Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрин, Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 23–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:20:10

УДК 517.958+517.547.24

А. В. Домрин

Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений

Рассмотрены локальные варианты прямого и обратного преобразований рассеяния и описаны их аналитические свойства, аналогичные свойствам классических преобразований Лапласа и Бореля. Это позволяет изучать локальные голоморфные решения тех интегрируемых эволюционных уравнений на $\mathbb{C}_{xt}^2$, комплексифицированные формы которых задаются условием нулевой кривизны для связности вида $U dx + V dt$, где U – линейная функция от спектрального параметра z , а V – полином степени $m \geq 2$ от z . Показано, что локальная голоморфная задача Коши для таких уравнений разрешима тогда и только тогда, когда данные рассеяния начального условия принадлежат классу Жеврея $1/m$. Показано также, что любое локальное голоморфное решение продолжается при каждом фиксированном t до глобально мероморфной функции от x .

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: солитонные уравнения, аналитическое продолжение.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучается вопрос об аналитическом продолжении локально заданных решений интегрируемых эволюционных уравнений. Например, всякое решение $u(x, t)$ уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = kuu_x + lu_{xx} \quad (1)$$

(где $k, l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – произвольные константы), голоморфное в бидиске $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |x - x_0| < \delta_1, |t - t_0| < \delta_2\}$, всегда продолжается до функции, мероморфной в “полосе” $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t - t_0| < \delta_2\}$ (и, вообще говоря, не допускает аналитического продолжения ни в какую большую область). Доказательство опирается на необходимое условие разрешимости локальной голоморфной задачи Коши $u(x, t_0) = u_0(x)$ для уравнения (1) в терминах так называемых данных рассеяния (представляющих собой нелинейный аналог преобразования Лапласа) начального условия $u_0(x)$, а также на аналитические свойства отображения, восстанавливающего голоморфный росток $u_0(x)$ в точке x_0 по его данным рассеяния (это отображение есть нелинейный аналог преобразования Бореля). Чтобы мотивировать применяемый подход и обозначения, мы приводим в § 2 описание того, во что превращаются обе составные части доказательства для

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00014, 08-01-00743), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-3877.2008.1) и программы SFB/TR-12 (Германия).

классической линейной ситуации. Читатель может перейти сразу к § 3, где даются общие определения и формулировки результатов. Оставшаяся часть работы посвящена доказательствам этих результатов и комментариям.

§ 2. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

Для нее не выполнены предположения теоремы Коши–Ковалевской, и заключение этой теоремы тоже неверно: задача (2) не имеет (даже локальных) голоморфных решений для многих голоморфных ростков $u_0(x)$ в начале координат, например для $u_0(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Действительно, полагая $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ и пользуясь тем, что из (2) вытекают равенства $\partial_t^k u = \partial_x^{2k} u$ для всех $k \geq 1$, можно записать

$$u(0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_t^k u(0, 0) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k c_{2k} t^k,$$

где коэффициенты $d_k := (2k)!/k!$ весьма быстро возрастают при $k \rightarrow \infty$. Чтобы ряд для $u(0, t)$ имел ненулевой радиус сходимости, числа c_{2k} должны при $k \rightarrow \infty$ стремиться к нулю с такой же или большей скоростью. Точный результат (см., например, классический учебник [1, § 541]) состоит в том, что задача (2) имеет локальное голоморфное решение $u(x, t)$ в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда росток $u_0(x)$ продолжается до целой функции порядка не выше 2 и конечного типа: $u_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и существуют $A, B > 0$ такие, что $|u_0(x)| \leq A \exp(B|x|^2)$ для всех $x \in \mathbb{C}$.

Если начальные данные $u_0(x)$ представляют собой целую функцию экспоненциального типа (т.е. $u_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и выполнено неравенство $|u_0(x)| \leq A e^{R|x|}$), то задачу Коши (2) можно решить с помощью *преобразования Лапласа* (см., например, [2, гл. I, § 5]). Под преобразованием Лапласа функции $u_0(x)$ обычно понимается функция

$$\varphi_0(z) = Lu_0(z) := \int_0^{\infty} e^{-xz} u_0(x) dx,$$

определенная и голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > R$. Однако в нашем случае функция $\varphi_0(z)$ допускает аналитическое продолжение в точку $z = \infty$, причем росток функции $u_0(x)$ в начале координат восстанавливается по ростку функции $\varphi_0(z)$ в точке ∞ посредством известного *преобразования Бореля*. Поэтому нам будет удобнее определить преобразование Лапласа L и преобразование Бореля B формулами

$$L\left(\sum_{k \geq 0} c_k x^k\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{k! c_k}{z^{k+1}}, \quad B\left(\sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_k}{z^{k+1}}\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_k}{k!} x^k, \quad (3)$$

где ряды по x сходятся для всех $x \in \mathbb{C}$, а ряды по z сходятся при $|z| > R$, включая точку $z = \infty$. Ясно, что равенства $\varphi_0 = Lu_0$ и $u_0 = B\varphi_0$ эквивалентны друг другу. Применение преобразования Лапласа к задаче (2) превращает

эту задачу в обыкновенное дифференциальное уравнение $\partial_t \varphi = \{z^2 \varphi(t, z)\}_-$ с начальным условием $\varphi(0, z) = \varphi_0(z)$, где $\varphi(t, z) := Lu(x, t)$, а через $\{\cdot\}_-$ обозначена отрицательная часть ряда Лорана: $\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k\}_- = \sum_{k \leq -1} a_k z^k$. Здесь учтена формула дифференцирования оригинала:

$$L(u_{xx})(z) = z^2 Lu(z) - zu(0) - u_x(0).$$

Легко проверить, что указанное уравнение на $\varphi(t, z)$ имеет единственное решение. Это решение определено для всех $t \in \mathbb{C}$ и задается формулой $\varphi(t, z) = \{\exp(tz^2)\varphi_0(z)\}_-$. Полагая теперь $u(x, t) = B\varphi(t, z)$, получаем единственное локальное голоморфное решение $u(x, t)$ задачи Коши (2) в окрестности начала координат. В данном случае, когда начальное условие $u_0(x)$ предполагается целой функцией экспоненциального типа, решение $u(x, t)$ оказывается целой функцией на всем $\mathbb{C}^2$.

Заметим, что полученная формула $u(x, t) = B(\{\exp(tz^2)Lu_0(z)\}_-)$ для решения задачи Коши (2) справедлива и в самом общем случае локальной разрешимости этой задачи, т. е. в случае, когда $u_0(x)$ – целая функция порядка не выше 2 и конечного типа: хотя ряд $Lu_0(z)$ может иметь нулевой радиус сходимости, выражение $\{\exp(tz^2)Lu_0(z)\}_-$, тем не менее, задает корректно определенный формальный степенной ряд от z^{-1} при всех $t \in \mathbb{C}$ с достаточно малым $|t|$, а преобразование Бореля (3) указанного выражения (при каждом таком t) есть корректно определенная целая функция от x порядка не выше 2 и конечного типа. Отсюда вытекает, что всякое локальное голоморфное решение уравнения теплопроводности продолжается при каждом фиксированном t до целой функции от x . Изучение таких решений в [3, гл. X] основано именно на формуле $u(x, t) = B(\{\exp(tz^2)Lu_0(z)\}_-)$, называемой там *разложением решения в ряд по тепловым полиномам*.

Сформулируем соответствующие результаты для следующей задачи Коши, которая является естественным обобщением задачи (2):

$$u_t = P(\partial_x)u, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (4)$$

Здесь $P(s) = \beta s^m + \gamma_1 s^{m-1} + \dots + \gamma_m$ – произвольный полином степени $m \geq 2$ с коэффициентами $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{C}$. Для каждого $\alpha > 0$ обозначим через Ent_α множество всех целых функций $u(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$ порядка не выше α и конечного типа, а через Gev_α – множество всех формальных степенных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k \geq 0} \sigma_k z^{-(k+1)}$ таких, что ряд $\sum_{k \geq 0} (k!)^{-\alpha} \sigma_k x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При любом вещественном $m > 1$ формулы (3) задают взаимно однозначное соответствие между пространствами $\text{Ent}_{m/(m-1)}$ и $\text{Gev}_{1/m}$. Это верно и при $m = 1$, если под Ent_∞ понимать пространство $\mathcal{O}(0)$ всех голоморфных ростков в точке $x = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (А) Задача (4) имеет локальное голоморфное решение $u(x, t)$ в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $u_0 \in \text{Ent}_{m/(m-1)}$ (или, эквивалентно, $Lu_0 \in \text{Gev}_{1/m}$).

(В) Всякое голоморфное решение $u(x, t)$ уравнения (4) в бидиске $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |x - x_0| < \delta_1, |t - t_0| < \delta_2\}$ аналитически продолжается до функции,

голоморфной в полосе $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t - t_0| < \delta_2\}$ и принадлежащей $\text{Ent}_{m/(m-1)}$ как функция от x при каждом фиксированном t .

(С) Если в обозначениях утверждения (В) функция $u_0(x) := u(x, t_0)$ принадлежит Ent_α для некоторого $\alpha < m/(m-1)$, то решение $u(x, t)$ является целой функцией на всем $\mathbb{C}^2$.

Предложение 1 доказывается прямой проверкой с помощью хорошо известных формул, выражающих порядок и тип целой функции через ее коэффициенты Тейлора (см., например, [2]). Предложение 2, (А) следует, например, из доказываемой ниже теоремы 2, (А) (см. § 3) с учетом предложения 1. Утверждения (В) и (С) предложения 2 вытекают из предложения 1 и формулы $u(x, t) = B(\{\exp(tP(z))Lu_0(z)\}_-)$ для единственного локального голоморфного решения задачи (4). Заметим, что никаких утверждений об аналитическом продолжении такого решения по t в общем случае сделать нельзя: если начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$ в (4) заменить на $\partial_x^j u(0, t) = v_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, то полученная система будет иметь единственное голоморфное решение в окрестности начала координат по теореме Коши–Ковалевской, так что росток $u(0, t)$ для локального голоморфного решения рассматриваемого уравнения можно выбрать произвольным. Однако предложение 2, (С) все же дает такое продолжение (до целой функции на всем $\mathbb{C}^2$) в том случае, когда начальная функция $u_0(x)$ задачи Коши (4) принадлежит не только пространству $\text{Ent}_{m/(m-1)}$ (что необходимо и достаточно для локальной разрешимости), но и пространству Ent_α при $\alpha < m/(m-1)$.

Оказывается, что значительная часть изложенных результатов переносится со случая линейных уравнений вида (4) на широкий класс нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Этот класс включает в себя практически все изучаемые в [4]–[6] эволюционные уравнения, содержащие лишь первую производную по времени (например, в него входят уравнение Кортевега–де Фриза (1) и нелинейное уравнение Шрёдингера вместе с их иерархиями и модификациями, но не входит уравнение sine-Gordon). В следующем параграфе мы опишем этот класс и применяемый для его изучения метод обратной задачи рассеяния как матричное нелинейное обобщение уравнений (4) и преобразований (3).

§ 3. Формулировки основных результатов

Метод обратной задачи рассеяния для эволюционных интегрируемых уравнений имеет несколько вариантов (см. [4]–[6]), различающихся граничными условиями, которые налагаются на изучаемые решения. Мы пользуемся локальным вариантом, имеющим начало в [7], [8] и изучавшимся также в [9].

Сначала определим аналог преобразования L , введенного в (3). Пусть $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ – множество всех комплексных $(n \times n)$ -матриц, $\mathcal{O}(x_0)$ – множество ростков всех голоморфных $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ -значных отображений в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, а $\mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ – множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{O}(x_0)$, т.е. таких, что $q_{ll}(x) \equiv 0$ при $l = 1, \dots, n$. Для каждого $\alpha \geq 0$ рассмотрим множество Gev_α (называемое *классом Жеврея* α) всех формальных степенных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$, $\varphi_k \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$, таких, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$ имеет

ненулевой радиус сходимости. Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB| \leq |A| |B|$. Обозначим через $\text{Gev}_\alpha^{\text{od}}$ множество всех внедиагональных $\varphi \in \text{Gev}_\alpha$, т.е. таких, что $(\varphi_k)_{ll} = 0$ для всех $k \geq 0$ и всех $l = 1, \dots, n$. Положим также $\text{Gev}_{\alpha=0} := \bigcup_{0 \leq s < \alpha} \text{Gev}_s$.

Фиксируем произвольную диагональную матрицу $a \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ с простым спектром (т.е. все ее собственные значения различны) и назовем *локальными данными рассеяния* любого внедиагонального голоморфного ростка $q \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ формальный степенной ряд

$$Lq(z) := m(x_0, z) - I, \quad (5)$$

где $m(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x) z^{-(k+1)}$ – единственное решение дифференциального уравнения $m_x = (az + q(x))m - maz$ в классе формальных степенных рядов указанного вида с $m_k \in \mathcal{O}(x_0)$ для всех $k \geq 0$ такое, что ряд $m(x_0, z) - I$ внедиагонален (существование и единственность такого решения доказаны ниже в § 6). Здесь и далее через I обозначается единичная $(n \times n)$ -матрица. С геометрической точки зрения $m(x, z)$ – формальное калибровочное преобразование диагональной связности $az dx$ в связность $(az + q(x)) dx$. Преобразование L из (3) является частным случаем (5): если $q(x) - (2 \times 2)$ -матрица с единственным ненулевым элементом $q_{12}(x) = u(x)$, разность $a_{11} - a_{22}$ диагональных элементов матрицы a равна 1 и в качестве начальной точки выбирается $x_0 = 0$, то $Lq(z)$ есть (2×2) -матрица с единственным ненулевым элементом $(Lq)_{12}(z) = -Lu(z)$ (см. [9, § 6]). Следующая теорема описывает аналитические свойства преобразования (5).

ТЕОРЕМА 1. (А) *Отображение $q \mapsto Lq$ есть биекция $\mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ на Gev_1^{od} .*

(В) *Если $q \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ и $Lq \in \text{Gev}_{1=0}$, то росток $q(x)$ аналитически продолжается до мероморфной функции на всем $\mathbb{C}$.*

Теперь определим интересующий нас класс эволюционных уравнений. Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{C}$. Отображение $F: \mathcal{O}(x_0) \rightarrow \mathcal{O}(x_0)$ называется *дифференциальным полиномом*, если для каждого $\kappa \in \mathcal{O}(x_0)$ функция $F(\kappa)$ есть обычный полином (один и тот же для всех κ) от функции κ и ее производных $\kappa_x, \kappa_{xx}, \dots$.

Пусть $a, b, c_1, c_2, \dots \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ – диагональные матрицы, причем a и b имеют простой спектр. Тогда существует единственная последовательность дифференциальных полиномов $F_0, F_1, F_2, \dots$ такая, что $F_0(\kappa) \equiv b$, $F_m(0) \equiv c_m$ для всех $m \geq 1$, и формальный степенной ряд $F(\kappa, z) := \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\kappa) z^{-m}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\partial_x F(\kappa, z) = [az + \kappa, F(\kappa, z)]$ тождественно по $\kappa \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ и по z (см. [9, теорема 1]). Фиксируем целое число $m \geq 2$ и рассмотрим задачу Коши с начальным условием $q(x, t_0) = q_0(x)$ для уравнения

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)], \quad (6)$$

где $q_0 \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ – заданный внедиагональный голоморфный росток в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, а $q(x, t)$ – искомая внедиагональная голоморфная функция в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. С геометрической точки зрения уравнение (6) есть *условие нулевой кривизны* $U_t - V_x + [U, V] = 0$ для связности $U(x, t, z) dx + V(x, t, z) dt$, где $U(x, t, z) = az + q(x, t)$ и $V(x, t, z) = \sum_{j=0}^m F_{m-j}(q)(x, t) z^j$ суть полиномы от z степеней 1 и m соответственно. Представление интегрируемых

систем в виде условий нулевой кривизны было впервые использовано в [10] (применительно к уравнению Кортевега–де Фриза), а после работы [7] стало одним из основных средств изучения таких систем (см. [4]–[6]).

Уравнения (6), отвечающие всевозможным наборам диагональных матриц $a, b, c_1, c_2, \dots$, являются комплексифицированными формами интегрируемых эволюционных уравнений интересующего нас класса. Это означает, что для получения искомого эволюционного уравнения следует наложить на компоненты матрицы $q(x)$ дополнительные алгебраические условия, называемые *редукциями*, или *условиями симметрии* (см. их подробное обсуждение в [4]–[6]). Например, линейное уравнение (4) является частным случаем (6) при

$$a = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad b = \beta a, \\ c_1 = \gamma_1 a, \quad \dots, \quad c_m = \gamma_m a, \quad q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x, t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а уравнение Кортевега–де Фриза $u_t = u_{xxx} - buu_x$ (из которого заменой масштаба вдоль координатных осей x, t легко получается общее уравнение (1)) является частным случаем уравнения (6) при

$$a = b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad c_1 = c_2 = \dots = 0, \quad q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x, t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 3$$

(см. [4, гл. I, § 8] или [9, § 1, примеры (C) и (E)]). Таким образом, результат о продолжении решений уравнения Кортевега–де Фриза (см. § 1) является частным случаем утверждения (B) следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. (A) *Задача Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$ для уравнения (6) имеет локальное голоморфное решение $q(x, t)$ в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $Lq_0 \in \text{Gev}_{1/m}$. Если такое решение $q(x, t)$ существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение $q(x, t)$ уравнения (6) в произвольном бидиске $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |x - x_0| < \delta_1, |t - t_0| < \delta_2\}$ аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t - t_0| < \delta_2\}$. При этом существует голоморфное решение $q_0(x, t)$ уравнения (6) в указанном бидиске, не допускающее аналитического продолжения ни через одну граничную точку упомянутой полосы.*

(C) *Если в обозначениях утверждения (B) функция $q_0(x) := q(x, t_0)$ удовлетворяет $Lq_0 \in \text{Gev}_{(1/m)-0}$, то решение $q(x, t)$ аналитически продолжается до функции, мероморфной на всем $\mathbb{C}^2$.*

Как и в предложении 2, утверждение (C) теоремы 2 порождено вопросом о том, допускают ли локальные решения уравнения (6) аналитическое продолжение не только по пространственной переменной x , но и по временной переменной t . Ответ в общем случае отрицательный согласно второй части утверждения (B). Но утверждение (C) дает положительный ответ для случая, когда $Lq_0 \in \bigcup_{\alpha < 1/m} \text{Gev}_\alpha$. Условия утверждения (C) заведомо выполняются, если задача Коши с начальным условием $q_0(x)$ разрешима для некоторого старшего потока той же иерархии, т. е. для уравнения (6) с теми же матрицами a

и b , но с ббльшим номером $m_1 > m$. Дальнейшие комментарии, касающиеся формулировок и приложений теорем 1 и 2, содержатся в § 9.

§ 4. Леммы о пространствах формальных степенных рядов

Обратное преобразование рассеяния восстанавливает росток $q(x)$ по формальному степенному ряду $Lq(z)$. Следуя подходу из работы [7], мы строим это преобразование с помощью задачи Римана о факторизации матричнозначных формальных рядов Лорана. Настоящий параграф содержит леммы, на основе которых в § 5 будет установлена теорема о разрешимости указанной задачи Римана.

Пусть даны числа $\alpha \geq 0$, $m \geq 1$ и $A, B > 0$. Рассмотрим множество $G_\alpha(A)$ всех формальных рядов $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)} \in \text{Gev}_\alpha$ таких, что $\|\varphi\|_{\alpha,A} := \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| A^k < \infty$, и множество $E_m(B)$ всех целых $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ -значных функций $\varepsilon(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l z^l$, коэффициенты которых удовлетворяют $|\varepsilon_l| \leq C(l!)^{-1/m} B^l$ для всех l и некоторой константы C . Ясно, что $G_\alpha(A)$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\alpha,A}$, изометрически изоморфное l_1 , а $E_m(B)$ – банахово пространство с нормой $\|\varepsilon\|_{m,B} := \sup_{l \geq 0} |\varepsilon_l| (l!)^{1/m} B^{-l}$, изометрически изоморфное l_∞ . Через $\{\cdot\}_+$ и $\{\cdot\}_-$ будем обозначать положительную и отрицательную части формального ряда Лорана: $\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k\}_+ = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, $\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k\}_- = \sum_{k \leq -1} a_k z^k$.

ЛЕММА 1. Пусть $A > B > 0$, $m \geq 1$ и $0 \leq \alpha \leq 1/m$. Тогда произведение элементов из $G_\alpha(A)$ и $E_m(B)$, взятых в любом порядке, есть корректно определенный ряд Лорана, принадлежащий $G_\alpha(A - B) + E_m(B)$. Отображения $(\varphi, \varepsilon) \mapsto \{\varphi\varepsilon\}_\pm$ и $(\varphi, \varepsilon) \mapsto \{\varepsilon\varphi\}_\pm$ являются непрерывными билинейными формами на $G_\alpha(A) \times E_m(B)$ со значениями в $G_\alpha(A - B)$ и $E_m(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\{\varphi\varepsilon\}_- = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^{-(k+1)}$ и $\{\varphi\varepsilon\}_+ = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l z^l$, где $\psi_k = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_{k+p} \varepsilon_p$ и $\delta_l = \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_q \varepsilon_{q+l+1}$. Обозначим $\|\varepsilon\|_{m,B}$ через C . Пользуясь неравенствами $m \geq 1$, $1/m \geq \alpha$ и формулой бинома Ньютона, получаем

$$\begin{aligned} \|\{\varphi\varepsilon\}_-\|_{\alpha,A-B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\psi_k| (A-B)^k}{(k!)^\alpha} \leq \sum_{k,p=0}^{\infty} \frac{|\varphi_{k+p}| |\varepsilon_p| (A-B)^k}{(k!)^\alpha} \\ &\leq C \sum_{k,p=0}^{\infty} |\varphi_{k+p}| \frac{B^p (A-B)^k}{(k!)^\alpha (p!)^{1/m}} \leq C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|\varphi_s|}{(s!)^\alpha} \sum_{k=0}^s \left(\frac{s!}{k! (s-k)!} \right)^\alpha B^{s-k} (A-B)^k \\ &\leq C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|\varphi_s|}{(s!)^\alpha} (B + A - B)^s = C \|\varphi\|_{\alpha,A} = \|\varphi\|_{\alpha,A} \|\varepsilon\|_{m,B}, \end{aligned}$$

откуда и вытекают все требуемые свойства $\{\varphi\varepsilon\}_-$. Доказательство для $\{\varepsilon\varphi\}_-$ аналогично.

С другой стороны, с помощью очевидного неравенства $q!(l+1)! \leq (q+l+1)!$ и условия $B < A$ получаем

$$|\delta_l| = \left| \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_q \varepsilon_{q+l+1} \right| \leq C \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|\varphi_q| B^{q+l+1}}{((q+l+1)!)^{1/m}} \leq \frac{CB^{l+1}}{((l+1)!)^{1/m}} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|\varphi_q| A^q}{(q!)^{1/m}},$$

откуда $\|\{\varphi\varepsilon\}_+\|_{m,B} \leq B\|\varphi\|_{1/m,A}\|\varepsilon\|_{m,B} \leq B\|\varphi\|_{\alpha,A}\|\varepsilon\|_{m,B}$. Этим доказаны все требуемые свойства $\{\varphi\varepsilon\}_+$ (и, аналогично, $\{\varepsilon\varphi\}_+$).

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha \geq 0$ и $A > 0$. Тогда $\|\varphi\psi\|_{\alpha,A} \leq A\|\varphi\|_{\alpha,A}\|\psi\|_{\alpha,A}$ для всех $\varphi, \psi \in G_\alpha(A)$. Кроме того, множество $I + \text{Gev}_\alpha$ является группой относительно обычного произведения формальных степенных рядов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,A} = \sum_{s=1}^{\infty} A^s (s!)^{-\alpha} \left| \sum_{k=0}^{s-1} \varphi_k \psi_{s-1-k} \right| \leq \sum_{k,l=0}^{\infty} |\varphi_k| |\psi_l| A^{k+l+1} ((k+l+1)!)^{-\alpha}$$

не превосходит выражения

$$A\|\varphi\|_{\alpha,A} \|\psi\|_{\alpha,A} = \sum_{k,l=0}^{\infty} |\varphi_k| |\psi_l| A^{k+l+1} (k!l!)^{-\alpha},$$

так как $(k+l+1)! \geq k!l!$. Этим доказана первая часть леммы, а также замкнутость множества $I + \text{Gev}_\alpha$ относительно умножения. Осталось проверить, что $(I + \varphi)^{-1} \in I + \text{Gev}_\alpha$ для любого $\varphi \in \text{Gev}_\alpha$. Однако если $\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j z^{-j}$, то $(I + \varphi(z))^{-1} - I = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^{-j}$, где коэффициенты $\psi_1 = -\varphi_1$, $\psi_2 = -(\psi_1\varphi_1 + \varphi_2)$, ... удовлетворяют неравенствам $|\psi_j| \leq \sum_{s=1}^{j-1} |\psi_{j-s}| |\varphi_s| + |\varphi_j|$ при всех $j \geq 1$. Поскольку $(s!)^\alpha ((j-s)!)^\alpha \leq (j!)^\alpha$ для всех целых $s = 1, \dots, j$, эти неравенства можно переписать в виде одного неравенства $2M(R) \leq M(R)L(R) + 1$ для формальных степенных рядов $L(R) := 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (s!)^{-\alpha} |\varphi_s| R^s$ и $M(R) := 1 + \sum_{t=1}^{\infty} (t!)^{-\alpha} |\psi_t| R^t$. По условию ряд $L(R)$ сходится для всех достаточно малых $R > 0$, причем $L(0) = 1$. Но тогда ряд $M(R) \leq 1/(2 - L(R))$ также сходится для всех достаточно малых $R > 0$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Если $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, то $G_{\alpha_1}(A_1) \subset G_{\alpha_2}(A_2)$ для всех $A_1, A_2 > 0$. Если $A_1 > A_2$, то $G_\alpha(A_1) \subset G_\alpha(A_2)$ для всех $\alpha \geq 0$. Если $1 \leq m_1 < m_2$, то $E_{m_1}(B_1) \subset E_{m_2}(B_2)$ для всех $B_1, B_2 > 0$. Если $B_1 < B_2$, то $E_m(B_1) \subset E_m(B_2)$ для всех $m \geq 1$. Все эти вложения банаховых пространств непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает непосредственно из определений.

ЛЕММА 4. Пусть функции $E(z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^p$ и $F(z) = \sum_{q=0}^{\infty} d_q z^q$ принадлежат $E_m(B)$, причем $E(z)F(z) \equiv I$. Тогда для всех $\varphi \in G_{1/m}(A)$, $A > 2B$, справедливо равенство $\{\{\varphi E\}_- F\}_- = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно первой формуле из начала доказательства леммы 1, коэффициент при $z^{-(k+1)}$ в степенном ряде $\{\{\varphi(z)E(z)\}_- F(z)\}_-$ имеет вид

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \varphi_{k+q+p} c_p \right) d_q = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_{k+r} \sum_{p+q=r} c_p d_q = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_{k+r} \delta_{0r} = \varphi_k,$$

причем все преобразования законны в силу абсолютной сходимости.

ЛЕММА 5. Пусть $P(z) = \sum_{k=0}^m p_k z^k$ – полином степени не выше m с коэффициентами из $\text{gl}(n, \mathbb{C})$. Тогда функция $e^{P(z)}$ принадлежит $E_m(B)$ при любом $B > (em|p_m|)^{1/m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\beta > |p_m|$ имеем $|P(z)| \leq \beta|z|^m$ при $|z| \geq R_0$. Поэтому из неравенств Коши вытекает, что коэффициенты ε_l разложения $e^{P(z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l z^l$ удовлетворяют неравенству $|\varepsilon_l| \leq R^{-l} \exp\{\beta R^m\}$ для всех $R \geq R_0$. Минимум правой части последнего неравенства как функции от R достигается при $R = (l/(m\beta))^{1/m}$, что не меньше R_0 при $l \geq l_0$. Следовательно, при $l \geq l_0$ можно записать $|\varepsilon_l| \leq (em\beta/l)^{l/m}$. Пользуясь очевидным неравенством $l! \leq l^l$, получаем $|\varepsilon_l| \leq (l!)^{-1/m} B^l$ при любом $B \geq (em\beta)^{1/m}$, что и требовалось доказать.

§ 5. Задача Римана

Следующий результат играет ключевую роль в доказательствах теорем 1, 2. Его неформальное описание таково. Пусть матричнозначный ряд $f(z)$ по степеням $1/z$ со свободным членом I принадлежит такому классу Жеврея, что произведение в левой части равенства (7) имеет смысл по леммам 1, 2. Утверждается, что если при $\xi = 0$ это произведение можно записать с помощью множителей такого же типа, но взятых в обратном порядке, то такая запись возможна и в некоторой окрестности точки $\xi = 0$, причем решение $\gamma_{\pm}(\xi, z)$ голоморфно по ξ в этой окрестности. Если f принадлежит строго меньшему классу Жеврея, то указанная запись возможна всюду вне некоторой комплексной гиперповерхности, а решение $\gamma_{\pm}(\xi, z)$ глобально мероморфно по ξ .

ТЕОРЕМА 3. (А) Пусть $N, m \geq 1$ – целые числа, а $P(\xi, z)$ – полином от z степени не выше m , задающий голоморфное отображение $P: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \rightarrow \text{gl}(n, \mathbb{C})$, причем $P(0, z) \equiv 0$. Тогда для любого ряда $f \in I + \text{Gev}_{1/m}$ найдутся окрестность $\Omega(f)$ начала координат в $\mathbb{C}^N$, числа $A, B > 0$ и голоморфные отображения $\gamma_-: \Omega(f) \rightarrow I + G_{1/m}(A)$ и $\gamma_+: \Omega(f) \rightarrow E_m(B)$ такие, что при каждом $\xi \in \Omega(f)$ выполнено следующее равенство формальных рядов Лорана:

$$e^{P(\xi, z)} f^{-1}(z) = \gamma_-^{-1}(\xi, z) \gamma_+(\xi, z). \quad (7)$$

(В) Если в условиях утверждения (А) имеем $f \in I + \text{Gev}_{(1/m)-0}$, то существует целая функция $\tau_f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $\tau_f(0) = 1$, такая, что при любом $A > 0$ отображения $\tau_f(\xi)(\gamma_-(\xi, z) - I)$ и $\tau_f(\xi)(\gamma_-^{-1}(\xi, z) - I)$ продолжаются до голоморфных отображений $\mathbb{C}^N \rightarrow G_{1/m}(A)$. При этом для любого $R > 0$ найдется $B(R) > 0$ такое, что отображения $\tau_f(\xi)\gamma_+(\xi, z)$ и $\tau_f(\xi)\gamma_+^{-1}(\xi, z)$ продолжаются в полидиск $D_R = \{\xi \in \mathbb{C}^N \mid |\xi_1| < R, \dots, |\xi_N| < R\}$ до голоморфных отображений $D_R \rightarrow E_m(B(R))$. Кроме того, равенство (7) выполняется для всех значений $\xi \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих $\tau_f(\xi) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varphi_0(z) := f^{-1}(z) - I$. По условию и лемме 2 имеем $\varphi_0 \in G_{\alpha}(A_0)$ для некоторых $\alpha \in [0, 1/m]$ и $A_0 > 0$. С другой стороны, так как $P(0, z) \equiv 0$, то по лемме 5 для любого $B > 0$ найдется $\delta(B) > 0$ такое, что целая функция $e^{P(\xi, z)}$ принадлежит $E_m(B)$ при всех $\xi \in \mathbb{C}^N$ с условием $|\xi| := \max(|\xi_1|, \dots, |\xi_N|) < \delta(B)$. Выбирая $0 < B < A_0$, получаем по лемме 1,

что степенные ряды $\{e^P f^{-1}\}_- = \{e^P \varphi_0\}_- \in G_\alpha(A_0 - B)$ и $\{e^P f^{-1}\}_+ \in E_m(B)$ корректно определены при всех таких ξ .

Фиксируем одно из таких значений ξ и будем искать решение $\gamma_-(\xi, z)$ уравнения (7) в виде $\gamma_- = I + \varphi \in I + G_\alpha(A_1)$ для некоторого пока не определенного $A_1 > 0$. Соответствующее условие на φ состоит в том, что

$$\{(I + \varphi)e^P f^{-1}\}_- = 0. \quad (8)$$

Это условие имеет вид системы линейных уравнений $(MT_P + K_P)\varphi = v_P$ с вектором

$$v_P := -\{e^P \varphi_0\}_- \in G_\alpha(A_0 - B) \quad (9)$$

в правой части и операторами

$$M\varphi := \varphi f^{-1}, \quad T_P\varphi := \{\varphi e^P\}_-, \quad K_P\varphi := \{\{\varphi e^P\}_+ \varphi_0\}_- \quad (10)$$

в левой части. Оператор $M: G_\alpha(A) \rightarrow G_\alpha(A)$ непрерывен и обратим для любого положительного $A \leq A_0$ (см. лемму 2), причем обратный оператор есть $M^{-1}\varphi = \varphi f$. Оператор $T_P: G_\alpha(A) \rightarrow G_\alpha(A - B)$ непрерывен (по лемме 1) и "почти обратим" (по лемме 4) в том смысле, что $T_P T_{-P}\varphi = T_{-P} T_P\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in G_\alpha(A)$ при $A > 2B$. Поэтому для нахождения нужного нам решения φ соотношения (8) достаточно установить существование такого $\varphi \in G_\alpha(A_1)$, что

$$(I + T_{-P} M^{-1} K_P)\varphi = T_{-P} M^{-1} v_P. \quad (11)$$

Следующая лемма показывает, что оператор K_P может непрерывно отображать $G_\alpha(A_1)$ в $G_\alpha(A_2)$ для $A_2 > A_1$. Это позволяет рассматривать левую часть (11) как непрерывный линейный оператор, действующий из некоторого банахова пространства в себя, и изучать обратимость этого оператора.

ЛЕММА 6. *Если $2^\alpha B < A_1 < A_0$ и $0 < 2^{1+\alpha} A_2 < A_0$, то K_P является непрерывным и даже компактным линейным оператором из $G_\alpha(A_1)$ в $G_\alpha(A_2)$. При $0 \leq \alpha < 1/t$ это утверждение остается верным, если заменить неравенства $2^\alpha B < A_1 < A_0$ на более слабое условие $0 < A_1 < A_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компактности оператора $K: l_1 \rightarrow l_1$, имеющего в стандартном базисе $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ матрицу $(K_{pq})_{p,q=0}^\infty$ (т.е. такого, что равенство $Kx = y$ для финитных векторов $x = \sum_{q=0}^\infty x_q e_q$ и $y = \sum_{p=0}^\infty y_p e_p$ эквивалентно системе $y_p = \sum_{q=0}^\infty K_{pq} x_q$), достаточно выполнение неравенства $\sum_{p,q=0}^\infty |K_{pq}| < \infty$. (Действительно, в этом случае известная формула $\|X\| = \sup_{q \geq 0} \|X e_q\| = \sup_{q \geq 0} \sum_{p=0}^\infty |X_{pq}|$ для нормы оператора $X \in \mathcal{B}(l_1)$ показывает, что $K = \lim_{j \rightarrow \infty} \pi_j K$ является пределом конечномерных операторов по указанной норме, где $\pi_j \in \mathcal{B}(l_1)$ – проектор на $\langle e_0, e_1, \dots, e_j \rangle$.) Проверим, что это неравенство выполняется для оператора $K := i_2 K_P i_1^{-1}$, где через $i_s: G_\alpha(A_s) \rightarrow l_1$, $s = 1, 2$, обозначены стандартные диагональные изометрии

$$i_s \left(\sum_{k=0}^\infty \varphi_k z^{-(k+1)} \right) = \sum_{k=0}^\infty (k!)^{-\alpha} (A_s)^k \varphi_k e_k.$$

Записывая $e^{P(\xi, z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l z^l$ и $\varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^0 z^{-(k+1)}$, получаем для матричных элементов оператора K формулу

$$K_{pq} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_2^p}{(p!)^\alpha} \frac{(q!)^\alpha}{A_1^q} \varepsilon_{q+r+1} \varphi_{p+r}^0. \quad (12)$$

По условию имеем $|\varepsilon_l| \leq C_1(l!)^{-1/m} B^l$ и $|\varphi_k^0| \leq C_2(k!)^\alpha (A_0)^{-k}$ для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$. Кроме того, очевидные неравенства $1 \leq C_{p+q+r}^q$ и $C_{p+q+r}^p \leq 2^{p+q+r}$ для биномиальных коэффициентов дают

$$\frac{(q!)^\alpha ((p+r)!)^\alpha}{(p!)^\alpha ((q+r+1)!)^{1/m}} = \frac{(q+r+1)^{-1/m}}{((q+r)!)^{(1/m)-\alpha}} \left(\frac{C_{p+q+r}^p}{C_{p+q+r}^q} \right)^\alpha \leq \frac{2^{(p+q+r)\alpha}}{((q+r)!)^{(1/m)-\alpha}}.$$

Пользуясь всеми этими оценками, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1 C_2} \sum_{p,q=0}^{\infty} |K_{pq}| &\leq \sum_{p,q,r=0}^{\infty} \frac{A_2^p B^{q+r+1} 2^{(p+q+r)\alpha}}{A_1^q A_0^{p+r} ((q+r)!)^{(1/m)-\alpha}} \\ &= \sum_{p,q,r=0}^{\infty} \left(\frac{2^\alpha A_2}{A_0} \right)^p \left(\frac{2^\alpha B}{A_1} \right)^{q+r} \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^r \frac{B}{((q+r)!)^{(1/m)-\alpha}}. \end{aligned}$$

Обозначим число $\frac{2^\alpha B}{A_1}$ через R . Тогда неравенства из условия леммы показывают, что последний ряд не превосходит

$$\sum_{p,q,r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^p \frac{B R^{q+r}}{((q+r)!)^{(1/m)-\alpha}} = \sum_{q,r=0}^{\infty} \frac{2 B R^{q+r}}{((q+r)!)^{(1/m)-\alpha}} = 2B \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1) R^s}{(s!)^{(1/m)-\alpha}}.$$

Если $\alpha = 1/m$, то этот ряд сходится при $0 < R < 1$. Если $\alpha < 1/m$, то он сходится при всех $R > 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. В условиях леммы 6 операторы K_P , T_P и вектор v_P являются голоморфными в некоторой окрестности начала координат функциями от ξ со значениями в банаховых пространствах $\mathcal{B}(G_\alpha(A_1), G_\alpha(A_2))$, $\mathcal{B}(G_\alpha(A_2), G_\alpha(A_2 - B))$ и $G_\alpha(A_0 - 2B)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $P(\xi, z) = \sum_{k=0}^m p_k(\xi) z^k$ для некоторых голоморфных функций $p_0, p_1, \dots, p_m: \mathbb{C}^N \rightarrow \text{gl}(n, \mathbb{C})$ и выберем окрестность Ω начала координат в $\mathbb{C}^N$ так, что все функции p_k , $k = 0, 1, \dots, m$, ограничены в Ω и $\sup_{\xi \in \Omega} (e m |p_m(\xi)|)^{1/m} < B/2$. (Такая окрестность существует, поскольку $p_k(0) = 0$ для всех k .) Тогда для коэффициентов $\varepsilon_l(\xi)$ разложения $e^{P(\xi, z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l(\xi) z^l$ имеем согласно доказательству леммы 5 оценку $|\varepsilon_l(\xi)| \leq (l!)^{-1/m} (B/2)^l$ для всех $\xi \in \Omega$ и $l \geq l_0(\xi)$, причем в силу ограниченности всех $p_k(\xi)$ число $l_0(\xi)$ может быть выбрано одним и тем же для всех $\xi \in \Omega$. Отсюда

$$\left\| \sum_{l=l_1}^{\infty} \varepsilon_l(\xi) z^l \right\|_{m,B} = \sup_{l \geq l_1} |\varepsilon_l(\xi)| (l!)^{1/m} B^{-l} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{l_1}, \quad l_1 \geq l_0.$$

Таким образом, ряд $\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l(\xi) z^l$ сходится к $e^{P(\xi, z)}$ равномерно на Ω по норме пространства $E_m(B)$. Подставляя этот ряд в (9) для v_P и в (10) для T_P

и пользуясь оценками билинейных форм из леммы 1, получаем представление T_P и v_P в виде равномерного на Ω предела частичных сумм по норме соответствующих пространств. Эти частичные суммы голоморфны на Ω , так как они являются конечными линейными комбинациями фиксированных элементов со скалярными коэффициентами, голоморфно зависящими от $\xi \in \Omega$. Поэтому их предел голоморфен на Ω по теореме Вейерштрасса. Этим утверждение леммы доказано для случаев T_P и v_P .

Рассмотрим случай K_P . Из доказательства леммы 6 видно, что K_P – равномерный на Ω предел по норме пространства $\mathcal{B}(G_\alpha(A_1), G_\alpha(A_2))$ частичных сумм двойного ряда из конечномерных операторов. Каждый из этих операторов имеет матрицу с единственным ненулевым элементом K_{pq} для некоторых p, q . Пользуясь формулой (12) и первой частью доказательства настоящей леммы, получаем, что каждый из этих операторов голоморфно зависит от $\xi \in \Omega$. Отсюда по теореме Вейерштрасса вытекает голоморфность оператора K_P на Ω относительно указанной нормы. Лемма доказана.

Обозначим левую часть равенства (11) через $X(\xi)\varphi$, а правую – через $u(\xi)$. Пусть числа B, A_1, A_2 выбраны так, что $0 < 2B < A_1 \leq A_2 - B$ и $4A_2 < A_0$ (например, можно положить $B = A_0/16, A_1 = 5A_0/32$ и $A_2 = 7A_0/32$). Тогда из леммы 6 и непрерывности операторов M и T_{-P} (см. формулу (11)) вытекает, что при $|\xi| < \delta(B)$ оператор $X(\xi)$ есть непрерывный линейный оператор на банаховом пространстве $G_\alpha(A_1)$, а $u(\xi)$ является вектором из этого пространства. Поскольку оператор $X(\xi)$ непрерывен по ξ (лемма 7) и обратим при $\xi = 0$ (будучи тождественным), он обратим при всех ξ в некоторой окрестности начала координат. Обозначим эту окрестность через $\Omega(f)$. Тогда при каждом $\xi \in \Omega(f)$ уравнение (11) имеет единственное решение $\varphi = X(\xi)^{-1}u(\xi) \in G_\alpha(A_1)$. По лемме 7 это решение задает голоморфное отображение $\varphi: \Omega(f) \rightarrow G_\alpha(A_1)$. Положим $\gamma_- := I + \varphi$ и $\gamma_+ := \gamma_- e^P f^{-1}$. Тогда при каждом $\xi \in \Omega(f)$ выполнено равенство (7), причем формальный ряд

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= \{(I + \varphi)e^P(I + \varphi_0)\}_+ = \{\varphi e^P\}_+ + \{e^P \varphi_0\}_+ + \{\varphi e^P \varphi_0\}_+ \\ &= \{\varphi e^P\}_+ + \{e^P \varphi_0\}_+ + \{\{\varphi e^P\}_+ \varphi_0\}_+ \end{aligned}$$

принадлежит пространству $E_m(B)$ по лемме 1. В доказательстве леммы 7 мы видели, что $\xi \mapsto e^{P(\xi, \cdot)}$ – голоморфное отображение из $\Omega(f)$ в $E_m(B)$. Пользуясь этим фактом, а также оценками билинейных форм из леммы 1 и установленной выше голоморфностью отображения $\varphi: \Omega(f) \rightarrow G_\alpha(A_1)$, получаем, что отображение $\gamma_+: \Omega(f) \rightarrow E_m(B)$ голоморфно. Утверждение (А) доказано.

Доказательство утверждения (В) проходит по той же схеме, что и выше. В нем используется следующая лемма о мероморфности семейства, обратного к голоморфному семейству фредгольмовых операторов индекса 0. Эту лемму следует считать хорошо известной. Очень близкие к ней утверждения сохраняются, например, в [11] или [12]. Для полноты изложения мы приведем набросок доказательства.

ЛЕММА 8. Пусть $Y: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(E)$ – голоморфное отображение полидиска $\Omega = \{\xi \in \mathbb{C}^N \mid |\xi| < R\}$ в пространство линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве E , причем операторы $Y(\xi)$ компактны для всех $\xi \in \Omega$

и оператор $I + Y(\xi_0)$ обратим для некоторой точки $\xi_0 \in \Omega$. Тогда найдется голоморфная функция $\tau \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\tau(\xi_0) = 1$, такая, что:

- (i) $I + Y(\xi)$ обратим для тех и только тех $\xi \in \Omega$, для которых $\tau(\xi) \neq 0$;
- (ii) $\tau(\xi)(I + Y(\xi))^{-1}$ – голоморфное отображение $\Omega \rightarrow \mathcal{B}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X(\xi) = I + Y(\xi)$ и обозначим через Z множество всех тех значений $\xi_1 \in \Omega$, для которых оператор $X(\xi_1)$ не обратим, т. е. $0 \in \text{sp } X(\xi_1)$. Из свойств спектра компактного оператора ясно, что 0 является изолированным собственным значением конечной кратности для оператора $X(\xi_1)$. Если P – соответствующий спектральный проектор, то пространство $\text{im } P \supset \ker X(\xi_1)$ конечномерно и оператор $X(\xi_1)$ имеет блочно-диагональный вид относительно разложения $E = \text{im } P \oplus \ker P$:

$$X(\xi_1) = \text{diag}(A_0, A_1) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

где оператор A_1 обратим и $\text{sp } A_0 = \{0\}$ (см. [13, п. III.6.5]). Поэтому при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ оператор $X(\xi_1) - \mu P = \text{diag}(A_0 - \mu I, A_1)$ обратим на E , следовательно, оператор $X(\xi) - \mu P$ обратим для всех ξ из некоторой окрестности $U \subset \Omega$ точки ξ_1 . Имеем $X(\xi) = (X(\xi) - \mu P)(I + (X(\xi) - \mu P)^{-1}\mu P)$, где оператор $(X(\xi) - \mu P)^{-1}\mu P$ конечномерен и голоморфно зависит от $\xi \in U$. Поэтому оператор $X(\xi)$ обратим для тех и только тех значений $\xi \in U$, для которых $\tau_U(\xi) \neq 0$, где $\tau_U(\xi) = \det(I + (X(\xi) - \mu P)^{-1}\mu P)$ – голоморфная функция на U , определяемая, как в [13, п. III.4.3]. Если $\tau_U(\xi) \equiv 0$ в U , то множество тех точек $\xi \in \Omega$, в окрестностях которых $X(\xi)$ не обратим, оказывается непустым, открытым и замкнутым, т. е. совпадает со всем Ω вопреки условию обратимости $X(\xi_0)$. Поэтому $\tau_U(\xi) \not\equiv 0$ в U . Заметим, что $\xi \mapsto \tau_U(\xi)X(\xi)^{-1}$ – голоморфное отображение $U \rightarrow \mathcal{B}(E)$. Далее, если окрестности U_1, U_2 точек $\xi_1, \xi_2 \in Z$ имеют непустое пересечение, то отношение τ_{U_1}/τ_{U_2} голоморфно и отлично от нуля всюду на $U_1 \cap U_2$. В силу классических результатов о разрешимости второй проблемы Кузена (см., например, [14, гл. IV, § 16, п. 40, теорема 4]) найдется функция $\tau \in \mathcal{O}(\Omega)$ такая, что $\tau(\xi_0) = 1$ и отношение τ_U/τ голоморфно и отлично от нуля всюду на U для всех $\xi_1 \in Z$. Лемма доказана.

Допустим теперь, что $0 \leq \alpha < 1/m$. Тогда можно считать, что $\varphi_0 \in G_\alpha(A_0)$ для всех $A_0 > 0$ (иначе заменим α на любое α_1 , $\alpha < \alpha_1 < 1/m$, и воспользуемся леммой 3). Пусть даны произвольные числа $A, R > 0$. Положим $B(R) := 1 + \sup_{\xi \in D_R} (em|p_m(\xi)|)^{1/m}$, $A_1 := A$, $A_2 := A + B$ и $A_0 := A + 2B$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 7, мы видим, что семейство операторов $Y(\xi) := T_{-P(\xi, \cdot)} M^{-1} K_{P(\xi, \cdot)}$ удовлетворяет условиям леммы 8 для $\Omega = D_R$, $E = G_\alpha(A)$, $\xi_0 = 0$. Обозначим через τ_R функцию из заключения леммы 8. Тогда решение

$$\begin{aligned} \gamma_-(\xi, \cdot) &= I + (I + T_{-P(\xi, \cdot)} M^{-1} K_{P(\xi, \cdot)})^{-1} T_{-P(\xi, \cdot)} M^{-1} v_{P(\xi, \cdot)}, \\ \gamma_+(\xi, z) &= \gamma_-(\xi, z) e^{P(\xi, z)} f^{-1}(z) \end{aligned}$$

задачи Римана (7) определено при всех $\xi \in D_R$, для которых $\tau_R(\xi) \neq 0$, а отображения $\gamma_- - I: D_R \rightarrow G_\alpha(A)$, $\gamma_+: D_R \rightarrow E_m(B(R))$ являются мероморфными на D_R со знаменателем $\tau_R(\xi)$. Как и в конце доказательства леммы 8, мы можем решить вторую проблему Кузена и найти такую функцию $\tau \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$,

что τ_R/τ – голоморфная функция без нулей на D_R для любого $R > 0$. Полагая $\tau_f(\xi) := \tau(\xi)/\tau(0)$, завершаем доказательство утверждения (В) теоремы 3.

§ 6. Формальные калибровочные преобразования

В этом параграфе будет показано, что формула (5) задает корректно определенное инъективное отображение $L: \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}} \rightarrow \text{Gev}_1^{\text{od}}$, при этом результаты из § 4, 5 не используются.

Рассмотрим понятие калибровочного преобразования формальных плоских связностей. Под *связностью* в данном контексте понимается любой формальный ряд Лорана вида

$$U(x, z) = az + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)z^{-k},$$

где $a \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$ – фиксированная диагональная матрица с простым спектром (см. § 3), а $u_k \in \mathcal{O}(x_0)$ для всех $k \geq 0$. Группа *калибровочных преобразований* состоит из формальных степенных рядов вида

$$\Phi(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)z^{-(k+1)},$$

где $\varphi_k \in \mathcal{O}(x_0)$ для всех $k \geq 0$. Групповой операцией является обычное умножение формальных степенных рядов. По определению действие элемента Φ переводит связность U в связность $V := \Phi_x \Phi^{-1} + \Phi U \Phi^{-1}$. Можно еще сформулировать это определение в виде дифференциального уравнения $\Phi_x = V\Phi - \Phi U$ или равенства $\partial_x - V = \Phi(\partial_x - U)\Phi^{-1}$ дифференциальных операторов первого порядка. Из последнего равенства легко вывести групповое свойство: если Φ переводит U в V , а Ψ переводит V в W , то действие ряда $\Psi\Phi$ переводит U в W , а действие обратного ряда Φ^{-1} переводит V в U .

Можно рассматривать калибровочное преобразование как замену неизвестной функции в уравнении $(\partial_x - U)\xi = 0$. Переход от неизвестной функции ξ к $\eta = \Phi\xi$ переводит решения системы $(\partial_x - U)\xi = 0$ в решения системы $(\partial_x - V)\eta = 0$, так как $(\partial_x - V)\eta = \Phi(\partial_x - U)\xi$ для всех векторзначных функций ξ . Поскольку система $(\partial_x - U_0)\xi = 0$ с диагональной матрицей U_0 может быть решена в явном виде, естественно найти те калибровочные преобразования, с помощью которых данная связность U получается из некоторой диагональной связности U_0 . Следующая лемма описывает все такие преобразования для случая, когда $U = az + q(x)$, $q \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$. В ней (и далее) через X_d обозначается диагональная часть матрицы $X \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$ (т.е. имеем $(X_d)_{jk} = \delta_{jk}X_{jk}$ для всех $1 \leq j, k \leq n$), а через $X_{\text{od}} := X - X_d$ обозначается внедиагональная часть.

ЛЕММА 9. Пусть $q \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$. Тогда для любого набора диагональных ростков $\varkappa_j \in \mathcal{O}(x_0)$, $j = 1, 2, \dots$, и любого набора диагональных матриц $C_j \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$, $j = 1, 2, \dots$, существует единственный формальный степенной

ряд вида $\Phi(x, z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) z^{-j}$, где $\varphi_j \in \mathcal{O}(x_0)$, $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\partial_x \Phi(x, z) = (az + q(x))\Phi(x, z) - \Phi(x, z) \left(az + \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k(x) z^{-k} \right) \quad (13)$$

и нормировочному условию $\{\varphi_j(x_0)\}_d = C_j$ при $j = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнение коэффициентов при степенях z в левой и правой частях (13) дает равенства $0 = [a, \varphi_1] + q$ (при z^0) и $\varphi'_j = [a, \varphi_{j+1}] + q\varphi_j - \sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j$ (при z^{-j} , $j \geq 1$). Полагая $D_j := (\varphi_j)_d$ и $N_j := (\varphi_j)_{od}$, запишем эти равенства в виде

$$0 = [a, N_1] + q, \quad (14_{od}^0)$$

$$D'_j = (qN_j)_d - \sum_{k=1}^{j-1} D_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j, \quad (14_d^j)$$

$$N'_j = [a, N_{j+1}] + qD_j + (qN_j)_{od} - \sum_{k=1}^{j-1} N_k \varkappa_{j-k}. \quad (14_{od}^j)$$

Заметим, что линейный оператор $\mathcal{A}X := [a, X]$ обратим на векторном пространстве всех внедиагональных матриц $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Это позволяет нам последовательно найти (т. е. выразить через q , $\varkappa_j$ и C_j) ростки $N_1(x) = -\mathcal{A}^{-1}q(x)$ из (14_{od}^0) , $D_1(x) = C_1 + \int_{x_0}^x ((q(s)N_1(s))_d - \varkappa_1(s)) ds$ из (14_d^1) , $N_2 = \mathcal{A}^{-1}(N'_1 - qD_1 - (qN_1)_{od})$ из (14_{od}^1) , D_2 из (14_d^2) , N_3 из (14_{od}^2) и т. д. Лемма доказана.

В лемме 9 можно выбрать $\varkappa_j \equiv 0$ и $C_j = 0$ для всех целых $j \geq 1$. Получаем, что для любого $q \in \mathcal{O}(x_0)^{od}$ уравнение $m_x = (az + q(x))m - maz$ имеет единственное решение вида $m(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x) z^{-(k+1)}$, где $m_k \in \mathcal{O}(x_0)$ для всех $k \geq 0$, такое, что ряд $m(x, z) - I$ внедиагонален. Следовательно, формула (5) сопоставляет каждому голоморфному внедиагональному ростку $q(x)$ в точке x_0 корректно определенный формальный внедиагональный степенной ряд $Lq(z)$.

ЛЕММА 10. Имеем $Lq \in \text{Gev}_1$ для всех $q \in \mathcal{O}(x_0)^{od}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Посмотрим на равенства (14), эквивалентные уравнению (13), с другой точки зрения. А именно, положим $D_j \equiv 0$ для всех целых $j \geq 1$ и последовательно найдем $N_1 = -\mathcal{A}^{-1}q$ из (14_{od}^0) , $\varkappa_1 = (qN_1)_d$ из (14_d^1) , $N_2 = \mathcal{A}^{-1}(N'_1 - (qN_1)_{od})$ из (14_{od}^1) , $\varkappa_2 = (qN_2)_d$ из (14_d^2) , N_3 из (14_{od}^2) и т. д. Получаем, что для любого $q \in \mathcal{O}(x_0)^{od}$ существует единственное калибровочное преобразование $M(x, z)$ некоторой диагональной связности (в наших обозначениях равной $az + \varkappa(x, z)$, где $\varkappa(x, z) := \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_j(x) z^{-j}$) в связность $az + q(x)$ такое, что формальный степенной ряд $M(x, z) - I$ внедиагонален для всех x из той окрестности точки x_0 , в которой определен росток q . Покажем, что

$$Lq(z) = M(x_0, z) - I. \quad (15)$$

Действительно, формула $\mu(x, z) := \exp \int_{x_0}^x \varkappa(s, z) ds$ задает диагональное калибровочное преобразование связности $U_0(x, z) \equiv az$ в связность $az + \varkappa(x, z)$.

Поэтому $\Delta(x, z) := \mu^{-1}(x, z)M^{-1}(x, z)m(x, z)$ – калибровочное преобразование связности $U_0(x, z) \equiv az$ в себя, а все такие преобразования диагональны и не зависят от x (это вытекает из уравнений (14) с $q \equiv 0$). Из равенства $m = M\mu\Delta = \mu\Delta + (M - I)\mu\Delta$ в силу диагональности $\mu\Delta$ и внедиагональности $M - I$ вытекает, что $m_d = \mu\Delta$ и $m_{od} = (M - I)\mu\Delta$. Отсюда получаем равенство $m_{od} = (M - I)m_d$, которое при $x = x_0$ преобразуется в (15).

Итак, осталось установить, что $M(x_0, \cdot) - I \in \text{Gev}_1$. Рассмотрим внедиагональный степенной ряд $N(x, z) := M(x, z) - I$. Уравнение (13) для $M(x, z)$, имеющее вид $M_x = (az + q)M - M(az + \varkappa)$, переписывается в терминах $N(x, z)$ следующим образом: $N_x = z\mathcal{A}N + q(I + N) - (I + N)\varkappa$. Взяв диагональные части, получим $0 = (qN)_d - \varkappa$. Подставляя теперь $\varkappa = (qN)_d$ во внедиагональные части, получим уравнение, которому удовлетворяет N :

$$N_x = z\mathcal{A}N + q + (qN)_{od} - N(qN)_d.$$

К этому уравнению применима теорема Сибуйа о жевреевской асимптотике решений сингулярно возмущенных систем (см. [15, теорема А.5.4.1], где следует заменить λ на z , а x на $x - x_0$, взять $\sigma = 1$, записать все компоненты матрицы N в один вектор y и воспользоваться обратимостью оператора $\mathcal{A}$). Согласно указанной теореме имеем $N(x, \cdot) \in \text{Gev}_1$ для всех x в окрестности точки x_0 . Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Отображение $L: \mathcal{O}(x_0)^{od} \rightarrow \text{Gev}_1^{od}$ инъективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x - x_0)^j, \quad m(x, z) = I + \sum_{j,k=0}^{\infty} m_{jk}(x - x_0)^j z^{-(k+1)}.$$

Сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^0$ в равенстве $m_x = [az, m] + qm$ дает набор уравнений

$$[a, m_{j0}] + q_j = 0, \quad j \geq 0, \quad (16)$$

а сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^{-(k+1)}$ в том же равенстве дает

$$(j+1)m_{j+1,k} = [a, m_{j,k+1}] + \sum_{s=0}^j q_s m_{j-s,k}, \quad j, k \geq 0. \quad (17)$$

Допустим, что известны коэффициенты $m_{0k} \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$ формального ряда $Lq(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{0k} z^{-(k+1)}$. Задача состоит в том, чтобы выразить через них матрицы $m_{j0} \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$, в терминах которых можно найти $q_j = [m_{j0}, a]$ согласно (16). На первом шаге мы находим $q_0 = [m_{00}, a]$ из (16) и замечаем, что равенства (17) при $j = 0$ выражают набор всех m_{1k} через набор всех m_{0k} и q_0 . Это позволяет нам на втором шаге найти $q_1 = [m_{10}, a]$ из (16) и выразить все m_{2k} через уже известные матрицы m_{1k} , m_{0k} , q_0 , q_1 посредством равенств (17) при $j = 1$. Продолжая таким образом, получим явные формулы для всех коэффициентов q_j ростка $q(x)$ через коэффициенты m_{0k} формального ряда $Lq(z)$, чем и доказана инъективность отображения L .

§ 7. Доказательство теоремы 1

Для произвольного формального степенного ряда $\varphi \in \text{Gev}_1$ (не обязательно внедиагонального) рассмотрим задачу Римана (7), полагая $N = m = 1$, $\xi = x - x_0 \in \mathbb{C}$, $P(\xi, z) = a\xi z$ и $f(z) = I + \varphi(z)$. По теореме 3, (A) решение $\gamma_{\pm}(x - x_0, z)$ этой задачи существует при $x - x_0 \in \Omega(f)$ и голоморфно зависит от x . В частности, все коэффициенты $g_k(x)$ разложения $\gamma_{-}(x - x_0, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)z^{-(k+1)}$ принадлежат $\mathcal{O}(x_0)$. Определим отображение $B: \text{Gev}_1 \rightarrow \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ формулой

$$B\varphi(x) := [g_0(x), a], \quad x - x_0 \in \Omega(f). \quad (18)$$

Это отображение является матричным нелинейным обобщением преобразования Бореля из (3). Его связь с L описывается следующей леммой.

ЛЕММА 12. *Имеем $LB\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in \text{Gev}_1^{\text{od}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем определение рядов $\gamma_{\pm}(x - x_0, z)$ в виде

$$\gamma_{-}(x - x_0, z)e^{a(x-x_0)z}f^{-1}(z) = \gamma_{+}(x - x_0, z) \quad (19)$$

и продифференцируем по x , следуя обычным правилам (которые применимы, так как обе части равенства являются голоморфными функциями от x со значениями в банаховом пространстве $G_1(A) \oplus E_1(B)$, а все операции умножения суть непрерывные билинейные формы по лемме 1). Получим равенство $\partial_x \gamma_{+} = (\partial_x \gamma_{-} + \gamma_{-} a z)e^{a(x-x_0)z}f^{-1}(z)$, при умножении которого справа на γ_{+}^{-1} имеем $(\partial_x \gamma_{+})\gamma_{+}^{-1} = (\partial_x \gamma_{-})\gamma_{-}^{-1} + \gamma_{-} a z \gamma_{-}^{-1}$. Сравнение проекций левой и правой частей на $G_1(A) \oplus \{0\}$ и $\{0\} \oplus E_1(B)$ дает

$$(\partial_x \gamma_{+})\gamma_{+}^{-1} = \{\gamma_{-} a z \gamma_{-}^{-1}\}_{+}, \quad 0 = (\partial_x \gamma_{-})\gamma_{-}^{-1} + \{\gamma_{-} a z \gamma_{-}^{-1}\}_{-}.$$

Поскольку $\{\gamma_{-} a z \gamma_{-}^{-1}\}_{+} = a z + B\varphi$, эти равенства принимают вид

$$\partial_x \gamma_{+} = (a z + B\varphi)\gamma_{+}, \quad \partial_x \gamma_{-} = (a z + B\varphi)\gamma_{-} - \gamma_{-} a z. \quad (20)$$

В частности, формальный степенной ряд $\gamma_{-}(x - x_0, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)z^{-(k+1)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (13) для $q = B\varphi$ и $\varkappa_j \equiv 0$ при всех j . Пусть $m(x, z)$ – калибровочное преобразование из определения (5) формального степенного ряда $Lq(z)$. Тогда $\Delta(x, z) := \gamma_{-}^{-1}(x - x_0, z)m(x, z)$ является калибровочным преобразованием связности $U_0(x, z) \equiv a z$ в себя, а все такие преобразования диагональны и не зависят от x (это вытекает из уравнений (14) для $q \equiv 0$). Заметим, что $\gamma_{-}(0, z) = f(z)$ (действительно, при $x = x_0$ уравнение (19) принимает вид $\gamma_{-}(0, z)f^{-1}(z) = \gamma_{+}(0, z)$, где левая часть принадлежит $I + G_1(A)$, а правая принадлежит $E_1(B)$, следовательно, обе части равны I). Поэтому равенство $\gamma_{-}^{-1}(x - x_0, z)m(x, z) = \Delta(x, z)$ при $x = x_0$ принимает вид

$$I + Lq(z) = (I + \varphi(z))\Delta(z)$$

для некоторого диагонального степенного ряда $\Delta(z)$. Отделяя здесь диагональные и внедиагональные части и пользуясь (впервые в этом доказательстве) внедиагональностью $\varphi(z)$, мы получаем равенства $I = \Delta(z)$ и $Lq(z) = \varphi(z)\Delta(z)$, влекущие требуемое равенство $Lq(z) = \varphi(z)$. Лемма доказана.

Из лемм 11, 12 получаем, что L и B суть обратные друг к другу биективные отображения между множествами $\mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ и Gev_1^{od} . Этим доказана теорема 1, (A) и установлено равенство $BLq = q$ для всех $q \in \text{Gev}_1^{\text{od}}$. Из этого равенства согласно теореме 3, (B) и определению (18) отображения B вытекает теорема 1, (B).

§ 8. Доказательство теоремы 2

(A) Единственность локального голоморфного решения $q(x, t)$ задачи Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$ для уравнения (6) вытекает из того, что уравнения, полученные из (6) l -кратным дифференцированием обеих частей по x , однозначно выражают все частные производные $\partial_t^k \partial_x^l q(x_0, t_0)$ через производные функции $q_0(x)$ в точке $x = x_0$. Необходимость условия $Lq_0 \in \text{Gev}_{1/m}$ для существования локального голоморфного решения установлена в [9, теорема 4]. Чтобы доказать достаточность, возьмем произвольный росток $q_0 \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$, $Lq_0 \in \text{Gev}_{1/m}$, и рассмотрим задачу Римана (7) при $N = 2$, $\xi = (x - x_0, t - t_0) \in \mathbb{C}^2$, $P(\xi, z) = az(x - x_0) + (bz^m + c_1z^{m-1} + \dots + c_m)(t - t_0)$ и $f(z) = I + Lq_0(z)$. По теореме 3, (A) решение $\gamma_{\pm}(x - x_0, t - t_0, z)$ этой задачи существует в некоторой окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ и голоморфно зависит от x, t . Положим $E(x, t, z) := \gamma_+(x - x_0, t - t_0, z)$ и $q(x, t) := [g_0(x, t), a]$, где $g_0(x, t)$ – коэффициент при z^{-1} в разложении

$$\gamma_-(x - x_0, t - t_0, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x, t) z^{-(k+1)}.$$

Равенство $BLq_0 = q_0$ из § 7 показывает, что $q(x, t_0) = q_0(x)$ для всех x , близких к x_0 . Кроме того, из первого равенства (20) вытекает, что в окрестности точки (x_0, t_0) имеем $E_x = UE$, где $U(x, t, z) := az + q(x, t)$. Повторяя вывод равенств (20) с заменой x на t , получаем, что $E_t = VE$, где $V(x, t, z) := \sum_{k=0}^m F_{m-k}(q)(x, t) z^k$ в обозначениях § 3 (подробности этого рассуждения приведены в доказательстве теоремы 1 работы [9] для случая $Lq_0 \in \text{Gev}_0$ и остаются справедливыми для рассматриваемого нами случая $Lq_0 \in \text{Gev}_{1/m}$). Из уравнений $E_x = UE$ и $E_t = VE$ и обратимости E следует равенство $U_t - V_x + [U, V] = 0$, эквивалентное уравнению (6).

(B) Для любого $t_1 \in \mathbb{C}$, $|t_1 - t_0| < \delta_2$, положим $q_1(x) := q(x, t_1)$. Тогда $Lq_1 \in \text{Gev}_{1/m}$ по теореме 2, (A) (или по теореме 4 из работы [9]). Поскольку $1/m \leq 1/2$, теорема 1, (B) дает мероморфное продолжение функции $x \mapsto q(x, t_1)$ на все $\mathbb{C}$. Так как это верно для всех $t_1 \in \mathbb{C}$, $|t_1 - t_0| < \delta_2$, то полученное продолжение $q(x, t)$ мероморфно в полосе $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t - t_0| < \delta_2\}$ как функция двух переменных. (Можно вывести последнее заключение и прямо из теоремы 3, (B), доказательство которой остается справедливым, если один или несколько радиусов полидиска Ω обращаются в бесконечность.)

Предъявим голоморфное решение $q_0(x, t)$ уравнения (6) в исходном бидиске, не продолжаемое ни через одну граничную точку упомянутой полосы. Для этого заметим, что правая часть уравнения (6) есть полином от $q, \partial_x q, \dots, \partial_x^m q$, причем старшая производная $\partial_x^m q$ входит в этот полином только в первой степени и с постоянным ненулевым коэффициентом (см., например, [9]). Поэтому

теорема Коши–Ковалевской гарантирует существование локальных голоморфных решений $q(x, t)$ уравнения (6) с *любыми* (голоморфными внедиагональными) начальными данными $\partial_x^k q(x_0, t) = \psi_k(t)$, $0 \leq k \leq m - 1$. Выбрав функцию $\psi_0(t)$ голоморфно непродолжаемой ни через одну граничную точку круга $\{|t - t_0| < \delta_2\}$, получим требуемый пример.

(С) Это утверждение немедленно вытекает из теоремы 3, (В) и описанного в доказательстве теоремы 2, (А) построения решения $q(x, t)$ по данным рассеяния $Lq_0(z)$ начального условия.

§ 9. Замечания и примеры

(А) Результат из § 1 о продолжении локальных голоморфных решений не переносится на общие уравнения вида $u_t = P(u)$, где P – дифференциальный полином по x . Например, для уравнения

$$u_t = ku^m u_x + lu_{xx}, \quad k, l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

этот результат справедлив только при $m = 0$ (линейный случай), $m = 1$ (уравнение Кортевега–де Фриза) и $m = 2$ (модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза). При любом целом $m > 2$ это уравнение имеет решение вида $u = \beta_m(x - x_0)^{-2/m}$ (для надлежащей константы $\beta_m \neq 0$) с точкой ветвления при $x = x_0$. Кроме того, обсуждаемый результат неверен как для солитонных уравнений, не представимых в виде (6), так и для линейных уравнений с более чем одной пространственной переменной. Примеры: локальная голоморфная задача Коши для уравнения $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$ разрешима при любых начальных условиях (см. [8]), а линейное уравнение $\partial_t u = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)u$ имеет решение $u = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ с точками ветвления по x_1, x_2 .

(В) Теорема 1 является лишь частичным аналогом предложения 1. В общем случае едва ли можно дать простое описание множества всех $q \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ таких, что $Lq \in \text{Gev}_\alpha$ для данного $\alpha \in [0, 1)$. По крайней мере условий на рост при $|x| \rightarrow \infty$ для этого заведомо не достаточно: если $q^0(x)$ – внедиагональная (2×2) -матрица с $q_{12}^0(x) = x$ и $q_{21}^0(x) = 1$, то Lq^0 принадлежит $\text{Gev}_{1/3}$, но не принадлежит $\text{Gev}_{1/3-0}$. Тем не менее, следующая гипотеза весьма правдоподобна в силу предложения 1 и известных примеров эллиптических функций, удовлетворяющих уравнению Кортевега–де Фриза.

ГИПОТЕЗА 1. Если $q \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ и $Lq \in \text{Gev}_\alpha$ при некотором $\alpha \in [0, 1)$, то $q(x)$ – мероморфная функция порядка не выше $1 + (1 - \alpha)^{-1}$ на $\mathbb{C}$.

Из доказательства леммы 12 видно, что еще одним необходимым условием для включения $Lq \in \text{Gev}_{1-0}$ является существование глобально мероморфной фундаментальной системы решений уравнения $E_x = (az + q(x))E$ при каждом $z \in \mathbb{C}$. В наших обозначениях эта система состоит из столбцов матрицы $\gamma_+(x, z)$. Одно из следствий существования такой системы решений отмечено в [9, теорема 2]. Неизвестно, является ли это необходимое условие также и достаточным хотя бы в классе рациональных $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ -значных функций $q(x)$, голоморфных при $x = \infty$.

(С) Утверждение, эквивалентное теореме 1, (А), содержится в работе [16, с. 99–103] (эквивалентность вытекает из формулы (15)) вместе с набросками

доказательств, которые, однако, автору не удалось проследить до конца. В настоящей работе теорема 1, (А) доказана другим способом.

(D) Под *конечнозонными* решениями уравнения (6) можно понимать такие решения $q(x, t)$, начальные данные которых $q_0(x)$ задаются не зависящим от t решением какого-либо *потока той же иерархии*, т. е. какого-либо уравнения вида (6) с теми же матрицами a и b (см. [5] или [17], где показано, что в этом случае $Lq_0 \in \text{Gev}_0$). Такие функции $q_0(x)$ задают решения всех потоков, глобально мероморфные на $\mathbb{C}^2$ (что вытекает также из формул для конечнозонных решений через тета-функции [5]). Однако обратное неверно: так как множество $\bigcap_{\alpha>0} \text{Gev}_\alpha$ строго больше, чем Gev_0 (достаточно взять $|\varphi_n| = \ln(n!)$), то из теорем 1, (А) и 2, (С) вытекает существование таких мероморфных на $\mathbb{C}$ функций $q_0(x) \not\equiv \text{const}$, что задача Коши $q(x, t) = q_0(x)$ для уравнения (6) с данной матрицей a имеет глобально мероморфное решение на $\mathbb{C}^2$ при любом $m \geq 2$ (и при любом выборе матриц $b, c_1, c_2, \dots$), но ни одно из этих решений не является конечнозонным.

В случае верхнетреугольных (2×2) -матриц $q(x, t)$, когда уравнения (6) сводятся к (4), все конечнозонные решения суть целые функции на $\mathbb{C}^2$ (экспоненциальные полиномы). Однако это уже не так для других условий симметрии. Скажем, конечнозонные решения уравнения Кортевега–де Фриза (1) всегда имеют полюсы на $\mathbb{C}^2$. Это позволяет выдвинуть следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. *Всякое целое решение $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ уравнения (1) постоянно.*

Непостоянные решения уравнения (1) могут быть целыми функциями от x при почти всех t или от t при почти всех x . Примеры: $u_1(x, t) = x/(1 - kt)$ и $u_2(x, t) = Cx^{-2}$, где $C = -12l/k$. Любопытно, что при этом локальная голоморфная задача Коши с начальным условием $u(x, 0) = u_2(x, 0)$ разрешима для *всех* потоков иерархии Кортевега–де Фриза (решение u_2 является конечнозонным), а такая же задача Коши с начальным условием $u(x, 0) = u_1(x, 0)$ не разрешима *ни для одного* из этих потоков, кроме самого уравнения (1). Последнее ясно из теоремы 2, (А) и включения $Lq^0 \in \text{Gev}_{1/3} \setminus \text{Gev}_{1/3-0}$, упомянутого в замечании (В).

(Е) Если в условиях леммы 8 все операторы $Y(\xi)$ являются ядерными, то в качестве функции $\tau(\xi)$ в этой лемме можно взять $\det(I + Y(\xi))$. Однако для интересующих нас операторов $Y(\xi) = i_1 T_{-P(\xi, \cdot)} M^{-1} K_{P(\xi, \cdot)} i_1^{-1} \in \mathcal{B}(l_1)$ выполнено условие $\sum_{p,q=0}^{\infty} |(Y(\xi))_{pq}| < \infty$, более сильное, чем ядерность. (Напомним, что оператор $Y \in \mathcal{B}(l_1)$ является ядерным тогда и только тогда, когда $\sum_{p=0}^{\infty} \sup_{q \geq 0} |Y_{pq}| < \infty$; см., например, [18, с. 381, формула (1)].) Это позволяет выразить $\tau(\xi)$ с помощью более простого и классического понятия *определителя Хилла* (см. [19, § 2.8, 19.4]). Поэтому в условиях теоремы 3, (В) все коэффициенты формальных степенных рядов $\gamma_{\pm}(\xi, z)$ суть мероморфные функции от ξ , имеющие общий знаменатель, который явно выражается через коэффициенты полинома $P(\xi, z)$ и степенного ряда $f(z)$ с помощью определителя Хилла. То же самое относится и к знаменателям мероморфных функций $q(x) = B\varphi(x)$ и $q(x, t)$, определенных в доказательствах теорем 1, 2.

Список литературы

1. Э. Гурса, *Курс математического анализа*, т. 3, ч. 1: *Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными*, ГТТИ, М.–Л., 1933; пер. с фр.: E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, Tome III. *Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations*, Gauthier-Villars, Paris, 1927.
2. А. Ф. Леонтьев, *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, М., 1983.
3. D. V. Widder, *The heat equation*, Academic Press, New York–London, 1975.
4. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980; англ. пер.: S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of solitons*, Contemp. Soviet Math., Plenum, New York–London, 1984.
5. Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Интегрируемые системы. I”, *Динамические системы*–4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 4, ВИНТИ, М., 1985, 179–277; англ. пер.: B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Integrable systems. I”, *Dynamical systems. IV. Symplectic geometry and its applications*, Encyclopaedia Math. Sci., 4, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 173–280.
6. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986; англ. пер.: L. D. Faddeev, L. A. Takhtadzhyan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
7. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II”, *Функц. анализ и его прил.*, **13:3** (1979), 13–22; англ. пер.: V. E. Zakharov, A. B. Shabat, “Integration of the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. II”, *Functional Anal. Appl.*, **13:3** (1979), 166–174.
8. И. М. Кричевер, “Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon”, *Докл. АН СССР*, **253:2** (1980), 288–292; англ. пер.: I. M. Krichever, “An analogue of d'Alembert's formula for the equations of the principal chiral field and for the Sine-Gordon equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **22:1** (1980), 79–84.
9. А. В. Домрин, “Замечания о локальном варианте метода обратной задачи рассеяния”, *Комплексный анализ и приложения*, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 46–60; англ. пер.: A. V. Domrin, “Remarks on the local version of the inverse scattering method”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **253:1** (2006), 37–50.
10. С. П. Новиков, “Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974), 54–66; англ. пер.: S. P. Novikov, “The periodic problem for the Korteweg–de Vries equation”, *Functional Anal. Appl.*, **8:3** (1974), 236–246.
11. И. Ц. Гохберг, “О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра”, *Докл. АН СССР*, **78:4** (1951), 629–632.
12. M. Ribarič, I. Vidav, “Analytic properties of the inverse $A(z)^{-1}$ of an analytic linear operator valued function $A(z)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **32:4** (1969), 298–310.
13. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
14. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, т. II. *Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1985; фр. пер.: B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe*, Т. 2. *Fonctions de plusieurs variables*, Traduit Russe Math., Mir, Moscow, 1990.
15. Ya. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain: problems of analytic continuation*, Transl. Math. Monogr., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

16. M. U. Schmidt, “Integrable systems and Riemann surfaces of infinite genus”, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **122**:581 (1996).
17. А. В. Домрин, “Задача Римана и матричнозначные потенциалы со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера”, *ТМФ*, **144**:3 (2005), 453–471; англ. пер.: A. V. Domrin, “The Riemann problem and matrix-valued potentials with a convergent Baker–Akhiezer function”, *Theoret. and Math. Phys.*, **144**:3 (2005), 1264–1278.
18. A. Grothendieck, “La théorie de Fredholm”, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 319–384.
19. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Физматлит, М., 1963; пер. с англ. E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

А. В. Домрин (A. V. DOMRIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: domrin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
31.03.2008