Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Заричный, Пространства и отображения идемпотентных мер, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 45–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:25:08

УДК 515.122.5+512.582.2

М. М. Заричный

Пространства и отображения идемпотентных мер

Доказано, что слабая* топологизация множеств всех идемпотентных мер (мер Маслова) на компактных хаусдорфовых пространствах определяет функтор в категории **Comp** компактных хаусдорфовых пространств и этот функтор является нормальным в смысле Е. В. Щепина, в частности обладает многими свойствами, общими с функторами вероятностных мер и гиперпространства. Кроме того, установлено, что этот функтор определяет монаду в категории **Comp**. Доказано, что монада идемпотентных мер содержит монаду гиперпространства в качестве подмонады. Для пространств идемпотентных мер определен аналог отображения Милютина (т. е. непрерывного отображения компактных хаусдорфовых пространств, допускающего регулярный оператор усреднения для пространств непрерывных функций). При использовании утверждения о существовании отображений Милютина для идемпотентных мер доказано, что функтор идемпотентных мер является открытым, т. е. сохраняет класс открытых сюръективных отображений. Показано, что, в отличие от случая пространств вероятностных мер, соответствие, сопоставляющее каждой паре идемпотентных мер множество мер на произведении с указанными маргиналами, не является непрерывным.

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: идемпотентная мера (мера Маслова), компактное хаусдорфово пространство, открытое отображение, отображение Милютина, монада.

§ 1. Введение

Теория идемпотентных мер принадлежит к идемпотентной математике, т. е. области математики, основанной на замене обычных арифметических операций идемпотентными (как, например, $x \oplus y = \max\{x, y\}$). Идемпотентная математика в настоящее время интенсивно развивается (см., например, [1], обзорную статью [2] и библиографию в ней). Ее связь с традиционной математикой описана неформальным принципом [2], согласно которому существует эвристическое соответствие между важными, интересными и полезными конструкциями последней и аналогичными результатами идемпотентной математики.

В настоящей статье мы исследуем функтор идемпотентных мер в категории компактных хаусдорфовых пространств. В традиционной математике ему соответствует функтор вероятностных мер. Понятие идемпотентной меры (меры Маслова) находит многочисленные применения в различных областях математики, математической физики и экономики. В частности, такие меры возникают в задачах динамической оптимизации [3]; аналогия между интегрированием Маслова и оптимизацией отмечена также в [4]. В [5] утверждается, что использование мер Маслова для моделирования неопределенности в математической

экономике может быть настолько же релевантным, насколько и использование классической теории вероятностей.

В отличие от случая вероятностных мер, рассмотрению которых посвящена обширная литература (см. [6]), топологические свойства пространств идемпотентных мер практически не исследовались.

Е. В. Щепин [7] ввел класс нормальных функторов, действующих в категории **Comp** компактных хаусдорфовых пространств и непрерывных отображений, и показал, что функтор вероятностных мер P является нормальным (детальное доказательство этого факта см. в [8]). Одной из целей настоящей работы является установление свойства нормальности функтора идемпотентных мер. Более того, мы покажем, что функтор определяет монаду (определение см. ниже) в категории **Comp**. Доказано также, что функтор идемпотентных мер содержит функтор гиперпространства в качестве подфунктора. При этом монада гиперпространства может быть вложена как подмонада монады идемпотентных мер. Доказательства этих результатов основаны на вложении пространства идемпотентных мер в пространство сохраняющих порядок слабо аддитивных функционалов, определенное Т. Радулом [9]. Структура монады для функтора идемпотентных мер тесно связана $\max$ -плюс-выпуклыми компактными подмножествами евклидова пространства (см. [10]), эти подмножества, вместе с определенными в работе идемпотентными барицентрическими отображениями, являются алгебрами монады идемпотентных мер. Обращаясь к сформулированному выше принципу соответствия, отметим, что этому результату соответствует в традиционной математике характеристика категории выпуклых множеств и непрерывных аффинных отображений как категории алгебр монады вероятностных мер [11].

Отображением Милютина называется отображение топологических пространств, допускающее регулярный линейный оператор усреднения пространств непрерывных функций. Эквивалентно, отображение Милютина – это отображение, допускающее селекцию со значениями в пространстве вероятностных мер. В настоящей работе мы также определяем естественный аналог этого понятия для случая идемпотентных мер. Используя свойства идемпотентных аналогов отображений Милютина, покажем, что функтор идемпотентных мер открыт, т. е. он сохраняет класс открытых сюръективных отображений. Отметим, что открытость функтора вероятностных мер установлена С. Дитором и Л. Эйфлером [12].

Л. Эйфлер [13] доказал, что многозначное отображение, при котором паре вероятностных мер на сомножителях соответствует множество вероятностных мер на произведении с заданными маргиналами, является открытым (см. также [14]). Мы устанавливаем, что аналог этого факта не имеет места в случае идемпотентных мер.

§ 2. Предварительные сведения

Пусть X – компактное хаусдорфово пространство. Как обычно, $C(X)$ – банахово пространство непрерывных функций на X , наделенное $\sup$ -нормой. Для произвольного $c \in \mathbb{R}$ мы обозначаем через c_X постоянную функцию на X , принимающую значение c . Через $w(X)$ обозначаем вес топологического пространства X .

Впоследствии под функтором мы понимаем ковариантный функтор. Функтор вероятностных мер в категории **Comp** обозначается через P (см. свойства функтора P , например, в [8]).

Через $\exp$ обозначается функтор гиперпространства, действующий в категории **Comp**. Для каждого компактного хаусдорфового пространства X пространство $\exp X$ состоит из всех непустых замкнутых подмножеств в X и наделяется топологией Виеториса. Базу этой топологии образуют множества вида

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, A \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n \right\},$$

где множества $U_1, \dots, U_n$ открыты в X , $n \in \mathbb{N}$. Если $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, то отображение $\exp f: \exp X \rightarrow \exp Y$ определяется формулой $\exp f(A) = f(A)$, $A \in \exp X$.

Множество $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ наделим метрикой ϱ , определенной формулой $\varrho(x, y) = |e^x - e^y|$ (соглашение: $e^{-\infty} = 0$). Пусть также $\mathbb{R}_{\max}^n = (\mathbb{R}_{\max})^n$.

Функтор в категории **Comp** называется *открытым*, если он сохраняет класс открытых сюръективных отображений. Напомним, что отображение топологических пространств называется *открытым*, если образ каждого открытого множества открыт. Для сюръективного отображения $f: X \rightarrow Y$ компактных хаусдорфовых пространств его открытость эквивалентна непрерывности отображения $y \mapsto f^{-1}(y): Y \rightarrow \exp X$. Более того, если при этом X и Y метризуемы, то f открыто тогда и только тогда, когда для произвольной последовательности $(y_i)_{i=1}^\infty$, сходящейся к $y \in Y$, и каждого $x \in X$ такого, что $f(x) = y$, существует последовательность $(x_i)_{i=1}^\infty$, сходящаяся к x и такая, что $f(x_i) = y_i$ для каждого i .

Следуя стилю обозначений, принятому в идемпотентной математике (см., например, [2], [15], [16]), обозначим через $\odot: \mathbb{R} \times C(X) \rightarrow C(X)$ отображение, действующее по формуле $(\lambda, \varphi) \mapsto \lambda_X + \varphi$, а через $\oplus: C(X) \times C(X) \rightarrow C(X)$ – отображение поточечного максимума, $(\varphi, \psi) \mapsto \max\{\varphi, \psi\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функционал $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *идемпотентной мерой* (мерой Маслова), если для любых $\varphi, \psi \in C(X)$:

- 1) $\mu(c_X) = c$;
- 2) $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$;
- 3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

Число $\mu(\varphi)$ (обозначаемое также $\int_X^\oplus \varphi d\mu$) называется *интегралом Маслова* функции $\varphi \in C(X)$ по мере μ .

Обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных мер на X . Множество $I(X)$ наделяется слабой* топологией. Базу этой топологии образуют множества

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \{ \nu \in I(X) \mid |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \},$$

где $\mu \in I(X)$, $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$, и $\varepsilon > 0$.

Здесь уместно привести пример идемпотентной меры. Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\max}$ удовлетворяют свойству $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0$. Определим $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\mu(\varphi) = \max\{\varphi(x_i) + \lambda_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Как обычно, для каждого $x \in X$ через δ_x (или $\delta(x)$) обозначаем функционал на

$C(X)$, определенный формулой $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$ (вероятностная мера Дирака, сосредоточенная в точке x). Тогда можно записать $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$.

Т. Радул рассмотрел в [9] множество слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов на компактных хаусдорфовых пространствах. Некоторые результаты, относящиеся к таким функционалам, имеют важные применения к пространствам идемпотентных мер.

Функционал (не обязательно линейный или непрерывный) $\nu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется:

- 1) *слабо аддитивным*, если для каждого $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ имеем $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c$;
- 2) *сохраняющим порядок*, если для любых $\varphi, \psi \in C(X)$ таких, что $\varphi \leq \psi$, имеем $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$;
- 3) *нормированным*, если $\nu(1_X) = 1$.

Пространство вещественных чисел $\mathbb{R}$ наделяется стандартной метрикой. Следующий факт установлен в [9].

ЛЕММА 2.2. *Каждый сохраняющий порядок слабо аддитивный функционал является нерастягивающим отображением.*

Для компактного хаусдорфова пространства X обозначим через $O(X)$ множество всех сохраняющих порядок слабо аддитивных нормированных функционалов в $C(X)$. Легко видеть, что для любых $\nu \in O(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ имеем $\nu(c_X) = c$. Следовательно, $I(X) \subset O(X)$ для каждого компактного хаусдорфова пространства X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Множество $I(X)$ замкнуто в пространстве $O(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mu \in O(X) \setminus I(X)$. Тогда существуют функции $\varphi, \psi \in C(X)$ такие, что $a = \mu(\varphi \oplus \psi) > \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi) = b$, а тогда $\mu \in \langle \mu; \varphi \oplus \psi, \varphi, \psi; \frac{a-b}{2} \rangle \subset O(X) \setminus I(X)$. Мы видим, что дополнение к множеству $I(X)$ является открытым подмножеством в $O(X)$.

Поскольку, как известно, пространство $O(X)$ является компактным хаусдорфовым (см. [9]), заключаем, что таковым же является пространство $I(X)$.

Если $f: X \rightarrow Y$ – отображение компактных хаусдорфовых пространств, то отображение $O(f): O(X) \rightarrow O(Y)$ определяется формулой $O(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f)$ для каждого $\varphi \in C(Y)$. Это отображение непрерывно [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение компактных хаусдорфовых пространств. Тогда $O(f)(I(X)) \subset I(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in I(X)$ и $\varphi, \psi \in C(Y)$. Ясно, что $O(f)(\mu)(c_X) = c$, $c \in \mathbb{R}$, и $O(f)(\mu)(\lambda \oplus \varphi) = \lambda \oplus O(f)(\mu)(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Имеем также

$$\begin{aligned} O(f)(\mu)(\varphi \oplus \psi) &= \mu((\varphi \oplus \psi)f) = \mu((\varphi f \oplus \psi f)) \\ &= \mu(\varphi f) \oplus \mu(\psi f) = O(f)(\mu)(\varphi) \oplus O(f)(\mu)(\psi). \end{aligned}$$

Таким образом, $O(f)(\mu) \in I(Y)$.

Обозначим через $I(f): I(X) \rightarrow I(Y)$ ограничение $O(f)|_{I(X)}: I(X) \rightarrow I(Y)$. Отметим, что если $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I(X)$, то $I(f)(\mu) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{f(x_i)} \in I(Y)$.

Очевидно, что конструкция I определяет ковариантный функтор в категории **Comp**.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Функтор I сохраняет класс вложений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно вытекает из того факта, что функтор O сохраняет вложения [9].

Как обычно, для каждого замкнутого подмножества A компактного хаусдорфова пространства X мы отождествляем пространство $I(A)$ с подпространством $I(i)(I(A))$ пространства $I(X)$, где $i: A \rightarrow X$ – отображение включения.

Доказательство следующего утверждения основано на тах-плюс-версии теоремы Хана–Банаха [15]. Для полноты изложения мы приводим альтернативное доказательство ее специального случая.

Назовем подмножество L пространства $C(X)$ *тах-плюс-линейным подпространством* в $C(X)$, если:

- 1) $c_X \in L$ для каждого $c \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lambda \odot \varphi \in L$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L$;
- 3) $\varphi \oplus \psi \in L$ для любых $\varphi, \psi \in L$.

ЛЕММА 2.6. *Пусть L – тах-плюс-линейное подпространство в $C(X)$. Пусть $\mu: L \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал, удовлетворяющий условиям определения 2.1 (с заменой $C(X)$ на L). Для произвольного $\varphi_0 \in C(X) \setminus L$ существует удовлетворяющее условиям определения 2.1 продолжение отображения μ на минимальное тах-плюс-линейное подпространство L' , содержащее $L \cup \{\varphi_0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $\varphi \in L'$ положим $\mu(\varphi) = \inf\{\mu(\psi) \mid \psi \in L, \varphi \leq \psi\}$. Ясно, что при этом μ определено корректно.

Для $\varphi \in L'$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем

$$\begin{aligned} \mu(\lambda \odot \varphi) &= \inf\{\mu(\psi) \mid \psi \in L, \lambda \odot \varphi \leq \psi\} \\ &= \inf\{\mu(\lambda \odot \psi') \mid \psi' \in L, \lambda \odot \varphi \leq \lambda \odot \psi'\} \\ &= \lambda \odot \inf\{\mu(\psi') \mid \psi' \in L, \varphi \leq \psi'\} = \lambda \odot \mu(\varphi). \end{aligned}$$

Отметим также, что $\mu(\varphi_1) \leq \mu(\varphi_2)$, как только $\varphi_1 \leq \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in L'$.

Теперь, имея $\varphi_1, \varphi_2 \in L'$, получаем

$$\begin{aligned} \mu(\varphi_1) \oplus \mu(\varphi_2) &= \inf\{\mu(\psi) \mid \psi \in L, \varphi_1 \leq \psi\} \oplus \inf\{\mu(\psi') \mid \psi' \in L, \varphi_2 \leq \psi'\} \\ &= \inf\{\mu(\psi) \oplus \mu(\psi') \mid \psi, \psi' \in L, \varphi_1 \leq \psi, \varphi_2 \leq \psi'\} \\ &\geq \inf\{\mu(\psi \oplus \psi') \mid \psi, \psi' \in L, \varphi_1 \oplus \varphi_2 \leq \psi \oplus \psi'\} = \mu(\varphi_1 \oplus \varphi_2). \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку $\varphi_i \leq \varphi_1 \oplus \varphi_2$, $i = 1, 2$, из отмеченного выше вытекает, что $\mu(\varphi_i) \leq \mu(\varphi_1 \oplus \varphi_2)$, $i = 1, 2$, следовательно, $\mu(\varphi_1) \oplus \mu(\varphi_2) = \mu(\varphi_1 \oplus \varphi_2)$.

ЛЕММА 2.7. *Пусть L – тах-плюс-линейное подпространство в $C(X)$. Пусть $\mu: L \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал, удовлетворяющий условиям определения 2.1 (с заменой $C(X)$ на L). Тогда существует $\nu \in I(X)$ такое, что $\nu|_L = \mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 2.6 и лемму Куратовского–Цорна, получаем максимальное продолжение μ' отображения μ на тах-плюс-линейное подпространство L' пространства $C(X)$. Если $L' \neq C(X)$ и $\varphi_0 \in C(X) \setminus L'$, то мы можем продолжить μ' на минимальное тах-плюс-линейное подпространство в $C(X)$, содержащее $L' \cup \{\varphi_0\}$, что противоречит максимальной продолжения μ' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Функтор I сохраняет класс сюръективных отображений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – сюръективное отображение компактных хаусдорфовых пространств. Положим $C(f) = \{\varphi f \mid \varphi \in C(Y)\}$. Пусть $\mu \in I(X)$, рассмотрим отображение $\mu': C(f) \rightarrow \mathbb{R}$, определенное формулой $\mu'(\varphi f) = \mu(\varphi)$. Очевидно, что μ удовлетворяет условиям определения 2.1 (где $C(X)$ надо заменить на $C(f)$). Согласно лемме 2.7 существует продолжение ν функционала μ' на $C(X)$, удовлетворяющее условиям определения 2.1. Тогда мы имеем $\mu = I(f)(\nu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Функтор I сохраняет пересечения в том смысле, что $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$ для любых замкнутых подмножеств A, B компактного хаусдорфова пространства X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функтор O сохраняет пересечения [9], получаем

$$\begin{aligned} I(A \cap B) &= O(A \cap B) \cap I(A \cap B) = (O(A) \cap O(B)) \cap I(A \cap B) \\ &= (O(A) \cap I(A \cap B)) \cap (O(B) \cap I(A \cap B)) = I(A) \cap I(B). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Поскольку функтор F в категории **Comp** сохраняет класс вложений и пересечений, для него можно определить понятие носителя. Именно, для каждого $a \in F(X)$ множество

$$\text{supp}(a) = \cap \{Y \mid Y \text{ – замкнутое подмножество в } X \text{ и } a \in F(Y)\}$$

называется *носителем* элемента a . Отметим, что если $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$, то $\text{supp}(\mu) = \{x_i \mid \lambda_i > -\infty\}$.

Для каждого замкнутого подмножества A пространства X и каждого $\mu \in I(X)$ имеем $\text{supp}(\mu) \subset A$, если и только если для каждых двух функций $\varphi, \psi \in C(X)$ таких, что $\varphi|_A = \psi|_A$, получаем $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$.

Пусть $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha\beta}; \mathcal{A}\}$ – обратная система над направленным множеством $\mathcal{A}$. Для произвольного элемента $\alpha \in \mathcal{A}$ пусть $p_\alpha: X = \varprojlim \mathcal{S} \rightarrow X_\alpha$ обозначает предельную проекцию. Через $I(\mathcal{S})$ обозначаем обратную систему $\{I(X_\alpha), I(p_{\alpha\beta}); \mathcal{A}\}$.

Следующее свойство является аналогом теоремы Колмогорова, известной для вероятностных мер.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Отображение $h = (I(p_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{A}}: I(X) \rightarrow \varprojlim I(\mathcal{S})$ является гомеоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов, полученных Т. Радулом [9], легко следует, что отображение h является вложением. Мы покажем, что h является сюръективным отображением. Пусть $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \varprojlim I(\mathcal{S})$. Согласно [9, предложение 4] существует $\mu \in O(X)$ такое, что $O(p_\alpha(\mu)) = \mu_\alpha$ для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$. Пусть $C' = \{\varphi p_\alpha \mid \varphi \in C(X_\alpha), \alpha \in \mathcal{A}\}$. При $\varphi, \psi \in C'$ можно записать $\varphi = \varphi' p_\alpha$, $\psi = \psi' p_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}$, откуда имеем

$$\begin{aligned} \mu(\varphi \oplus \psi) &= \mu((\varphi' p_\alpha) \oplus (\psi' p_\alpha)) = O(p_\alpha)(\mu)(\varphi' \oplus \psi') = \mu_\alpha(\varphi' \oplus \psi') \\ &= \mu_\alpha(\varphi') \oplus \mu_\alpha(\psi') = \mu(\varphi' p_\alpha) \oplus \mu(\psi' p_\alpha) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi). \end{aligned}$$

Поскольку по теореме Стоуна–Вейерштрасса множество C' плотно в $C(X)$ и операция $\oplus$ непрерывна, мы заключаем, что $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех функций $\varphi, \psi \in C(X)$. Аналогично можно доказать, что $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\mu \in I(X)$ является искомым.

Следуя работе [7], назовем только что доказанное свойство функтора I *непрерывностью*.

Предположим, что функтор F в категории **Comp** сохраняет класс вложений. Говорим, что функтор F *сохраняет прообразы*, если для каждого отображения $f: X \rightarrow Y$ и каждого замкнутого подмножества B пространства Y имеем $F(f^{-1}(B)) = (F(f))^{-1}(F(B))$. Это свойство определено в [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. *Функтор I сохраняет прообразы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $F(f^{-1}(B)) \subset (F(f))^{-1}(F(B))$ для любого функтора F . Предположим, что функтор I не сохраняет прообразы. Тогда существуют такой морфизм $f: X \rightarrow Y$ в **Comp**, $\mu \in I(X)$ и замкнутое подмножество B в Y такие, что $I(f)(\mu) \in I(B)$, в то время как $\mu \notin I(f^{-1}(B))$. Существуют $\varphi, \psi \in C(X)$ такие, что $\varphi|_{f^{-1}(B)} = \psi|_{f^{-1}(B)}$ и $\mu(\varphi) \neq \mu(\psi)$. Пусть $c = |\mu(\varphi) - \mu(\psi)|$.

Существует окрестность U множества B в Y такая, что

$$\|\varphi|_{f^{-1}(\bar{U})} - \psi|_{f^{-1}(\bar{U})}\| < \frac{c}{3}.$$

Существуют функции $\varphi_1, \psi_1 \in C(X)$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $\varphi_1|_{f^{-1}(\bar{U})} = \varphi|_{f^{-1}(\bar{U})}$, $\psi_1|_{f^{-1}(\bar{U})} = \psi|_{f^{-1}(\bar{U})}$;
- 2) $\varphi_1 \leq \varphi$, $\psi_1 \leq \psi$;
- 3) $\|\varphi_1 - \psi_1\| < c/3$.

Несложно показать, что существуют функции $\varphi_2, \psi_2 \in C(X)$, удовлетворяющие условиям:

- 4) $\varphi_2|(X \setminus f^{-1}(\bar{U})) = \varphi|(X \setminus f^{-1}(\bar{U}))$, $\psi_2|(X \setminus f^{-1}(\bar{U})) = \psi|(X \setminus f^{-1}(\bar{U}))$;
- 5) $\varphi_2 \leq \varphi$, $\psi_2 \leq \psi$;
- 6) $\varphi_2|_{f^{-1}(B)} = \psi_2|_{f^{-1}(B)} = \min\{\inf \varphi, \inf \psi\} - 1$.

Поскольку

$$\begin{aligned}\mu(\varphi) &= \mu(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \mu(\varphi_1) \oplus \mu(\varphi_2), \\ \mu(\psi) &= \mu(\psi_1 \oplus \psi_2) = \mu(\psi_1) \oplus \mu(\psi_2),\end{aligned}$$

из свойства 3) и выбора функций φ, ψ вытекает, что $\mu(\varphi_2) \neq \mu(\psi_2)$.

Существуют функции $\varphi', \varphi'', \psi', \psi'' \in C(Y)$ такие, что:

- 7) $\varphi'f \leq \varphi_2 \leq \varphi''f$;
- 8) $\psi'f \leq \psi_2 \leq \psi''f$;
- 9) $\varphi'|B = \varphi''|B = \psi'|B = \psi''|B = \min\{\inf \varphi, \inf \psi\} - 1$.

Тогда имеем

$$I(f)(\mu)(\varphi') = \mu(\varphi'f) \leq \mu(\varphi_2) \leq \mu(\varphi''f) = I(f)(\mu)(\varphi'')$$

и, поскольку $I(f)(\mu)(\varphi') = I(f)(\mu)(\varphi'') = \min\{\inf \varphi, \inf \psi\} - 1$, заключаем, что $\mu(\varphi_2) = \min\{\inf \varphi, \inf \psi\} - 1$. Аналогично, можно показать, что $\mu(\psi_2) = \min\{\inf \varphi, \inf \psi\} - 1$. Противоречие.

Поскольку функтор I сохраняет прообразы, для произвольных $f: X \rightarrow Y$ и $\mu \in I(X)$ имеем $\text{supp}(I(f)(\mu)) = f(\text{supp}(\mu))$. Это следует из общих свойств функторов в категории **Comp**, установленных в [7].

Функтор F в категории **Comp** называется *нормальным* (см. [7]), если F непрерывен, сохраняет вес, одноточечные множества, пустое множество, сюръективные отображения, вложения, пересечения и прообразы. Отметим, что упоминаемый выше функтор O не является нормальным; на самом деле, функтор O удовлетворяет всем свойствам из определения нормального функтора, за исключением свойства сохранения прообразов (т. е. является почти нормальным; см. [9]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Функтор I является нормальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является следствием предложений 2.5, 2.8, 2.9, 2.11 и того факта, что I является подфунктором функтора O , а последний функтор, как отмечено выше, почти нормален. Например, функтор O сохраняет вес бесконечных компактных хаусдорфовых пространств, т. е. $w(X) = w(O(X))$ для каждого бесконечного X . Поскольку $I(X) \subset O(X)$, заключаем, что $w(X) = w(I(X))$, откуда следует, что I сохраняет вес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. *Пусть $|X| = n$; тогда пространство $I(X)$ гомеоморфно $(n - 1)$ -мерному симплексу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Покажем сначала, что для каждого $\mu \in I(X)$ существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\max}$ такие, что $\mu(\varphi) = \max\{\varphi(x_i) + \lambda_i \mid i = 1, \dots, n\}$ для каждого $\varphi \in C(X)$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ определим φ_i формулой $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} - 1$. Пусть $\lambda_i = \inf\{\mu(\alpha\varphi_j) \mid \alpha \geq 0\}$.

Пусть теперь $\varphi \in C(X)$. Тогда для каждого $\alpha \geq 0$ имеем

$$\varphi \leq \max\{\alpha\varphi_i + \varphi(x_i) \mid i = 1, \dots, n\},$$

откуда

$$\mu(\varphi) \leq \max\{\varphi(\alpha\varphi_i) + \varphi(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, видим, что $\mu(\varphi) \leq \max\{\lambda_i + \varphi(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}$. В самом деле, для достаточно больших α мы получаем равенство. Идемпотентная мера μ , определенная выше, обозначается через $\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$.

Пусть $\Gamma^{n-1} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0\}$. Очевидно, что множество Γ^{n-1} гомеоморфно $(n - 1)$ -мерному симплексу. Определим отображение $\xi: \Gamma^{n-1} \rightarrow I(\{x_1, \dots, x_n\})$ формулой $\xi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$. Из приведенного в начале доказательства рассуждения вытекает, что ξ является сюръективным отображением.

Для различных элементов $(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \Gamma^{n-1}$, можно найти i такое, что $\lambda_i \neq \lambda'_i$. Определим функцию $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\varphi(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } j = i, \\ \min\{\lambda_i, \lambda'_i\} - \lambda_j - 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда

$$\xi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_i \neq \lambda'_i = \xi(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n),$$

откуда заключаем, что отображение ξ также является вложением.

Поскольку множество Γ^{n-1} компактно, чтобы показать, что ξ – гомеоморфизм, достаточно проверить, что отображение ξ непрерывно.

Пусть $\mu = \xi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $\langle \mu; \varphi; \varepsilon \rangle$ – предбазисная окрестность элемента μ в $I(X)$, где $\varphi \in C(X)$, $\varepsilon > 0$. Определим окрестности U_i элементов λ_i , $i = 1, \dots, n$, в $\mathbb{R}_{\max}$ следующим образом:

$$U_i = \begin{cases} (\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon), & \text{если } \lambda_i > -\infty, \\ [-\infty, \min\{\lambda_j \mid \lambda_j > -\infty, j = 1, \dots, n\} - \varepsilon), & \text{если } \lambda_i = -\infty. \end{cases}$$

Тогда $U = (U_1 \times \dots \times U_n) \cap \Gamma^n$ – окрестность точки $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ такая, что $\xi(U) \subset \langle \mu; \varphi; \varepsilon \rangle$, таким образом, отображение ξ непрерывно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. *Множество*

$$I_\omega(X) = \left\{ \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}, i = 1, \dots, n, \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i = 0, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(т. е. множество идемпотентных мер с конечными носителями) всюду плотно в пространстве $I(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.8 и результатов общей теории функторов в категории **Comp** (см. [7]) следует, что множество $I_\omega(X)$ идемпотентных мер с конечными носителями всюду плотно в $I(X)$. Утверждение теперь является следствием предложения 2.13.

Мы видим, что пространства $I(X)$ и $P(X)$ гомеоморфны для каждого конечного X . Можно показать, и к этому мы вернемся в последующих публикациях, что эти пространства гомеоморфны также и для бесконечных метризуемых X . Однако имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15. *Функторы P и I не изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$, $Z = \{a, c\}$, где a, b, c – попарно различные точки. Обозначим через $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Z$ ретракции такие, что $f(c) = b$ и $g(b) = c$. Тогда отображение $(P(f), P(g)): P(X) \rightarrow P(Y) \times P(Z)$, очевидно, является вложением, в то время как отображение $(I(f), I(g)): I(X) \rightarrow I(Y) \times I(Z)$ таковым не является. В самом деле, пусть

$$\mu = (-1) \odot \delta_a \oplus 0 \odot \delta_b \oplus 0 \odot \delta_c, \quad \nu = (-2) \odot \delta_a \oplus 0 \odot \delta_b \oplus 0 \odot \delta_c;$$

тогда

$$I(f)(\mu) = I(f)(\nu) = 0 \odot \delta_a \oplus 0 \odot \delta_b, \quad I(g)(\mu) = I(g)(\nu) = 0 \odot \delta_a \oplus 0 \odot \delta_c.$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.16. Отметим, что пересечение подфункторов P и I функтора O является тождественным функтором. В самом деле, предполагая противное, получаем, что для некоторого пространства X существует вероятностная мера $\mu \in P(X) \cap I(X)$ такая, что $|\text{supp}(\mu)| \geq 2$. Несложно показать, что при этом существуют $\varphi, \psi \in C(X)$ такие, что $\varphi \oplus \psi = 0_X$ и $\mu(\varphi) < 0$, $\mu(\psi) < 0$. Поскольку также $\mu \in I(X)$, получаем $\mu(\varphi \oplus \psi) = \max\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\} < 0$. Противоречие.

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ обозначим через $x \oplus y$ покомпонентный максимум элементов x и y , а через $\lambda \odot x$ – вектор, полученный из x прибавлением λ к каждой его координате. Подмножество A в $\mathbb{R}^n$ называется *тах-плюс-выпуклым*, если $\lambda_1 \odot x_1 \oplus \lambda_2 \odot x_2 \in A$ для любых $x_1, x_2 \in A$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $\lambda_1 \oplus \lambda_2 = 0$. Отметим, что в этом определении можно также дополнительно предполагать, что $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{\max}$.

Аналогично можно определить для любых $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{\max}$ таких, что $\lambda_1 \oplus \lambda_2 = 0$, *тах-плюс-выпуклую комбинацию* $\mu = \lambda_1 \odot \mu_1 \oplus \lambda_2 \odot \mu_2$ следующим образом:

$$\mu(\varphi) = \lambda_1 \odot \mu_1(\varphi) \oplus \lambda_2 \odot \mu_2(\varphi), \quad \varphi \in C(X).$$

Очевидны следующие два утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.17. *В только что введенных обозначениях имеем $\lambda_1 \odot \mu_1 \oplus \lambda_2 \odot \mu_2 \in I(X)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.18. *Пусть $A \subset I(X)$, $A \neq \emptyset$. Тогда $\sup A \in I(X)$.*

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – компактное тах-плюс-выпуклое подмножество. Допуская вольность, обозначим через $x_1, \dots, x_n$ координатные функции $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Для $\mu \in I(A)$ положим $\beta_A(\mu) = (\mu(x_1), \dots, \mu(x_n))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.19. *Отображение $\beta = \beta_A: I(A) \rightarrow A$ корректно определено и непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность отображения $\mu \mapsto \beta_X(\mu): I(A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ следует из того факта, что если $\mu' \in \langle \mu; x_1, \dots, x_n; \varepsilon \rangle$, то $\|\beta(\mu) - \beta(\mu')\| < \varepsilon$.

Для $\mu = \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i \odot \delta_{a_i} \in I(A)$ получаем, что $\beta(\mu) = \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i \odot a_i \in A$. Поскольку множество $I_\omega(X)$ всюду плотно в $I(X)$, имеем $\beta(\mu) \in A$ для каждого $\mu \in I(A)$. Следовательно, отображение β определено корректно.

Отображение $\beta: I(A) \rightarrow A$ называется *идемпотентным бариецентрическим отображением*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.20. Предложение 2.19 можно распространить на случай компактных тах-плюс-выпуклых подмножеств произвольной тихоновской степени $\mathbb{R}^\tau$.

§ 3. Монада идемпотентных мер

Известно [9], что функтор сохраняющих порядок функционалов образует монаду на категории **Comp**. В этом параграфе мы покажем, что функтор I является функториальной частью подмонады монады сохраняющих порядок функционалов.

Приведем некоторые необходимые определения из теории категорий (см., например, [17]).

Монада $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ на категории $\mathcal{E}$ состоит из эндифунктора $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ и естественных преобразований $\eta: 1_{\mathcal{E}} \rightarrow T$ (единицы), $\mu: T^2 \rightarrow T$ (умножения), удовлетворяющих соотношениям $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$ и $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$.

Естественное преобразование $\psi: T \rightarrow T'$ называется *морфизмом монады* $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ в монаду $\mathbb{T}' = (T', \eta', \mu')$, если $\psi \circ \eta = \eta'$ и $\psi \circ \mu = \mu' \circ \eta T' \circ T\psi$. Если

все компоненты естественного преобразования ψ являются мономорфизмами, то монада $\mathbb{T}$ называется *подмонадой* монады $\mathbb{T}'$.

Если $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ – монада на категории $\mathcal{E}$, то пара (X, ξ) , где $\xi: T(X) \rightarrow X$ является морфизмом в категории $\mathcal{E}$, называется $\mathbb{T}$ -алгеброй, если $\xi\eta_X = \text{id}_X$ и $\xi\mu_X = \xi T(\xi)$. Для $\mathbb{T}$ -алгебр (X, ξ) , (X', ξ') говорим, что морфизм $f: X \rightarrow X'$ является *морфизмом $\mathbb{T}$ -алгебр*, если $f\xi = \xi'T(f)$. Получаем категорию $\mathbb{T}$ -алгебр и их морфизмов.

Монада гиперпространства $\mathbb{H} = (\text{exp}, s, u)$ в категории **Comp** определена следующим образом. Естественное преобразование $s: \text{id} \rightarrow \text{exp}$ действует по формуле $s_X(x) = \{x\}$, $x \in X$. Естественное преобразование $u: \text{exp}^2 \rightarrow \text{exp}$ действует по формуле $u(\mathcal{A}) = \cup \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in \text{exp}^2 X$.

Пусть $X \in |\mathbf{Comp}|$. Для $\varphi \in C(X)$ определим $\bar{\varphi}: I(X) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\bar{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, $\mu \in I(X)$.

ЛЕММА 3.1. Если $\varphi \in C(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$, то $\overline{\lambda \odot \varphi} = \lambda \odot \bar{\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in I(X)$; тогда $\overline{\lambda \odot \varphi}(\mu) = \mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi) = \lambda \odot \bar{\varphi}(\mu)$.

ЛЕММА 3.2. Если $\varphi, \psi \in C(X)$, то $\overline{\varphi \oplus \psi} = \bar{\varphi} \oplus \bar{\psi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in I(X)$; тогда $\overline{\varphi \oplus \psi}(\mu) = \mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi) = \bar{\varphi}(\mu) \oplus \bar{\psi}(\mu) = (\bar{\varphi} \oplus \bar{\psi})(\mu)$.

Для $M \in I^2(X)$ определим отображение $\zeta_X(M): C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\zeta_X(M)(\varphi) = M(\bar{\varphi})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Имеем $\zeta_X(M) \in I(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим все свойства из определения 2.1 элементов пространства $I(X)$:

1) $\zeta_X(M)(c_X) = M(\bar{c_X}) = M(c_{I(X)}) = c$;

2) применяя лемму 3.1, получаем $\zeta_X(M)(\lambda \odot \varphi) = M(\overline{\lambda \odot \varphi}) = M(\lambda \odot \bar{\varphi}) = \lambda \odot M(\bar{\varphi}) = \lambda \odot \zeta_X(M)(\varphi)$;

3) применяя лемму 3.2, получаем $\zeta_X(M)(\varphi \oplus \psi) = M(\overline{\varphi \oplus \psi}) = M(\bar{\varphi} \oplus \bar{\psi}) = M(\bar{\varphi}) \oplus M(\bar{\psi}) = \zeta_X(M)(\varphi) \oplus \zeta_X(M)(\psi)$.

Таким образом, получаем отображение $\zeta_X: I^2(X) \rightarrow I(X)$. Из результатов статьи [9] следует, что $\zeta = (\zeta_X)$ является естественным преобразованием функтора I^2 в функтор I . На самом деле, это естественное преобразование является ограничением естественного преобразования $O^2 \rightarrow O$, определенного Т. Радулом в [9].

ТЕОРЕМА 3.4. Тройка $\mathbb{I} = (I, \eta, \zeta)$ является монадой на категории **Comp**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено выше, естественное преобразование ζ является ограничением естественного преобразования $O^2 \rightarrow O$ и δ отображает тождественный функтор в $I \subset O$. Следовательно, утверждение теоремы следует из того факта, что функтор O порождает монаду в категории **Comp** (см. [9, теорема 3]).

На самом деле, $\mathbb{I}$ является подмонадой монады $\mathbb{O}$, порожденной функтором O (см. [9]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть X – компактное тах-плюс-выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда пара (X, β) является $\mathbb{I}$ -алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$; тогда $\beta\eta_X(x) = \beta(\delta_x) = x$, т. е. $\beta\eta_X = \text{id}_X$. Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \mu_i \in I^2(X)$, где $\mu_i = \bigoplus_{j=1}^m \kappa_{ij} \odot \delta_{x_{ij}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta\zeta_X(M) &= \beta\left(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \mu_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \left(\bigoplus_{j=1}^m \kappa_{ij} \odot \delta_{x_{ij}}\right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m (\lambda_i \odot \kappa_{ij}) \odot \delta_{x_{ij}} = \beta(I(\beta))(M). \end{aligned}$$

Поскольку идемпотентные меры M указанного вида образуют всюду плотное множество в $I^2(X)$, получаем требуемый результат.

Непрерывное отображение $f: A \rightarrow B$ компактных тах-плюс-выпуклых подмножеств в евклидовых пространствах называется тах-плюс-аффинным, если оно сохраняет тах-плюс-выпуклые комбинации (т. е. $f(\alpha \odot a \oplus \beta \odot b) = \alpha \odot f(a) \oplus \beta \odot f(b)$ для любых $a, b \in A$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ таких, что $\alpha \oplus \beta = 0$). Примерами тах-плюс-аффинных отображений могут служить проектирования на координатные гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное аффинное отображение тах-плюс-компактных выпуклых множеств в евклидовых пространствах. Тогда f – морфизм $\mathbb{I}$ -алгебр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что $f\beta_X(\mu) = \beta_Y I(f)(\mu)$ для каждого $\mu \in I(X)$. Достаточно проверить это равенство для идемпотентных мер μ с конечными носителями. Если $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$, то

$$f\beta_X(\mu) = f\left(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot x_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot f(x_i) = \beta_Y \left(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{f(x_i)}\right) = \beta_Y I(f)(\mu).$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Диагональное отображение

$$\Phi = (\bar{\varphi})_{\varphi \in C(X)}: I(X) \rightarrow \prod \{\mathbb{R}_{\varphi} = \mathbb{R} \mid \varphi \in C(X)\} = \mathbb{R}^{C(X)}$$

вкладывает пространство $I(X)$ как тах-плюс-выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^{C(X)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из равенства

$$\bar{\varphi}(\alpha_1 \odot \mu_1 \oplus \alpha_2 \odot \mu_2) = \alpha_1 \odot \bar{\varphi}(\mu_1) \oplus \alpha_2 \odot \bar{\varphi}(\mu_2)$$

для произвольных $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$, $\varphi \in C(X)$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{\max}$ таких, что $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = 0$.

Используя структуру монады для функтора I , мы можем определить для всех $\mu \in I(X)$, $\nu \in I(Y)$ тензорное произведение $\mu \otimes \nu \in I(X \times Y)$ (см., например, [18]). Для полноты изложения напомним конструкцию тензорного произведения. Для любых $y \in Y$ пусть $i_y: X \rightarrow X \times Y$ означает отображение, определенное формулой $i_y(x) = (x, y)$, $x \in X$. Тогда определим отображение $g_\mu: Y \rightarrow I(X \times Y)$ формулой $g_\mu(y) = I(i_y)(\mu)$, $y \in Y$. Наконец,

$$\mu \otimes \nu = \zeta_{X \times Y} I(g_\mu)(\nu).$$

Если $\mu = \bigoplus_{i=1}^m \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I(X)$, $\nu = \bigoplus_{j=1}^n \kappa_j \odot \delta_{y_j} \in I(Y)$, то

$$\mu \otimes \nu = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n (\lambda_i \odot \kappa_j) \odot \delta_{(x_i, y_j)} \in I(X \times Y).$$

По индукции можно определить тензорное произведение для произвольного конечного числа сомножителей: если $\mu_i \in I(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, то

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n \in I((X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n) = I(X_1 \times \dots \times X_n).$$

Тензорное произведение может быть также определено и в случае произвольного бесконечного произведения идемпотентных мер. Для $\mu_\alpha \in I(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, где A – произвольное бесконечное индексное множество, определим $\otimes\{\mu_\alpha \mid \alpha \in A\}$ как единственное $\nu \in I(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$, удовлетворяющее свойству $I(\text{pr}_B)(\nu) = \otimes\{\mu_\alpha \mid \alpha \in B\}$ для произвольного непустого конечного подмножества B множества A .

Отметим, что монада вероятностных мер $\mathbb{P}$ является также подмонадой монады $\mathbb{O}$.

ТЕОРЕМА 3.8. *Монада гиперпространства $\mathbb{H}$ является подмонадой монады $\mathbb{I}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компактного хаусдорфова пространства X определим отображение $j_X: \text{exp } X \rightarrow I(X)$ условием $j_X(A)(\varphi) = \max(\varphi|A)$. Легко показать, что такое определение отображения j_X корректно.

Покажем, что отображение j_X непрерывно. Пусть $A_0 \in \text{exp } X$ и $\langle j_X(A_0); \varphi; \varepsilon \rangle$ является предбазисной окрестностью $j_X(A_0)$ в пространстве $I(X)$. Существует конечное открытое в X покрытие $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ множества A_0 такое, что для каждого $U_i \in \mathcal{U}$ колебание функции φ на множестве U_i (т.е. число $|\sup(\varphi|U_i) - \inf(\varphi|U_i)|$) меньше ε . Пусть $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Покажем, что $j_X(A) \in \langle j_X(A_0); \varphi; \varepsilon \rangle$.

Пусть $j_X(A)(\varphi) = \varphi(a)$, где $a \in U_i \cap A$ для некоторого i . Тогда существует $a_0 \in U_i \cap A_0$ такое, что $|\varphi(a) - \varphi(a_0)| < \varepsilon$, откуда имеем

$$j_X(A)(\varphi) = \varphi(a) < \varphi(a_0) + \varepsilon \leq j_X(A_0)(\varphi) + \varepsilon.$$

Рассуждая аналогично, докажем, что $j_X(A_0)(\varphi) < j_X(A)(\varphi) + \varepsilon$.

Отметим, что отображение j_X является вложением. В самом деле, пусть $A, B \in \text{exp } X$ и $A \neq B$. Не уменьшая общности, мы предполагаем, что $A \setminus B \neq \emptyset$. Пусть $\varphi \in C(X)$ – функция со следующими свойствами: $\varphi|B \equiv 0$, $\varphi(x) > 0$ для некоторого $x \in A \setminus B$. Тогда $j_X(A)(\varphi) > j_X(B)(\varphi) = 0$.

Для $f: X \rightarrow Y$ и $A \in \text{exp } X$, $\varphi \in C(Y)$ видим, что

$$\begin{aligned} (I(f)j_X(A))(\varphi) &= j_X(A)(\varphi f) = \max\{\varphi f(a) \mid a \in A\} \\ &= \max\{\varphi(b) \mid b \in f(A)\} = j_Y(f(A))(\varphi), \end{aligned}$$

откуда $I(f)j_X = j_Y \text{exp } f$, следовательно, $j: \text{exp} \rightarrow I$ является естественным преобразованием.

Покажем, что j является морфизмом монад. Для этого покажем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{exp}^2 X & \xrightarrow{I(j_X)j_{\text{exp } X}} & I^2(X) \\ u_X \downarrow & & \downarrow \zeta_X \\ \text{exp } X & \xrightarrow{j_X} & I(X) \end{array}$$

коммутативна. Докажем это для точек с конечными носителями. Пусть $\mathcal{A} \in \exp^2 X$, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, где $A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{il}\}$.

Тогда

$$\begin{aligned} j_{\exp X}(\mathcal{A}) &= \bigoplus_{p=1}^k 0 \odot \delta(A_p), \\ I(j_X)j_{\exp X}(\mathcal{A}) &= I(j_X) \left(\bigoplus_{p=1}^k 0 \odot \delta(A_p) \right) = \bigoplus_{p=1}^k 0 \odot \delta \left(\bigoplus_{q=1}^l 0 \odot \delta(a_{pq}) \right), \\ \zeta_X I(j_X)j_{\exp X}(\mathcal{A}) &= \bigoplus_{p=1}^k \bigoplus_{q=1}^l (0 \odot 0) \odot \delta(a_{pq}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$j_X u_X(\mathcal{A}) = j_X(\{a_{pq} \mid 1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq l\}) = \bigoplus_{p=1}^k \bigoplus_{q=1}^l 0 \odot \delta(a_{pq}).$$

Поскольку точки с конечными носителями плотны в $\exp^2 X$, получаем требуемое, и так как $j_X s_X(x) = j_X(\{x\}) = \delta_x$ для каждого $x \in X$, получаем, что $j = (j_X)$ является морфизмом монад.

§ 4. Идемпотентное отображение Милютина

Понятие отображения Милютина было впервые введено для функтора вероятностных мер (см. конструкцию, например, в [19]).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X – компактное метризуемое пространство. Тогда существуют нульмерное компактное метризуемое пространство X и непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее следующему условию: существует непрерывное отображение $s: Y \rightarrow I(X)$ такое, что $\text{supp}(y) \subset f^{-1}(y)$ для каждого $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы модифицируем конструкцию, предложенную для отображений Милютина в [20]. Несложно построить последовательность $(\mathcal{W}_i)$, где каждое $\mathcal{W}_i$ является конечным семейством пар подмножеств пространства Y , удовлетворяющее условиям:

- 1) $\mathcal{U}_i = \{U \mid (U, V) \in \mathcal{W}_i\}$ и $\mathcal{V}_i = \{V \mid (U, V) \in \mathcal{W}_i\}$ – конечные замкнутые покрытия пространства Y ;
- 2) $U \subset \text{Int}_Y(V)$ для каждого $(U, V) \in \mathcal{W}_i$;
- 3) $\text{mesh}(\mathcal{V}_i) < 1/i$ для каждого i (мы предполагаем, что на Y фиксирована метрика; через mesh обозначается максимум диаметров элементов семьи множеств).

Полагаем $X_i = \coprod \{V \mid (U, V) \in \mathcal{W}_i\}$. Отображение $f_i: X_i \rightarrow Y$ определяется как такое отображение, что $f_i|_V: V \rightarrow Y$ является отображением вложения для каждого V такого, что $(U, V) \in \mathcal{W}_i$. Пусть $\alpha_i: X_i \rightarrow [-\infty, 0]$ – непрерывная функция такая, что для каждого $(U, V) \in \mathcal{W}_i$ имеем $\alpha_i|_U \equiv 0$ и $\alpha_i|(V \setminus \text{Int}_Y(V)) \equiv -\infty$.

Пусть

$$X = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i \mid f_i(x_i) = f_j(x_j) \ \forall i, j \right\}.$$

Определим отображение $f: X \rightarrow Y$ формулой $f((x_i)_{i=1}^\infty) = f_1(x_1)$.

Пусть $y \in Y$; положим

$$s(y) = \bigotimes_{i=1}^\infty \oplus \{ \alpha_i(x) \odot \delta_x \mid x \in f_i^{-1}(y) \} \in I(X).$$

Легко видеть, что отображение s корректно определено и непрерывно. Для произвольного $y \in Y$ имеем равенство $\text{supp}(s(y)) = \prod_{i=1}^\infty f_i^{-1}(y)$, следовательно, $f(s(y)) = \delta_y$.

Непосредственно проверяется тот факт, что пространство X является нульмерным и компактным метризуемым.

Отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям теоремы 4.1, называется *идемпотентным отображением Милютина*.

Аналогично, как и в случае вероятностных мер, можно показать, что произведение идемпотентных отображений Милютина так же, как и ограничение идемпотентного отображения Милютина на полный прообраз замкнутого множества, является идемпотентным отображением Милютина. Это позволяет доказать, что каждое компактное хаусдорфово пространство является образом нульмерного компактного хаусдорфова пространства при идемпотентном отображении Милютина.

Нам понадобится следующее понятие, введенное Е. В. Щепиным [7]. Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow u \\ Z & \xrightarrow{v} & T \end{array} \quad (4.1)$$

называется *бикоммутативной*, если ее *характеристическое отображение*

$$\chi = (f, g): X \rightarrow Y \times_T Z = \{ (y, z) \in Y \times Z \mid u(y) = v(z) \}$$

является сюръективным отображением.

ТЕОРЕМА 4.2. *Функтор идемпотентных мер открыт.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай сюръективного отображения конечных пространств. Итак, пусть $f: X \rightarrow Y$ – именно такое отображение. Поскольку композиция двух открытых отображений открыта, не уменьшая общности, можем предположить, что $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ и отображение $f: X \rightarrow Y$ действует по формуле $f(x_0) = y_1$, $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $\mu_0 \in I(X)$, $\mu_0 = \bigoplus_{i=0}^n \alpha_{i0} \odot \delta_{x_i}$, $\nu_0 = I(f)(\mu_0)$ и $(\nu_k)_{k=1}^\infty$ – последовательность в $I(Y)$, сходящаяся к ν_0 . Имеем $\nu_k = \bigoplus_{j=1}^n \beta_{kj} \odot \delta_{y_j}$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{kj} = \alpha_{0j}$ для $j = 2, \dots, n$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k1} = \max\{\alpha_{00}, \alpha_{01}\}$. Не уменьшая общности, можем предположить, что $\alpha_{00} \geq \alpha_{01}$. Тогда положим $\alpha_{k0} = \beta_{k1}$, $\alpha_{k1} = \min\{\beta_{k1}, \alpha_{01}\}$. Пусть $\mu_k = \bigoplus_{i=0}^n \alpha_{ik} \odot \delta_{x_i}$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $I(f)(\mu_k) = \nu_k$ для каждого k и $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k) = \mu_0$. Это равносильно открытости отображения $I(f)$.

Пусть C – канторово совершенное множество. Докажем, что отображение $I(\text{pr})$, где $\text{pr}: C \times C \rightarrow C$ обозначает проектирование на первый сомножитель,

открыто. С этой целью представим C как $\varprojlim \{C_i, f_{ij}\}$, где C_i – конечные множества и $f_{ij}: C_i \rightarrow C_j$ – сюръективные отображения, $i \geq j$. Из результатов статьи [7] вытекает, что для доказательства открытости отображения $I(\text{pr})$ достаточно показать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I(C_i \times C_i) & \xrightarrow{I(f_{ij} \times f_{ij})} & I(C_j \times C_j) \\ I(\pi_i) \downarrow & & \downarrow I(\pi_j) \\ I(C_i) & \xrightarrow{I(f_{ij})} & I(C_j) \end{array}$$

(здесь $\pi_k: C_k \times C_k \rightarrow C_k$ – проектирование на первый сомножитель) бикоммутативна, т. е. ее характеристическое отображение

$$\begin{aligned} (I(\pi_i), I(f_{ij} \times f_{ij})): I(C_i \times C_i) &\rightarrow I(C_j \times C_j) \times_{I(C_j)} I(C_i) \\ &= \{(\mu, \nu) \in I(C_i) \times I(C_j \times C_j) \mid I(f_{ij})(\mu) = I(\pi_j)(\nu)\} \end{aligned}$$

является сюръективным отображением.

Не уменьшая общности, можем предположить, что

$$C_j = \{x_1, \dots, x_p\}, \quad C_i = \{y_0, y_1, \dots, y_p\}$$

(все точки при этом предполагаются попарно различными) и отображение f_{ij} действует следующим образом: $f_{ij}(y_m) = x_m$, $m = 1, \dots, p$, $f_{ij}(y_0) = y_1$. Поэтому для $(\mu, \nu) \in I(C_j \times C_j) \times_{I(C_j)} I(C_i)$ можно записать

$$\mu = \bigoplus_{k=0}^p \kappa_k \odot \delta_{y_k}, \quad \nu = \bigoplus_{m,n=1}^p \lambda_{mn} \odot \delta_{(x_m, x_n)}.$$

Не уменьшая общности, можно предположить, что $\kappa_0 \leq \kappa_1$. Определим

$$\nu' = \bigoplus_{m,n=0}^p \lambda'_{mn} \odot \delta_{(y_m, y_n)} \in I(C_i \times C_i)$$

условиями $\lambda'_{mn} = \lambda_{mn}$ для $m \geq 1$, $n = 0, 1, \dots, p$, $\lambda'_{0n} = \min\{\kappa_0, \lambda_{1n}\}$, $n = 0, 1, \dots, p$. Нетрудно проверить тот факт, что ν' является требуемой мерой.

Рассмотрим теперь открытое отображение $f: X \rightarrow Y$ компактных метризуемых пространств. Пусть $p: Z \rightarrow Y$ – идемпотентное отображение Милютина, где Z – компактное метризуемое нульмерное пространство. Не уменьшая общности, можно предположить, что Z гомеоморфно канторову множеству, Z является подмножеством произведения $T \times Y$ и p совпадает с ограничением проектирования $\hat{p}: T \times Y \rightarrow Y$ на второй сомножитель.

Обозначим через $p: Z \times_Y X \rightarrow X$ отображение проектирования, $p(z, x) = x$. Предположим, что $Z \times_Y X \subset T \times Y \times X$. Для каждого $x \in X$ пусть $i_x: T \times Y \rightarrow T \times Y \times X$ – отображение, определенное формулой $i_x(t, y) = (t, y, x)$.

Пусть $s: Y \rightarrow I(Z)$ – такое отображение, что $\hat{p}s(y) = \delta_y$ для каждого $y \in Y$. Рассмотрим теперь последовательность (ν_i) в $I(Y)$, сходящуюся к ν_0 , и $\mu_0 \in I(X)$ такие, что $I(f)(\mu_0) = \nu_0$. Определим отображение $g: X \rightarrow I(T \times Y \times X)$ формулой $g(x) = I(i_x)(s(f(x)))$, $x \in X$. Пусть $\mu'_0 = \zeta_{T \times Y \times X}(I(g)(\mu_0))$.

Обозначим через π_i проектирование пространства $T \times Y \times X$ на i -й сомножитель, а через π_{ij} – проектирование пространства $T \times Y \times X$ на произведение i -го и j -го сомножителей. Тогда имеем

$$I(\pi_3)(\mu'_0) = I(\pi_3)\zeta_{T \times Y \times X}(I(g)(\mu_0)) = \zeta_X I^2(\pi_3)(I(g)(\mu_0)) = \zeta_X I(\eta_X)(\mu_0) = \mu_0.$$

Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$ определим $\nu'_i = \zeta_Z I(s)(\nu_i)$. Тогда

$$I(p)(\nu'_i) = I(p)\zeta_Z I(s)(\nu_i) = \zeta_Y I^2(p)I(s)(\nu_i) = \zeta_Y I(I(p)s)(\nu_i) = \zeta_Y I(\eta_Y)(\nu_i) = \nu_i.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(\pi_{12})(\mu'_0) &= I(\pi_{12})\zeta_{T \times Y \times X}(I(g)(\mu_0)) = \zeta_{T \times Y} I^2(\pi_{12})(I(g)(\mu_0)) \\ &= \zeta_{T \times Y} I(I(\pi_{12}g))(\mu_0) = \zeta_{T \times Y} I(sf)(\mu_0) = \zeta_{T \times Y} I(s)I(f)(\mu_0) \\ &= \zeta_{T \times Y} I(s)(\nu_0) = \nu'_0. \end{aligned}$$

Пусть $h: K \rightarrow \pi_{12}(Z)$ – открытое сюръективное отображение нульмерных компактных метризуемых пространств. Не уменьшая общности, можем предположить, что композиция $\pi_{12}h$ гомеоморфна отображению проектирования $\text{pr}: C \times C \rightarrow C$. Пусть $\mu''_0 \in I(K)$ такое, что $I(h)(\mu''_0) = (\mu'_0)$. Тогда из открытости отображения $I(\pi_{12}h)$ вытекает, что существует последовательность (μ''_i) в $I(K)$ такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu''_i = \mu''_0$ и $I(\pi_{12}h)(\mu''_i) = \nu'_i$.

Пусть $\mu_i = I(\pi_3 h)(\mu''_i)$. Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = \lim_{i \rightarrow \infty} I(\pi_3 h)(\mu''_i) = I(\pi_3 h)(\mu''_0) = \mu_0.$$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$I(f)(\mu_i) = I(f\pi_3 h)(\mu''_i) = I(\hat{p}\pi_{12}h)(\mu''_i) = I(\hat{p})(\nu'_i) = \nu_i.$$

Это доказывает, что $I(f)$ является открытым отображением.

Функтор F в категории **Comp** называется *бикоммутативным* [7], если F сохраняет бикоммутативные диаграммы.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Функтор I бикоммутативен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 4.2 и доказанного Е. В. Щепиным [7] факта, что каждый открытый функтор является бикоммутативным.

§ 5. Соответствия идемпотентных мер с заданными маргиналами

Пусть $X_1, \dots, X_k$ – конечный набор компактных хаусдорфовых пространств. Определим отображение $M_{X_1, \dots, X_k}: I(\prod X_i) \rightarrow \prod I(X_i)$ следующим образом:

$$M_{X_1, \dots, X_k}(\mu) = (I(\pi_1)(\mu), \dots, I(\pi_k)(\mu)), \quad \mu \in I\left(\prod X_i\right)$$

(здесь $\pi_j: \prod X_i \rightarrow X_j$ – проектирование на j -й сомножитель). В [13] доказано, что аналогичное отображение, полученное заменой функтора I на функтор вероятностных мер, открыто. Следующий простой пример показывает, что это не так для идемпотентных мер.

ПРИМЕР 5.1. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ и

$$\mu = 0 \odot \delta_{(x_1, y_1)} \oplus 0 \odot \delta_{(x_2, y_2)} \in I(X \times Y).$$

Тогда

$$M_{X, Y}(\mu) = (\mu_1, \mu_2) = (0 \odot \delta_{x_1} \oplus 0 \odot \delta_{x_2}, 0 \odot \delta_{y_1} \oplus 0 \odot \delta_{y_2}) \in I(X) \times I(Y).$$

Для каждого натурального l пусть

$$\mu_1^{(l)} = \left(-\frac{1}{l}\right) \odot \delta_{x_1} \oplus 0 \odot \delta_{x_2}, \quad \mu_2^{(l)} = 0 \odot \delta_{y_1} \oplus \left(-\frac{1}{l}\right) \odot \delta_{y_2}.$$

Тогда не существует последовательности $(\mu^{(l)})_{l=1}^\infty$ в пространстве $I(X \times Y)$ такой, что $M_{X,Y}(\mu^{(l)}) = (\mu_1^{(l)}, \mu_2^{(l)})$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} \mu^{(l)} = \mu$. Это показывает, что отображение $M_{X,Y}$ не является открытым.

Диаграмма (4.1) в категории **Comp** называется *открыто-бикоммутативной*, если ее характеристическое отображение χ является сюръективным отображением. Функтор F в категории **Comp** называется *открыто-бикоммутативным*, если он сохраняет класс открыто-бикоммутативных диаграмм. В [21] установлена открытая бикоммутативность некоторых функторов, связанных с функтором вероятностных мер.

Очевидно, что диаграмма произведения

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \{*\} \end{array} \quad (5.1)$$

является открыто-бикоммутативной. Из примера 5.1 ясно, что диаграмма, полученная применением функтора I к диаграмме (5.1), не является открыто-бикоммутативной. Это показывает, что функтор I также не является открыто-бикоммутативным.

§ 6. Замечания и открытые вопросы

Представляется, что теория идемпотентных мер может быть развита настолько же далеко, как и теория вероятностных мер. Здесь мы рассмотрим только некоторые естественно возникающие вопросы, связанные с полученными выше результатами.

Пространства идемпотентных мер в категории ультраметрических пространств рассмотрены в [22]; некоторые из результатов настоящей работы имеют свои аналоги для ультраметрических пространств. Исследование пространств идемпотентных мер в различных классах некомпактных пространств является важной и интересной задачей.

В работе [11] доказано, что категория компактных выпуклых множеств и аффинных непрерывных отображений является монадичной над категорией **Comp**. Это приводит к следующим вопросам.

ВОПРОС 6.1. Является ли категория компактных *тах-плюс-выпуклых* подмножеств (надлежащим образом определенных) в локально выпуклых решетках и их аффинных непрерывных отображений монадичной над категорией **Comp**?

ВОПРОС 6.2. Охарактеризовать категорию $\mathbb{I}$ -алгебр.

В. В. Федорчук [23] охарактеризовал барицентрически открытые выпуклые компакты, т. е. выпуклые компакты X , для которых барицентрическое отображение $P(X) \rightarrow X$ открыто. Отметим, что некоторые характеристические

результаты в этом направлении получены также в [24]–[26]. В частности, в [26] доказано, что выпуклое компактное подмножество K в локально выпуклом пространстве является барицентрически открытым, если открыто отображение $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y): K \times K \rightarrow K$.

ВОПРОС 6.3. Охарактеризовать класс мах-плюс-выпуклых компактных пространств, для которых идемпотентное барицентрическое отображение открыто. Является ли последнее свойство эквивалентным свойству открытости отображения $(x, y) \mapsto x \oplus y$?

В [27] доказано, что произведение барицентрически открытых выпуклых компактов барицентрически открыто.

ВОПРОС 6.4. Справедлив ли аналог этого факта для мах-плюс-выпуклых компактных пространств, идемпотентное барицентрическое отображение которых открыто?

Список литературы

1. G. L. Litvinov, V. P. Maslov (eds.), *Idempotent mathematics and mathematical physics* (Vienna, 2003), *Contemp. Math.*, **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
2. G. L. Litvinov, “The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction”, *Idempotent mathematics and mathematical physics* (Vienna, 2003), *Contemp. Math.*, **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 1–17; [arXiv: abs/math/0501038](#).
3. P. Bernhard, “Max-plus algebra and mathematical fear in dynamic optimization”, *Set-Valued Anal.*, **8**:1–2 (2000), 71–84.
4. J. P. Aubin, O. Dordan, “Fuzzy systems, viability theory and toll sets”, *Fuzzy systems, Handb. Fuzzy Sets Ser.*, **2**, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 1998, 461–488.
5. J.-P. Aubin, *Dynamic economic theory. A viability approach*, *Stud. Econom. Theory*, **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
6. В. В. Федорчук, “Вероятностные меры в топологии”, *УМН*, **46**:1 (1991), 41–80; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “Probability measures in topology”, *Russian Math. Surveys*, **46**:1 (1991), 45–93.
7. Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36**:3 (1981), 3–62; англ. пер.: E. V. Shchepin, “Functors and uncountable powers of compacta”, *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 1–71.
8. В. В. Федорчук, “Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия”, *УМН*, **36**:3 (1981), 177–195; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “Covariant functors in the category of compacta, absolute retracts, and Q -manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 211–233.
9. T. Radul, “On the functor of order-preserving functionals”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **39**:3 (1998), 609–615.
10. S. Gaubert, R. D. Katz, “The Minkowski theorem for max-plus convex sets”, *Linear Algebra Appl.*, **421**:2–3 (2007), 356–369.
11. T. Świrszcz, “Monadic functors and convexity”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **22** (1974), 39–42.
12. S. Z. Ditor, L. Q. Eifler, “Some open mapping theorems for measures”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 287–293.
13. L. Q. Eifler, “Some open mapping theorems for marginals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **211** (1975), 311–319.

14. M. Zarichnyi, *On correspondences of probability measures with restricted marginals*, Preprint (<http://129.3.20.41/eps/ge/papers/0210/0210006.pdf>).
15. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, “Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход”, *Матем. заметки*, **69**:5 (2001), 758–797; англ. пер.: G. L. Litvinov, V. P. Maslov, G. B. Shpiz, “Idempotent functional analysis: an algebraic approach”, *Math. Notes*, **69**:5–6 (2001), 696–729.
16. V. P. Maslov, S. N. Samborskii (eds.), *Idempotent analysis*, Adv. Soviet Math., **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
17. M. Barr, Ch. Wells, *Toposes, triples and theories*, Grundlehren Math. Wiss., **278**, Springer-Verlag, New York, 1985.
18. М. М. Заричный, “Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов”, *Матем. сб.*, **182**:9 (1991), 1261–1280; англ. пер.: M. M. Zarichnyi, “Absolute extensors and the geometry of multiplication of monads in the category of compacta”, *Math. USSR-Sb.*, **71**:4 (1993), 9–27.
19. А. Пелчинский, *Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: A. Pełczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **58**, 1968.
20. S. Ageev, E. D. Tymchatyn, “On exact atomless Milutin maps”, *Topology Appl.*, **153**:2–3 (2005), 227–238.
21. R. Kozhan, “Open-multicommutativity of some functors related to the functor of probability measures”, *Mat. Stud.*, **24**:1 (2005), 99–106.
22. O. Hubal, M. Zarichnyi, “Idempotent probability measures on ultrametric spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **343**:2 (2008), 1052–1060.
23. В. В. Федорчук, “О барицентрическом отображении вероятностных мер”, *Вестн. Моск. ун-в. Сер. I*, 1992, № 1, 42–47; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “On the barycentric mapping of probability measures”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **47**:1 (1992), 39–43.
24. L. Q. Eifler, “Openness of convex averaging”, *Glasnik Mat. Ser. III*, **12**:1 (1977), 67–72.
25. S. Papadopolou, “On the geometry of stable compact convex sets”, *Math. Ann.*, **229**:3 (1977), 193–200.
26. R. C. O’Brien, “On the openness of the barycentre map”, *Math. Ann.*, **223**:3 (1976), 207–212.
27. В. В. Федорчук, “О барицентрически открытых бикомпактах”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:6 (1992), 205–210; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “On barycentrically open bicompacta”, *Siberian Math. J.*, **33**:6 (1992), 1135–1139.

М. М. Заричный (M. M. ZARICHNYI)
 Львовский национальный университет им. И. Франко,
 Украина
 E-mail: mzar@litech.lviv.ua

Поступило в редакцию
 01.04.2008