Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 2, 109–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:35:26

УДК 517.956.4

Л. М. Кожевникова

Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях

В цилиндрической области $D = (0, \infty) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для псевдодифференциального параболического уравнения с однородными краевыми условиями Дирихле и финитной начальной функцией. Установлены оценки сверху L_2 -нормы решения при $t \rightarrow \infty$ в терминах геометрической характеристики неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, введенной ранее в работах автора в случае параболического уравнения высокого порядка.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: стабилизация решений, псевдодифференциальные параболические уравнения, неограниченная область, смешанная задача.

Введение

Пусть $\bar{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$. Отмечая выделенную роль координаты y_0 , обозначим ее через $x = y_0$. Положим также $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y})$. Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, не лежащая в полупространстве вида $\{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x < r\}$. В цилиндрической области $D = (0, \infty) \times \Omega$ рассматривается псевдодифференциальное уравнение

$$u_t + \mathcal{L}u = 0, \quad \mathcal{L}u \equiv \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^j D_x^j \hat{T}^{\bar{\beta}}(a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) T^{\bar{\alpha}} D_x^i u), \quad (t, \bar{\mathbf{y}}) \in D. \quad (0.1)$$

Множество индексов $\bar{\alpha} = (i, \alpha)$, $\bar{\beta} = (j, \beta) \in \mathcal{S}$ имеет вид

$$\mathcal{S} = \{\bar{\alpha} = (i, \alpha) \mid i = \overline{0, k}, \alpha = \overline{1, N^i}\},$$

где k – натуральное число. Псевдодифференциальные операторы $T^{\bar{\alpha}}$ с комплексными символами $A^{\bar{\alpha}}(t, x, \mathbf{z})$ определяются равенствами

$$T^{\bar{\alpha}}u = F_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}}^{-1}[A^{\bar{\alpha}}(t, x, \mathbf{z})F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[u]],$$

где $F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[u]$ – преобразование Фурье. Псевдодифференциальные операторы $\hat{T}^{\bar{\alpha}}$ имеют комплексно-сопряженный символ $\overline{A^{\bar{\alpha}}(t, x, \mathbf{z})}$.

Комплекснозначные функции $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}})$, $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}$, считаем измеримыми в D и ограниченными для п. в. $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D$:

$$|a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}})| \leq \bar{a}. \quad (0.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00354-а).

Через $\mathcal{B}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, обозначим непрерывные положительные при $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ функции такие, что

$$\mathcal{B}(\mathbf{z}) \leq C|\mathbf{z}|^B, \quad B, C > 0, \quad |\mathbf{z}| \geq 1.$$

На измеримые комплекснозначные функции $A^{\bar{\alpha}}(t, x, \mathbf{z})$, $\bar{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$, наложим следующие условия. Существуют числа $A > 0$, $q \in \mathbb{N}$ ($q \leq k$) и функция $\mathcal{B}(\mathbf{z})$ такие, что для п. в. $t > 0$, $(x, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|A^{\bar{\alpha}}(t, x, \mathbf{z})| \leq \begin{cases} AB^{1-\frac{1}{k}}(\mathbf{z}) & \text{при } \mathcal{B}(\mathbf{z}) \geq 1, \\ AB^{\max(0, 1-\frac{1}{q})}(\mathbf{z}) & \text{при } \mathcal{B}(\mathbf{z}) < 1. \end{cases} \quad (0.3)$$

На множестве комплекснозначных функций $g(\bar{\mathbf{y}}) = g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ при каждом $x \in \mathbb{R}$ определим функционал

$$\|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (|D_x^k g(x, \mathbf{y})|^2 + |D_x^q g(x, \mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[g]|^2 d\mathbf{z}.$$

На оператор $\mathcal{L}$ будем налагать требование эллиптичности в следующем виде. Пусть существуют положительное число $\hat{a}$ и функция $\mathcal{B}(\mathbf{z})$ такие, что в дополнение к (0.3) при п. в. $t > 0$ для формы $\mathcal{G}^t(g) = \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) T^{\bar{\alpha}} D_x^i g T^{\bar{\beta}} D_x^j g$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{G}^t(g) d\bar{\mathbf{y}} \geq \hat{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx = \hat{a} \|g\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}^2, \quad g(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega). \quad (0.4)$$

Через $D_{t_1}^{t_2} = (t_1, t_2) \times \Omega$ обозначим цилиндр, причем значения $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$ могут не выписываться. Гильбертово пространство $\mathring{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}^0(D^T)$ определим как пополнение пространства комплекснозначных функций $v \in \mathbf{C}_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$ по норме

$$\|v\|_{\mathbf{W}_{\mathcal{B}}^0(D^T)} = \left(\int_0^T (\|v(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \|v(t)\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Для уравнения (0.1) рассматривается комплекснозначное решение первой смешанной задачи из пространства $\mathring{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}^0(D^T)$ с комплекснозначной начальной функцией

$$u(0, \bar{\mathbf{y}}) = \varphi(\bar{\mathbf{y}}), \quad \varphi(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{L}_2(\Omega). \quad (0.5)$$

Естественно, что вещественное уравнение

$$u_t + \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^{|\bar{\beta}|} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} (a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u) = 0, \quad (t, \bar{\mathbf{y}}) \in D, \quad (0.6)$$

является примером псевдодифференциального уравнения (0.1). Здесь $\bar{\alpha} = (i, \alpha) = (i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндексы с целыми неотрицательными числами i , α_s , $s = \overline{1, n}$, $|\bar{\alpha}| = i + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Множество $\mathcal{S}$ определяется параметрами $q, k, l_s, m_s \in \mathbb{N}$, $q \leq k$, $l_s \leq m_s$, $s = \overline{1, n}$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \bar{\alpha} = (i, \alpha) \mid \mu(\bar{\alpha}) = \frac{i}{q} + \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n} \geq 1, \nu(\bar{\alpha}) = \frac{i}{k} + \frac{\alpha_1}{m_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{m_n} \leq 1 \right\}. \quad (0.7)$$

Для уравнения (0.6) ставится первая смешанная задача с вещественной начальной функцией (0.5) и граничными условиями

$$D_x^i u|_S = 0, \quad i < k; \quad D_{y_s}^{\alpha_s} u|_S = 0, \quad \alpha_s < m_s, \quad s = \overline{1, n}; \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega. \quad (0.8)$$

Нетрудно заметить, что решение задачи (0.6), (0.5), (0.8) будет действительным (см. утверждение 1.2).

Для уравнения (0.6) будем предполагать, что существует положительное число $\hat{a}$ такое, что для п. в. $t > 0$ и действительных функций $g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g d\bar{\mathbf{y}} \\ & \geq \hat{a} \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^n \{ |D_{y_s}^{l_s} g|^2 + |D_{y_s}^{m_s} g|^2 \} + |D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2 \right) d\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (0.9)$$

Отметим, что для этого достаточно, например, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) z_{\bar{\alpha}} z_{\bar{\beta}} \geq \hat{a} \left(z_{(k,0)}^2 + z_{(q,0)}^2 + \sum_{s=1}^n \{ z_{(0,\mathbf{m}_s)}^2 + z_{(0,\mathbf{l}_s)}^2 \} \right)$$

для п. в. $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D$ и любого набора чисел $z_{\bar{\alpha}}$; здесь через $\mathbf{m}_s = (0, \dots, 0, m_s, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{l}_s = (0, \dots, 0, l_s, 0, \dots, 0)$ обозначены мультииндексы с элементами m_s, l_s в позиции s .

Легко видеть, что уравнение (0.6) является частным случаем уравнения (0.1). Действительно, при $A^{\bar{\alpha}}(t, x, \mathbf{z}) = \iota^{|\alpha|} \mathbf{z}^{\alpha} = (\iota z_1)^{\alpha_1} (\iota z_2)^{\alpha_2} \dots (\iota z_n)^{\alpha_n}$, $T^{\bar{\alpha}} = D_{\mathbf{y}}^{\alpha}$, $D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} = D_x^i D_{\mathbf{y}}^{\alpha}$, $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{ z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s} \}$ уравнение (0.1) принимает вид (0.6), а условие (0.4) – вид (0.9). Несложно показать, что при этом выполняется условие (0.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{2\alpha} & \leq \left(\sum_{s=1}^n z_s^{2m_s} \right)^{\nu - \frac{i}{k}} \leq \mathcal{B}^{2(\nu - \frac{i}{k})}(\mathbf{z}) \leq \mathcal{B}^{2(1 - \frac{i}{k})}(\mathbf{z}), \quad \mathcal{B}(\mathbf{z}) \geq 1, \\ \mathbf{z}^{2\alpha} & \leq \left(\sum_{s=1}^n z_s^{2l_s} \right)^{\mu - \frac{i}{q}} \leq \mathcal{B}^{2(\mu - \frac{i}{q})}(\mathbf{z}) \leq \mathcal{B}^{2(1 - \frac{i}{q})}(\mathbf{z}), \quad i < q, \quad \mathcal{B}(\mathbf{z}) \leq 1, \\ \mathbf{z}^{2\alpha} & \leq 1 = \mathcal{B}^0(\mathbf{z}), \quad i \geq q, \quad \mathcal{B}(\mathbf{z}) \leq 1, \end{aligned}$$

где числа μ, ν определяются формулой (0.7).

Отметим, что при $k = q = m_s = l_s = 1$, $s = \overline{1, n}$, уравнение (0.6) и граничные условия (0.8) принимают вид

$$u_t = \sum_{i,j=0}^n (a_{ij}(t, \bar{\mathbf{y}}) u_{y_i})_{y_j}, \quad (0.10)$$

$$u|_S = 0. \quad (0.11)$$

При этом если существует положительная постоянная $\hat{a}$ такая, что для любых $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ и п. в. $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=0}^n a_{ij}(t, \bar{\mathbf{y}}) z_i z_j \geq 2\hat{a}|\bar{\mathbf{z}}|^2, \quad (0.12)$$

то выполнено условие (0.4) с функцией $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n z_s^2$.

Действительные коэффициенты уравнения (0.10) считаем измеримыми в D и ограниченными для п. в. $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D$ функциями

$$|a_{ij}(t, \bar{\mathbf{y}})| \leq \bar{a}, \quad i, j = \overline{0, n}. \quad (0.13)$$

Работа посвящена исследованию зависимости поведения при больших значениях времени $L_2(\Omega)$ -нормы решения $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ первой смешанной задачи (0.1), (0.5) с финитной начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}})$ от геометрии неограниченной области Ω .

Первые исследования зависимости скорости убывания решения смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка от геометрии неограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ были выполнены А. К. Гущиным в работах [1], [2]. Для широкого класса областей в них для решения второй смешанной задачи установлена оценка

$$|u(t, \mathbf{y})| \leq \frac{\|\varphi\|_{L_1(Q)}}{v(\sqrt{t})}, \quad \mathbf{y} \in Q,$$

где $v(r) = \text{mes}\{\mathbf{y} \in Q: |\mathbf{y}| < r\}$. Доказана также точность этой оценки.

Исследованием поведения L_2 -нормы решения смешанных задач для параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \rightarrow \infty$ занимались Ф. Х. Мукминов [3], [4], А. Ф. Тедеев [5], автор [6], И. М. Биккулов [7] и другие (подробный обзор результатов см. в [8]).

В работах [8], [9], предложен новый метод получения оценок сверху решения первой смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка в более широком классе неограниченных областей, чем в работах [3]–[7]. Точность полученных оценок в случае параболического уравнения второго порядка устанавливается также для существенно более широкого класса областей, чем это было сделано в работах [3], [6]. В настоящей работе, применяя понятие λ -последовательности, введенное в [8], [9], удалось распространить оценки сверху на некоторый класс псевдодифференциальных параболических уравнений. Следует отметить, что в работе [10] при установлении широкого класса единственности в неограниченных областях для уравнений теории упругости О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян использовали определение, близкое к понятию λ -последовательности.

Чтобы сформулировать наши результаты, введем следующее обозначение:

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \mid g(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega), \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g|^2 d\bar{\mathbf{y}} = 1 \right\}, \quad r_1 < r_2. \quad (0.14)$$

Здесь и далее используется обозначение $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{\bar{\mathbf{y}} \in \Omega \mid r_1 < x < r_2\}$, значения параметров $r_1 = -\infty$ или $r_2 = \infty$ могут не выписываться.

Для неотрицательных ρ положим

$$\rho^{[a,b]} = \begin{cases} \rho^a, & \rho < 1, \\ \rho^b, & \rho \geq 1, \end{cases} \quad a, b \geq 0.$$

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ назовем $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью области Ω , если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$1 \leq \theta \lambda_J^{J+1} \Delta_J^{2[k,q]}, \quad J = \overline{0, \infty}, \quad (0.15)$$

где $\lambda_J^{J+1} = \lambda(x_J, x_{J+1})$, $\Delta_J = x_{J+1} - x_J$.

Приведем необходимое и достаточное условие существования $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательности:

(*) *при любом $r_1 > 0$ найдется $r_2 > r_1$ такое, что $\lambda(r_1, r_2) > 0$*

(доказательство аналогично тому, как это было сделано в [8, § 3, следствие 1 к утверждению 2]). При этом λ -последовательность можно построить начиная с любого $x_0 > 0$.

Ради некоторого упрощения формулировок результатов потребуем выполнение условия

$$\lambda^0 = \lambda(-\infty, x_0) > 0. \quad (0.16)$$

Предположим, что начальная функция φ имеет ограниченный носитель. Не уменьшая общности, можно полагать, что

$$\text{supp } \varphi \subset \Omega^{x_0}. \quad (0.17)$$

Определим невозрастающую функцию дискретного аргумента

$$\lambda(N) = \min\{\lambda^0, \lambda_0^1, \dots, \lambda_{N-1}^N\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Будем исследовать убывание в областях, для которых $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(N) = 0$, поскольку в ином случае $\lambda = \lambda(-\infty, +\infty) > 0$ и убывание решения будет экспоненциальным (см. замечание 1.1):

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq \exp(-\hat{a}\lambda t) \|\varphi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}. \quad (0.18)$$

Положим также

$$N(t) = \max \left\{ N \in \mathbb{N} \mid \frac{N}{\lambda(N)} < t \right\}. \quad (0.19)$$

При $t \in [0, 1/\lambda(1)]$ считаем, что $N(t) \equiv 0$. Очевидно, функция $N(t)$ является кусочно постоянной и неубывающей при $t \geq 0$.

Через $\Xi = \{k, q, \theta, \hat{a}, \bar{a}, A\}$ обозначим набор постоянных. Зависимость других постоянных от этого набора будем указывать в круглых скобках. В следующем утверждении рассматривается обобщенное решение первой смешанной задачи (0.1), (0.5), определенное в § 1.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть область Ω подчиняется требованию (0.16), и пусть $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – некоторая $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательность и выполнены условия (0.2)–(0.4), (0.17). Тогда существуют положительные постоянные $\kappa(\Xi)$, $M(\Xi)$ такие, что для решения $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ первой смешанной задачи (0.1), (0.5) при всех $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq M \exp(-\kappa N(t)) \|\varphi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}. \quad (0.20)$$

Конечно, оценка (0.20) зависит от выбора λ -последовательности. Назовем $\bar{\lambda}$ -последовательность $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ с числом $\bar{\theta} > 0$ оптимальной, если для любой другой λ -последовательности $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ с числом $\bar{\theta} > 0$ существует постоянная $C(\bar{\theta}, \bar{\theta}, k, q)$ такая, что при всех достаточно больших t выполнено неравенство

$$N(t) \leq C \bar{N}(t). \quad (0.21)$$

Здесь и далее элементы, относящиеся к оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательности, будем помечать чертой сверху. Установлено, что оптимальной является $\bar{\lambda}$ -последовательность с минимально возможными, без нарушения условия (0.15), интервалами $(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ (см. [8, § 3, следствие 2 к утверждению 4]).

Определим область вращения

$$\Omega(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x > d, |\mathbf{y}| < f(x)\} \quad (0.22)$$

с положительной функцией $f(x)$, $d \in (-\infty, 0]$. Пусть функция f такова, что множество $\Omega(f)$ является областью. В частности, это влечет ее измеримость. Кроме того, на любом конечном отрезке $[a, b]$ такая функция в некоторой точке отрезка принимает свое минимальное значение. Это сразу следует из замкнутости надграфика функции.

Для областей вращения вида (0.22), не содержащих полупространство, естественно выразить оценку (0.20) в терминах функции $f(x)$. С этой целью определим понятие Π -последовательности. При этом на функцию $\mathcal{B}(\mathbf{z})$ налагаются следующие ограничения.

Потребуем, чтобы функции $\mathcal{B}_s(z_s) = \mathcal{B}(0, \dots, z_s, \dots, 0)$, $z_s \in \mathbb{R}$, $s = \overline{1, n}$, были четными и возрастающими при $z_s > 0$ и существовали положительные числа c_1, c_2 такие, что

$$\mathcal{B}_s(hz) \leq c_1 \mathcal{B}_s(z) \mathcal{B}_s(h), \quad h > 0, \quad z > 0, \quad (0.23)$$

$$\mathcal{B}_s(z) \leq c_2 |z|, \quad |z| \leq 1. \quad (0.24)$$

Будем предполагать также справедливость неравенств

$$\mathcal{B}(\mathbf{z}) \geq \mathcal{B}_s(z_s), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad s = \overline{1, n}. \quad (0.25)$$

Положим $\phi_s(r) = \frac{1}{\mathcal{B}_s(\frac{1}{r})}$, $\phi(r) = \min_{s=\overline{1, n}} \phi_s(r)$, $r > 0$. Потребуем, чтобы $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{B}_s(z) = \infty$, $s = \overline{1, n}$, следствием чего является $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_s(r) = 0$, $s = \overline{1, n}$.

Например, для функции $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\}$ соответствующие функции определяются равенствами $\mathcal{B}_s^2(z) = z^{2m_s} + z^{2l_s}$, $\phi_s^2(r) = \frac{r^{2(m_s+l_s)}}{r^{2m_s} + r^{2l_s}}$, $r > 0$, $l_s, m_s \in \mathbb{N}$, $l_s \leq m_s$, $s = \overline{1, n}$. При этом выполняются условия (0.23)–(0.25).

Нетрудно показать, что $\frac{1}{\sqrt{2}}r^{[m,l]} \leq \phi(r) \leq r^{[m,l]}$, $r > 0$, где $m = \max_{s=\overline{1,n}} m_s$, $l = \min_{s=\overline{1,n}} l_s$.

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ определим индуктивно:

$$x_{N+1} = \sup \left\{ r \mid \inf_{x \in [x_N, r]} \phi(f(x)) \geq (r - x_N)^{[k,q]} \right\}, \quad N = \overline{0, \infty}, \quad (0.26)$$

начиная с $x_0 = 1$. Следуя [11], эту последовательность назовем $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательностью функции f . При этом обозначение $\Pi[1, 1, r]$ будем сокращать до Π . Установлено, что $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность является $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. [11, следствие 1 к утверждению 5]).

Определим функцию $\rho_*(r)$, $r \geq 1$, задавая ее значения в точках x_N и линейно интерполируя в промежуточных интервалах: $\rho_*(1) = 0$, $\rho_*(x_N) = \max_{J=\overline{0, N-1}} \Delta_J$, $N = \overline{1, \infty}$. Очевидно, функция $\rho_*(r)$ монотонно не убывает при $r \geq 1$.

Будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\phi(f(x))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}} = \infty. \quad (0.27)$$

Функцию $r(t)$, $t \geq 0$, определим равенством

$$\int_1^r \frac{dx}{\phi(f(x))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}} = \frac{t}{\rho_*^{2[k,q]}(r)}. \quad (0.28)$$

Ввиду возрастания функции $\rho_*^{2[k,q]}(r) \int_1^r \frac{dx}{\phi(f(x))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}}$, $r \geq 1$, равенство (0.28) однозначно определяет монотонно возрастающую функцию $r(t)$, $t \geq 0$.

Следствием теоремы 0.1 в случае области вращения является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть выполнены условия (0.2)–(0.4), (0.17), (0.23)–(0.25). Тогда существуют положительные постоянные $\tilde{\kappa}(\Xi)$, $\tilde{M}(\Xi)$ такие, что для решения $u(t, \bar{y})$ первой смешанной задачи (0.1), (0.5) в цилиндрической области $D(f) = (0, \infty) \times \Omega(f)$ с функцией f , удовлетворяющей условию (0.27), справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega(f))} \leq \tilde{M} \exp \left(-\tilde{\kappa} \int_1^{r(t)} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}} \right) \|\varphi\|_{L_2(\Omega(f))}, \quad t \geq 0. \quad (0.29)$$

В области $\Omega(f_a)$ с функцией $f_a(x) = x^a$, $0 < a < q/l$, $x > 0$, для решения задачи (0.6), (0.5), (0.8) справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega(f_a))} \leq \tilde{M}_a \exp(-\tilde{\kappa}_a t^{\frac{q-al}{2alq-al+q}}) \|\varphi\|_{L_2(\Omega(f_a))}, \quad t \geq 0. \quad (0.30)$$

Отметим, что для расширяющихся областей оценка (0.30) определяется младшими членами уравнения. Напомним, что l и q – это порядки входящих в уравнение (0.6) младших производных по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$ и x соответственно.

Пусть существует положительная постоянная c_3 такая, что справедливо неравенство

$$\mathcal{B}(hz) \leq c_3 \mathcal{B}(\mathbf{z}) \max_{s=1, n} \mathcal{B}_s(h), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad h > 0. \quad (0.31)$$

Если при этом существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [x - \phi(f(x))^{\lfloor \frac{1}{k}, \frac{1}{q} \rfloor}, x + \phi(f(x))^{\lfloor \frac{1}{k}, \frac{1}{q} \rfloor}]\} \leq \omega f(x), \quad x \geq 1, \quad (0.32)$$

то $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ является оптимальной $\bar{\lambda}[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для $\Omega(f)$ (см. утверждение 3.1). В частности, $\Pi[k, q, r^{[m, l]}]$ -последовательность функции $f(x)$ является оптимальной $\bar{\lambda}[k, q, \mathcal{B}(\mathbf{z})]$ -последовательностью с $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\}$ для $\Omega(f)$. Кроме того, оценка (0.29) решения задачи (0.1), (0.5) будет того же порядка, что и оценка (0.20) (см. утверждение 3.1).

Точность оценки (0.20) в случае уравнения второго порядка (0.10) для некоторого класса областей вращения установлена в следующей теореме, доказательство которой повторяет доказательство теоремы 2 из работы [8] и поэтому здесь не приводится.

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть Π -последовательность $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ положительной функции $f(x)$ подчиняется неравенствам

$$\frac{1}{\bar{\omega}} \leq \frac{x_{J+2} - x_{J+1}}{x_{J+1} - x_J} \leq \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \geq 1, \quad J = \overline{0, \infty}, \quad (0.33)$$

и выполнены условия (0.13), (0.12). Тогда для неотрицательного решения задачи (0.10), (0.11), (0.5) в области $D(f)$ с неотрицательной начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) \neq 0$ существуют положительные числа $K(f, n, \hat{a}, \bar{a})$, $\mu(f, n, \varphi, \hat{a}, \bar{a})$ такие, что справедливо неравенство

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega(f))} \geq \mu \exp(-KN(t)), \quad t \geq t_0. \quad (0.34)$$

В случае уравнения второго порядка имеем $k = q = 1$, $\phi(r) = r$ и условие (0.32) принимает вид

$$\sup\{f(z) \mid z \in [x - f(x), x + f(x)]\} \leq \omega f(x), \quad x \geq 1. \quad (0.35)$$

Отметим, что для функции $f(x)$ условие (0.35) является достаточным, чтобы ее Π -последовательность $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ удовлетворяла условию (0.33) (см. ниже неравенства (3.20)). В частности, для Π -последовательности $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ функции $f_a(x)$ будут выполняться условия теоремы 0.3. Поскольку Π -последовательность функции f является λ -последовательностью области $\Omega(f)$, то в условиях теоремы 0.3 справедлива оценка (0.20). Из теоремы 0.3 следует, что оценка (0.20) для решения задачи (0.10), (0.11), (0.5) в области $D(f)$ с функцией f , удовлетворяющей условию (0.35), является точной.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^t(v, w) &= \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) T^{\bar{\alpha}} D_x^i v \overline{T^{\bar{\beta}} D_x^j w}, \\ (v, w)_{\mathcal{G}^t} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}^t(v, w) d\mathbf{y}, \quad (v, w)_{\mathcal{G}^t, (a, b)} = \int_a^b (v(x), w(x))_{\mathcal{G}^t} dx, \\ (v, w)_{\mathcal{B}} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) F[v] \overline{F[w]} d\mathbf{z} + \int_{\mathbb{R}^n} \{D_x^k v \overline{D_x^k w} + D_x^q v \overline{D_x^q w}\} d\mathbf{y}, \\ (v, w)_{\mathcal{B}, (a, b)} &= \int_a^b (v(x), w(x))_{\mathcal{B}} dx, \quad \|v\|_{\mathcal{B}, (a, b)}^2 = (v, v)_{\mathcal{B}, (a, b)}, \quad v, w \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).\end{aligned}$$

Индекс $(-\infty, +\infty)$ заменяем на $\mathbb{R}$.

Через $\|u\|_Q$, $(v, w)_Q = \int_Q v \bar{w} d\bar{\mathbf{y}}$ будем обозначать соответственно норму и скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(Q)$. В случае, когда $Q = \Omega$, индекс Q не используем.

Обобщенным решением задачи (0.1), (0.5) в D^T с начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ назовем функцию $u(t, \bar{\mathbf{y}}) \in \mathring{\mathbf{W}}_B^0(D^T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T \{-(u, v_t) + (u, v)_{\mathcal{G}^t, \mathbb{R}}\} dt = (\varphi, v(0)) \quad (1.1)$$

для любой функции $v(t, \bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(D_{-1}^T)$. Данное определение подразумевает конечность величины $\int_0^T (u, v)_{\mathcal{G}^t, \mathbb{R}} dt$ для функций из пространства $\mathring{\mathbf{W}}_B^0(D^T)$. Этот факт вытекает из следующих лемм. Функцию $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ будем называть решением задачи (0.1), (0.5) в D , если при всех $T > 0$ она является решением этой задачи в D^T .

ЛЕММА 1.1. Пусть $\Delta = b - a$, $\Pi_a^b = (a, b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует положительная постоянная $\tilde{C}(i)$ такая, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ справедливы неравенства

$$\frac{\|D_x^p g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2(i-p)}} \leq \tilde{C} \|D_x^i g\|_{\Pi_a^b}^2 + \tilde{C} \frac{\|g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2i}}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.2)$$

Здесь i – произвольное натуральное число.

Это утверждение является следствием леммы 1 из работы [8].

ЛЕММА 1.2. Пусть $\bar{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$. Тогда существует положительная постоянная $\tilde{C}(A, k, q)$ такая, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ справедливы неравенства

$$\frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_x^p g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2(i-p)}} \leq \tilde{C} \|g\|_{\mathcal{B}, (a, b)}^2 + \tilde{C} \frac{\|g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2[k, q]}}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.3)$$

Здесь $T^{\bar{\alpha}}$ – псевдодифференциальный оператор с символом, удовлетворяющим условию (0.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы см. в работе [11].

Применяя условие (0.2), оценим в пространстве $\mathring{\mathbf{W}}_B^0(D^T)$ билинейную форму:

$$\int_0^T (v, w)_{\mathcal{G}^t, \mathbb{R}} dt \leq \bar{a} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} \left(\int_0^T \|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|T^{\bar{\beta}} D_x^j w\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Используя неравенство (1.3) для $p = i$, $\Delta = 1$, получаем

$$\int_0^T \|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 dt \leq \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int_0^T \|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\Pi_N^{n+1}}^2 dt \leq \tilde{C} \|v\|_{\mathring{\mathbf{W}}_B^0(D^T)}^2. \quad (1.5)$$

Отсюда следует конечность правой части (1.4).

Обобщенное решение задачи (0.1), (0.5) существует и единственно. Существование доказывается методом галеркинских приближений аналогично доказательству для уравнения второго порядка [12, гл. III, § 4, теорема 4.1]. Единственность вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Если выполнены условия (0.2)–(0.4), то обобщенное решение $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1), (0.5) принадлежит классу $C([0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}_2(\Omega))$ и для всех $t \geq 0$ удовлетворяет равенству*

$$\|u(t)\|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^t (u(\tau), u(\tau))_{\mathcal{G}^\tau, \mathbb{R}} d\tau = \|\varphi\|^2. \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится так же, как для линейного параболического уравнения второго порядка [12, гл. III, § 2, теорема 2.1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из (1.6), (0.4), (0.14) следует, что

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = -2 \operatorname{Re} (u(t), u(t))_{\mathcal{G}^t, \mathbb{R}} \leq -2\hat{a} \|u(t)\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}^2 \leq -2\hat{a}\lambda \|u(t)\|^2.$$

Решая это дифференциальное неравенство, будем иметь оценку (0.18).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Решение первой смешанной задачи для уравнения (0.6) с вещественной начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}})$, (0.5), вещественными коэффициентами $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}})$, удовлетворяющими условиям (0.2), (0.9), и однородным граничным условием (0.8) вещественно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $f_h(t)$ обозначим осреднение Стеклова $f_h(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau) d\tau$. В тождестве (1.1) возьмем функцию $v = \omega_{-h}$, $0 < h \leq \delta$, $\omega \in \mathbf{C}_0^\infty(D^t)$, $t \in (0, T - \delta)$. После простых преобразований придем к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \{ (u_h)_\tau \bar{\omega} + \mathcal{G}_h^\tau(u, \omega) \} d\tau d\bar{\mathbf{y}} &= 0, \\ \mathcal{G}_h^\tau(u, \omega) &= \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} [a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u]_h \overline{D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} \omega}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

которое справедливо также для $\omega \in \mathring{\mathbf{W}}_B^0(D^t)$.

Для решения $u = u_1 + iu_2$ уравнения (0.6) и вещественной функции ω тождество (1.7) принимает вид

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left\{ (u_h)_{\tau} \omega + \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} [a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u]_h D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} \omega \right\} d\tau d\bar{\mathbf{y}} = 0. \quad (1.8)$$

Положим $\omega = u_{2h} \in \mathring{\mathbf{W}}_B^0(D^t)$; тогда комплексное равенство (1.8) распадется на два вещественных. Таким образом, для мнимой части u_2 имеем тождество

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left\{ (u_{2h})_{\tau} u_{2h} + \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} [a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u_2]_h D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u_{2h} \right\} d\tau d\bar{\mathbf{y}} = 0.$$

Интегрирование первого слагаемого приводит к равенству

$$\|u_{2h}(t)\|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} [a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u_2]_h D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u_{2h} d\tau d\bar{\mathbf{y}} = \|u_{2h}(0)\|^2.$$

После предельного перехода при $h \rightarrow 0$ (с учетом $u_2(0, \bar{\mathbf{y}}) = 0$) получаем

$$\|u_2(t)\|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u_2 D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u_2 d\tau d\bar{\mathbf{y}} = 0.$$

В силу произвольности $\delta \in (0, T)$ и $T > 0$ можем считать, что последнее равенство справедливо для $t > 0$. Применяя условие (0.9), установим неравенство

$$\|u_2(t)\|^2 + 2\hat{a} \int_0^t \left\{ \sum_{s=1}^n (\|D_{y_s}^{l_s} u_2\|^2 + \|D_{y_s}^{m_s} u_2\|^2) + \|D_x^k u_2\|^2 + \|D_x^q u_2\|^2 \right\} d\tau \leq 0,$$

из которого следует $u_2 = 0$ для п. в. $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D$.

§ 2. Доказательство теоремы 0.1

Доказательство теоремы 0.1 опирается на оценку решения при больших x , устанавливаемую в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ – некоторая $\lambda[k, q, B]$ -последовательность и выполнены условия (0.2)–(0.4), (0.17). Тогда существуют положительные постоянные $\kappa_1(\Xi)$, $M_1(\Xi)$ такие, что решение $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1), (0.5) при всех $t \geq 0$ и $N \geq 2$ удовлетворяет оценке

$$\|u(t)\|_{\Omega_{x_N}}^2 \leq M_1 \exp(-\kappa_1 N) \|\varphi\|^2. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим срезающую функцию $\xi(x)$. Пусть $h(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ – неубывающая функция, равная 0 и 1 при $t \leq 0$ и $t \geq 1$ соответственно. Пусть

$$\hat{a}_i = \max_{t \in [0, 1]} |D^i h(t)|, \quad a_i = 3^i \hat{a}_i, \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (2.2)$$

Из теоремы Лагранжа следует, что $\hat{a}_{i+1} \geq \hat{a}_i$, тем более, $a_{i+1} \geq a_i$.

Определим дифференциальные полиномы $P_p(\alpha)$ от гладкой функции $\alpha(x)$ условиями $P_0(\alpha) = 1$, $P_p(\alpha) = (D + \alpha)P_{p-1}$. Тогда для $p = \overline{1, \infty}$ имеем

$$P_p(\alpha) = (D + \alpha)^{p-1} \alpha = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \alpha^{p_1} (D\alpha)^{p_2} \dots (D^{s-1}\alpha)^{p_s},$$

где $A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s}$ – целые неотрицательные числа.

Положим

$$b_p = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} a_0^{p_1} a_1^{p_2} \dots a_{s-1}^{p_s};$$

очевидно, $b_{p+1} \geq b_p$.

Выберем число $e_* > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C_3(1 + \theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \leq e_* \hat{a}, \quad (2.3)$$

где C_3 – постоянная, определяемая ниже и зависящая только от Ξ .

Зафиксируем натуральное число $N \geq 2$. Рассмотрим кусочно постоянной функцию $\beta(x)$ на промежутке $[x_0, x_{N+1}]$ такую, что $\beta(x) = \delta_J$, $x \in [x_J, x_{J+1}]$, $J = \overline{0, N}$, причем $\delta_0 = \delta_N = 0$ и $\delta_J^{-1} = e_* \Delta_J$, $J = \overline{1, N-1}$.

Построим функцию $\alpha(x) \leq \beta(x)$, сглаживая функцию $\beta(x)$ по следующему правилу. Если $\delta_{J-1} < \delta_J$, то на отрезке $[x_J, x_J + \Delta_J/3]$ функция $\alpha(x)$ определяется следующим образом:

$$\alpha(x) = \delta_{J-1} + (\delta_J - \delta_{J-1})h\left(\frac{3(x - x_J)}{\Delta_J}\right).$$

Если $\delta_J > \delta_{J+1}$, то на отрезке $[x_{J+1} - \Delta_J/3, x_{J+1}]$ полагаем

$$\alpha(x) = \delta_J - (\delta_J - \delta_{J+1})h\left(1 + \frac{3(x - x_{J+1})}{\Delta_J}\right).$$

В оставшихся точках считаем $\alpha(x) = \beta(x)$.

Установим оценки интеграла $\int_{x_J}^{x_{J+1}} \alpha(t) dt$, $J = \overline{1, N-1}$:

$$\frac{1}{3e_*} = \frac{\delta_J \Delta_J}{3} = \int_{x_J + \Delta_J/3}^{x_J + 2\Delta_J/3} \delta_J dt \leq \int_{x_J}^{x_{J+1}} \alpha(t) dt \leq \int_{x_J}^{x_{J+1}} \delta_J dt = \delta_J \Delta_J = \frac{1}{e_*}. \quad (2.4)$$

Очевидно, что во всех случаях производные функции $\alpha(x)$ подчиняются оценкам

$$|D^i \alpha(x)| \leq \left(\frac{3}{\Delta_J}\right)^i \delta_J \max_{t \in [0,1]} |D^i h(t)| \leq \frac{a_i \delta_J}{\Delta_J^i} = \frac{a_i}{e_* \Delta_J^{i+1}}$$

при $x \in [x_J, x_{J+1}]$, $J = \overline{1, N-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, полиномы $P_p(\alpha)$ удовлетворяют неравенствам

$$|P_p(\alpha)| \leq \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \left(\frac{a_0}{e_* \Delta_J}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{a_{s-1}}{e_* \Delta_J^s}\right)^{p_s} \leq \frac{b_p}{e_* \Delta_J^p}, \quad (2.5)$$

$$x \in [x_J, x_{J+1}], \quad J = \overline{1, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Определим неубывающую гладкую функцию $\xi(x)$ на $\mathbb{R}$ следующими условиями:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \xi(x_1)h\left(\frac{x-x_0}{\Delta_0}\right), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \exp\left(-\int_x^{x_N} \alpha(t)dt\right), & x_1 \leq x \leq x_N, \\ 1, & x \geq x_N. \end{cases}$$

На отрезке $[x_1, x_N]$ справедливо уравнение $\xi' = \alpha\xi$, и ввиду (2.4) справедливы неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_{J+1})}{\xi(x_J)} \leq \exp\left(\frac{1}{e_*}\right), \quad J = \overline{1, N-1}. \quad (2.6)$$

Перемножая эти неравенства, находим, что $\exp\left(\frac{N-1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_N)}{\xi(x_1)}$ и

$$\xi(x_1) \leq \exp\left(-\frac{N-1}{3e_*}\right). \quad (2.7)$$

Нетрудно доказать, что на отрезке $[x_1, x_N]$ имеют место равенства

$$D^p \xi = \xi P_p(\alpha), \quad D^p \xi^2 = \xi^2 \sum_{l=0}^p C_p^l P_l(\alpha) P_{p-l}(\alpha), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Далее, пользуясь (2.5), выводим

$$|D^p \xi| \leq \xi \frac{b_p}{e_* \Delta_J^p}, \quad |D^p \xi^2| \leq \xi^2 \frac{2^p b_p^2}{e_* \Delta_J^p}, \quad x \in [x_J, x_{J+1}], \quad J = \overline{1, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Оценим производные $D^p \xi$, $D^p \xi^2$, $p = \overline{1, k}$, на отрезке $[x_0, x_1]$. Ввиду соотношения (2.2) имеем

$$|D^p \xi(x)| \leq \xi(x_1) \frac{\widehat{a}_p}{\Delta_0^p}, \quad |D^p \xi^2(x)| \leq \xi^2(x_1) \frac{2^p \widehat{a}_p^2}{\Delta_0^p}, \quad x \in [x_0, x_1], \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Положим $\omega = u_h \xi^2(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_B^0(D^t)$ в (1.7), где $0 < h \leq \delta$, $t \in (0, T - \delta)$. Интегрирование первого слагаемого приводит к равенству

$$(u_h(t), u_h(t) \xi^2) + 2 \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{G}_h^\tau(u(\tau), u_h(\tau) \xi^2) d\bar{\mathbf{y}} d\tau = (u_h(0), u_h(0) \xi^2).$$

Из принадлежности функций $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) T^{\bar{\alpha}} D_x^i u$, $T^{\bar{\beta}} D_x^j u$ пространству $\mathbf{L}_2((0, T) \times \mathbb{R}^{n+1})$ следует, что осреднения Стеклова этих функций сходятся к самим функциям в $\mathbf{L}_2((0, T - \delta) \times \mathbb{R}^{n+1})$. После предельного перехода при $h \rightarrow 0$ получаем (с учетом того, что $\xi\varphi \equiv 0$)

$$(u(t), u(t) \xi^2) + 2 \operatorname{Re} \int_0^t (u(\tau), u(\tau) \xi^2)_{\mathcal{G}^\tau, \mathbb{R}} d\tau = 0. \quad (2.10)$$

Далее, ввиду произвольности $\delta \in (0, T)$ и $T > 0$ можем считать, что (2.10) справедливо для $t > 0$. Используя (0.4), при почти всех $\tau > 0$ устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(u(\tau), u(\tau)\xi^2)_{\mathcal{G}^\tau, \mathbb{R}} \\ & \geq \widehat{a}(u(\tau)\xi, u(\tau)\xi)_{\mathcal{B}, \mathbb{R}} + \operatorname{Re}\{(u(\tau), u(\tau)\xi^2)_{\mathcal{G}^\tau, \mathbb{R}} - (u(\tau)\xi, u(\tau)\xi)_{\mathcal{G}^\tau, \mathbb{R}}\}. \end{aligned}$$

Учитывая последнее соотношение, из (2.10) выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(t)|^2 \xi^2 d\bar{\mathbf{y}} + 2\widehat{a} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \|u\|_{\mathcal{B}}^2 dx d\tau \leq 2I, \\ I \equiv & \widehat{a} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \{\xi^2 \|u\|_{\mathcal{B}}^2 - \|\xi u\|_{\mathcal{B}}^2\} dx d\tau + \int_0^t \operatorname{Re}\{(u\xi, u\xi)_{\mathcal{G}^\tau, \mathbb{R}} - (u, u\xi^2)_{\mathcal{G}^\tau, \mathbb{R}}\} d\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Оценим интегралы в I с учетом того, что $D^p \xi \equiv 0$, $D^p(\xi^2) \equiv 0$, $p \in \mathbb{N}$, вне отрезка $[x_0, x_N]$. Пользуясь (0.2), выводим неравенство

$$\begin{aligned} I \leq & C_1 \sum_{J=0}^{N-1} \int_0^t \int_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}} \left\{ \sum_{i=q, k} \left(|D_x^i u| \xi \sum_{p=0}^{i-1} |D_x^p u| |D^{i-p} \xi| + \left(\sum_{p=0}^{i-1} |D_x^p u| |D^{i-p} \xi| \right)^2 \right) \right. \\ & + \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} \left(\sum_{p=0}^{i-1} |T^{\bar{\alpha}} D_x^p u| |D^{i-p} \xi| \sum_{p=0}^{j-1} |T^{\bar{\beta}} D_x^p u| |D^{j-p} \xi| \right. \\ & \left. \left. + |T^{\bar{\beta}} D_x^j u| \sum_{p=0}^{i-1} |T^{\bar{\alpha}} D_x^p u| \{ |D^{i-p} \xi| \xi + |D^{i-p} \xi^2| \} \right) \right\} d\bar{\mathbf{y}} d\tau. \end{aligned}$$

На отрезках $[x_J, x_{J+1}]$, $J = \overline{1, N-1}$, используя (2.8), а на отрезке $[x_0, x_1]$ применяя (2.9), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} I \leq & C_2 \sum_{J=1}^{N-1} \int_0^t \int_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}} \xi^2 \left[\mu \left(\sum_{i=q, k} |D_x^i u|^2 + \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{S}} |T^{\bar{\alpha}} D_x^i u|^2 \right) \right. \\ & + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=q, k} \sum_{p=0}^{i-1} \frac{|D_x^p u|^2}{e_*^2 \Delta_J^{2(i-p)}} + \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{S}} \sum_{p=0}^{i-1} \frac{|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u|^2}{e_*^2 \Delta_J^{2(i-p)}} \right) \left. \right] d\bar{\mathbf{y}} d\tau \\ & + C_2 \int_0^t \int_{\Pi_{x_0}^{x_1}} \xi^2(x_1) \left(\sum_{i=q, k} \sum_{p=0}^i \frac{|D_x^p u|^2}{\Delta_0^{2(i-p)}} + \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{S}} \sum_{p=0}^i \frac{|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u|^2}{\Delta_0^{2(i-p)}} \right) d\bar{\mathbf{y}} d\tau, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\mu \in (0, 1]$ – произвольное число.

Пользуясь неравенствами (1.2), (1.3), где $\Delta = \Delta_J$, применив определение λ -последовательности (0.15), (0.14), находим для $J = \overline{0, N-1}$, $p = \overline{0, i}$, что

$$\begin{aligned} J'_J = \frac{\|D_x^p u\|_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} dx & \leq \tilde{C} \left(\|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2 + \frac{\|u\|_{\Omega_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2[k, q]}} \right) \leq \tilde{C}(1 + \theta) \|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2, \\ & i = q, k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} J''_J = \frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u\|_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} & \leq \tilde{C} \left(\|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2 + \frac{\|u\|_{\Omega_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2[k, q]}} \right) \leq \tilde{C}(1 + \theta) \|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2, \\ & \bar{\alpha} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Ввиду (2.6) из (2.13) для $J = \overline{1, N-1}$, $p = \overline{0, i}$ сразу следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}} \xi^2 \frac{|D_x^p u|^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} dx dy &\leq \tilde{C}(1+\theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \int_{x_J}^{x_{J+1}} \xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx, \quad i = q, k, \\ \int_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}} \xi^2 \frac{|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u|^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} dx dy &\leq \tilde{C}(1+\theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \int_{x_J}^{x_{J+1}} \xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Теперь, выбрав $\mu = 1/e_*$ и применив (2.13), (2.14), оценим интеграл I :

$$\begin{aligned} I &\leq C_3(1+\theta) \left[\frac{1}{e_*} \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \int_0^t \int_{x_1}^{x_N} \xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx d\tau \right. \\ &\quad \left. + \xi^2(x_1) \int_0^t \int_{x_0}^{x_1} \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx d\tau \right]. \end{aligned}$$

Объединяя последнюю оценку с (2.11), выбирая e_* согласно (2.3) и пользуясь неравенством (2.7), заключаем, что

$$\|u(t)\xi\|^2 \leq C \exp(-\kappa_1 N) \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathcal{B},(x_0,x_1)}^2 d\tau.$$

Таким образом, согласно (0.4), (1.6) установлено неравенство (2.1). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Выберем произвольное натуральное число $N \geq 2$. Из теоремы 2.1 имеем

$$\|u(t)\|_{\Omega_{x_N}}^2 \leq M_1 \exp(-\kappa_1 N) \|\varphi\|^2 \equiv \varepsilon(N).$$

Ввиду (0.14), (0.16) справедливо неравенство

$$\lambda(N) \|u(t)\|_{\Omega_{x_N}}^2 \leq \|u(t)\|_{\mathcal{B},(-\infty,x_N)}^2, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\|u(t)\|^2 \leq \varepsilon(N) + \|u(t)\|_{\Omega_{x_N}}^2 \leq \varepsilon(N) + \lambda^{-1}(N) \|u(t)\|_{\mathcal{B},(-\infty,x_N)}^2.$$

Теперь из (0.4), (1.6) следует, что

$$\|u(t)\|^2 \leq \varepsilon(N) - \frac{\lambda^{-1}(N)}{2\hat{a}} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2.$$

Решая это дифференциальное неравенство, будем иметь

$$\|u(t)\|^2 \leq M_1 \exp(-\kappa_1 N) \|\varphi\|^2 + \exp(-2\lambda(N)\hat{a}t) \|\varphi\|^2. \quad (2.16)$$

Выбрав $N = N(t)$, получим неравенство (0.20) при $t > 2/\lambda(2)$. При $t \in [0, 2/\lambda(2)]$ утверждение теоремы следует из ограниченности сверху левой и ограниченности снизу правой частей неравенства (0.20). Теорема доказана.

§ 3. Оценки сверху для областей вращения

В настоящем параграфе для областей вращения вида (0.22) установлена оценка сверху решения задачи (0.1), (0.5) в терминах функции $f(x)$ и показано, что при дополнительных условиях она имеет тот же порядок убывания, что и оценка (0.20).

Для функции $\rho^{[a,b]}$ приведем некоторые неравенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\text{если } \rho \leq \varrho, \text{ то } \rho^{[a,b]} \leq \varrho^{[a,b]}; \quad (3.1)$$

$$\text{если } c \geq 1, \text{ то } (c\rho)^{[a,b]} \leq \rho^{[a,b]} c^{\max(a,b)}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Пусть $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ — $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность функции f с $x_0 = 1$. Для нее ввиду (0.26) справедливы неравенства

$$\int_{x_J}^{x_{J+1}} \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \leq \frac{x_{J+1} - x_J}{\inf_{[x_J, x_{J+1})} \phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \leq 1, \quad J = \overline{0, \infty},$$

суммируя которые по $J = \overline{0, N}$, выводим

$$\int_1^{x_{N+1}} \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \leq N + 1, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Обозначим $\delta(N) = \max_{J=\overline{0, N-1}} \Delta_J$, $N \in \mathbb{N}$. Поскольку, как отмечалось во введении, $\Pi[k, q, \phi]$ -последовательность является $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для $\Omega(f)$, то имеем

$$\delta^{2[k,q]}(N) = \max_{J=\overline{0, N-1}} \Delta_J^{2[k,q]} \geq \frac{1}{\theta \min_{J=\overline{0, N-1}} \lambda(x_J, x_{J+1})}.$$

Можно подобрать ϵ , $0 < \epsilon < 1$, такое, что:

$$\delta^{2[k,q]}(N) \geq \delta^{2[k,q]}(1) = \Delta_0^{2[k,q]} \geq \frac{\epsilon}{\theta \lambda(-\infty, x_0)}.$$

Итак, установлено неравенство

$$\lambda(N) \geq \frac{\epsilon}{\theta \delta^{2[k,q]}(N)} = \frac{\epsilon}{\theta \rho_*^{2[k,q]}(x_N)}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Отметим, что из условия (0.27) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$. Поэтому можем выбрать $\tilde{T}$ такое, что при $t \geq \tilde{T}$ выполнено $r(t) \geq x_2$. Зафиксируем t , $t \geq \tilde{T}$. Пусть $r(t) \in [x_N, x_{N+1})$. Тогда по (3.4) имеем

$$\lambda(N) \geq \frac{\epsilon}{\theta \rho_*^{2[k,q]}(x_N)} \geq \frac{\epsilon}{\theta \rho_*^{2[k,q]}(r(t))}. \quad (3.5)$$

Далее, согласно (3.3) установим

$$\int_1^{r(t)} \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \leq \int_1^{x_{N+1}} \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \leq N + 1. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5), (3.6) в (2.16), получаем

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\Omega(f)}^2 \leq & \left[M_1 \exp \left(-\kappa_1 \left(\int_1^{r(t)} \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} - 1 \right) \right) \right. \\ & \left. + \exp \left(-\frac{2\epsilon \hat{a} t}{\theta \rho_*^{2[k, q]}(r(t))} \right) \right] \|\varphi\|_{\Omega(f)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (0.28) выводим (0.29) при $t \in [\tilde{T}, \infty)$. При $t \in [0, \tilde{T})$ утверждение теоремы следует из ограниченности сверху левой и снизу правой частей неравенства (0.29).

В общем случае оценка (0.29) может быть слабее по отношению к оценке (0.20). Докажем, что если выполнено условие (0.32), то эти оценки будут одного и того же порядка.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Если выполнены условия (0.23)–(0.25), (0.31), (0.32), то $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ функции $f(x)$ является оптимальной $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для $\Omega(f)$ и для нее справедливы неравенства (0.33). Для областей $\Omega(f)$ вида (0.22) с функцией f , удовлетворяющей условию (0.27), оценка (0.29) решения задачи (0.1), (0.5) будет того же порядка, что и оценка (0.20).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ и связанные с ней атрибуты будем пометать чертой сверху. Обозначим через $\hat{x}_\nu$ любую точку отрезка $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ такую, что $\inf_{[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]} f(x) = f(\hat{x}_\nu)$. Из определения $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательности функции f имеем неравенства

$$\phi(f(\hat{x}_\nu)) \leq \bar{\Delta}_\nu^{[k, q]}.$$

Пользуясь (3.1), перепишем их в виде

$$\phi(f(\hat{x}_\nu))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]} \leq \bar{\Delta}_\nu. \quad (3.7)$$

Применяя (0.32), находим вблизи $\hat{x}_\nu$ точку $\bar{x}_\nu^* \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ такую, что

$$f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega f(\hat{x}_\nu). \quad (3.8)$$

Согласно определению $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательности (0.26) справедливо неравенство

$$\bar{\Delta}_\nu^{[k, q]} \leq \phi(f(\bar{x}_\nu^*)), \quad (3.9)$$

которое можно переписать в виде

$$\bar{\Delta}_\nu \leq \phi(f(\bar{x}_\nu^*))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}. \quad (3.10)$$

Пользуясь (0.23), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \phi(\alpha r) &= \frac{1}{\max_{s=1, n} \mathcal{B}_s\left(\frac{1}{\alpha r}\right)} \leq c_1 \frac{\max_{s=1, n} \mathcal{B}_s(\alpha)}{\max_{s=1, n} \mathcal{B}_s\left(\frac{1}{r}\right)} \leq c(\alpha) \phi(r), \\ \alpha &> 0, \quad c(\alpha) \geq 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Объединяя (3.8), (3.9), при помощи (3.11) выводим соотношение

$$\bar{\Delta}_\nu^{[k,q]} \leq c(\omega)\phi(f(\widehat{x}_\nu)), \quad (3.12)$$

которое (см. (3.1), (3.2)) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{\Delta}_\nu \leq c(\omega)^{\frac{1}{q}} \phi(f(\widehat{x}_\nu))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}. \quad (3.13)$$

Пользуясь (3.10), из неравенства (0.32) при $x = \bar{x}_\nu^*$ находим, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]\} \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*).$$

Поскольку справедливы включения $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}] \subset [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]$, то ввиду неравенства (3.8) имеем

$$f(\widehat{x}_\nu) \leq f(x) \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega^2 f(\widehat{x}_\nu), \quad x \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]. \quad (3.14)$$

Для любого отрезка $[a, b] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ справедливы неравенства

$$\frac{\delta_1}{\phi^2(f(\widehat{x}_\nu))} \leq \lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \frac{\delta_2}{\phi^2(f(\widehat{x}_\nu))} \quad (3.15)$$

с некоторыми положительными числами δ_1, δ_2 (см. [11, формула (4.28)]).

Пусть $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ – произвольная $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательность. Для вложенных отрезков $[x_J, x_{J+1}] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ из определения λ -последовательности (0.15) и неравенств (3.15), (3.12) следуют соотношения

$$\Delta_J^{2[k,q]} \geq \frac{1}{\theta \lambda(x_J, x_{J+1})} \geq \frac{\phi^2(f(\widehat{x}_\nu))}{\theta \delta_2} \geq \frac{\bar{\Delta}_\nu^{2[k,q]}}{\theta \delta_2 c^2(\omega)}.$$

Отсюда находим, что $\bar{\Delta}_\nu \leq D \Delta_J$, где D – положительное число. Последнее неравенство позволяет установить для $N \geq 1$ импликацию

$$(x_L \leq \bar{x}_N) \Rightarrow (L \leq (D+1)N). \quad (3.16)$$

Действительно, на отрезке $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ расположится не более $[D]$ целых отрезков $[x_J, x_{J+1}]$ и возможно два нецелых отрезка на концах. Всего отрезок $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ будет содержать не более $(D+1)N$ отрезков $[x_J, x_{J+1}]$, поэтому будет справедливо (3.16).

Далее, установим существование постоянной $E(\Xi) \geq 1$ такой, что справедлива импликация

$$(x_N \geq \bar{x}_{\nu+1}) \Rightarrow (\lambda(N) \leq E\lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})). \quad (3.17)$$

При $x_N \geq \bar{x}_{\nu+1}$, $h = \phi^{-1}(\bar{\Delta}_\nu^{[k,q]})$ согласно определению (0.26) $\Pi[k, q, \phi]$ -последовательности имеют место вложения $\Omega_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}}(h) \subset \Omega_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}}(f) \subset \Omega^{x_N}(f) \subset \Omega(f)$. Тогда из (2.15) следует, что

$$\lambda(N) \leq \inf_{g(\mathbf{y}) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}}(h))} \frac{\int_{\Pi_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}}} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[g]|^2 dx d\mathbf{z} + \int_{\Pi_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}}} \{|D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2\} dx d\mathbf{y}}{\int_{\Pi_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}}} |g|^2 dx d\mathbf{y}}.$$

Положим $x = \bar{\Delta}_\nu \hat{x} + \bar{x}_\nu$, $y = h\hat{y}$, $z = \frac{\hat{z}}{h}$, $w(\hat{x}, \hat{y}) = g(x, y)$. Легко проверить справедливость равенства $F_{\hat{y} \rightarrow \hat{z}}[w](\hat{x}, \hat{z}) = h^{-n} F_{y \rightarrow z}[g](x, z)$. Поэтому, используя (0.31), получим

$$\lambda(N) \leq \inf_{g(\hat{x}, \hat{y}) \in C_0^\infty(\Omega_0^1(1))} \left(\frac{c_3^2 \bar{\Delta}_\nu^{-2[k, q]} \int_{\Pi_0^1} \mathcal{B}^2(\hat{z}) |F_{\hat{y} \rightarrow \hat{z}}[w]|^2 d\hat{x} d\hat{z}}{\int_{\Pi_0^1} |w|^2 d\hat{x} d\hat{y}} + \frac{\sum_{i=q, k} \int_{\Pi_0^1} \bar{\Delta}_\nu^{-2i} |D_{\hat{x}}^i w|^2 d\hat{x} d\hat{y}}{\int_{\Pi_0^1} |w|^2 d\hat{x} d\hat{y}} \right) \leq \frac{C}{\bar{\Delta}_\nu^{2[k, q]}}.$$

Применяя неравенство (0.15), записанное для Π -последовательности $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$, из последнего неравенства выводим (3.17).

Зафиксируем число $t > \max\{\bar{\lambda}^{-1}(1), \lambda^{-1}(1)\}$ и докажем неравенство (0.21). Пусть $N(t) > (D+1)(\bar{N}(t)+1)$, поскольку в ином случае (0.21) справедливо. Согласно (3.16) имеем $x_{N(t)} \geq \bar{x}_{\bar{N}(t)+1}$. В силу импликации (3.17), примененной ко всем $\nu \leq \bar{N}(t)$, имеем $\lambda(N(t)) \leq E\lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$. Определим число ϵ равенством $\lambda(-\infty, x_0) = \epsilon\lambda(-\infty, 1)$. Тогда справедливы неравенства $\lambda(N(t)) \leq \lambda(1) \leq \lambda(-\infty, x_0) = \epsilon\lambda(-\infty, 1)$. Поэтому имеем неравенство $\lambda(N(t)) \leq (E+\epsilon)\bar{\lambda}(\bar{N}(t)+1)$. Отсюда получаем

$$N(t) \leq t\lambda(N(t)) \leq (E+\epsilon)t\bar{\lambda}(\bar{N}(t)+1) \leq (E+\epsilon)(\bar{N}(t)+1).$$

Неравенство (0.21) установлено.

Для доказательства того, что оценка (0.29) решения задачи (0.1), (0.5) будет того же порядка, что и оценка (0.20), достаточно установить неравенства

$$\alpha_1 N \leq \int_1^r \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \leq \alpha_2 N, \quad (3.18)$$

$$\beta_1 \rho_*^{-2[k, q]}(r) \leq \bar{\lambda}(N) \leq \beta_2 \rho_*^{-2[k, q]}(r) \quad (3.19)$$

при $r \in [\bar{x}_N, \bar{x}_{N+1})$, $N \geq 1$. Правое неравенство (3.18) и левое (3.19) уже доказаны (см. неравенства (3.6), (3.5)).

Применяя (3.14), (3.11), (3.7), выводим следующую цепочку неравенств:

$$\int_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}} \frac{dx}{\phi^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}(f(x))} \geq \frac{\bar{\Delta}_\nu}{c^{\frac{1}{q}}(\omega^2) \phi(f(\bar{x}_\nu))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \geq \frac{1}{c^{\frac{1}{q}}(\omega^2)}, \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Суммированием по ν устанавливаем соотношение

$$\int_1^{\bar{x}_N} \frac{dx}{\phi(f(x))^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}} \geq \frac{N}{c^{\frac{1}{q}}(\omega^2)}, \quad N \geq 1.$$

Левая часть неравенства (3.18) является следствием последней оценки.

Перейдем к доказательству правого неравенства в (3.19). Поскольку выполнено $f(\bar{x}_{\nu+1}) \leq f(\bar{x}_\nu)$, то из (3.14) имеем $f(\bar{x}_{\nu+1}) \leq \omega^2 f(\bar{x}_\nu)$, $\nu = \overline{0, \infty}$. Легко видеть, что верны и симметричные неравенства $f(\bar{x}_\nu) \leq \omega^2 f(\bar{x}_{\nu+1})$, $\nu = \overline{0, \infty}$. Используя неравенства (3.7), (3.13), (3.11), (3.1), (3.2), оцениваем отношения

$$\bar{\omega}^{-1} \leq \frac{\bar{\Delta}_{\nu+1}}{\bar{\Delta}_\nu} \leq \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = c^{\frac{1}{q}}(\omega) c^{\frac{1}{q}}(\omega^2), \quad \nu = \overline{0, \infty}. \quad (3.20)$$

Пользуясь неравенствами (3.4), (3.15), (3.12), нетрудно вывести соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\delta_3}{\bar{\delta}^{2[k,q]}(N)} &\leq \bar{\lambda}(N) \leq \min_{\nu=\overline{0, N-1}} \lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}) \leq \frac{\delta_2}{\max_{\nu=\overline{0, N-1}} \phi^2(f(\bar{x}_\nu))} \\ &\leq \frac{\delta_4}{\max_{\nu=\overline{0, N-1}} \bar{\Delta}_\nu^{2[k,q]}} = \frac{\delta_4}{\bar{\delta}^{2[k,q]}(N)}, \quad N \geq 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Используя (3.20), запишем цепочку неравенств

$$\bar{\delta}(N+1) = \max\{\bar{\delta}(N), \bar{\Delta}_N\} \leq \max\{\bar{\delta}(N), \bar{\omega}\bar{\delta}(N)\} \leq \bar{\omega}\bar{\delta}(N), \quad N \geq 1. \quad (3.22)$$

Далее из (3.21), (3.22) выводим

$$\bar{\lambda}(N) \leq \frac{\beta_2}{\bar{\delta}^{2[k,q]}(N+1)} = \frac{\beta_2}{\rho_*^{2[k,q]}(\bar{x}_{N+1})} \leq \frac{\beta_2}{\rho_*^{2[k,q]}(r)}.$$

Неравенства (3.19) установлены. Утверждение доказано.

Для монотонно неубывающей функции, удовлетворяющей (0.32), справедливости неравенства

$$\varepsilon_1 \phi(f(r))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]} \leq \rho_*(r) \leq \phi(f(r))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}, \quad r \geq r_0. \quad (3.23)$$

В самом деле, для Π -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ монотонно неубывающей функции $f(x)$ справедливы равенства $\phi(f(x_N))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]} = \Delta_N$, $N = \overline{0, \infty}$. Следовательно, для $r \in [x_N, x_{N+1})$ имеем

$$\rho_*(r) \leq \rho_*(x_{N+1}) = \delta(N+1) = \Delta_N = \phi(f(x_N))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]} \leq \phi(f(r))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}. \quad (3.24)$$

Положим $r_0 = 1 + \phi^{[\frac{1}{k} + \frac{1}{q}]}(f(1))$. Согласно утверждению 3.1 справедливы неравенства (0.33), тогда при $r \geq r_0$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_*(r) &\geq \rho_*(x_N) = \delta(N) = \Delta_{N-1} \geq \bar{\omega}^{-2} \Delta_{N+1} \\ &= \bar{\omega}^{-2} \phi(f(x_{N+1}))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]} \geq \bar{\omega}^{-2} \phi(f(r))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Неравенства (3.23) установлены.

Функция $r(t)$, $t \geq 0$, может быть определена из равенства

$$\int_1^r \frac{dx}{\phi(f(x))^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}} = \frac{t}{\phi(f(r))^2}.$$

В частности, взяв функцию $f(r) = r^a$, $\phi(r) = r^{[m, l]}$, $0 < a < q/l$, $r > 0$, можно определить функцию

$$r(t) = t^{\frac{q}{q - la + 2qla}}, \quad t \geq 0.$$

Тогда оценка (0.29) приобретает вид (0.30).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Ф. Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Список литературы

1. А. К. Гушчин, “Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка”, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений* – 3, Тр. МИАН, **126**, Наука, М., 1973, 5–45; англ. пер.: А. К. Gushchin, “On estimates of the solutions of boundary value problems for a parabolic equation of second order”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **126** (1975), 1–46.
2. А. К. Гушчин, “Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **101(143):4(12)** (1976), 459–499; англ. пер.: А. К. Guščin, “Stabilization of the solutions of the second boundary value problem for a second order parabolic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **30:4** (1976), 403–440.
3. Ф. Х. Мукминов, “Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **111(153):4** (1980), 503–521; англ. пер.: F. H. Mukminov, “Stabilization of solutions of the first mixed problem for a parabolic equation of second order”, *Math. USSR-Sb.*, **39:4** (1981), 449–467.
4. Ф. Х. Мукминов, “Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **23:10** (1987), 1772–1780; англ. пер.: F. H. Mukminov, “Decrease with time of the norm of a solution of a mixed problem for a high-order parabolic equation”, *Differential Equations*, **23:10** (1987), 1215–1220.
5. А. Ф. Тедеев, “Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **25:3** (1989), 491–498; англ. пер.: A. F. Tedeev, “Stabilization of solutions of a first mixed boundary-value problem for a high-order quasilinear parabolic equation”, *Differential Equations*, **25:3** (1989), 346–352.
6. Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов, “Оценки скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **191:2** (2000), 91–131; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov, “Estimates of the stabilization rate as $t \rightarrow \infty$ of solutions of the first mixed problem for a quasilinear system of second-order parabolic equations”, *Sb. Math.*, **191:2** (2000), 235–273.
7. Ф. Х. Мукминов, И. М. Биккулов, “О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области”, *Матем. сб.*, **195:3** (2004), 115–142; англ. пер.: F. Kh. Mukminov, I. M. Bikkulov, “Stabilization of the norm of the solution of a mixed problem in an unbounded domain for parabolic equations of orders 4 and 6”, *Sb. Math.*, **195:3** (2004), 413–440.
8. Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **196:7** (2005), 67–100; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of a solution of the first mixed problem for a quasi-elliptic evolution equation”, *Sb. Math.*, **196:7** (2005), 999–1032.
9. Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов, “Убывание решения первой смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка с младшими членами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12:4** (2006), 113–147; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov, “Decay of solutions of the first mixed problem for a high-order parabolic equation with minor terms”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **150:5** (2008), 2369–2383.
10. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “О единственности решения смешанной задачи для уравнений теории упругости в неограниченной области”, *УМН*, **31:5** (1976), 247–248.
11. Л. М. Кожевникова, “Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях”, *Матем. сб.*, **199:8**

- (2008), 61–94; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Behaviour at infinity of solutions of pseudodifferential elliptic equations in unbounded domains”, *Sb. Math.*, **199**:8 (2008), 1169–1200.
12. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: О. А. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural’ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

Л. М. КОЖЕВНИКОВА (L. M. KOZHEVNIKOVA)

Стерлитамакская государственная

педагогическая академия им. З. Бишовой;

Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан

E-mail: kosul@mail.ru

Поступило в редакцию

30.03.2008

10.09.2008