Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Боровикова, В. Г. Задорожний, Нахождение моментных функций решения двумерного уравнения диффузии со случайными коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 6, 27–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:27:16

УДК 517.956.4

М. М. Боровикова, В. Г. Задорожний

Нахождение моментных функций решения двумерного уравнения диффузии со случайными коэффициентами

Задача отыскания моментных функций решения начальной задачи со случайными коэффициентами для двумерного уравнения диффузии сводится к детерминированной начальной задаче с обычными и вариационными производными. Получены формулы для моментных функций решения при равномерно распределенных и гауссовских случайных коэффициентах.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: уравнение диффузии, моментные функции, вариационная производная, уравнения со случайными коэффициентами.

§ 1. Введение

Задача о диффузии вещества в плоской среде возникает в экологии при прогнозировании состояния окружающей среды при выбросах или захоронениях вредных веществ, при строительстве гидросооружений, при покрытии металлов и др. Процесс диффузии описывается дифференциальным уравнением [1]

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} = \varepsilon_1(t) \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon_2(t) \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} + \varepsilon_3(t) u(t, x, y) + f(t, x, y), \quad (1)$$

где t – время, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – коэффициенты диффузии, которые зависят, например, от плотности вещества, температуры и других свойств среды, f – плотность источников диффундирующего вещества. Если диффузия связана, например, с выделением или поглощением тепла, то присутствует слагаемое $\varepsilon_3 u$. Мы будем моделировать изменения величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f$ случайными процессами. При этом решение уравнения также является случайным процессом и наибольший интерес представляют математическое ожидание и дисперсионная функция решения.

На первый взгляд, математическое ожидание можно найти следующим образом. Считаем, что имеют место некоторые реализации случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f$. Выписываем явную формулу для решения и затем находим математическое ожидание.

Чтобы понять трудности, возникающие при таком подходе, рассмотрим простую задачу Коши

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \varepsilon(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$u(0, x) = g(x), \quad (3)$$

где $g(x)$ – заданная функция.

Пусть случайный процесс $\varepsilon(t) > 0$ задан плотностью распределения $p_\varepsilon(t, \tau)$. Для отдельной реализации $\varepsilon(t)$ выписываем решение

$$u_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \int_0^t \varepsilon(\eta) d\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4 \int_0^t \varepsilon(\eta) d\eta}\right\} g(s) ds.$$

Если $\varepsilon > 0$ – случайная величина с плотностью распределения $p_\varepsilon(\tau)$, то

$$M(u_\varepsilon(t, x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t \tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4t\tau}\right\} g(s) ds p_\varepsilon(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Если $\varepsilon(t)$ – случайный процесс, то формально можно выписать формулу

$$M(u_\varepsilon(t, x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi \int_0^t \tau(\eta) d\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4 \int_0^t \tau(\eta) d\eta}\right\} g(s) ds p_\varepsilon(t, \tau) d\tau.$$

Однако непонятен смысл этого выражения, поскольку интеграл от $\tau(\eta)$ является оператором, а не функцией от τ .

Пусть случайный процесс задан вероятностной мерой μ_ε на функциональном пространстве $X(T)$, представляющем множество реализаций процесса $\varepsilon(t)$ на отрезке T . Тогда можно выписать выражение для математического ожидания $M(u_\varepsilon(t, x))$ в следующем виде:

$$M(u_\varepsilon(t, x)) = \int_X \frac{1}{2\sqrt{\pi \int_0^t \tau(\eta) d\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4 \int_0^t \tau(\eta) d\eta}\right\} g(s) ds d\mu_\varepsilon.$$

На взгляд авторов, вычисление этого континуального интеграла является достаточно трудной задачей.

Таким образом, отыскание моментных функций решений дифференциальных уравнений – это сложная задача. Для этого используются и другие методы. Строят уравнения для моментных функций. При этом получается бесконечная система связанных уравнений. Иногда такую систему удастся замкнуть [2], [3]. Получают уравнения для плотности распределения вероятностей решения [4]–[6]. Строят разложения по малым случайным возмущениям [7]. Другие подходы можно найти в [6], [8]–[12].

В настоящей работе мы получаем первую и вторую моментные функции решения уравнения (1) с начальным условием

$$u(t_0, x, y) = g(x, y), \quad (5)$$

где g – случайный процесс, не зависящий от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f$.

Как частный случай, в § 12 мы получим и формулу (4).

Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная ось, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $t \in [t_0, t_1] = T \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $L_1(T)$ – пространство суммируемых на отрезке T функций, $L_\infty(T)$ – пространство существенно ограниченных на T функций [13], [14], $F_{xy}[f](\xi, \eta)$ – преобразование Фурье [1] по переменным (x, y) , $F_{\xi\eta}^{-1}[f](x, y)$ – обратное преобразование Фурье по переменным (ξ, η) , знак $*$ обозначает свертку функций по переменным (x, y) .

Пусть X – банахово пространство функций на отрезке T и $y: X \rightarrow \mathbb{C}$. Если дифференциал Фреше $dy(x_0, h)$ [14, с. 480] этого функционала в точке x_0 имеет вид

$$dy(x_0, h) = \int_T \varphi(t, x_0) h(t) dt,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $\varphi: T \times X \rightarrow \mathbb{C}$, то $\varphi(t, x_0)$ называется *вариационной (функциональной) производной* (см. [15], [16]) функционала y в точке x_0 и обозначается $\delta y(x_0)/\delta x(t)$.

Будем предполагать, что $\varepsilon_1(t) > 0$, $\varepsilon_2(t) > 0$ при $t \in T$, реализации случайных процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ принадлежат пространству $L_\infty(T)$, реализации процесса $f(t, x, y)$ принадлежат пространству $L_\infty(T \times \mathbb{R}^2)$, случайные процессы ε_1 , ε_2 , ε_3 , f заданы характеристическим функционалом [16]

$$\psi(v, w) = M(h(v, w)),$$

где $v = (v_1, v_2, v_3)$, $v \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbb{R}^2)$, M – знак математического ожидания по функции распределения процессов ε_1 , ε_2 , ε_3 , f и

$$h(v, w) = \exp \left\{ i \int_T \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j(s) v_j(s) ds + i \int_T \int_{\mathbb{R}^2} f(s, \tau_1, \tau_2) w(s, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 ds \right\}.$$

§ 2. Переход к детерминированной задаче

Введем вспомогательное отображение

$$Y(v, w, t, x, y) = M(u(t, x, y)h(v, w)), \quad (6)$$

где $t \in T$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $v \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbb{R}^2)$, M – знак математического ожидания по функции распределения случайных процессов ε_1 , ε_2 , ε_3 , f .

Умножив уравнение (1) и начальное условие (5) на $h(v, w)$ и усреднив по функции распределения процессов ε_1 , ε_2 , ε_3 , f , получим

$$\begin{aligned} & M \left(\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} h(v, w) \right) \\ &= M \left(\varepsilon_1(t) \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} h(v, w) \right) + M \left(\varepsilon_2(t) \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} h(v, w) \right) \\ & \quad + M(\varepsilon_3(t) u(t, x, y) h(v, w)) + M(f(t, x, y) h(v, w)), \\ & M(u(t_0, x, y) h(v, w)) = M(g(x, y) h(v, w)), \end{aligned}$$

или в терминах функционала Y , учитывая независимость случайных процессов ε_1 , ε_2 , ε_3 , f от g , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Y(v, w, t, x, y) &= -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(v, w, t, x, y) - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(v, w, t, x, y) \\ & \quad - i \frac{\delta}{\delta v_3(t)} Y(v, w, t, x, y) - i \frac{\delta}{\delta w(t, x, y)} \psi(v, w), \quad (7) \end{aligned}$$

$$Y(v, w, t_0, x, y) = M(g(x, y)) \psi(v, w). \quad (8)$$

Таким образом, для Y получена детерминированная задача (7), (8), причем коэффициенты уравнения (7) не зависят от статистических характеристик процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f, g$. Если известно Y , то легко находятся математическое ожидание $M(u(t, x, y))$ решения задачи (1), (5) и даже корреляционные функции процессов $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), f(t, x, y), u(t, x, y)$. Например,

$$\begin{aligned} M(u(t, x, y)) &= Y(0, 0, t, x, y), \\ M(u(t, x, y)\varepsilon_j(s)) &= -i \frac{\delta Y(v, w, t, x, y)}{\delta v_j(s)} \Big|_{v=0, w=0}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, важно найти решение задачи (7), (8) в малой окрестности точки $(0, 0)$ переменных (v, w) .

§ 3. Решение дифференциального уравнения первого порядка с обычными и вариационными производными

Рассмотрим начальную задачу для линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка с обычными и вариационными производными:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(v, t) = \sum_{j=1}^3 a_j(t) \frac{\delta}{\delta v_j(t)} U(v, t), \quad (10)$$

$$U(v, t_0) = U_0(v), \quad (11)$$

где $t \in T$, $v \in L_1(T)$, $a_1, a_2, a_3: T \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывные функции, кроме того, $U: L_1(T) \times T \rightarrow \mathbb{C}$ – искомое отображение, а $U_0: L_1(T) \rightarrow \mathbb{C}$ задано.

Обозначим через $\chi(a, b, \cdot)$ функцию, определяемую по следующему правилу: $\chi(a, b, s) = \text{sign}(s - a)$ при s , принадлежащем отрезку с концами a и b , и $\chi(a, b, s) = 0$ в противном случае.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $v \in L_1(T)$, функции $a_1, a_2, a_3: T \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывны, $a = (a_1, a_2, a_3)$ и в некоторой окрестности точки $(v + a\chi(t_0, t, \cdot))$ существуют непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta}{\delta v_j(t)} U_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot)), \quad j = 1, 2, 3,$$

при $t \in T$. Тогда

$$U(v, t) = U_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot)) \quad (12)$$

имеет частную производную $\partial U(v, t)/\partial t$, причем

$$\frac{\partial U(v, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 a_j(t) \frac{\delta U_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_j(t)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δt – приращение по t . Заметим, что

$$\chi(t_0, t + \Delta t, \cdot) - \chi(t_0, t, \cdot) = \chi(t, t + \Delta t, \cdot)$$

и выполнены равенства

$$\begin{aligned} \|a_j \chi(t, t + \Delta t, \cdot)\|_{L_1(T)} &= \int_T |a_j(s) \chi(t, t + \Delta t, s)| ds \leq \max_T |a_j(s)| \left| \int_t^{t+\Delta t} ds \right| \\ &= \max_T |a_j(s)| |\Delta t| = O(|\Delta t|), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку существуют непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta U_0(v + a \chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_j(t)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{U(v, t + \Delta t) - U(v, t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} (U_0(v + a \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot)) - U_0(v + a \chi(t_0, t, \cdot))) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot)) \\ &\quad - U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot)) \\ &\quad + U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot)) \\ &\quad - U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot)) \\ &\quad + U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot)) \\ &\quad - U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t, \cdot))) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\int_T \frac{\delta U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot))}{\delta v_1(s)} \right. \\ &\quad \times a_1(s) \chi(t, t + \Delta t, s) ds \\ &\quad + \int_T \frac{\delta U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot))}{\delta v_2(s)} \\ &\quad \times a_2(s) \chi(t, t + \Delta t, s) ds \\ &\quad + \int_T \frac{\delta U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_3(s)} \\ &\quad \times a_3(s) \chi(t, t + \Delta t, s) ds \\ &\quad \left. + o(\max\{\|a_1 \chi(t, t + \Delta t, \cdot)\|_{L_1(T)}, \|a_2 \chi(t, t + \Delta t, \cdot)\|_{L_1(T)}, \right. \\ &\quad \left. \|a_3 \chi(t, t + \Delta t, \cdot)\|_{L_1(T)}\}) \right). \end{aligned}$$

Поскольку выполняется (13), то

$$\begin{aligned} \frac{U(v, t + \Delta t) - U(v, t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left(\text{sign}(\Delta t) \right. \\ &\quad \times \int_t^{t+\Delta t} \frac{\delta U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot))}{\delta v_1(s)} a_1(s) ds \\ &\quad + \text{sign}(\Delta t) \\ &\quad \times \int_t^{t+\Delta t} \frac{\delta U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t + \Delta t, \cdot))}{\delta v_2(s)} a_2(s) ds \\ &\quad + \text{sign}(\Delta t) \\ &\quad \times \int_t^{t+\Delta t} \frac{\delta U_0(v_1 + a_1 \chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2 \chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3 \chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_3(s)} a_3(s) ds + o(|\Delta t|) \left. \right). \end{aligned}$$

Согласно теореме Лебега [17] почти при всех t существует предел последнего равенства при $\Delta t \rightarrow 0$ и

$$\frac{\partial U(v, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 a_j(t) \frac{\delta U_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_j(t)}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 отображение (12) является решением задачи (10), (11)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно подставить (12) в (10), (11).

Рассмотрим теперь начальную задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с обычными и вариационными производными:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(v, t) = \sum_{j=1}^3 a_j(t) \frac{\delta}{\delta v_j(t)} U(v, t) + B(v, t), \quad (14)$$

$$U(v, t_0) = U_0(v), \quad (15)$$

где $t \in T$, $v \in L_1(T)$, $a_1, a_2, a_3: T \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывные функции, кроме того, $U: L_1(T) \times T \rightarrow \mathbb{C}$ – искомое отображение, а $U_0: L_1(T) \rightarrow \mathbb{C}$ и $B: L_1(T) \times T \rightarrow \mathbb{C}$ заданы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 1 и в некоторой окрестности точки $(v + a\chi(s, t, \cdot), s)$ существуют непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta}{\delta v_j(t)} B(v + a\chi(s, t, \cdot), s), \quad j = 1, 2, 3,$$

при $s, t \in T$. Тогда

$$U(v, t) = U_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot)) + \int_{t_0}^t B(v + a\chi(s, t, \cdot), s) ds \quad (16)$$

является решением задачи (14), (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим частную производную по t от $U(v, t)$. Так как выполнены условия теоремы 1, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(v, t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^3 a_j(t) \frac{\delta U_0(v + a\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_j(t)} + B(v + a\chi(t, t, \cdot), t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \frac{\delta}{\delta v_j(t)} B(v + a\chi(s, t, \cdot), s) a_j(t) ds. \end{aligned}$$

Поскольку $\chi(t, t, \cdot) = 0$, то, подставив последнее равенство в (14), получаем верное тождество. Очевидно, выполняется и условие (15). Теорема доказана.

§ 4. Решение дифференциального уравнения третьего порядка с частными и вариационными производными

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} z(v, t, x, y) = & -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(v, t, x, y) - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} z(v, t, x, y) \\ & - i \frac{\delta}{\delta v_3(t)} z(v, t, x, y) + b(v, t, x, y), \end{aligned} \quad (17)$$

$$z(v, t_0, x, y) = z_0(v, x, y), \quad (18)$$

где $v \in L_1(T)$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z: L_1(T) \times T \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – искомое отображение, b и z_0 заданы.

Введем обозначение

$$l(t_0, t) = (i\xi^2 \chi(t_0, t, \cdot), i\eta^2 \chi(t_0, t, \cdot), -i\chi(t_0, t, \cdot)).$$

В формулировке следующей теоремы отображение z_0 и его производные вычисляются в точках $(v + l(t_0, t), x, y)$, а отображение b и его производные вычисляются в точках $(v + l(\tau, t), \tau, x, y)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть существует окрестность $V(r)$ нуля радиусом r в $L_1(T)$ такая, что при всех $v \in V(r)$ в окрестности точки $(v + l(t_0, t), x, y)$ существуют непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta}{\delta v_j(t)} z_0(v + l(t_0, t), x, y), \quad j = 1, 2, 3,$$

в окрестности точки $(v + l(\tau, t), \tau, x, y)$ существуют непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta}{\delta v_j(t)} b(v + l(\tau, t), \tau, x, y), \quad j = 1, 2, 3,$$

при $t, \tau \in T$ и функции

$$\begin{aligned} & |z|, \quad \left| \frac{\delta z_0}{\delta v_1(t)} \right|, \quad \left| \frac{\delta z_0}{\delta v_2(t)} \right|, \quad \left| \frac{\delta z_0}{\delta v_3(t)} \right|, \\ & \left| F_{xy} \left[\frac{\delta z_0}{\delta v_1(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \quad \left| F_{xy} \left[\frac{\delta z_0}{\delta v_2(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \quad \left| F_{xy} \left[\frac{\delta z_0}{\delta v_3(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \\ & |\xi^2 F_{xy}[z_0](\xi, \eta)|, \quad |\eta^2 F_{xy}[z_0](\xi, \eta)|, \\ & \left| \xi^2 F_{xy} \left[\frac{\delta z_0}{\delta v_1(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \quad \left| \eta^2 F_{xy} \left[\frac{\delta z_0}{\delta v_2(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \\ & |b|, \quad \left| \frac{\delta b}{\delta v_1(t)} \right|, \quad \left| \frac{\delta b}{\delta v_2(t)} \right|, \quad \left| \frac{\delta b}{\delta v_3(t)} \right|, \\ & \left| F_{xy} \left[\frac{\delta b}{\delta v_1(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \quad \left| F_{xy} \left[\frac{\delta b}{\delta v_2(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \quad \left| F_{xy} \left[\frac{\delta b}{\delta v_3(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \\ & |\xi^2 F_{xy}[b](\xi, \eta)|, \quad |\eta^2 F_{xy}[b](\xi, \eta)|, \\ & \left| \xi^2 F_{xy} \left[\frac{\delta b}{\delta v_1(t)} \right] (\xi, \eta) \right|, \quad \left| \eta^2 F_{xy} \left[\frac{\delta b}{\delta v_2(t)} \right] (\xi, \eta) \right| \end{aligned}$$

при $t \in T$, $\tau \in T$ ограничены суммируемыми на $\mathbb{R}^2$ функциями. Тогда

$$\begin{aligned} z(v, t, x, y) &= F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy}[z_0(v + l(t_0, t), x, y)](\xi, \eta)](x, y) \\ &\quad + \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy}[b(v + l(\tau, t), \tau, x, y)](\xi, \eta)](x, y) d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

является решением задачи (17), (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует преобразование Фурье по переменным (x, y) решения задачи (17), (18). Применяя преобразование Фурье к уравнениям (17), (18), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_{xy}[z(v, t, x, y)](\xi, \eta) &= -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} (-i\xi)^2 F_{xy}[z(v, t, x, y)](\xi, \eta) \\ &\quad - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} (-i\eta)^2 F_{xy}[z(v, t, x, y)](\xi, \eta) - i \frac{\delta}{\delta v_3(t)} F_{xy}[z(v, t, x, y)](\xi, \eta) \\ &\quad + F_{xy}[b(v, t, x, y)](\xi, \eta), \end{aligned} \quad (20)$$

$$F_{xy}[z(v, t_0, x, y)](\xi, \eta) = F_{xy}[z_0(v, x, y)](\xi, \eta). \quad (21)$$

Данная задача имеет вид (14), (15), при этом ξ и η являются параметрами. Используя формулу (16), находим

$$\begin{aligned} &F_{xy}[z(v, t, x, y)](\xi, \eta) \\ &= F_{xy}[z_0(v + l(t_0, t), x, y)](\xi, \eta) + \int_{t_0}^t F_{xy}[b(v + l(\tau, t), \tau, x, y)](\xi, \eta) d\tau. \end{aligned}$$

Для получения формулы (19) нужно применить к последнему равенству обратное преобразование Фурье.

Предположения теоремы о существовании суммируемых мажорант обеспечивают существование вариационных производных по v_j , $j = 1, 2, 3$, и смешанных производных, а также обеспечивают дифференцируемость под знаками интегралов. Теорема доказана.

§ 5. Математическое ожидание решения задачи (1), (5)

Рассмотрим задачу (7), (8). Эта задача имеет вид (17), (18).

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $M(g(x, y))$ суммируема на $\mathbb{R}^2$, при малых $w \in L_1(T \times \mathbb{R}^2)$ выполнены условия теоремы 4 и в окрестностях точек $(v + l(t_0, t), w)$ и $(v + l(\tau, t), w)$ существуют непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta\psi(v + l(t_0, t), w)}{\delta v_j(t)}, \quad \frac{\delta^2\psi(v + l(\tau, t), w)}{\delta v_j(t)\delta w(\tau, x, y)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

при $\tau, t \in T$. Тогда

$$\begin{aligned} Y(v, w, t, x, y) &= M(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(v + l(t_0, t), w)](x, y) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta\psi(v + l(\tau, t), w)}{\delta w(\tau, x, y)} \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

является решением задачи (7), (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (19) получаем решение задачи (7), (8):

$$Y(v, w, t, x, y) = F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy} [M(g(x, y))\psi(v + l(t_0, t), w)](\xi, \eta)](x, y) - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta\psi(v + l(\tau, t), w)}{\delta w(\tau, x, y)} \right](\xi, \eta) \right](x, y) d\tau.$$

Далее,

$$F_{xy} [M(g(x, y))\psi(v + l(t_0, t), w)](\xi, \eta) = F_{xy} [M(g(x, y))](\xi, \eta)\psi(v + l(t_0, t), w).$$

Поскольку обратное преобразование Фурье от произведения равно свертке обратных преобразований Фурье от сомножителей, то получаем (22). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. При выполнении условий теоремы 5

$$M(u(t, x, y)) = M(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(l(t_0, t), 0)](x, y) - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta\psi(l(\tau, t), 0)}{\delta w(\tau, x, y)} \right](\xi, \eta) \right](x, y) d\tau \quad (23)$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (1), (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается подстановкой $v = 0$, $w = 0$ в формулу (22).

§ 6. Случай независимых процессов $f(t, x, y)$ и $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$

Формула (23) является достаточно общей, не требуется даже независимости случайных процессов f , ε_1 , ε_2 , ε_3 . При независимых процессах можно продвигаться дальше. Пусть $\varphi(v)$ – характеристический функционал процессов ε_1 , ε_2 , ε_3 .

ТЕОРЕМА 7. Если случайный процесс f не зависит от случайных процессов ε_1 , ε_2 , ε_3 , функция $M(f(t, x, y))$ суммируема на $T \times \mathbb{R}^2$, в окрестности точки $(v + l(\tau, t))$ характеристический функционал $\varphi(v)$ случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ имеет непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi(v + l(\tau, t))}{\delta v_j(t)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

при $\tau, t \in T$ и выполнены условия теоремы 6, то

$$M(u(t, x, y)) = M(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(l(t_0, t))](x, y) + \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(l(\tau, t))](x, y) * M(f(\tau, x, y)) d\tau \quad (24)$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (1), (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При независимых случайных процессах f и ε_1 , ε_2 , ε_3 характеристический функционал $\psi(v, w)$ имеет вид $\psi(v, w) = \varphi(v)\psi_f(w)$, где

$$\psi_f(w) = M \left(\exp \left\{ i \int_T \int_{\mathbb{R}^2} f(s, \tau_1, \tau_2) w(s, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 ds \right\} \right)$$

– характеристический функционал случайного процесса f . При этом

$$\begin{aligned}\psi(l(t_0, t), 0) &= \varphi(l(t_0, t))\psi_f(0) = \varphi(l(t_0, t)), \\ \frac{\delta\psi(l(\tau, t), 0)}{\delta w(\tau, x, y)} &= \varphi(l(\tau, t)) \frac{\delta\psi_f(w)}{\delta w(\tau, x, y)} \Big|_{w=0} = i\varphi(l(\tau, t))\mathbf{M}(f(\tau, x, y)).\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}F_{\xi\eta}^{-1}[F_{xy}[\varphi(l(\tau, t))\mathbf{M}(f(\tau, x, y))](\xi, \eta)](x, y) \\ = F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\tau, t))F_{xy}[\mathbf{M}(f(\tau, x, y))](\xi, \eta)](x, y) \\ = F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\tau, t))](x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)).\end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (23), получаем (24). Теорема доказана.

§ 7. Случай равномерно распределенных случайных коэффициентов диффузии

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия теоремы 7, случайные процессы ε_1 , ε_2 , ε_3 независимы и распределены по равномерному закону распределения с характеристическими функционалами

$$\varphi_{\varepsilon_j}(v_j) = \frac{\sin\left(\int_T a_j(s)v_j(s) ds\right)}{\int_T a_j(s)v_j(s) ds} \exp\left\{i \int_T \mathbf{M}(\varepsilon_j(s))v_j(s) ds\right\}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(u(t, x, y)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t)A_2^{2m}(t_0, t)}{(2k+1)!(2m+1)!} \\ &\quad \times \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k}\partial y^{4m}} \mathbf{M}(g(x, y)) * \frac{E(t_0, t, x, y)D_1(t_0, t)}{4\pi\sqrt{\mathbf{M}_1(t_0, t)\mathbf{M}_2(t_0, t)}} \\ &\quad + \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(\tau, t)A_2^{2m}(\tau, t)}{(2k+1)!(2m+1)!} \\ &\quad \times \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k}\partial y^{4m}} \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) * \frac{E(\tau, t, x, y)D_1(\tau, t)}{4\pi\sqrt{\mathbf{M}_1(\tau, t)\mathbf{M}_2(\tau, t)}} d\tau, \quad (26)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_j(t_0, t) &= \int_{t_0}^t a_j(s) ds, \quad \mathbf{M}_j(t_0, t) = \int_{t_0}^t \mathbf{M}(\varepsilon_j(s)) ds, \quad j = 1, 2, \\ E(t_0, t, x, y) &= \exp\left\{-\frac{x^2}{4\mathbf{M}_1(t_0, t)} - \frac{y^2}{4\mathbf{M}_2(t_0, t)}\right\}, \\ D_1(t_0, t) &= \frac{\text{sh} \int_{t_0}^t a_3(s) ds}{\int_{t_0}^t a_3(s) ds} \exp\left\{\int_{t_0}^t \mathbf{M}(\varepsilon_3(s)) ds\right\},\end{aligned}$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (1), (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ независимы, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(l(t_0, t)) &= \varphi_{\varepsilon_1}(i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot))\varphi_{\varepsilon_2}(i\eta^2\chi(t_0, t, \cdot))\varphi_{\varepsilon_3}(-i\chi(t_0, t, \cdot)) \\ &= \frac{\sin(i\xi^2 A_1(t_0, t))}{i\xi^2 A_1(t_0, t)} \exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t)\} \\ &\quad \times \frac{\sin(i\eta^2 A_2(t_0, t))}{i\eta^2 A_2(t_0, t)} \exp\{-\eta^2 M_2(t_0, t)\} D_1(t_0, t) \\ &= \frac{\text{sh}(\xi^2 A_1(t_0, t))}{\xi^2 A_1(t_0, t)} \frac{\text{sh}(\eta^2 A_2(t_0, t))}{\eta^2 A_2(t_0, t)} \exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\} D_1(t_0, t). \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{\text{sh}(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

тогда

$$\frac{\text{sh}(\xi^2 A_1(t_0, t))}{\xi^2 A_1(t_0, t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi^2 A_1(t_0, t))^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) \xi^{4k}}{(2k+1)!}.$$

Учитывая свойства преобразования Фурье, имеем

$$\begin{aligned} &F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t))](x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) \xi^{4k}}{(2k+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_2^{2m}(t_0, t) \eta^{4m}}{(2m+1)!} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\} D_1(t_0, t) \right] (x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) A_2^{2m}(t_0, t) \xi^{4k} \eta^{4m}}{(2k+1)! (2m+1)!} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\} D_1(t_0, t) \right] (x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) A_2^{2m}(t_0, t) \xi^{4k} \eta^{4m}}{(2k+1)! (2m+1)!} \right] (x, y) \\ &\quad * F_{\xi\eta}^{-1} [\exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\}] (x, y) D_1(t_0, t). \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) > 0$ при $t \in T$, согласно [1, с. 110] получаем

$$F_{\xi\eta}^{-1} [\exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\}] (x, y) = \frac{E(t_0, t, x, y)}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}}.$$

Далее находим [17, с. 149]

$$\begin{aligned} &F_{\xi\eta}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) A_2^{2m}(t_0, t) \xi^{4k} \eta^{4m}}{(2k+1)! (2m+1)!} \right] (x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) A_2^{2m}(t_0, t)}{(2k+1)! (2m+1)!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y). \end{aligned}$$

Тогда

$$F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t))](x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) A_2^{2m}(t_0, t)}{(2k+1)! (2m+1)!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y) * \frac{E(t_0, t, x, y) D_1(t_0, t)}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}}.$$

Аналогично,

$$F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\tau, t))](x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(\tau, t) A_2^{2m}(\tau, t)}{(2k+1)! (2m+1)!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y) * \frac{E(\tau, t, x, y) D_1(\tau, t)}{4\pi \sqrt{M_1(\tau, t) M_2(\tau, t)}}.$$

Используя свойства преобразования Фурье, находим

$$\begin{aligned} M(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t))](x, y) &= M(g(x, y)) * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) A_2^{2m}(t_0, t)}{(2k+1)! (2m+1)!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y) \\ &\quad * \frac{E(t_0, t, x, y) D_1(t_0, t)}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(t_0, t) A_2^{2m}(t_0, t)}{(2k+1)! (2m+1)!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} M(g(x, y)) * \frac{E(t_0, t, x, y) D_1(t_0, t)}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\tau, t))](x, y) * M(f(\tau, x, y)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_1^{2k}(\tau, t) A_2^{2m}(\tau, t)}{(2k+1)! (2m+1)!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} M(f(\tau, x, y)) * \frac{E(\tau, t, x, y) D_1(\tau, t)}{4\pi \sqrt{M_1(\tau, t) M_2(\tau, t)}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные равенства в (24), получаем (26). Теорема доказана.

§ 8. Случай нормального закона распределения случайных коэффициентов

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнены условия теоремы 7, случайные процессы ε_1 , ε_2 , ε_3 независимы и распределены по нормальному закону распределения с характеристическим функционалом

$$\varphi(v) = \exp \left\{ i \int_T \sum_{j=1}^3 M(\varepsilon_j(s)) v_j(s) ds - \frac{1}{2} \int_T \int_T \sum_{j=1}^3 b_j(s_1, s_2) v_j(s_1) v_j(s_2) ds_1 ds_2 \right\}, \quad (27)$$

где

$$b_j(s_1, s_2) = M(\varepsilon_j(s_1) \varepsilon_j(s_2)) - M(\varepsilon_j(s_1)) M(\varepsilon_j(s_2))$$

– ковариационная функция случайного процесса $\varepsilon_j(t)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда обобщенное математическое ожидание решения задачи (1), (5) имеет вид

$$\begin{aligned} M(u(t, x, y)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} M(g(x, y)) \\ &\quad * \frac{E(t_0, t, x, y) D(t_0, t)}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}} \\ &+ \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\tau, t) B_2^m(\tau, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} M(f(\tau, x, y)) * \frac{E(\tau, t, x, y) D(\tau, t)}{4\pi \sqrt{M_1(\tau, t) M_2(\tau, t)}} d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} B_j(t_0, t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_j(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad j = 1, 2, \\ D(t_0, t) &= \exp \left\{ \int_{t_0}^t M(\varepsilon_3(s)) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_3(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим

$$\begin{aligned} \varphi(l(t_0, t)) &= \exp \left\{ - \int_{t_0}^t [\xi^2 M(\varepsilon_1(s)) + \eta^2 M(\varepsilon_2(s)) - M(\varepsilon_3(s))] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t [\xi^4 b_1(s_1, s_2) + \eta^4 b_2(s_1, s_2) + b_3(s_1, s_2)] ds_1 ds_2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) + \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} D(t_0, t). \end{aligned}$$

Далее, учитывая свойства преобразования Фурье, находим

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t))](x, y) &= F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) + \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} D(t_0, t) \right] (x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \right] (x, y) D(t_0, t) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} [\exp \{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\}] (x, y) \\ &\quad * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \right] (x, y) D(t_0, t). \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t) > 0$ при $t \in T$, согласно [1, с. 110], [17, с. 149] имеем

$$F_{\xi\eta}^{-1} [\exp \{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\}] (x, y) = \frac{1}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}} E(t_0, t, x, y),$$

$$\begin{aligned}
F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \right] (x, y) \\
= F_{\xi\eta}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t) \xi^{4k} \eta^{4m}}{2^{(k+m)} k! m!} \right] (x, y) \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y).
\end{aligned}$$

Используя полученные равенства, вычислим

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t))](x, y) \\
&= \mathbf{M}(g(x, y)) * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y) \\
&\quad * \frac{E(t_0, t, x, y) D(t_0, t)}{4\pi \sqrt{\mathbf{M}_1(t_0, t) \mathbf{M}_2(t_0, t)}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \mathbf{M}(g(x, y)) * \frac{E(t_0, t, x, y) D(t_0, t)}{4\pi \sqrt{\mathbf{M}_1(t_0, t) \mathbf{M}_2(t_0, t)}}.
\end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}
& F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\tau, t))](x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\tau, t) B_2^m(\tau, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) * \frac{E(\tau, t, x, y) D(\tau, t)}{4\pi \sqrt{\mathbf{M}_1(\tau, t) \mathbf{M}_2(\tau, t)}}.
\end{aligned}$$

Подставляя последние соотношения в (24), получаем (28). Теорема доказана.

§ 9. Нахождение второй моментной функции

Для нахождения второй моментной функции поступим так же, как при нахождении математического ожидания. Введем отображение

$$Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) = \mathbf{M}(u(t, x, y) u(s, \hat{x}, \hat{y}) h(v, w)), \quad (29)$$

где $t \in T$, $s \in T$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \mathbb{R}$, $\hat{y} \in \mathbb{R}$, $v \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbb{R}^2)$, $\mathbf{M}$ – знак математического ожидания по функции распределения случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f$.

Отметим, что $Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y})$ симметрично по переменным (t, x, y) , $(s, \hat{x}, \hat{y})$.

Умножив обе части уравнения (1) и начального условия (5) на $u(s, \hat{x}, \hat{y}) h(v, w)$ и усреднив по функции распределения процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f$, получим

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M} \left(\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} u(s, \hat{x}, \hat{y}) h(v, w) \right) \\
&= \mathbf{M} \left(\varepsilon_1(t) \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} u(s, \hat{x}, \hat{y}) h(v, w) \right) + \mathbf{M} \left(\varepsilon_2(t) \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} u(s, \hat{x}, \hat{y}) h(v, w) \right) \\
&\quad + \mathbf{M}(\varepsilon_3(t) u(t, x, y) u(s, \hat{x}, \hat{y}) h(v, w)) + \mathbf{M}(f(t, x, y) u(s, \hat{x}, \hat{y}) h(v, w)),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}(u(t_0, x, y)u(s, \hat{x}, \hat{y})h(v, w)) = \mathbf{M}(g(x, y)u(s, \hat{x}, \hat{y})h(v, w)),$$

или, в терминах функционала Z , имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) \\ &= -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) \\ & \quad - i \frac{\delta}{\delta v_3(t)} Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) - i \frac{\delta}{\delta w(t, x, y)} Y(v, w, s, \hat{x}, \hat{y}), \quad (30) \\ & Z(v, w, t_0, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) = \mathbf{M}(g(x, y)u(s, \hat{x}, \hat{y})h(v, w)). \quad (31) \end{aligned}$$

Таким образом, для Z получена детерминированная задача, и

$$\mathbf{M}(u(t, x, y)u(s, \hat{x}, \hat{y})) = Z(0, 0, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}). \quad (32)$$

В условии (31) правая часть неизвестна, однако ее удастся найти. В задаче (30), (31) положим $s = t_0$, при этом правая часть условия (31) выражается через известные функции

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} Z(v, w, t, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) \\ &= -i \frac{\delta}{\delta v_1(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(v, w, t, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) - i \frac{\delta}{\delta v_2(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z(v, w, t, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) \\ & \quad - i \frac{\delta}{\delta v_3(t)} Z(v, w, t, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) - i \frac{\delta}{\delta w(t, x, y)} Y(v, w, t_0, \hat{x}, \hat{y}), \\ & Z(v, w, t_0, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) = \mathbf{M}(g(x, y)g(\hat{x}, \hat{y}))\psi(v, w). \end{aligned}$$

Получили задачу для $Z(v, w, t, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y})$. Используя теорему 4, находим

$$\begin{aligned} Z(v, w, t, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) &= F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy} [\mathbf{M}(g(x, y)g(\hat{x}, \hat{y}))\psi(v + l(t_0, t), w)](\xi, \eta)](x, y) \\ & \quad - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta Y(v + l(\tau, t), w, t_0, \hat{x}, \hat{y})}{\delta w(\tau, x, y)} \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau. \end{aligned}$$

По свойствам преобразования Фурье

$$\begin{aligned} Z(v, w, t, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) &= \mathbf{M}(g(x, y)g(\hat{x}, \hat{y})) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(v + l(t_0, t), w)](x, y) \\ & \quad - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta Y(v + l(\tau, t), w, t_0, \hat{x}, \hat{y})}{\delta w(\tau, x, y)} \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая симметричность $Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y})$ по переменным (t, x, y) и $(s, \hat{x}, \hat{y})$, найдем

$$\begin{aligned} Z(v, w, t_0, s, \hat{x}, x, \hat{y}, y) &= Z(v, w, s, t_0, x, \hat{x}, y, \hat{y}) \\ &= \mathbf{M}(g(x, y)g(\hat{x}, \hat{y})) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(v + l(t_0, s), w)](x, y) \\ & \quad - i \int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta Y(v + l(\tau, s), w, t_0, \hat{x}, \hat{y})}{\delta w(\tau, x, y)} \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau. \end{aligned}$$

Меняя в равенстве для $Z(v, w, t_0, s, \hat{x}, x, \hat{y}, y)$ местами x и $\hat{x}$, y и $\hat{y}$, получаем явное представление условия (31):

$$Z(v, w, t_0, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) = \mathbf{M}(g(\hat{x}, \hat{y})g(x, y)) \hat{*} F_{\xi\eta}^{-1}[\psi(v + \hat{l}(t_0, s), w)](\hat{x}, \hat{y}) \\ - i \int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\hat{x}\hat{y}} \left[\frac{\delta Y(v + \hat{l}(\tau, s), w, t_0, x, y)}{\delta w(\tau, \hat{x}, \hat{y})} \right] (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \right] (\hat{x}, \hat{y}) d\tau,$$

где

$$\hat{l}(t_0, t) = (i\hat{\xi}^2 \chi(t_0, t, \cdot), i\hat{\eta}^2 \chi(t_0, t, \cdot), -i\chi(t_0, t, \cdot)),$$

$F_{\hat{x}\hat{y}}[f](\hat{\xi}, \hat{\eta})$ – преобразование Фурье по переменным $(\hat{x}, \hat{y})$, $F_{\xi\eta}^{-1}[f](\hat{x}, \hat{y})$ – обратное преобразование Фурье по переменным $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$, а $\hat{*}$ – свертка по переменным $(\hat{x}, \hat{y})$.

Снова используя теорему 4, получим

$$Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) \\ = F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\mathbf{M}(g(\hat{x}, \hat{y})g(x, y)) \hat{*} F_{\xi\eta}^{-1}[\psi(v + \hat{l}(t_0, s) + l(t_0, t), w)](\hat{x}, \hat{y}) \right. \right. \\ \left. \left. - i \int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\hat{x}\hat{y}} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, \hat{x}, \hat{y})} Y(v + \hat{l}(\tau, s) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + l(t_0, t), w, t_0, x, y) \right] (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \right] (\hat{x}, \hat{y}) d\tau \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) \\ \left. - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} Y(v + l(\tau, t), w, s, \hat{x}, \hat{y}) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau. \right.$$

Используя формулу (22) для $Y(v, w, t, x, y)$, получим

$$Z(v, w, t, s, x, \hat{x}, y, \hat{y}) \\ = \mathbf{M}(g(\hat{x}, \hat{y})g(x, y)) \hat{*}' F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1}[\psi(v + \hat{l}(t_0, s) + l(t_0, t), w)](\hat{x}, \hat{y})](x, y) \\ - i F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\hat{x}\hat{y}} \left[M(g(x, y)) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, \hat{x}, \hat{y})} \psi(v + \hat{l}(\tau, s) + l(t_0, t), w) \right] (x, y) \right] (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \right] (\hat{x}, \hat{y}) d\tau \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) \\ - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[M(g(\hat{x}, \hat{y})) \right. \right. \\ \left. \left. \hat{*} F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(v + \hat{l}(t_0, s) + l(\tau, t), w) \right] (\hat{x}, \hat{y}) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \\ - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\hat{x}\hat{y}} \left[\frac{\delta^2}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, \hat{x}, \hat{y})} \psi(v + \hat{l}(\alpha, s) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + l(\tau, t), w) \right] (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \right] (\hat{x}, \hat{y}) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\alpha d\tau, \right.$$

где $\hat{*}'$ – свертка по переменным (x, y) и $(\hat{x}, \hat{y})$.

Преобразуем последнее равенство, учитывая свойства преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
 & Z(v, w, t, s, x, \widehat{x}, y, \widehat{y}) \\
 &= \mathbf{M}(g(\widehat{x}, \widehat{y})g(x, y)) *' F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(v + \hat{l}(t_0, s) + l(t_0, t), w)](\widehat{x}, \widehat{y}) \right] (x, y) \\
 &\quad - i \int_{t_0}^s \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\widehat{x}\widehat{y}}^{-1} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, \widehat{x}, \widehat{y})} \psi(v + \hat{l}(\tau, s) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + l(t_0, t), w) \right] (x, y) \right] (\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) \right] (\widehat{x}, \widehat{y}) d\tau \\
 &\quad - i \int_{t_0}^t \mathbf{M}(g(\widehat{x}, \widehat{y})) \widehat{*} F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy}^{-1} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(v + \hat{l}(t_0, s) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + l(\tau, t), w) \right] (\widehat{x}, \widehat{y}) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \\
 &\quad - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy}^{-1} \left[F_{\widehat{x}\widehat{y}}^{-1} \left[F_{\widehat{x}\widehat{y}}^{-1} \left[\frac{\delta^2}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, \widehat{x}, \widehat{y})} \psi(v + \hat{l}(\alpha, s) \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + l(\tau, t), w) \right] (\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) \right] (\widehat{x}, \widehat{y}) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\alpha d\tau.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Мы доказали следующий результат.

ТЕОРЕМА 10. Если характеристический функционал $\psi(v, w)$ имеет непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta\psi(v, w)}{\delta v_j(t)}, \quad \frac{\delta^2\psi(v, w)}{\delta v_j(t) \delta w(\tau, x, y)}, \quad \frac{\delta^3\psi(v, w)}{\delta v_j(t) \delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, \widehat{x}, \widehat{y})}, \quad j = 1, 2, 3,$$

при $\alpha, \tau, t \in T$, $\mathbf{M}(g(x, y))$ и $\mathbf{M}(g(x, y)g(\widehat{x}, \widehat{y}))$ суммируемы на $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ соответственно, то (33) является симметрическим по переменным (t, x, y) , $(s, \widehat{x}, \widehat{y})$ решением задачи (30), (31) в обобщенном смысле.

ТЕОРЕМА 11. Пусть выполняются условия теоремы 10. Тогда обобщенная вторая моментная функция решения задачи (1), (5) находится по формуле

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}(u(t, x, y)u(s, \widehat{x}, \widehat{y})) \\
 &= \mathbf{M}(g(\widehat{x}, \widehat{y})g(x, y)) *' F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(\hat{l}(t_0, s) + l(t_0, t), 0)](\widehat{x}, \widehat{y}) \right] (x, y) \\
 &\quad - i \int_{t_0}^s \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\widehat{x}\widehat{y}}^{-1} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, \widehat{x}, \widehat{y})} \psi(\hat{l}(\tau, s) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + l(t_0, t), 0) \right] (x, y) \right] (\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) \right] (\widehat{x}, \widehat{y}) d\tau \\
 &\quad - i \int_{t_0}^t \mathbf{M}(g(\widehat{x}, \widehat{y})) \widehat{*} F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy}^{-1} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(\hat{l}(t_0, s) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + l(\tau, t), 0) \right] (\widehat{x}, \widehat{y}) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\widehat{xy}} \left[\frac{\delta^2}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, \widehat{x}, \widehat{y})} \psi(\widehat{l}(\alpha, s) \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + l(\tau, t), 0) \right] (\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) \right] (\widehat{x}, \widehat{y}) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\alpha d\tau.
\end{aligned} \tag{34}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $v = 0$, $w = 0$ в (33), получим (34). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 12. Если случайный процесс f не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, функции $\mathbf{M}(f(t, x, y))$ и $\mathbf{M}(f(t, x, y)f(s, \widehat{x}, \widehat{y}))$ суммируемы на $T \times \mathbb{R}^2$ и $T \times T \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ соответственно, характеристический функционал $\varphi(v)$ случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ имеет непрерывные по v вариационные производные

$$\frac{\delta \varphi(v)}{\delta v_j(t)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

при $t \in T$ и выполнены условия теоремы 11, то

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}(u(t, x, y)u(s, \widehat{x}, \widehat{y})) \\
& = \mathbf{M}(g(\widehat{x}, \widehat{y})g(x, y)) *' F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(t_0, s) + l(t_0, t))](\widehat{x}, \widehat{y})] (x, y) \\
& + \int_{t_0}^s \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(\tau, s) + l(t_0, t))](x, y)] (\widehat{x}, \widehat{y}) \widehat{*} \mathbf{M}(f(\tau, \widehat{x}, \widehat{y})) d\tau \\
& + \int_{t_0}^t \mathbf{M}(g(\widehat{x}, \widehat{y})) \widehat{*} F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(t_0, s) + l(\tau, t))](\widehat{x}, \widehat{y})] (x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) d\tau \\
& + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(\alpha, s) + l(\tau, t))](\widehat{x}, \widehat{y})] (x, y) *' \mathbf{M}(f(\tau, x, y)f(\alpha, \widehat{x}, \widehat{y})) d\alpha d\tau
\end{aligned} \tag{35}$$

является второй обобщенной моментной функцией решения задачи (1), (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку случайный процесс f не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, то $\psi(v, w) = \varphi(v)\psi_f(w)$, где $\psi_f(w)$ – характеристический функционал случайного процесса f . При этом

$$\begin{aligned}
& \psi(\widehat{l}(t_0, s) + l(t_0, t), 0) = \varphi(\widehat{l}(t_0, s) + l(t_0, t))\psi_f(0) = \varphi(\widehat{l}(t_0, s) + l(t_0, t)), \\
& \frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(\widehat{l}(t_0, s) + l(\tau, t), 0) = \varphi(\widehat{l}(t_0, s) + l(\tau, t)) \frac{\delta \psi_f(w)}{\delta w(\tau, x, y)} \Big|_{w=0} \\
& = i\varphi(\widehat{l}(t_0, s) + l(\tau, t))\mathbf{M}(f(\tau, x, y)).
\end{aligned}$$

Далее, используя свойства преобразования Фурье, получаем

$$\begin{aligned}
& F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [F_{\widehat{xy}} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(\tau, s) + l(t_0, t))\mathbf{M}(f(\tau, \widehat{x}, \widehat{y}))](x, y)] (\widehat{\xi}, \widehat{\eta})] (\widehat{x}, \widehat{y}) \\
& = F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [F_{\widehat{xy}} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(\tau, s) + l(t_0, t))](x, y)\mathbf{M}(f(\tau, \widehat{x}, \widehat{y}))] (\widehat{\xi}, \widehat{\eta})] (\widehat{x}, \widehat{y}) \\
& = F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(\tau, s) + l(t_0, t))](x, y) F_{\widehat{xy}} [\mathbf{M}(f(\tau, \widehat{x}, \widehat{y}))] (\widehat{\xi}, \widehat{\eta})] (\widehat{x}, \widehat{y}) \\
& = F_{\widehat{\xi\eta}}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\widehat{l}(\tau, s) + l(t_0, t))](x, y)] (\widehat{x}, \widehat{y}) \widehat{*} \mathbf{M}(f(\tau, \widehat{x}, \widehat{y})).
\end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} & F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\hat{l}(t_0, s) + l(\tau, t)) \mathbf{M}(f(\tau, x, y))](\hat{x}, \hat{y})](\xi, \eta)](x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\hat{l}(t_0, s) + l(\tau, t))](\hat{x}, \hat{y})](x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy} [F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\hat{x}\hat{y}} [\varphi(\hat{l}(\alpha, s) + l(\tau, t)) \mathbf{M}(f(\tau, x, y) f(\alpha, \hat{x}, \hat{y}))](\hat{\xi}, \hat{\eta})](\hat{x}, \hat{y})](\xi, \eta)](x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\hat{l}(\alpha, s) + l(\tau, t)) \\ &\quad \times F_{\hat{x}\hat{y}} [\mathbf{M}(f(\tau, x, y) f(\alpha, \hat{x}, \hat{y}))](\hat{\xi}, \hat{\eta})](\hat{x}, \hat{y})](\xi, \eta)](x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} [F_{xy} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\hat{l}(\alpha, s) + l(\tau, t))](\hat{x}, \hat{y}) \hat{*} \mathbf{M}(f(\tau, x, y) f(\alpha, \hat{x}, \hat{y}))](\xi, \eta)](x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\hat{l}(\alpha, s) + l(\tau, t))](\hat{x}, \hat{y}) \hat{*} F_{xy} [\mathbf{M}(f(\tau, x, y) f(\alpha, \hat{x}, \hat{y}))](\xi, \eta)](x, y) \\ &= F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\hat{l}(\alpha, s) + l(\tau, t))](\hat{x}, \hat{y})](x, y) *' \mathbf{M}(f(\tau, x, y) f(\alpha, \hat{x}, \hat{y})). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (34), получим (35). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 13. Пусть выполнены условия теоремы 12, случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ независимы и распределены по нормальному закону распределения с характеристическим функционалом (27). Тогда вторая обобщенная функция решения задачи (1), (5) имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(u(t, x, y) u(s, \hat{x}, \hat{y})) \\ &= \frac{D(t_0, t) D(t_0, s)}{(4\pi)^2 \sqrt{\mathbf{M}_1(t_0, t) \mathbf{M}_2(t_0, t) \mathbf{M}_1(t_0, s) \mathbf{M}_2(t_0, s)}} \mathbf{M}(g(\hat{x}, \hat{y}) g(x, y)) \\ &\quad *' \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} E(t_0, t, x, y) \right. \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, s) B_2^m(t_0, s)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial \hat{x}^{4k} \partial \hat{y}^{4m}} E(t_0, s, \hat{x}, \hat{y}) \Big) \\ &+ \int_{t_0}^s \frac{D(t_0, t) D(\tau, s)}{(4\pi)^2 \sqrt{\mathbf{M}_1(t_0, t) \mathbf{M}_2(t_0, t) \mathbf{M}_1(\tau, s) \mathbf{M}_2(\tau, s)}} \left(E(t_0, t, x, y) \right. \\ &\quad * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \mathbf{M}(g(x, y)) \Big) \\ &\quad \times \left(E(\tau, s, \hat{x}, \hat{y}) \hat{*} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\tau, s) B_2^m(\tau, s)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial \hat{x}^{4k} \partial \hat{y}^{4m}} \mathbf{M}(f(\tau, \hat{x}, \hat{y})) \right) d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \frac{D(t_0, s) D(\tau, t)}{(4\pi)^2 \sqrt{\mathbf{M}_1(t_0, s) \mathbf{M}_2(t_0, s) \mathbf{M}_1(\tau, t) \mathbf{M}_2(\tau, t)}} \left(E(t_0, s, \hat{x}, \hat{y}) \right. \\ &\quad \hat{*} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, s) B_2^m(t_0, s)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial \hat{x}^{4k} \partial \hat{y}^{4m}} \mathbf{M}(g(\hat{x}, \hat{y})) \Big) \\ &\quad \times \left(E(\tau, t, x, y) * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\tau, t) B_2^m(\tau, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{D(\tau, t) D(\alpha, s)}{(4\pi)^2 \sqrt{M_1(\tau, t) M_2(\tau, t) M_1(\alpha, s) M_2(\alpha, s)}} \\
& \quad \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\tau, t) B_2^m(\tau, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} E(\tau, t, x, y) \right. \\
& \quad \times \left. \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\alpha, s) B_2^m(\alpha, s)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial \hat{x}^{4k} \partial \hat{y}^{4m}} E(\alpha, s, \hat{x}, \hat{y}) \right) \\
& \quad *' M(f(\tau, x, y) f(\alpha, \hat{x}, \hat{y})) d\alpha d\tau.
\end{aligned} \tag{36}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся формулой (35). Сначала вычислим

$$\begin{aligned}
\varphi(\hat{l}(t_0, s) + l(t_0, t)) &= \exp \left\{ - \int_{t_0}^t [\xi^2 M(\varepsilon_1(s)) + \eta^2 M(\varepsilon_2(s)) - M(\varepsilon_3(s))] ds \right. \\
&\quad - \int_{t_0}^s [\hat{\xi}^2 M(\varepsilon_1(s)) + \hat{\eta}^2 M(\varepsilon_2(s)) - M(\varepsilon_3(s))] ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t [\xi^4 b_1(s_1, s_2) + \eta^4 b_2(s_1, s_2) + b_3(s_1, s_2)] ds_1 ds_2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^s \int_{t_0}^s [\hat{\xi}^4 b_1(s_1, s_2) + \hat{\eta}^4 b_2(s_1, s_2) + b_3(s_1, s_2)] ds_1 ds_2 \right\} \\
&= \exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) + \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \\
&\times \exp \left\{ -\hat{\xi}^2 M_1(t_0, s) - \hat{\eta}^2 M_2(t_0, s) + \frac{\hat{\xi}^4}{2} B_1(t_0, s) + \frac{\hat{\eta}^4}{2} B_2(t_0, s) \right\} D(t_0, t) D(t_0, s).
\end{aligned}$$

Далее, учитывая свойства преобразования Фурье, находим

$$\begin{aligned}
& F_{\xi\eta}^{-1} [F_{\xi\eta}^{-1} [\varphi(\hat{l}(t_0, s) + l(t_0, t))](\hat{x}, \hat{y})] (x, y) \\
&= F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) + \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \right. \right. \\
&\quad \times \exp \left\{ -\hat{\xi}^2 M_1(t_0, s) - \hat{\eta}^2 M_2(t_0, s) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\hat{\xi}^4}{2} B_1(t_0, s) + \frac{\hat{\eta}^4}{2} B_2(t_0, s) \right\} D(t_0, t) D(t_0, s) \right] (\hat{x}, \hat{y}) \right] (x, y) \\
&= D(t_0, t) D(t_0, s) F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \right] (x, y) \\
&\times F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ -\hat{\xi}^2 M_1(t_0, s) - \hat{\eta}^2 M_2(t_0, s) + \frac{\hat{\xi}^4}{2} B_1(t_0, s) + \frac{\hat{\eta}^4}{2} B_2(t_0, s) \right\} \right] (\hat{x}, \hat{y}).
\end{aligned}$$

Поскольку выполнены условия $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) > 0$ при $t \in T$, то, аналогично доказательству теоремы 9, получим

$$\begin{aligned} & F_{\xi\eta}^{-1} \left[\widehat{F_{\xi\eta}^{-1}} [\varphi(\hat{l}(t_0, s) + l(t_0, t))](\hat{x}, \hat{y}) \right] (x, y) \\ &= \frac{D(t_0, t) D(t_0, s)}{(4\pi)^2 \sqrt{\mathbf{M}_1(t_0, t) \mathbf{M}_2(t_0, t) \mathbf{M}_1(t_0, s) \mathbf{M}_2(t_0, s)}} \\ & \times \left(E(t_0, t, x, y) * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y) \right) \\ & \times \left(E(t_0, s, \hat{x}, \hat{y}) * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, s) B_2^m(t_0, s)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial \hat{x}^{4k} \partial \hat{y}^{4m}} \delta(\hat{x}, \hat{y}) \right). \end{aligned}$$

Подставляя последнее соотношение в (35), получаем (36). Теорема доказана.

§ 10. Дисперсионная функция

ТЕОРЕМА 14. Пусть выполнены условия теоремы 11. Тогда обобщенная дисперсионная функция решения задачи (1), (5) имеет вид

$$\begin{aligned} D(u(t, x, y)) &= \mathbf{M}(u^2(t, x, y)) - (\mathbf{M}(u(t, x, y)))^2 \\ &= \mathbf{M}(g^2(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(2l(t_0, t), 0)](x, y) - 2i\mathbf{M}(g(x, y)) \\ & \quad * \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(l(t_0, t) + l(\tau, t), 0) \right] (x, y) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \\ & \quad - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta^2}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, x, y)} \psi(l(\alpha, t) + l(\tau, t), 0) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\alpha d\tau \\ & \quad - (\mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(l(t_0, t), 0)](x, y))^2 \\ & \quad + 2i\mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(l(t_0, t), 0)](x, y) \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta \psi(l(\tau, t), 0)}{\delta w(\tau, x, y)} \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \\ & \quad + \left(\int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta \psi(l(\tau, t), 0)}{\delta w(\tau, x, y)} \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \right)^2. \end{aligned} \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (34), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(u^2(t, x, y)) &= \mathbf{M}(u(t, x, y) u(t, x, y)) = \mathbf{M}(g^2(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} [\psi(2l(t_0, t), 0)](x, y) \\ & \quad - 2i \int_{t_0}^t \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(l(t_0, t) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + l(\tau, t), 0) \right] (x, y) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \\ & \quad - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta^2}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, x, y)} \psi(l(\alpha, t) \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + l(\tau, t), 0) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\alpha d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{M}(g^2(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\psi(2l(t_0, t), 0)](x, y) \\
&\quad - 2i\mathbf{M}(g(x, y)) * \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(l(t_0, t) \right. \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. \left. + l(\tau, t), 0) \right](x, y) \right](\xi, \eta) \right](x, y) d\tau \\
&\quad - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta^2}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, x, y)} \psi(l(\alpha, t) + l(\tau, t), 0) \right](\xi, \eta) \right](x, y) d\alpha d\tau.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (23), получим

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}(u(t, x, y)))^2 &= \left(\mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\psi(l(t_0, t), 0)](x, y) \right. \\
&\quad \left. - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta \psi(l(\tau, t), 0)}{\delta w(\tau, x, y)} \right](\xi, \eta) \right](x, y) d\tau \right)^2 \\
&= (\mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\psi(l(t_0, t), 0)](x, y))^2 \\
&\quad - 2i(\mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\psi(l(t_0, t), 0)](x, y)) \\
&\quad \quad \times \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta \psi(l(\tau, t), 0)}{\delta w(\tau, x, y)} \right](\xi, \eta) \right](x, y) d\tau \\
&\quad - \left(\int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta \psi(l(\tau, t), 0)}{\delta w(\tau, x, y)} \right](\xi, \eta) \right](x, y) d\tau \right)^2.
\end{aligned}$$

Вычислив $\mathbf{M}(u^2(t, x, y)) - (\mathbf{M}(u(t, x, y)))^2$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Если случайный процесс f не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, то справедлива следующая

ТЕОРЕМА 15. Пусть выполнены условия теоремы 12. Тогда

$$\begin{aligned}
D(u(t, x, y)) &= \mathbf{M}(g^2(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(2l(t_0, t))](x, y) \\
&\quad + 2\mathbf{M}(g(x, y)) * \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t) + l(\tau, t))](x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\alpha, t) + l(\tau, t))](x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)f(\alpha, x, y)) d\alpha d\tau \\
&\quad - (\mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t))](x, y))^2 \\
&\quad - 2\mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(t_0, t))](x, y) \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\tau, t))](x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) d\tau \\
&\quad - \left(\int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1}[\varphi(l(\tau, t))](x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) d\tau \right)^2 \tag{38}
\end{aligned}$$

является обобщенной дисперсионной функцией решения задачи (1), (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку случайный процесс f не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, то $\psi(v, w) = \varphi(v)\psi_f(w)$, где $\psi_f(w)$ – характеристический функционал случайного процесса f . Тогда

$$\psi(2l(t_0, t), 0) = \varphi(2l(t_0, t))\psi_f(0) = \varphi(2l(t_0, t)).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \psi(l(t_0, t), 0) &= \varphi(l(t_0, t)), \\ \frac{\delta}{\delta w(\tau, x, y)} \psi(l(t_0, t) + l(\tau, t), 0) &= \varphi(l(t_0, t) + l(\tau, t)) \frac{\delta \psi_f(w)}{\delta w(\tau, x, y)} \Big|_{w=0} \\ &= i\varphi(l(t_0, t) + l(\tau, t)) \mathbf{M}(f(\tau, x, y)), \\ \frac{\delta^2}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, x, y)} \psi(l(\alpha, t) + l(\tau, t), 0) &= \varphi(l(\alpha, t) + l(\tau, t)) \frac{\delta^2 \psi_f(w)}{\delta w(\tau, x, y) \delta w(\alpha, x, y)} \Big|_{w=0} \\ &= -\varphi(l(\alpha, t) + l(\tau, t)) \mathbf{M}(f(\tau, x, y) f(\alpha, x, y)). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (37), получим (38). Теорема доказана.

§ 11. Вторая смешанная моментная функция

ТЕОРЕМА 16. Пусть случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ не зависят от процесса f , $\varphi(v)$ – характеристический функционал процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – имеет непрерывные по v вариационные производные до второго порядка включительно, $\mathbf{M}(g(x, y))$ суммируемо на $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{M}(f(t, x, y))$ суммируемо на $T \times \mathbb{R}^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(u(t, x, y) \varepsilon_j(s)) &= -i \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta \varphi(l(t_0, t))}{\delta v_j(s)} \right] (x, y) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta \varphi(l(\tau, t))}{\delta v_j(s)} \right] (x, y) * \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) d\tau, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся найденным выражением (22) для Y . При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(u(t, x, y) \varepsilon_j(s)) &= \frac{1}{i} \frac{\delta Y(v, w, t, x, y)}{\delta v_j(s)} \Big|_{v=0, w=0} \\ &= \left\{ \frac{1}{i} \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta \psi(v + l(t_0, t), w)}{\delta v_j(s)} \right] (x, y) \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta \psi^2(v + l(\tau, t), w)}{\delta w(\tau, x, y) \delta v_j(s)} \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \right\} \Big|_{v=0, w=0} \\ &= -i \mathbf{M}(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta \varphi(l(t_0, t))}{\delta v_j(s)} \right] (x, y) \\ &\quad - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[F_{xy} \left[\frac{\delta \varphi(l(\tau, t))}{\delta v_j(s)} \mathbf{M}(f(\tau, x, y)) \right] (\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -iM(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta\varphi(l(t_0, t))}{\delta v_j(s)} \right] (x, y) \\
&\quad - i \int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta\varphi(l(\tau, t))}{\delta v_j(s)} F_{xy}[M(f(\tau, x, y))](\xi, \eta) \right] (x, y) d\tau, \quad j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Отсюда следует искомым результат. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 17. Пусть выполнены условия теоремы 16, случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ независимы и распределены по нормальному закону распределения с характеристическим функционалом (27). Тогда вторая смешанная моментная функция решения задачи (1), (5) (в смысле обобщенных функций) имеет вид

$$\begin{aligned}
M(u(t, x, y)\varepsilon_1(s)) &= \frac{D(t_0, t)}{4\pi\sqrt{M_1(t_0, t)M_2(t_0, t)}} \left(M(\varepsilon_1(s))E(t_0, t, x, y) \right. \\
&\quad \left. + C(t_0, t, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(t_0, t, x, y) \right) * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t)B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)}k!m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k}\partial y^{4m}} M(g(x, y)) \\
&\quad + \int_{t_0}^t \frac{D(\tau, t)}{4\pi\sqrt{M_1(\tau, t)M_2(\tau, t)}} \left(M(\varepsilon_1(s))E(\tau, t, x, y) + C(\tau, t, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(\tau, t, x, y) \right) \\
&\quad * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\tau, t)B_2^m(\tau, t)}{2^{(k+m)}k!m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k}\partial y^{4m}} M(f(\tau, x, y)) d\tau,
\end{aligned} \tag{40}$$

$$где C(t_0, t, s) = \int_{t_0}^t b_1(\tau, s) d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим

$$\frac{\delta\varphi(v)}{\delta v_1(s)} = \varphi(v) \left(iM(\varepsilon_1(s)) - \int_T b_1(\tau, s)v_1(\tau) d\tau \right).$$

Найдем теперь

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\varphi(l(t_0, t))}{\delta v_1(s)} &= \exp \left\{ - \int_{t_0}^t [\xi^2 M(\varepsilon_1(s)) + \eta^2 M(\varepsilon_2(s)) - M(\varepsilon_3(s))] ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t [\xi^4 b_1(s_1, s_2) + \eta^4 b_2(s_1, s_2) + b_3(s_1, s_2)] ds_1 ds_2 \right\} \\
&\quad \times \left(iM(\varepsilon_1(s)) - i\xi^2 \int_{t_0}^t b_1(\tau, s) d\tau \right) \\
&= \exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) + \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \\
&\quad \times iD(t_0, t) (M(\varepsilon_1(s)) - \xi^2 C(t_0, t, s)).
\end{aligned}$$

Далее, учитывая свойства преобразования Фурье, находим

$$F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta\varphi(l(t_0, t))}{\delta v_1(s)} \right] (x, y) = F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp \left\{ -\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \left\} iD(t_0, t) (M(\varepsilon_1(s)) - \xi^2 C(t_0, t, s)) \right\} (x, y) \\
 & = iD(t_0, t) F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\} \right. \\
 & \quad \times \exp\left\{ \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} (M(\varepsilon_1(s)) - \xi^2 C(t_0, t, s)) \left. \right] (x, y) \\
 & = iD(t_0, t) F_{\xi\eta}^{-1} [\exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\}] (x, y) \\
 & \quad * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp\left\{ \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \right] (x, y) \\
 & \quad * F_{\xi\eta}^{-1} [M(\varepsilon_1(s)) - \xi^2 C(t_0, t, s)] (x, y).
 \end{aligned}$$

Поскольку выполнены условия $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) > 0$ при $t \in T$, согласно [1, с. 110] имеем

$$F_{\xi\eta}^{-1} [\exp\{-\xi^2 M_1(t_0, t) - \eta^2 M_2(t_0, t)\}] (x, y) = \frac{1}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}} E(t_0, t, x, y).$$

Далее находим [17, с. 149]

$$\begin{aligned}
 & F_{\xi\eta}^{-1} \left[\exp\left\{ \frac{\xi^4}{2} B_1(t_0, t) + \frac{\eta^4}{2} B_2(t_0, t) \right\} \right] (x, y) \\
 & = F_{\xi\eta}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t) \xi^{4k} \eta^{4m}}{2^{(k+m)} k! m!} \right] (x, y) \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t) \xi^{4k} \eta^{4m}}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y), \\
 & F_{\xi\eta}^{-1} [M(\varepsilon_1(s)) - \xi^2 C(t_0, t, s)] (x, y) = F_{\xi\eta}^{-1} [M(\varepsilon_1(s))] (x, y) - F_{\xi\eta}^{-1} [\xi^2 C(t_0, t, s)] (x, y) \\
 & = M(\varepsilon_1(s)) \delta(x, y) + C(t_0, t, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x, y).
 \end{aligned}$$

Используя полученные равенства, вычислим

$$\begin{aligned}
 & M(g(x, y)) * F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta \varphi(l(t_0, t))}{\delta v_1(s)} \right] (x, y) = M(g(x, y)) * \frac{iD(t_0, t) E(t_0, t, x, y)}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}} \\
 & \quad * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t) \xi^{4k} \eta^{4m}}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} \delta(x, y) \\
 & \quad * \left(M(\varepsilon_1(s)) \delta(x, y) + C(t_0, t, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x, y) \right) \\
 & = \frac{iD(t_0, t)}{4\pi \sqrt{M_1(t_0, t) M_2(t_0, t)}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(t_0, t) B_2^m(t_0, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} M(g(x, y)) \\
 & \quad * \left(M(\varepsilon_1(s)) E(t_0, t, x, y) + C(t_0, t, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(t_0, t, x, y) \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}
 F_{\xi\eta}^{-1} \left[\frac{\delta\varphi(l(\tau, t))}{\delta v_1(s)} \right] (x, y) * M(f(\tau, x, y)) \\
 = \frac{iD(\tau, t)}{4\pi\sqrt{M_1(\tau, t)M_2(\tau, t)}} \left(M(\varepsilon_1(s))E(\tau, t, x, y) + C(\tau, t, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(\tau, t, x, y) \right) \\
 * \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_1^k(\tau, t) B_2^m(\tau, t)}{2^{(k+m)} k! m!} \frac{\partial^{4(k+m)}}{\partial x^{4k} \partial y^{4m}} M(f(\tau, x, y)).
 \end{aligned}$$

Подставляя последние соотношения в (39), получим (40). Теорема доказана.

§ 12. Заключение

Заметим, что для задачи (2), (3) в случае, когда ε является случайной величиной, формула (23) примет вид

$$M(u(t, x, y)) = M(g(x)) * F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon}(i\xi^2 t)](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon}(i\xi^2 t)](x-s) M(g(s)) ds,$$

где F_{ξ}^{-1} – обратное преобразование Фурье по переменной ξ , $\psi_{\varepsilon}(v) = M(\exp\{i\varepsilon v\})$ – характеристическая функция случайной величины ε [16].

Вычислим

$$\begin{aligned}
 F_{\xi}^{-1}[\psi_{\varepsilon}(i\xi^2 t)](x) &= F_{\xi}^{-1}[M(\exp\{-\xi^2 t\varepsilon\})](x) = M(F_{\xi}^{-1}[\exp\{-\xi^2 t\varepsilon\}](x)) \\
 &= M\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t\varepsilon}\right\}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t\tau}\right\} p_{\varepsilon}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 M(u(t, x, y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t\tau}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4t\tau}\right\} p_{\varepsilon}(\tau) d\tau M(g(s)) ds \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4t\tau}\right\} M(g(s)) ds p_{\varepsilon}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Таким образом, результат вполне согласуется с (4).

Полученные формулы для математического ожидания (23), второй моментной функции (34) и дисперсионной функции (37) являются довольно общими. Они могут быть использованы для уравнений, коэффициенты которых являются различными случайными процессами. Формулы (22) для Y и (33) для Z позволяют находить некоторые смешанные моментные функции более высокого порядка с помощью вычисления вариационных производных (ср. § 11). Мы в полной мере понимаем, что полученные формулы имеют громоздкий вид, но все больше убеждаемся в том, что они отражают сложность изучаемых задач.

Авторы выражают благодарность покойному профессору В. М. Миллионщикову и профессору Н. Х. Розову за полезные обсуждения результатов.

Список литературы

1. В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
2. А. В. Фурсиков, “Проблема замыкания цепочек моментных уравнений, соответствующих трехмерной системе уравнений Навье–Стокса в случае больших чисел Рейнольдса”, *Докл. АН СССР*, **319**:1 (1991), 83–87; англ. пер.: A. V. Fursikov, “The problem of closure of chains of moment equations corresponding to the three-dimensional Navier–Stokes system in the case of large Reynolds numbers”, *Soviet Math. Dokl.*, **44**:1 (1992), 80–85.
3. А. В. Фурсиков, “Моментная теория для уравнений Навье–Стокса со случайной правой частью”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1273–1315; англ. пер.: A. V. Fursikov, “Moment theory for the Navier–Stokes equations with a random right side”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **41**:3 (1993), 515–555.
4. В. Е. Шапиро, В. М. Логинов, *Динамические системы при случайных воздействиях*, Наука, Новосибирск, 1983.
5. В. И. Тихонов, “Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы”, *Автоматика и телемеханика*, **19**:8 (1958), 717–724.
6. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*, Наука, М., 1980.
7. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Наука, М., 1979; англ. пер.: M. I. Freidlin, A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, Grundlehren Math. Wiss., **260**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1984.
8. Дж. Адомиан, *Стохастические системы*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: G. Adomian, *Stochastic systems*, Math. Sci. Engrg., **169**, Academic Press, New York–London, 1983.
9. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, т. 2, *Механика турбулентности*, Наука, М., 1967; англ. пер.: G. Adomian, *Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence*, v. 2, Dover, Mineola, NY, 2007.
10. В. Г. Задорожний, Л. Н. Строева, “О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **36**:3 (2000), 377–385; англ. пер.: V. G. Zadorozhnyi, L. N. Stroeve, “Moment functions of the solution of the Cauchy problem for a first-order linear differential equation with random coefficients”, *Differ. Equ.*, **36**:3 (2000), 423–432.
11. В. Г. Задорожний, “Моментные функции решения задачи Коши стохастического уравнения теплопроводности”, *Докл. РАН*, **364**:6 (1999), 735–737; англ. пер.: V. G. Zadorozhnyi, “Moment functions of the solution of the Cauchy problem for the stochastic heat equation”, *Dokl. Math.*, **59**:1 (1999), 107–109.
12. В. Г. Задорожний, “О нахождении моментных функций решения задачи Коши уравнения диффузии со случайными коэффициентами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 119–136; англ. пер.: V. G. Zadorozhnyi, “On finding moment functions for the solution of the Cauchy problem for the diffusion equation with random coefficients”, *Izv. Math.*, **66**:4 (2002), 771–788.
13. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
14. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 4-е изд., Наука, М., 1976; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.

15. В. Г. Задорожний, “Дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, содержащее вариационную производную”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:2 (1992), 80–93; англ. пер.: V. G. Zadorozhnii, “A differential equation in a Banach space, containing a variational derivative”, *Siberian Math. J.*, **33**:2 (1992), 247–258.
16. В. Г. Задорожний, *Методы вариационного анализа*, РХД, М.–Ижевск, 2006.
17. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, М., 1965; англ. пер.: G. E. Shilov, *Generalized functions and partial differential equations*, Authorized English edition revised by the author, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1968.

М. М. БОРОВИКОВА (M. M. BOROVIKOVA)
Воронежский государственный университет
E-mail: monnya@yandex.ru

Поступило в редакцию
02.04.2008
12.11.2008

В. Г. ЗАДОРОВНИЙ (V. G. ZADOROZHNIY)
Воронежский государственный университет
E-mail: zador@amm.vsu.ru