}}}{e^{\frac{i(s-1)\pi}{m}} - e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}}} \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2m} e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}} \prod_{s=1}^m (e^{\frac{i(s-1)\pi}{m}} + e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}}) \frac{\prod_{s=1}^m (e^{\frac{i(s-1)\pi}{m}} + e^{\frac{i(k-1)\pi}{m}})}{e^{\frac{i(l-1)\pi}{m}} + e^{\frac{i(k-1)\pi}{m}}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^m (e^{\frac{i(s-1)\pi}{m}} + e^{\frac{i(p-1)\pi}{m}}) &= \prod_{s=1}^m e^{\frac{i(p-2+s)\pi}{2m}} (e^{\frac{i(s-p)\pi}{2m}} + e^{\frac{-i(s-p)\pi}{2m}}) \\ &= 2^m \exp\left\{\frac{i((p-2)m + \frac{m(m+1)}{2})\pi}{2m}\right\} \prod_{s=1}^m \cos\left(\frac{(p-s)\pi}{2m}\right), \end{aligned}$$

из (10) вытекает представление

$$\chi_{klm} = \frac{2^{2m-2}}{m} \gamma_{klm} \exp\left\{\frac{\pi}{2m} c_{klm} i\right\}, \quad (11)$$

где $c_{klm} = (m-1)(l+k+m-2) + 2(l-1)$,

$$\gamma_{klm} = \frac{\prod_{s=1}^m \cos\left(\frac{l-s}{2m}\pi\right) \cos\left(\frac{k-s}{2m}\pi\right)}{\cos\left(\frac{k-l}{2m}\pi\right)}.$$

Согласно теореме 1 имеем

$$\Theta_{mB'}(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} + \frac{(-1)^m}{2m\pi} \int_0^\lambda \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{e^{i(\omega_k y + \omega_l x)}}{(\omega_k)^{2m-1}} \chi_{klm} \right) d\sigma.$$

Сначала вычислим:

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \frac{\exp\{i(\omega_k y + \omega_l x)\}}{(\omega_k)^{2m-1}} d\sigma &= \int_0^\lambda \frac{\exp\{i\sigma^{\frac{1}{2m}}(\varkappa_k y + \varkappa_l x)\}}{\sigma^{\frac{2m-1}{2m}} \varkappa_k^{(2m-1)}} d\sigma \\ &= 2m \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2m}}} \frac{e^{i\mu(\varkappa_k y + \varkappa_l x)}}{\varkappa_k^{(2m-1)}} d\mu = \frac{2m}{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x) \varkappa_k^{(2m-1)}} (e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x) \lambda^{\frac{1}{2m}}} - 1). \end{aligned}$$

В силу представления (11) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda \frac{e^{i(\omega_k y + \omega_l x)}}{(\omega_k)^{2m-1}} \chi_{klm} d\sigma \\ &= \frac{2^{2m-1}}{\varkappa_k y + \varkappa_l x} \gamma_{klm} e^{\frac{\pi}{2m} i(m(l+k+m)+l+k-2)} (e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x) \lambda^{\frac{1}{2m}}} - 1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Theta_{mB'}(x, y, \lambda) &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} + \frac{(-1)^m \cdot 2^{2m-2}}{m\pi} \\ &\quad \times \operatorname{Re} \left(\sum_{k,l=1}^m \gamma_{klm} e^{\frac{\pi}{2m}i(m(l+k+m)+l+k-2)} \frac{e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x) \lambda^{\frac{1}{2m}} - 1}}{\varkappa_k y + \varkappa_l x} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} \\ &\quad + \frac{(-1)^m \cdot 2^{2m-2}}{m\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{k,l=1}^m \gamma_{klm} e^{\frac{\pi}{2}i(l+k+m)} \frac{e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x) \lambda^{\frac{1}{2m}} - 1}}{e^{\frac{\pi}{2m}i(k-l)}y + e^{\frac{\pi}{2m}i(l-k)}x} \right).\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i(l+k+m)}}{e^{\frac{\pi}{2m}i(k-l)}y + e^{\frac{\pi}{2m}i(l-k)}x} &= \operatorname{Re} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(m+k+l)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}(m+k+l)\right)}{(x+y) \cos\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) + i(y-x) \sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right)} \\ &= \frac{(x+y) \cos\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(m+k+l)\right)}{(x+y)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) + (y-x)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right)} \\ &\quad + \frac{(y-x) \sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(m+k+l)\right)}{(x+y)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) + (y-x)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right)} \\ &= \frac{x \cos\left(\frac{\pi}{2m}\{(m+k+l)m - (k-l)\}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2m}\{(m+k+l)m + (k-l)\}\right)}{x^2 + y^2 + 2xy \cos\left(\frac{\pi}{m}(k-l)\right)}.\end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{Re} \sum_{k,l=1}^m \gamma_{klm} e^{\frac{\pi i}{2m}(m(l+k+m)+l+k-2)} \frac{1}{\varkappa_k y + \varkappa_l x} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$\begin{aligned}r_{klm}(x, y) &= \gamma_{klm} \\ &\quad \times \frac{x \cos\left(\frac{\pi}{2m}\{(m+k+l)m + l - k\}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2m}\{(m+k+l)m + k - l\}\right)}{x^2 + y^2 + 2xy \cos\left(\frac{\pi}{m}(k-l)\right)}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\gamma_{klm} &= \frac{1}{\cos\left(\frac{(k-l)}{2m}\pi\right)} \left(\cos\left(\frac{(l-1)}{2m}\pi\right) \cos\left(\frac{(l-2)}{2m}\pi\right) \cdots \cos 0 \cdots \cos\left(\frac{(m-l)}{2m}\pi\right) \right) \\ &\quad \times \left(\cos\left(\frac{(k-1)}{2m}\pi\right) \cos\left(\frac{(k-2)}{2m}\pi\right) \cdots \cos 0 \cdots \cos\left(\frac{(m-k)}{2m}\pi\right) \right) \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{(k-l)}{2m}\pi\right)} \prod_{s=1}^m \cos\left(\frac{(m+1-l-s)}{2m}\pi\right) \cos\left(\frac{(m+1-k-s)}{2m}\pi\right) \\ &= \gamma_{m+1-k, m+1-l, m}, \quad k, l = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} r_{m+1-k, m+1-l, m}(x, y) &= \gamma_{klm} \\ &\times \frac{x \cos\left(\frac{\pi}{2m}\{(3m+2-k-l)m+k-l\}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2m}\{(3m+2-k-l)m+l-k\}\right)}{x^2 + y^2 + 2xy \cos\left(\frac{\pi}{m}(k-l)\right)} \\ &= -r_{klm}(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Если $m+k+l$ – нечетное число, то справедливо равенство

$$r_{klm}(x, y) = \gamma_{klm} \frac{(-1)^{\frac{m+k+l-1}{2}} (x-y) \sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right)}{x^2 + y^2 + 2xy \cos\left(\frac{\pi}{m}(k-l)\right)}, \quad (13)$$

которое вытекает из соотношений (при условии, что $m+k+l$ нечетно)

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}((m+k+l)m \mp (k-l))\right) &= \pm \sin\left(\frac{\pi}{2}(m+k+l)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) \\ &= \pm (-1)^{\frac{m+k+l-1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right). \end{aligned}$$

Из равенства (13) получаем, что при нечетном $m+k+l$

$$r_{klm}(x, y) = -r_{lkm}(x, y), \quad r_{kkm}(x, y) = 0, \quad k, l = 1, \dots, m. \quad (14)$$

Рассмотрим представление

$$\sum_{k, l=1}^m r_{klm}(x, y) = \sum_{k+l \text{ четное}} r_{klm}(x, y) + \sum_{k+l \text{ нечетное}} r_{klm}(x, y).$$

Для нечетного m справедливо

$$\sum_{k+l \text{ четное}} = \sum_{s=1}^m r_{ssm}(x, y) + \sum_{s=1}^{m-2} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{m-s}{2} \rfloor} \{r_{s, s+2l, m}(x, y) + r_{s+2l, s, m}(x, y)\}.$$

Отсюда следует, что $\sum_{k+l \text{ четное}} r_{klm}(x, y) = 0$, так как здесь $m+k+l$ нечетно, и из (14) вытекает, что выражение, стоящее в фигурных скобках в двойной сумме, равно нулю и $r_{ssm} = 0$, $s = 1, \dots, m$.

Теперь сумма

$$\begin{aligned} \sum_{k+l \text{ нечетное}} &= \sum_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}-s} (\{r_{s, s+2l+1}(x, y) + r_{m+1-s, m-s-2l, m}(x, y)\} \\ &\quad + \{r_{s+2l+1, s, m}(x, y) + r_{m-s-2l, m+1-s, m}(x, y)\}) \end{aligned}$$

также равна нулю, так как из (12) следует, что выражения, записанные в фигурных скобках, равны нулю.

В случае четного m , аналогично имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k+l \text{ четное}} &= \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \{r_{ssm}(x, y) + r_{m+1-s, m+1-s, m}(x, y)\} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\frac{m}{2}-1} \sum_{l=1}^{\frac{m}{2}-s} (\{r_{s, s+2l, m}(x, y) + r_{m+1-s, m+1-s-2l, m}(x, y)\} \\ &\quad + \{r_{s+2l, s, m}(x, y) + r_{m+1-s-2l, m+1-s, m}(x, y)\}) = 0, \end{aligned}$$

так как из (12) вытекает, что выражения, записанные в фигурных скобках, равны нулю. Кроме того,

$$\sum_{k+l \text{ нечетное}} = \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{m+1-s}{2} \rfloor} \{r_{s,s+2l-1,m}(x,y) + r_{s+2l-1,s,m}(x,y)\},$$

и опять выражения в фигурных скобках равны нулю, что следует из (14).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{(k-1)\pi}{m}, & \tilde{A}_{kl} &= x \cos B_l + y \cos B_k, \\ \tilde{B}_{klm} &= ((m+1)(m+l+k-4)+2) \frac{\pi}{2m}, \\ \tilde{C}_{kl} &= -(x \sin B_l + y \sin B_k), & D_{klm\lambda}(x,y) &= \frac{\pi}{2}(l+k+m) + \tilde{A}_{kl}\lambda^{\frac{1}{2m}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Найдем

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i(l+k+m)} e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x) \lambda^{\frac{1}{2m}}}}{e^{\frac{\pi}{2m}i(k-l)} y + e^{\frac{\pi}{2m}i(k-l)} x} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}(l+k+m) + y(\cos B_k + i \sin B_k)\lambda^{\frac{1}{2m}} + x(\cos B_l + i \sin B_l)\lambda^{\frac{1}{2m}}\right)\right\}}{(x+y) \cos\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) + i(y-x) \sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right)} \\ &= \frac{\exp\left\{-\lambda^{\frac{1}{2m}}(y \sin B_k + x \sin B_l)\right\}}{(x+y)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) + (y-x)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right)} \\ & \quad \times \operatorname{Re} \left\{ (\cos D_{klm\lambda}(x,y) + i \sin D_{klm\lambda}(x,y)) \right. \\ & \quad \times \left. \left((x+y) \cos\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) - i(y-x) \sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) \right) \right\} \\ &= \exp\left\{-\lambda^{\frac{1}{2m}} \tilde{C}_{kl}\right\} \\ & \quad \times \frac{x \cos\left(D_{klm\lambda}(x,y) + \frac{\pi}{2m}(k-l)\right) + y \cos\left(D_{klm\lambda}(x,y) - \frac{\pi}{2m}(k-l)\right)}{(x+y)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right) + (y-x)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}(k-l)\right)}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \frac{e^{\frac{\pi}{2}i(l+k+m)} e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x) \lambda^{\frac{1}{2m}}}}{e^{\frac{\pi}{2m}i(k-l)} y + e^{\frac{\pi}{2m}i(k-l)} x} \\ &= e^{-\lambda^{\frac{1}{2m}} \tilde{C}_{kl}} \frac{x \sin(\tilde{A}_{kl}\lambda^{\frac{1}{2m}} + \tilde{B}_{klm} - B_l) + y \sin(\tilde{A}_{kl}\lambda^{\frac{1}{2m}} + \tilde{B}_{klm} - B_k)}{x^2 + y^2 + 2xy \cos\left(\frac{\pi}{m}(k-l)\right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеем

$$\Theta_{mB'}(x,y,\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x-y))}{x-y} + \frac{(-1)^m}{\pi} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\tilde{\gamma}_{klm} \xi_{klm}(x,y,\lambda)}{x^2 + y^2 + 2xy \cos\left(\frac{(k-l)\pi}{m}\right)},$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{klm} &= \frac{2^{2m-2}}{m} \gamma_{klm}, \\ \xi_{klm}(x, y, \lambda) &= e^{-\lambda^{\frac{1}{2m}} \tilde{C}_{kl}} \left(x \sin(\tilde{A}_{kl} \lambda^{\frac{1}{2m}} + \tilde{B}_{klm} - B_l) \right. \\ &\quad \left. + y \sin(\tilde{A}_{kl} \lambda^{\frac{1}{2m}} + \tilde{B}_{klm} - B_k) \right).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1, леммы 3 и равенства (16).

СЛЕДСТВИЕ 4. Имеем

$$\begin{aligned}\Theta_{mB'}(x, x, \lambda) &= \frac{\lambda^{\frac{1}{2m}}}{\pi} + \frac{(-1)^m}{\pi} \\ &\times \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\tilde{\gamma}_{klm} \sin(x(\cos B_l + \cos B_k) \lambda^{\frac{1}{2m}} + B_{klm} - \frac{B_k + B_l}{2})}{2x \cos(\frac{\pi}{2m}(k-l))} \\ &\times e^{-(\sin B_l + \sin B_k) x \lambda^{\frac{1}{2m}}}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить $x = y$ в следствии 3.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, будем считать, что коэффициенты a_{kl} краевых условий (2) удовлетворяют условиям $a_{lk_l} \neq 0$, $a_{l, k_l+1} = a_{l, k_l+2} = \dots = a_{l, 2m} = 0$, $l = 1, \dots, m$ и $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq 2m$. Тогда определитель $\Delta(\sigma)$ матрицы $S(\sigma)$ является полиномом от $r = \sqrt[2m]{|\sigma|}$ степени $\sum_{l=1}^m k_l - m$.

Разлагая определитель $\Delta(\sigma)$ по столбцам, выделим слагаемое

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{1k_1}(i\omega_1)^{k_1-1} & a_{2k_2}(i\omega_1)^{k_2-1} & \dots & a_{mk_m}(i\omega_1)^{k_m-1} \\ a_{1k_1}(i\omega_2)^{k_1-1} & a_{2k_2}(i\omega_2)^{k_2-1} & \dots & a_{mk_m}(i\omega_2)^{k_m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k_1}(i\omega_m)^{k_1-1} & a_{2k_2}(i\omega_m)^{k_2-1} & \dots & a_{mk_m}(i\omega_m)^{k_m-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{l=1}^m a_{lk_l} \prod_{l=1}^m (ir)^{k_l-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varkappa_2^{k_1-1} & \varkappa_2^{k_2-1} & \dots & \varkappa_2^{k_m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_m^{k_1-1} & \varkappa_m^{k_2-1} & \dots & \varkappa_m^{k_m-1} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

которое дает максимальную степень полинома $\Delta(\sigma)$, равную $\sum_{l=1}^m k_l - m$.

Последний определитель является определителем Вандермонда попарно различных чисел, поэтому не обращается в нуль. Разлагая каждый определитель по последнему столбцу в представлении (5) функции $\hat{\Delta}(x, y, \sigma)$, получаем

$$\frac{\hat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} = \frac{1}{r^{2m-1}} \sum_{k, l=1}^m e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)r} \left(b_{kl0} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{q_s} \frac{b_{klsj}}{(r - r_s)^j} \right), \quad (17)$$

где p – число различных корней полинома $\Delta(\sigma)$, q_s – кратность корня r_s полинома $\Delta(\sigma)$, b_{klsj} – неопределенные коэффициенты в разложении рациональной

функции:

$$\frac{(-1)^{m+l}}{\varkappa_k^{2m-1}\Delta(\sigma)} \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(-i\omega_k)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(-i\omega_k)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(-i\omega_k)^{s-1} \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(i\omega_1)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(i\omega_1)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(i\omega_1)^{s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(i\omega_{l-1})^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(i\omega_{l-1})^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(i\omega_{l-1})^{s-1} \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(i\omega_{l+1})^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(i\omega_{l+1})^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(i\omega_{l+1})^{s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{2m} a_{1s}(i\omega_m)^{s-1} & \sum_{s=1}^{2m} a_{2s}(i\omega_m)^{s-1} & \dots & \sum_{s=1}^{2m} a_{ms}(i\omega_m)^{s-1} \end{vmatrix}$$

на элементарные дроби и

$$b_{kl0} = \frac{(-1)^{m-1}}{\varkappa_k^{2m-1}} \frac{\begin{vmatrix} \varkappa_1^{k_1-1} & \varkappa_1^{k_2-1} & \dots & \varkappa_1^{k_m-1} \\ \varkappa_2^{k_1-1} & \varkappa_2^{k_2-1} & \dots & \varkappa_2^{k_m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_{l-1}^{k_1-1} & \varkappa_{l-1}^{k_2-1} & \dots & \varkappa_{l-1}^{k_m-1} \\ (-\varkappa_k)^{k_1-1} & (-\varkappa_k)^{k_2-1} & \dots & (-\varkappa_k)^{k_m-1} \\ \varkappa_{l+1}^{k_1-1} & \varkappa_{l+1}^{k_2-1} & \dots & \varkappa_{l+1}^{k_m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_m^{k_1-1} & \varkappa_m^{k_2-1} & \dots & \varkappa_m^{k_m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varkappa_1^{k_1-1} & \varkappa_1^{k_2-1} & \dots & \varkappa_1^{k_m-1} \\ \varkappa_2^{k_1-1} & \varkappa_2^{k_2-1} & \dots & \varkappa_2^{k_m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_m^{k_1-1} & \varkappa_m^{k_2-1} & \dots & \varkappa_m^{k_m-1} \end{vmatrix}}.$$

Делая замену переменной $\sigma^{\frac{1}{2m}} = r$, вычисляем

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} d\sigma &= 2m \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2m}}} \sum_{k,l=1}^m e^{i(\omega_k y + \omega_l x)r} \left(b_{kl0} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{q_s} \frac{b_{klsj}}{(r - r_s)^j} \right) dr \\ &= 2m \sum_{k,l=1}^m b_{kl0} \frac{e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)\lambda^{\frac{1}{2m}}} - 1}{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)} + 2m \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{q_s} b_{klsj} \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2m}}} \frac{e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)r}}{(r - r_s)^j} dr. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Имеем

$$\Theta_{mB}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2m}}(x - y))}{x - y} + \frac{(-1)^m}{\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{k,l=1}^m b_{kl0} \frac{e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)\lambda^{\frac{1}{2m}}} - 1}{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{q_s} b_{klsj} \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2m}}} \frac{e^{i(\varkappa_k y + \varkappa_l x)r}}{(r - r_s)^j} dr \right), & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из следствия 5 и уже процитированного результата А. Г. Костюченко (см. формулу (3)) вытекает теорема 2.

§ 5. Примеры

ПРИМЕР 1 (случай $m = 1$). Рассмотрим оператор $\mathbb{L}_{1,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$. Для случая $m = 1$ имеем $a_{11} = \cos \alpha$, $a_{12} = \sin \alpha$, $r = \sigma^{\frac{1}{2}}$, $\sigma \geq 0$, $\Delta(\sigma) = \cos \alpha + ir \sin \alpha$,

$$\widehat{\Delta}(x, y, \sigma) = \frac{e^{iry}}{r} \begin{vmatrix} \cos \alpha - ir \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha + ir \sin \alpha & e^{irx} \end{vmatrix} = (\cos \alpha - ir \sin \alpha) e^{ir(x+y)}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} &= \frac{e^{ir(x+y)}}{r} \frac{\cos \alpha - ir \sin \alpha}{\cos \alpha + ir \sin \alpha} \\ &= \frac{e^{ir^{\frac{1}{2}}(x+y)}}{r} \frac{\cos^2 \alpha - r^2 \sin^2 \alpha - 2ir \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 находим выражение для спектральной функции

$$\Theta_{1,\alpha}(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}(x-y))}{x-y} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \operatorname{Re} \left(\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} \right) d\sigma. \quad (19)$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \operatorname{Re} \left(\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \frac{\cos(\sigma^{\frac{1}{2}}(x+y))(\cos^2 \alpha - \sigma \sin^2 \alpha) + 2\sigma^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \cos \alpha \sin(\sigma^{\frac{1}{2}}(x+y))}{\sigma^{\frac{1}{2}}(\cos^2 \alpha + \sigma \sin^2 \alpha)} d\sigma. \end{aligned}$$

Остается сделать замену переменной $r = \sigma^{\frac{1}{2}}$ и воспользоваться равенством $\cos^2 \alpha - \sigma \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha + \sigma \sin^2 \alpha)$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \operatorname{Re} \left(\frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta(\sigma)} \right) d\mu = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2}}} \cos(r(x+y)) dr \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2}}} \frac{2 \cos^2 \alpha \cos(r(x+y)) + r \sin(2\alpha) \sin(r(x+y))}{\cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} dr. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \Theta_{1,\alpha}(x, y, \lambda) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}(x-y))}{x-y} + \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}(x+y))}{x+y} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\lambda^{\frac{1}{2}}} \frac{2 \cos^2 \alpha \cos(r(x+y)) + \nu \sin(2\alpha) \sin(r(x+y))}{\cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} dr \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2 (случай $m = 2$). Для $m = 2$ и краевых условий $y(0) = y'(0) = 0$ явный вид спектральной функции получается из следствия 3, а также из следствия 5. Используя представление из следствия 5, имеем $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\varkappa_1 = 1$,

$\varkappa_2 = i$. Находим коэффициенты $b_{110} = i$, $b_{120} = b_{210} = -(i+1)$, $b_{220} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i(x+y)\lambda^{\frac{1}{4}}} - 1}{y+x} - (i+1) \left(\frac{e^{i(y-x)\lambda^{\frac{1}{4}}} - 1}{iy-x} + \frac{e^{(-y+ix)\lambda^{\frac{1}{4}}} - 1}{-y+ix} \right) - \frac{e^{-(x+y)\lambda^{\frac{1}{4}}} - 1}{x+y} \right\} \\ = \frac{\cos(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+y)) - e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}(x+y)}}{x+y} + \frac{((x-y)\cos(\lambda^{\frac{1}{4}}y) - (x+y)\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}y))e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}x}}{x^2+y^2} \\ + \frac{((y-x)\cos(\lambda^{\frac{1}{4}}x) - (x+y)\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}x))e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}y}}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Используя следствие 5, получаем явный вид спектральной функции:

$$\begin{aligned} \Theta_{2B'}(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}(x-y))}{x-y} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+y)) - e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}(x+y)}}{x+y} \right) \\ + \frac{1}{\pi} \left(\frac{((x-y)\cos(\lambda^{\frac{1}{4}}y) - (x+y)\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}y))e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}x}}{x^2+y^2} \right. \\ \left. + \frac{((y-x)\cos(\lambda^{\frac{1}{4}}x) - (x+y)\sin(\lambda^{\frac{1}{4}}x))e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}y}}{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

Список литературы

1. L. Gårding, “Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators”, 12 *Congress Math. Scandinaves, Lund*, Lunds Univ. Matematiska Institution, Lund, 1954, 44–55.
2. Б. М. Левитан, “Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **17**:4 (1953), 331–364; “II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:1 (1955), 33–58.
3. В. А. Марченко, “Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:6 (1955), 381–422.
4. В. А. Ильин, “Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ равносходимость с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряженному расширению оператора Шрёдингера с равномерно локально суммируемым потенциалом”, *Дифференц. уравнения*, **31**:12 (1995), 1957–1967; англ. пер.: V. A. Il'in, “Uniform equiconvergence on the entire axis $\mathbb{R}$ to a Fourier integral of the spectral expansion corresponding to a self-adjoint extension of the Schrödinger operator with uniformly locally integrable potential”, *Differential Equations*, **31**:12 (1995), 1927–1937.
5. А. Г. Костюченко, “Асимптотическое поведение спектральной функции сингулярных дифференциальных операторов порядка $2m$ ”, *Докл. АН СССР*, 1966, № 168, 276–279; англ. пер.: A. G. Kostyuchenko, “Asymptotic behavior of the spectral function of a singular differential operator of order $2m$ ”, *Soviet Math. Dokl.*, 1966, № 7, 632–635.
6. L. Hörmander, “The spectral function of an elliptic operator”, *Acta Math.*, **121**:1 (1968), 193–218.
7. Б. М. Левитан, “Асимптотическое поведение спектральной функции эллиптического уравнения”, *УМН*, **26**:6 (1971), 151–212; англ. пер.: B. M. Levitan, “Asymptotic behaviour of the spectral function of an elliptic equation”, *Russian Math. Surveys*, **26**:6 (1971), 165–232.

8. В. С. Буслаев, “Об асимптотическом поведении спектральных характеристик внешних задач для оператора Шрёдингера”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:1 (1975), 149–235; англ. пер.: V. S. Buslaev, “On the asymptotic behavior of the spectral characteristics of exterior problems for the Schrödinger operator”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:1 (1975), 139–223.
9. М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978; англ. пер.: M. A. Shubin, *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
10. В. М. Бабич, “Метод Адамара и асимптотика спектральной функции дифференциального оператора второго порядка”, *Матем. заметки*, **28**:5 (1980), 689–694; англ. пер.: V. M. Babich, “Hadamard’s method and the asymptotics of the spectral function of a second-order differential operator”, *Math. Notes*, **28**:5 (1980), 800–803.
11. В. Я. Иврий, “О точных спектральных асимптотиках для эллиптических операторов, действующих в расслоениях”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:2 (1982), 30–38; англ. пер.: V. Ya. Ivrii, “Accurate spectral asymptotics for elliptic operators that act in vector bundles”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:2 (1982), 101–108.
12. Б. Р. Вайнберг, “Параметрикс и асимптотика спектральной функции дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$ ”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 243–264; англ. пер.: B. R. Vainberg, “Parametrix and asymptotics of the spectral function of differential operators in $\mathbb{R}^n$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1982), 245–265.
13. Ю. Г. Сафаров, “Асимптотика спектральной функции положительного эллиптического оператора без условия неловущечности”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 53–65; англ. пер.: Yu. G. Safarov, “Asymptotic of the spectral function of a positive elliptic operator without the nontrap condition”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:3 (1988), 213–223.
14. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1970; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators*, Translations of Mathematical Monographs, **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
15. А. Г. Костюченко, *О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1966.
16. А. И. Козко, А. С. Печенцов, “Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 39–49; англ. пер.: A. I. Kozko, A. S. Pechentsov, “Regularized traces of higher-order singular differential operators”, *Math. Notes*, **83**:1–2 (2008), 37–47.

А. И. Козко (А. I. Kozko)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: prozerpi@ok.ru

Поступило в редакцию
 07.03.2008
 31.10.2009

А. С. Печенцов (А. S. Pechentsov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: pechentsov@ok.ru