Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Абелевы монополи: случай положительной размерности многообразия модулей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 1, 197–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/im279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:00:56

УДК 512.7

Н. А. Тюрин

Абелевы монополи: случай положительной размерности многообразия модулей

В настоящей работе в рамках общей теории Зайберга–Виттена рассматривается случай, когда многообразие модулей решений системы уравнений Зайберга–Виттена имеет положительную четную размерность. В этом случае представлена связь инвариантов Зайберга–Виттена исходного многообразия X с инвариантами связной суммы $Y = X \# d\mathbb{CP}^2$, где $d = (1/2) \vee \dim \mathcal{M}_{SW}$. Вводится понятие комплексной структуры с вырождением, основывающееся на связи спинорной и комплексной геометрий, и обобщается понятие псевдоголоморфной кривой на случай, когда подлежащее многообразие а priori не обладает почти комплексной структурой.

Библиография: 10 наименований.

Введение

Исходное определение инварианта гладкой структуры для четырехмерного компактного ориентируемого риманова многообразия в случае нульмерного многообразия модулей решений системы уравнения Зайберга–Виттена имеет продолжение на случай, когда размерность многообразия модулей положительна и четна. Напомним кратко необходимую конструкцию.

Система уравнений Зайберга–Виттена имеет в качестве конфигурационного пространства множества пар

$$\mathcal{A}(\det W^+) \times \Gamma(W^+), \quad (0.1)$$

где W^+ – спинорное расслоение правой киральности над 4-мерным компактным ориентируемым римановым многообразием X с римановой метрикой g и фиксированной ориентацией. Первый элемент пары – эрмитова связность на детерминантном линейном расслоении $\det W^+$ – вместе со связностью Леви-Чивиты, определяемой римановой метрикой g , задает эрмитову связность на всем $U(2)$ -расслоении W^+ , оператор ковариантного дифференцирования которой в комбинации со спинорным умножением определяет скрученный оператор Дирака

$$D_a : \Gamma(W^+) \rightarrow \Gamma(W^-).$$

Вместе с тем изоморфизм

$$\mathrm{ad} W^\pm \cong \Lambda^\pm, \quad (0.2)$$

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (№ 97-01-00933, № 96-01-00614), INTAS-OPEN (№ 97/2072).

где справа стоят расслоения на (анти)автодуальные 2-формы, определяемые оператором Ходжа $*_g$, позволяет сравнивать автодуальную компоненту формы кривизны $F_a \in \Omega^2(i\mathbb{R})$ эрмитовой связности $a \in \mathcal{A}(\det W^+)$ с оператором из левой части вида $(\phi \otimes \bar{\phi})_0$, где нуль обозначает взятие бесследовой части соответствующего оператора.

Таким образом, для пары (a, ϕ) как элемента пространства (0.1) система уравнений Зайберга–Виттена имеет вид

$$\begin{aligned} D_a(\phi) &= 0, \\ iF_a^+ &= -(\phi \otimes \bar{\phi})_0. \end{aligned} \quad (*)$$

Множество решений этой системы инвариантно относительно действия калибровочной группы $\mathcal{G}$ – всех послойных автоморфизмов детерминантного линейного расслоения, согласованных с эрмитовой структурой,

$$\mathcal{G} = \text{Aut}_h(\det W^+), \quad (0.3)$$

что позволяет рассматривать *многообразие модулей решений* системы Зайберга–Виттена

$$\mathcal{M}_{SW}(g, c) \subset \mathcal{C} = (\mathcal{A}(\det W^+) \times \Gamma(W^+)) / \mathcal{G}$$

в объемлющем пространстве орбит по действию калибровочной группы (0.3) конфигурационного пространства (0.1). Это многообразие модулей (называемое *многообразием модулей абелевых монополей*) а priori зависит от выбора метрики g и $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$, $c \equiv w_2(X) \pmod{2}$, где $w_2(X)$ – второй класс Штиффеля–Уитни подлежащего многообразия.

В случае если подлежащее многообразие X удовлетворяет условию $b_2^+(X) > 0$, многообразие модулей $\mathcal{M}_{SW}(g, c)$ – гладкое вещественное многообразие для общей метрики g , виртуальная размерность которого

$$\text{v.dim } \mathcal{M}_{SW}(g, c) = \frac{1}{4}(c^2 - 2\chi - 3\sigma), \quad (0.4)$$

где χ , σ – эйлерова характеристика и сигнатура подлежащего многообразия соответственно. Более того, $\mathcal{M}_{SW}(g, c)$ компактно и ориентируемо, причем выбор ориентации определяется выбором ориентации на тривиальном вещественном расслоении

$$\det H^0(X, \mathbb{R}) \otimes \det H^1(X, \mathbb{R}) \otimes \det H^+(X, \mathbb{R}). \quad (0.5)$$

Инвариант Зайберга–Виттена для данной $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры определяется следующим образом. Если $\text{v.dim } \mathcal{M}_{SW}(g, c) = 0$, то наше многообразие модулей – просто конечный набор точек, число которых с учетом знаков, определяемых выбранной ориентацией, называется *инвариантом Зайберга–Виттена*, так как в том случае, если подлежащее многообразие X удовлетворяет условию $b_2^+(X) > 1$, это число не меняется при общей вариации метрики, следовательно, является инвариантом гладкой структуры.

Если размерность многообразия модулей абелевых монополей положительна для выбранной $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$, то численный инвариант возможно определить только тогда, когда эта размерность четна.

Именно, многообразие модулей $\mathcal{M}_{SW}(g, c)$ (возможно, после малой деформации) определяет фундаментальный класс $[\mathcal{M}_{SW}] \in H_{2d}(\mathcal{C}^*, \mathbb{Z})$, где объемлющее пространство $\mathcal{C}^*$ есть факторпространство *неприводимых пар* из нашего конфигурационного пространства по действию калибровочной группы

$$\mathcal{C}^* = (\mathcal{A}_h(\det W^+) \times \Gamma_*(W^+)) / \mathcal{G} \quad (0.6)$$

(напомним, что пара неприводима, если спинорная часть ϕ не равна тождественно нулю).

Вместе с тем, во вторых когомологиях объемлющего пространства (0.6) имеется выделенный класс $h \in H^2(\mathcal{C}^*, \mathbb{Z})$, определяемый следующим образом. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и рассмотрим гомоморфизм ограничения калибровочных преобразований в этой точке

$$\mathcal{G} \rightarrow U(1), \quad u \mapsto u|_{x_0}. \quad (0.7)$$

Ядро гомоморфизма (0.7) состоит из набора калибровочных преобразований, тождественных в точке x_0 :

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow U(1) \rightarrow 1, \quad (0.8)$$

то есть

$$\mathcal{G}_0 = \{u \in \mathcal{G} \text{ такие, что } u|_{x_0} = \text{id}\}. \quad (0.9)$$

Таким образом, точная последовательность (0.8) индуцирует главное $U(1)$ -расслоение

$$\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}^*, \quad (0.10)$$

где

$$\mathcal{C}_0 = (\mathcal{A}(\det W^+) \times \Gamma_*(W^+)) / \mathcal{G}_0.$$

Первый класс Черна этого расслоения и дает нам класс $c_1 = h \in H^2(\mathcal{C}^*, \mathbb{Z})$.

Теперь дальнейшая конструкция очевидна: для получения численного инварианта достаточно рассмотреть спаривание

$$N_{SW} = \langle h^d, [\mathcal{M}_{SW}(g, c)] \rangle \in \mathbb{Z}, \quad (0.11)$$

что дает значение инварианта для Spin^C -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае неодносвязной базы имеются другие классы в $H^2(\mathcal{C}^*, \mathbb{Z})$, которые тоже можно использовать для определения инвариантов, однако в настоящей заметке мы будем придерживаться случая, когда подлежащее многообразие односвязно.

Для определения функции Зайберга–Виттена $N_{SW}: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ остается заметить, что условие четности размерности многообразия модулей $\dim \mathcal{M}_{SW}(c)$, $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$, выполнено автоматически для всех Spin^C -структур, если

$$\frac{1}{4}(\chi(X) + \sigma(X)) \in \mathbb{Z}.$$

Основная информация об исходной гладкой структуре на X в рамках теории Зайберга–Виттена сосредоточена в множестве *базисных классов* – конечном множестве Spin^C -структур с нетривиальными значениями функции N_{SW} .

Более подробно основные сведения об инвариантах могут быть найдены в [2], [3], [5], [7] и в оригинальной работе [9].

Цель настоящей статьи – геометризация определения инвариантов Зайберга–Виттена в случае, когда размерность многообразия модулей положительна и четна. Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть X – односвязное компактное ориентируемое риманово многообразие с $b_2^+(X) > 1$. Пусть для некоторой $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c_0 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ многообразие модулей абелевых монополей $\mathcal{M}_X(c_0)$ имеет четную размерность $\dim \mathcal{M}_X(c_0) = 2d$. Тогда инвариант Зайберга–Виттена $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры c_0 равен инварианту Зайберга–Виттена, получаемому из многообразия модулей $\mathcal{M}_Y\left(c_0 + \sum_{k=1}^d 3h_i\right)$ над связной суммой $Y = X \# d\overline{\mathbb{CP}}^2$ (с гладкой структурой, индуцированной конструкцией склейки) для $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c_0 + \sum_{k=1}^d 3h_i \in H^2(Y, \mathbb{Z})$, где h_i – образующие вторых когомологий для каждой проективной плоскости $\overline{\mathbb{CP}}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как для связной суммы $X_1 \# X_2$ имеется соотношение

$$H_2(X_1 \# X_2, \mathbb{Z}) = H_2(X_1, \mathbb{Z}) \oplus H_2(X_2, \mathbb{Z}),$$

мы, допуская некоторую неточность, обозначаем одним и тем же символом класс в $H_2(X_i, \mathbb{Z})$ и его образ в $H_2(X_1 \# X_2, \mathbb{Z})$ для упрощения обозначений.

Утверждение теоремы, представленной выше, на первый взгляд кажется продолжимым на неодносвязный случай – для этого необходимо ввести в рассмотрение связные суммы над вложенными гомологическими сферами, однако снова подчеркнем, что наша цель на сегодня – исследование только односвязного случая.

§ 1. Доказательство теоремы

Начнем с арифметики, лежащей в основе утверждения нашей теоремы.

Пусть X – риманово 4-мерное многообразие, и пусть $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура $c_0 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{4}(c_0^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)) = k > 0. \quad (1.1)$$

Тогда имеется следующая

ЛЕММА. Связная сумма вида $Y = X \# l\overline{\mathbb{CP}}^2$ обладает почти комплексной структурой с каноническим классом вида

$$K = c_0 + \sum_{i=1}^l s_i h_i,$$

где h_i – образующие двумерных когомологий проективных плоскостей, если и только если k , определяемое в (1.1), четно.

Напомним, что по теореме Ву [10] двумерный класс когомологий $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ является каноническим для некоторой почти комплексной структуры, если и только если он удовлетворяет условиям

$$c \equiv w_2(X) \pmod{2}, \quad c^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X). \quad (1.2)$$

Любая $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура удовлетворяет первому условию по определению. Таким образом, нульмерное многообразие модулей абелевых монополей всегда соответствует каноническому классу некоторой почти комплексной структуры.

Для доказательства леммы воспользуемся кохомологическими свойствами связанных сумм, из которых следуют соотношения

$$\begin{aligned}\chi(Y) &= \chi(X) + \chi(l\overline{\mathbb{CP}}^2) - 2 = \chi(X) + l, \\ \sigma(Y) &= \sigma(X) + \sigma(l\overline{\mathbb{CP}}^2) = \sigma(X) - l.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Предположим, что некоторая комбинация

$$c_0 + \sum_{i=1}^l d_i h_i \in H^2(Y, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(l\overline{\mathbb{CP}}^2)$$

является каноническим классом над Y . Тогда из (1.2) и (1.3) имеем равенство

$$\left(c_0 + \sum_{i=1}^l d_i h_i\right)^2 = 2(\chi(X) + l) + 3(\sigma(X) - l),\tag{1.4}$$

причем из свойств $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры над $\overline{\mathbb{CP}}^2$ следует, что все d_i нечетны.

Преобразуя равенство (1.4), получим

$$c_0^2 - \sum_{i=1}^l d_i^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X) - l,$$

и из предположений леммы имеем простое числовое условие

$$4k = \sum_{i=1}^l (d_i^2 - 1).\tag{1.4'}$$

Так как все d_i нечетны, то в правой части равенства (1.4') стоит число, делящееся на 8 для любого l . Следовательно, k обязано быть четным. Для такого $k = 2d$ имеем очевидное решение $l = d$ и $d_i = \pm 3$. Таким образом, мы можем реализовать переход от положительного четномерного многообразия модулей абелевых монополей над X к нульмерному многообразию модулей над связной суммой $Y = X \# d\overline{\mathbb{CP}}^2$, если и только если $\text{v.dim } \mathcal{M}_X = 2d$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрение именно такого вида связанных сумм с проективными плоскостями с обращенной ориентацией, а не с какими-либо другими 4-мерными многообразиями, абсолютно оправдано в теории Зайберга–Виттена. Одна из первых теорем оригинальной работы [9] удостоверяет нас в том, что взятие связной суммы с любым многообразием с положительно определенной или неопределенной формами пересечения убивает инварианты Зайберга–Виттена. А поскольку нас интересуют односвязные многообразия, теорема Дональдсона [1] утверждает, что любое односвязное многообразие с отрицательно определенной формой пересечения диффеоморфно связной сумме нужного числа проективных плоскостей с обращенными ориентациями.

Далее, кроме найденного нами в доказательстве леммы решения уравнения (1.4') существует еще множество решений с $l > d$, но d_i при этом разбиваются на набор ± 3 , состоящий ровно из d элементов, а остальные коэффициенты равны ± 1 . Однако приклейка $\overline{\mathbb{CP}}^2$ к исходному X с добавлением к исходной $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуре $\pm h$ не меняет ни размерности многообразия модулей, ни числовых инвариантов, получаемых из него.

ОТСТУПЛЕНИЕ. Представленный выше факт составляет утверждение ключевой теоремы из работы [4]. Этой конструкцией мы постоянно пользуемся (и в качестве образца ниже, и непосредственно в § 2). Напомним основные моменты этой конструкции. Пусть X – произвольное гладкое многообразие с $b_2^+ > 1$, снабженное римановой метрикой g . Тогда для любого гладкого многообразия N с диагонализированной формой пересечения такого, что $b_1(N) = b_2^+(N) = 0$, и для любой $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ имеется изоморфизм между многообразиями модулей абелевых монополей

$$\mathcal{M}_X(g, c) \cong \mathcal{M}_{Y=X \# N} \left(g', c + \sum_{i=1}^{b_2^-(N)} e_i \right), \quad (1.5)$$

где e_i – диагонализующий базис в $H^2(N, \mathbb{Z})$. Конструкция достаточно проста: к каждому решению уравнения Зайберга–Виттена над исходным многообразием X можно подклеить *единственное решение* этой же системы над многообразием N , состоящим из тривиального спинорного поля и единственной гармонической связности (связности с гармонической формой кривизны). Конформная плоскость “воротника”, связывающего связные слагаемые в Y , позволяет сгладить склейку любого решения над X со стандартным решением над N . Опираясь на эту конструкцию, авторами [4] был построен пример несимплектического многообразия с нетривиальным инвариантом Зайберга–Виттена (см. упоминаемую работу, а также [8]).

Таким образом, по сути мы имеем единственное решение задачи, поставленной в лемме, по модулю неизменности числовых инвариантов.

Вместе с леммой мы получаем арифметическую основу сформулированной теоремы. Для полного доказательства необходимо геометризовать конструкцию нахождения инвариантов в случае, когда многообразие модулей абелевых монополей имеет положительную четную размерность (см. введение). В этом случае мы должны выбирать $d = (1/2) \text{v.dim } \mathcal{M}_X(g, c_0)$ точек $x_1, \dots, x_d \in X$ на подлежащем многообразии, что дает нам d представителей кохомологического класса $h \in H^2(\mathcal{C}^*, \mathbb{Z})$. Геометрически фиксация каждой точки x_i соответствует выделению подмногообразия

$$\mathcal{M}_X(x_i) \subset \mathcal{M}_X,$$

определяемого следующим образом. Реализуем класс Черна расслоения (0.10) как *множество “нулей” подходящего сечения*, т.е. выделяем подмножество в $\mathcal{M}_X$ таких пар (a, ϕ) , что орбиты по действию обеих групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_0$ совпадают. С обной стороны, это влечет очевидное условие на спинорную часть

$$\phi|_{x_i} = 0. \quad (1.6)$$

Однако одно это условие не учитывает присутствие связности в паре (a, ϕ) . Возьмем ковариантную производную

$$d_a \phi \in \Gamma(W^+ \otimes T^*X)$$

и заметим, что для стабильности орбиты $(a, \phi)_{\mathcal{G}_0}$ относительно всей $\mathcal{G}$ необходимо, чтобы стабилизировалась и эта ковариантная производная, т.е.

$$d_a \phi|_{x_i} = 0. \quad (1.7)$$

Но тогда то же выполнено и для любой связности. Действительно, для произвольной связности b разность $d_a - d_b$ является тензором и действует на спинорных полях алгебраически. Поэтому из (1.6) получаем, что

$$\forall b \quad (d_a - d_b) \phi|_{x_i} = 0,$$

откуда из (1.7) имеем

$$\forall b \quad d_b \phi|_{x_i} = 0, \quad (1.7')$$

и отсюда следует, что спинорное поле имеет в точке x_i нуль кратности ≥ 2 .

С другой стороны, привлечение старших степеней ковариантной производной связности a не дает дополнительных условий, поскольку вторая степень $d_a^2 = d_a \cdot d_a$ является тензором (тензором кривизны F_a) и действует алгебраически, т.е. условие

$$d_a(d_a \phi)|_{x_i} = F_a \phi|_{x_i} = 0$$

выполнено автоматически вследствие (1.7), а отсюда следует, что то же верно и для любой старшей степени.

Таким образом, геометрически вычисление инварианта (0.11) означает, что мы выбираем d точек $\{x_1, \dots, x_d\}$ на подлежащем многообразии X и выделяем подмногообразие $\mathcal{M}_X(x_1, \dots, x_d) \subset \mathcal{M}_X$ условием обращения в нуль спинорной части решений в точках x_i с кратностью, не меньшей двух. Это подмногообразие (возможно, после малой деформации) состоит из конечного числа орбит, каждая из которых наследует знак из ориентации объемлющего многообразия, и число этих орбит с учетом знаков дает (0.11).

Заметим, что геометрически эта конструкция согласованна с арифметикой спинорного расслоения. Именно, имеется следующее простое

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Выбор $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$, т.е. выбор первого класса Черна спинорных расслоений $c_1(W^{\pm}) = c$, однозначно определяет топологию этих расслоений, т.е.*

$$\begin{aligned} c_2(W^+) &= \frac{1}{4}(c^2 - 2\chi - 3\sigma), \\ c_2(W^-) &= \chi + \frac{1}{4}(c^2 - 2\chi - 3\sigma). \end{aligned} \quad (1.8)$$

То есть в общем случае выбранные нами d точек $x_1, \dots, x_d \in X$ исчерпывают множество нулей спинорного поля из $\mathcal{M}_X(x_1, \dots, x_d)$.

С этих позиций утверждение нашей теоремы почти очевидно: остается выяснить, какие решения системы уравнений Зайберга–Виттена “выживают” при склейке с $\mathbb{CP}^2$ при выборе продолжения $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры прибавлением $3h \in H^2(\mathbb{CP}^2)$. Образцом служит уже упоминавшаяся конструкция из [4]. В этой конструкции при

добавлении h “выживали” все решения, так как конструкция связной суммы с помощью вклейки воротника (см. [4]) обеспечивала добавление 1 к кратности нуля, так что и ненулевое спинорное поле при приближении вдоль воротника к слагаемому $\overline{\mathbb{CP}}^2$, на котором решение системы Зайберга–Виттена имеет тривиальную спинорную часть, получало нуль кратности 1. В нашем случае мы добавляем $3h$ к исходной $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуре, поэтому в точке склейки спинорное поле обязано иметь нуль порядка 2, так что после добавления 1 над воротником получаем нужную кратность 3.

Остается вопрос об ориентации нового нульмерного многообразия модулей $\mathcal{M}_Y(g, c_0 + \sum_{i=1}^d 3h)$. Ориентация исходного многообразия модулей определялась выбором ориентации на вещественной прямой

$$\det H^0(X, \mathbb{R}) \otimes \det H^1(X, \mathbb{R}) \otimes \det H^+(X, \mathbb{R})$$

(см. введение). Из свойств связной суммы имеем

$$\begin{aligned} H^1(Y, \mathbb{R}) &= H^1(X, \mathbb{R}) \oplus \sum_{i=1}^d H^1(\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathbb{R}) = H^1(X, \mathbb{R}), \\ H^+(Y, \mathbb{R}) &= H^+(X, \mathbb{R}) \oplus \sum_{i=1}^d H^+(\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathbb{R}) = H^+(X, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

из-за тривиальности последних слагаемых, а выбор ориентации на $\det H^0(X, \mathbb{R})$ индуцирует ориентацию и на $\det H^0(Y, \mathbb{R})$, так как любая постоянная на X функция очевидным образом продолжается до постоянной функции на Y .

Таким образом, наше новое нульмерное многообразие модулей согласованно ориентировано с ориентацией исходного многообразия модулей, откуда следует утверждение теоремы.

§ 2. Несимплектические стягивания симплектических многообразий

В этом параграфе представлено следствие из нашей теоремы, отвечающее на следующий естественный вопрос.

Рассмотрим симплектическое многообразие X с симплектической формой ω с каноническим классом $K_\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Известно, что симплектическая структура устойчива относительно симплектических раздутий и стягиваний. Именно, связная сумма вида $Y = X \# \overline{\mathbb{CP}}^2$ обладает симплектической структурой с каноническим классом $K_{\omega'} = K_\omega - h$ (или, иначе говоря, X симплектически продолжимо до Y). С другой стороны, Таубс показал, что если в X имеются гладкие 1-сферы, то эти кривые можно симплектически “стянуть”, получив новое симплектическое многообразие Y , и симплектическая структура на X представима в виде склейки $X = Y \# \overline{\mathbb{CP}}_i^2$ нужное число раз (см. [6]).

Выходя за рамки симплектической геометрии, естественно обобщить вопрос о стягиваниях и раздутиях до следующей конструкции. Пусть X , как и выше, симплектическое многообразие с каноническим классом $K_\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Можно ли

представить X в виде связной суммы вида $Y \# \overline{\mathbb{CP}}^2$, где Y а priori не симплектическое (и, возможно, даже не почти комплексное) многообразие, так, чтобы канонический класс

$$K_\omega \in H^2(X, \mathbb{Z}) = H^2(Y, \mathbb{Z}) \oplus H^2(\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathbb{Z}) \quad (2.1)$$

проецировал на второе прямое слагаемое в разложении (2.1) как $d \cdot h$, где $d \neq \pm 1$?

Ниже представлено обоснование отрицательного ответа на поставленный вопрос.

Пусть X – раманово 4-мерное многообразие со $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структурой c_0 , как в условии теоремы. Пусть для простоты размерность многообразия модулей абелевых монополей $\mathcal{M}_X(c_0)$ равна 2 (минимальное четное положительное число). И пусть связная сумма $Y = X \# \overline{\mathbb{CP}}^2$ обладает симплектической структурой с каноническим классом

$$K_\omega = c_0 + 3h, \quad h \in H^2(\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathbb{Z}). \quad (2.2)$$

Тогда согласно теореме Таубса многообразие модулей $\mathcal{M}_Y(K_\omega)$ определяет инвариант Зайберга–Виттена, равный ± 1 (см. [5]). С другой стороны, мы можем воспользоваться другой важной теоремой Таубса (см. [6]), связывающей инварианты Зайберга–Виттена и инварианты Громова над симплектической базой.

Напомним, что инвариант Громова для некоторого гомологического класса $[\Sigma] \in H_2(Y, \mathbb{Z})$, где Y – симплектическое многообразие с некоторой общей почти комплексной структурой, согласованной с симплектической структурой, определяется как число псевдоголоморфных относительно этой почти комплексной структуры кривых, представляющих данный класс гомологий $[\Sigma] \in H_2(Y, \mathbb{Z})$ и гладко вложенных в Y . Для общей почти комплексной структуры с каноническим классом $K = K_\omega \in H^2(Y, \mathbb{Z})$ пространство псевдоголоморфных кривых для данного класса $[\Sigma] \in H_2(Y, \mathbb{Z})$ имеет вещественную размерность

$$\Sigma^2 - \langle K, \Sigma \rangle \quad (2.3)$$

(см. [6]), и в случае положительной размерности численный инвариант получается выбором общего базисного множества, что выделяет подмногообразие размерности нуль в “полном линейном ряду” псевдоголоморфных кривых, т.е. необходимо выбрать $(1/2)(\Sigma^2 - \langle K, \Sigma \rangle)$ точек на подлежащем многообразии Y и выделить подпространство псевдоголоморфных кривых условием прохождения через эти точки. Ориентация и компактность, как и в случае абелевых монополей, удостоверяет нас в том, что число таких кривых конечно, и их можно подсчитать с учетом знаков. Это дает инварианты Громова симплектического многообразия, являющиеся инвариантами гладкой структуры [6].

Таубс [6] связывает инварианты Громова и инварианты Зайберга–Виттена над симплектической базой. А именно, в симплектическом случае имеется выделенная $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура $c = -K_\omega$ со спинорными расслоениями

$$\begin{aligned} W^+ &= \Lambda^0 \oplus \Lambda^{0,2} = I \oplus K_\omega^*, \\ W^- &= \Lambda^{0,1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

(см. [5]). Все остальные спинорные расслоения получаются подкруткой на двумерные классы когомологий, что соответствует

$$\begin{aligned} W_E^+ &= E \otimes (I \oplus K_\omega^*), \\ W_E^- &= E \otimes \Lambda^{0,1}, \end{aligned} \quad (2.4')$$

где E – произвольное комплексное линейное расслоение. Очевидно (из сравнения (2.4) и (2.4')), что такой подкрутке соответствует $\text{Spin}^\mathbb{C}$ -структура

$$K_E = -K_\omega + 2c_1(E).$$

Тогда инвариант Громова для класса $[\Sigma]$, двойственного по Пуанкаре комологическому классу $c_1(E)$, совпадает с инвариантом Зайберга–Виттена для $\text{Spin}^\mathbb{C}$ -структуры K_E (см. [5], [6]).

Воспользуемся этой связью следующим образом. Над связной суммой $Y = X \# \overline{\mathbb{CP}}^2$ рассмотрим пару изоморфных согласно последней теореме Таубса многообразий модулей:

- многообразие модулей абелевых монополей $\mathcal{M}_Y(c_0 + h)$;
- многообразие модулей псевдоголоморфных кривых $\mathcal{H}_Y(h^*)$, где $h^* \in H_2(Y, \mathbb{Z})$ – класс, двойственный по Пуанкаре образующей вторых когомологий проективной плоскости.

По теореме Таубса [6] эти два многообразия модулей дают одинаковые инварианты Зайберга–Виттена и Громова соответственно. Согласно нашей теореме это значение должно совпадать с инвариантом Зайберга–Виттена, получаемым над Y из многообразия модулей $\mathcal{M}_Y(c_0 + 3h)$, который в свою очередь равен

$$\pm N_{SW}(-c_0 - 3h) = \pm N_{SW}(-K_\omega) = \pm 1.$$

Это следует из первой теоремы Таубса [5] и известного соотношения (см. [9])

$$N_{SW}(-c) = (-1)^{\frac{1}{4}(\chi(X) + \sigma(X))} N_{SW}(c) \quad (2.5)$$

для любой $\text{Spin}^\mathbb{C}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

Конструкция из работы [4] (см. отступление) удостоверяет нас в том, что $\mathcal{M}_X(c_0)$ и $\mathcal{M}_Y(c_0 + h)$ дают одинаковые инварианты Зайберга–Виттена. Таким образом, в предположении возможного продолжения (раздутия) до *симплектического многообразия* наша теорема удостоверяет в том, что инвариант Громова, получаемый из $\mathcal{H}_Y(h^*)$, должен быть равен ± 1 .

Проверить это не представляет труда: пространство $\mathcal{H}_Y(h^*)$ есть пространство псевдоголоморфных (-1) -сфер, гладко вложенных в Y . Это пространство имеет вещественную размерность, вычисляемую по (2.3):

$$\dim H_Y(h^*) = h^2 - h(c_0 + 3h) = 2,$$

и согласно конструкции инвариантов Громова [6] нам надо выбрать некоторую точку $y \in Y$ и посчитать, сколько псевдоголоморфных (-1) -сфер проходит через

эту точку y . Но абсолютно так же, как и в алгебраической геометрии, псевдоголоморфная (-1) -сфера, представляющая данный гомологический класс, если существует, то единственна.

Таким образом, через общую точку не проходит *ни одной* псевдоголоморфной (-1) -сферы, и инвариант Громова, получаемый из $\mathcal{H}_Y(h^*)$, равен нулю. Противоречие.

§ 3. Спинорная и комплексная геометрия

В этом параграфе приведены основы обобщения понятия псевдоголоморфных кривых на случай, когда подлежащее 4-мерное многообразие не обладает а priori почти комплексной структурой. Основа этого обобщения – в глубинной связи между спинорной и комплексной геометриями в случае четырехмерной базы.

Хорошо известно (см., например, [7]), что спинорное поле без нулей (т.е. сечение спинорного расслоения W^+ , не обращающееся в нуль) определяет почти комплексную структуру на подлежащем многообразии X .

Напомним вкратце основные моменты: выбор римановой метрики g и $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ над базой X определяет пару спинорных расслоений $W^{\pm}$ с $c_1(W^{\pm}) = c$. Вторые классы Черна спинорных расслоений однозначно определяются выбранной $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структурой и топологией X , именно

$$c_2(W^+) = \frac{1}{4}(c^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X))$$

(см. утверждение из § 1). Таким образом, спинорное поле без нулей может быть, только если $c_2(W^+) = 0$, а это есть хорошо известное условие того, что $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ является каноническим классом для некоторой почти комплексной структуры на X . В явном виде спинорное поле $\phi \in \Gamma(W^+)$, не обращающееся нигде в нуль, определяет почти комплексную структуру следующим образом. Рассмотрим оператор $(\phi \otimes \bar{\phi})_0 \in \text{ad } W^+$. Тогда согласно отождествлению (0.2) имеем автодуальную 2-форму без нулей

$$\omega_{\phi} = (\phi \otimes \bar{\phi})_0. \quad (3.1)$$

Автодуальная 2-форма может иметь в точке ранг 4 или 0 (общая 2-форма как косимметрический тензор может иметь ранги 4, 2 или 0), но наша форма ω_{ϕ} нулей не имеет, следовательно, в каждой точке она имеет полный ранг. И мы можем восстановить второй элемент в эрмитовой тройке

$$(g, J, \omega_{\phi}), \quad (3.2)$$

так как условие согласованности первого и третьего элементов выполнены (автодуальность ω_{ϕ} относительно метрики g). Восстановление третьего элемента в эрмитовой тройке по любым двум другим – хорошо известная конструкция из линейной алгебры, послойно применяя которую, получим J .

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученная почти комплексная структура согласована с данной ориентацией X . Сечения спинорного расслоения W^- соответствуют почти комплексным структурам, согласованным с противоположной ориентацией X .

Теперь вернемся к нашему случаю, когда $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура $c_0 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ определяет не нулевой второй класс Черна спинорного расслоения W^+ , но положительный и четный

$$c_2(W^+) = \text{v.dim } \mathcal{M}_X (c_1(W^+) = c_0) = 2d.$$

Выберем спинорное поле $\phi \in \Gamma(W^+)$ так, чтобы оно имело ровно d двойных нулей:

$$\{x_1, \dots, x_d\} : \phi|_{x_i \in X} = 0,$$

и кратность нуля в x_i равна двум.

Тогда на проколотом многообразии $X \setminus \{x_1, \dots, x_d\}$ спинорное поле ϕ определяет почти комплексную структуру. Более того, условие четной кратности нулей удостоверяет в том, что обход вокруг любого нуля не меняет ориентации, канонически определяемой в каждой точке проколотого многообразия почти комплексной структурой.

И теперь естественно рассмотреть аналог псевдоголоморфных кривых в построенном нами случае. Именно, выберем произвольный класс $[\Sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ и рассмотрим пространство кривых, реализующих этот класс в X , удостоверяющих следующему условию: в любой точке X , за исключением нашего конечного множества $\{x_i\}$, кривая Σ псевдоголоморфна относительно почти комплексной структуры, определяемой спинорным полем ϕ посредством (3.1) и (3.2), т.е. локально в каждой такой точке x , отличной от x_i , мы имеем оператор почти комплексной структуры J_x на касательном пространстве $T_x X$, и этот оператор переводит в себя подпространство $T_x \Sigma \subset T_x X$:

$$J_x(T_x \Sigma) = T_x \Sigma. \quad (3.3)$$

Очевидно, что требование гладкости в каждой точке для любой такой кривой Σ влекло бы возможность продолжения нашей почти комплексной структуры, определяемой ϕ на проколотом многообразии, на все многообразие X , что противоречило бы топологии спинорного расслоения. Однако мы потребуем гладкости во всех точках X , *кроме выбранного нами набора* $\{x_1, \dots, x_d\}$. В этих точках наша кривая может иметь самопересечения. Обозначим пространство таких кривых $\mathcal{H}_X(P, [\Sigma])$, где под P понимается множество точек $\{x_1, \dots, x_d\}$.

В полной общности изучение пространства таких псевдоголоморфных кривых требует большой работы, которую мы надеемся осуществить в будущем. Пока рассмотрим специальный случай в рамках конструкции, заложенной в условие нашей теоремы. Именно, рассмотрим, как и выше, связную сумму $Y \# d\overline{\mathbb{CP}}^2$, причем склейка производится именно в точках $x_1, \dots, x_d$; тогда многообразие Y допускает существование почти комплексной структуры с каноническим классом $K_\omega = c_0 + \sum_{i=1}^d 3h_i$. Рассмотрим продолжение нашей почти комплексной структуры, определяемой сечением ϕ над проколотым многообразием $X \setminus P$, до настоящей почти комплексной структуры J_ϕ на всем Y с каноническим классом K_ω .

Тогда мы можем рассматривать пространство $\mathcal{H}_X(P, [\Sigma])$ как прямое произведение N пространств псевдоголоморфных кривых: пространства $\mathcal{H}_Y([\Sigma])$ и пространств $\mathcal{H}_Y([\Sigma] - \sum_{L \subset P} h^*)$, где L – все возможные подмножества множества P , а число N есть число всех подмножеств, исключая пустое:

$$N = 2^d - 1. \quad (3.4)$$

Такая стратификация обусловлена тем, что при подклейке в точке x_i проективной плоскости с обращенной ориентацией те кривые, которые проходили через точку x_i , на всей связной сумме будут представлять уже не старый класс $[\Sigma]$, а класс $[\Sigma] - h^*$ (подклеиваются “исключительные дивизоры”). А те кривые, которые не содержали точки склейки x_i , так и останутся представляющими класс $[\Sigma]$.

Таким образом, имеем стратификацию нашего пространства

$$\mathcal{H}_X(P, [\Sigma]) = \mathcal{H}_Y([\Sigma]) \bigcup_{L \subset P} \mathcal{H}_Y([\Sigma], L), \quad (3.5)$$

где для каждого подмножества $L \subset P$, состоящего из точек $L = \{x_1, \dots, x_l\}$, имеем

$$\mathcal{H}_Y([\Sigma], L) = \mathcal{H}_Y\left([\Sigma] - \sum_{i=1}^l h_i^*\right).$$

Если бы для X существовало симплектическое продолжение до симплектического многообразия Y , то о всех этих пространствах можно было бы согласно работам Громова и Таубса сказать, что они являются конечномерными вещественными пространствами четной размерности:

$$\dim \mathcal{H}_Y([\Sigma], L) = [\Sigma]^2 - l - \langle c_0, [\Sigma] \rangle - 3l = [\Sigma]^2 - \langle c_0, [\Sigma] \rangle - 4l. \quad (3.6)$$

Из формул (3.4)–(3.6) видно, что в любом случае самих стратов очень много. Поэтому естественно сузить изучаемые объекты, предложив следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть спинорное поле ϕ имеет набор нулей кратности 2, образующих множество $P = \{x_1, \dots, x_d\}$. Тогда назовем почти комплексную структуру, определяемую ϕ на X вне множества P , *комплексной структурой с вырождением*. Гладкая кривая $\Sigma \subset X$ является *псевдоголоморфной гладкой кривой относительно комплексной структуры с вырождением*, если Σ не содержит ни одной из точек x_i и является псевдоголоморфной кривой в обычном смысле над проколотым многообразием $X \setminus P$.

Обозначим пространство всех таких кривых, представляющих класс $[\Sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z})$, через $\mathcal{H}_X^0([\Sigma], P)$. Очевидно, что это пространство некомпактно. Однако все та же конструкция склейки доставляет нам простую компактификацию. Именно,

$$\overline{\mathcal{H}_X^0([\Sigma], P)} \cong \mathcal{H}_Y([\Sigma])$$

во введенных выше обозначениях (если последнее пространство определено и имеет подходящие свойства над несимплектической базой Y).

Все сказанное выше обретает смысл в рамках замечания Таубса о том, что связь между инвариантами Зайберга–Виттена и Громова имеет место и в несимплектическом случае, когда на базе Y имеется замкнутая 2-форма ω , зануляющаяся в наборе гладко вложенных окружностей (см. [6]).

Заключение

Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что работа над обобщением результата Таубса [6], связавшего инварианты Зайберга–Виттена с инвариантами Громова над симплектическими многообразиями, только начинается. Замечание, приведенное в предыдущем параграфе, пока что имеет смысл только при условии того, что связанная сумма $Y = X \# d\overline{\mathbb{CP}}^2$ обладает *почти симплектической структурой* в смысле Таубса с каноническим классом $K = c_0 + \sum 3h$, или (эквивалентно) что спинорное поле ϕ определяет комплексную структуру с вырождениями, продолжимую до почти комплексной структуры, согласованной с почти симплектической структурой на Y . Остается вопрос о том, какие $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ продолжимы до канонических классов почти симплектических в смысле Таубса структур на связанных суммах вида $X \# d\overline{\mathbb{CP}}^2$.

В заключение я хотел бы высказать огромную признательность всем участникам семинара отдела математической физики МИР АН под руководством А. Г. Сергеева и особенно – С. Немировскому и А. Домрину, за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

1. Donaldson S. An application of gauge theory to four dimensional topology // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 279–315.
2. Donaldson S. The Seiberg–Witten equations and 4-manifold topology // Bulletin of the American mathematical society. 1996. V. 33. № 1. P. 45–70.
3. Kronheimer P., Mrowka T. The genus of embedded surfaces in the projective plane // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 797–808.
4. Kotschick D., Morgan J., Taubes C. Four-manifolds without symplectic structures but with non trivial Seiberg–Witten invariants // Math. Res. Lett. 1995. V. 2. P. 119–124.
5. Taubes C. The Seiberg–Witten invariants and symplectic forms // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 809–822.
6. Taubes C. SW – Gr: from the Seiberg–Witten equations to pseudo-holomorphic curves // J. Amer. Math. Soc. 1996. V. 9. № 3. P. 845–918.
7. Тюрин Н. Необходимое и достаточное условие деформации B -монополя // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 211–224.
8. Тюрин Н. Абелевы монополи и комплексная геометрия // Матем. заметки. 1998. Т. 65. № 3. С. 420–428.
9. Witten E. Monopoles and four-manifolds // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 769–789.
10. Wu W.-T. Sur le classes caracteristique des structures fibrees spheriques // Actual. Sci. Industr. 1952. V. 1183.

E-mail: tyurin@tyurin.mccme.ru
 Московский институт
 инженеров транспорта, г. Москва

Поступило в редакцию
 2.II.1999