Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Севостьянов, К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 1, 159–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:33:41

УДК 517.5

Е. А. Севостьянов

К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности

Доказано, что множества нулевого модуля с весом Q , в частности изолированные особые точки, для открытых дискретных Q -отображений $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ устранимы, если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание либо логарифмические особенности порядка не выше $n - 1$ на соответствующем множестве. Получен аналог хорошо известной теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса, а также аналог теоремы Пикара. В частности, доказано, что в окрестности существенно особой точки открытое дискретное Q -отображение принимает любое значение бесконечно много раз, за исключением, быть может, некоторого множества значений емкости нуль.

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: отображения с ограниченным искажением и их обобщения, открытые дискретные отображения, устранение особенностей отображений, существенные особые точки, теоремы Пикара, Сохоцкого и Лиувилля.

§ 1. Введение

Известный математик, основатель школы по теории отображений Г. Д. Суворов считал, что “сегодня идеалом (и целью!) в теории функций можно считать достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)” [1, с. 325]. Настоящая работа посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые интенсивно изучаются в последнее десятилетие в работах многих специалистов по теории отображений (см., например, [2]–[8]).

Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено неравенство

$$M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma), \quad (1.1)$$

которое выполняется для произвольного семейства Γ кривых γ в области D , где M – конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ – некоторая постоянная. Другими словами, искажение модуля ограничено при квазиконформных отображениях. В терминах емкостей соотношение (1.1) означает, что отображение f искажает емкость любого конденсатора из D в не более чем K раз. Предположим теперь, что в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1.1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x), \quad (1.2)$$

где m – мера Лебега $\mathbb{R}^n$, ρ – произвольная неотрицательная борелевская функция такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ , а $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ – фиксированная вещественнозначная функция. В случае, когда $Q(x) \leq K$ п.в., мы снова приходим к неравенству (1.1). В общем случае последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$,

$$M(f\Gamma) \leq M_Q(\Gamma). \quad (1.3)$$

В настоящей статье рассматривается задача следующего характера: поиск условий, налагаемых на функцию $Q(x)$, участвующую в определении отображения f (см. соотношение (1.2)), при которых f продолжается по непрерывности в точки особого множества. Отображение f предполагается здесь открытым и дискретным; для гомеоморфизмов аналогичные теоремы были получены в [3]. Отметим, что техника исследования отображений с ветвлением во многом отличается от ранее использованных методов. Как мы увидим, из теорем подобного рода вытекает ряд интересных следствий и, в частности, теоремы типа Сохоцкого–Вейерштрасса и Пикара. Точные определения и понятия будут приведены ниже.

Теория Q -гомеоморфизмов – гомеоморфизмов, для которых выполнено (1.2), а также близких к ним классов – развивалась, в основном, для случая, когда мажоранта принадлежала известному пространству BMO (функций ограниченного среднего колебания по Джону–Ниренбергу [9]); см., например, [5] и [6]. Возможность непрерывного продолжения в точки особого множества нулевой емкости для квазирегулярных отображений была показана в работах О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вайсяля (см., например, [10] и [11]).

Необходимо также отметить вклад В.М. Миклюкова в данную теорию (см. [12]). В статье [12] приведен ряд интересных теорем для квазирегулярных отображений, некоторые из которых предшествуют результатам настоящей работы. В частности, показано, что если квазирегулярное отображение $f: \Omega \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет в каждой точке $x_0 \in A$ компактного множества A нулевой емкости существенную особенность, то предельным множеством в x_0 будет все пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. [12, теорема 2]).

В последнее время в работах многих авторов можно найти различные условия для дилатаций, при которых так называемые отображения с конечным искажением допускают непрерывное продолжение на особые множества (см., например, [4], [8]). Более подробно, рассматриваемые отображения f должны удовлетворять целому ряду достаточно громоздких условий типа экспоненциальной интегрируемости дилатаций, которые, в частности, влекут $f \in W_{loc}^{1,n}$. В отличие от упомянутых работ, условия, при которых доказаны все результаты настоящей статьи, имеют более простой вид, а возможность непрерывного продолжения в особые точки показана для более широких классов отображений. Таким образом, избранные методы исследования демонстрируют здесь свою эффективность. В последнем параграфе приводятся некоторые сведения о связях изучаемых классов отображений с другими известными классами и формулируются открытые проблемы.

§ 2. Определения и предварительные замечания

Приведем некоторые определения. Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$, $\text{dist}(A, B)$ – евклидово расстояние между множествами A и B в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Запись $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ предполагает, что отображение f непрерывно в области задания. Запись $G \Subset D$ означает, что $\overline{G}$ – компактное подмножество области D . Говорят, что отображение f *сохраняет ориентацию*, если топологический индекс $\mu(y, f, G)$ больше нуля для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$ (см., например, [13]). Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольное отображение, и пусть существует область $G \Subset D$ такая, что $\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x), f, G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается через $i(x, f)$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x - x_0| < r\}$, $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < r\}$. Для отображения $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, множества $E \subset D$ и $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y в множестве E , т. е. $N(y, f, E) = \text{card}\{x \in E: f(x) = y\}$.

Напомним, что борелева функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int_\gamma \rho(x) ds \geq 1$ для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае записываем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x).$$

Рассмотрим следующее определение (см. [6], [14], [15], а также [7], концепцию весовых пространств Соболева в [16] и работу [17]). Пусть $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является *Q -гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x) \quad (2.1)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и каждой допустимой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Аналогично, непрерывное отображение $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, допускающее ветвления, будем называть *Q -отображением*, если (2.1) выполнено для любого семейства Γ путей γ в D и каждой допустимой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$.

Пусть $Q(x)$ – произвольная неотрицательная измеримая функция. *Модуль с весом Q* определяется следующим образом:

$$M_Q(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x).$$

В соответствии с этим определение Q -отображения можно дать посредством формулы (1.3). Легко видеть, что модуль с весом при фиксированной функции Q обладает теми же свойствами, что и обычный модуль: неотрицательностью, полуаддитивностью, минорированием.

Следуя [18], *конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называем пару $E = (A, C)$, где A – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C – компактное подмножество в A . *Емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\text{cap } E = \text{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n dm(x), \quad (2.2)$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле (2.2), как обычно, $|\nabla u| = (\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2)^{1/2}$. Напомним, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях*, $f \in ACL$, если в любом n -мерном параллелепипеде P с ребрами, параллельными осям координат, таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат.

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ используется *сферическая (хордальная) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\mathbb{R}^n$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Непрерывность отображений в $\overline{\mathbb{R}^n}$ понимается относительно метрики h . Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – открытое дискретное отображение, $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha: [a, c] \rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если $\alpha(a) = x$, $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c]}$ и при $c < c' \leq b$ не существует кривой $\alpha': [a, c'] \rightarrow D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a, c]}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c']}$. Пусть f – открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. [11, гл. II, следствие 3.3]). Нам понадобится следующее утверждение (см. [11, гл. II, предложение 10.2]).

ЛЕММА 2.1. Пусть $E = (A, C)$ – произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$, и пусть Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\text{cap } E = M(\Gamma_E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Понятие конденсатора и емкости конденсатора в $\mathbb{R}^n$ можно перенести в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. [10, п. 2.1]). Лемма 2.1 остается справедливой для конденсаторов в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. [11, гл. II, замечание 10.8, 1]).

Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую емкость*, $\text{cap } C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A такое, что $\text{cap}(A, C) = 0$. Известно (см., например, [13, гл. II, лемма 3.4]), что в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в $\mathbb{R}^n$, содержащего C , будет выполнено $\text{cap}(A, C) = 0$. В противном случае полагаем $\text{cap } C > 0$. Легко видеть, что произвольное одноточечное множество $C = \{a\}$ имеет нулевую емкость. Аналогично тому, как последнее определение введено в $\mathbb{R}^n$, можно определить понятие множества нулевой емкости в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см., например, [10, п. 2.12]). Именно, компактное собственное подмножество F пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$

имеет нулевую емкость, если $\text{cap}(A, F) = 0$ для некоторого открытого множества $A \supset F$, $\bar{A} \neq \bar{\mathbb{R}}^n$. Говорят, что произвольное множество $H \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ имеет нулевую емкость, если каждое его компактное подмножество $F \subset H$ также имеет нулевую емкость. Следующая лемма (см. [10, лемма 3.11] или [11, гл. III, лемма 2.6]) играет ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

ЛЕММА 2.2. Пусть E – компактное собственное подмножество в $\bar{\mathbb{R}}^n$ такое, что $\text{cap} E > 0$. Тогда для каждого $a > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что $\text{cap}(\bar{\mathbb{R}}^n \setminus E, C) \geq \delta$ для произвольного континуума $C \subset \bar{\mathbb{R}}^n \setminus E$, удовлетворяющего условию $h(C) \geq a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если компакт F в $\mathbb{R}^n$, $F \subset D$, имеет нулевую емкость, то при каждом $\alpha > 0$ α -мерная хаусдорфова мера $\Lambda_\alpha(F)$ множества F равна нулю (см. [10, лемма 2.13]). Следовательно, $\text{mes } F = 0$, $\text{Int } F = \emptyset$ и $D \setminus F$ является областью по теореме Менгера–Урысона (см., например, [19, теорема IV.4]).

Пусть $Q(x): D \rightarrow [1, +\infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что множество $A \subset D$ является множеством нулевого модуля с весом Q , $M_Q(A) = 0$, если для семейства Γ_A всех кривых в $\bar{\mathbb{R}}^n$ с началом на множестве A модуль с весом $M_Q(\Gamma_A)$ равен нулю (см. [4], [8]). Поскольку $Q(x) \geq 1$, такие множества, очевидно, также являются и множествами нулевой емкости, в частности нулевой хаусдорфовой размерности. Такие множества полностью разрывны, т. е. любая их связная компонента вырождается в точку.

§ 3. Основная лемма

ЛЕММА 3.1. Пусть $C \subset D$ – замкнутое подмножество области D с $M_Q(C) = 0$, $f: D \setminus C \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное Q -отображение такое, что

$$\text{cap}(\bar{\mathbb{R}}^n \setminus f(D \setminus C)) > 0. \quad (3.1)$$

Предположим, что для некоторой точки $x_0 \in C$ существует $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0)$, $0 < \varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \partial D)$, такое, что

$$\int_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \psi_\varepsilon^n(|x-x_0|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (3.2)$$

где $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ – семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \infty)$ функций, для которых

$$0 < I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t) dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку x_0 .

Здесь непрерывность понимается в смысле пространства $\bar{\mathbb{R}}^n$ относительно хордальной метрики h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Из замечания 2.2 следует, что $D \setminus C$ является областью. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$.

Предположим, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x'_j , принадлежащие $B(\varepsilon_0) \setminus C$, $x_j \rightarrow 0$, $x'_j \rightarrow 0$, такие, что $h(f(x_j), f(x'_j)) \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Положим $r_j = \max\{|x_j|, |x'_j|\} < \varepsilon_0$. По замечанию 2.2 точки x_j и x'_j можно соединить кривой, лежащей в $\overline{B(r_j)} \setminus C$. Обозначим эту кривую через C_j , и пусть $E_j = (B(\varepsilon_0) \setminus C, C_j)$, Γ_{E_j} и Γ_{fE_j} – семейства кривых в смысле обозначений леммы 2.1, а Γ_j^* – семейство всех максимальных поднятий кривых Γ_{fE_j} с началом в C_j при отображении f . Покажем, что $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$.

Предположим противное. Тогда существует кривая $\beta: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE_j} , для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha: [a, c) \rightarrow B(\varepsilon_0) \setminus C$ лежит со своим замыканием $\bar{\alpha}$ в некотором компакте внутри $B(\varepsilon_0) \setminus C$. Следовательно, $\bar{\alpha}$ – компакт в $B(\varepsilon_0) \setminus C$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\bar{\beta}$ – компакт в $f(B(\varepsilon_0) \setminus C)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE_j}$.

Рассмотрим множество $G = \{x \in \mathbb{R}^n: x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k)\}$, где $t_k \in [a, c)$ такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k) = x$. Заметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться рассмотрением монотонных последовательностей t_k . Проще говоря, G – предельное множество $\alpha(t)$ при $t \rightarrow c-0$. Для $x \in G$ в силу непрерывности отображения f будем иметь $f(\alpha(t_k)) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Однако $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \rightarrow \beta(c)$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(\varepsilon_0) \setminus C$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\bar{\alpha}$ (см. [20, с. 8–9])

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) \neq \emptyset$$

ввиду монотонности последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$, таким образом, G является связным согласно [21, гл. I, утверждение (9.12)]. Следовательно, в силу дискретности f множество G не может состоять из более чем одной точки и кривая $\alpha: [a, c) \rightarrow B(\varepsilon_0) \setminus C$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha: [a, c] \rightarrow B(\varepsilon_0) \setminus C$. Тогда имеем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$, т.е. $\alpha(c) \in f^{-1}(\beta(c))$. С другой стороны, можно построить (см. [11, гл. II, следствие 3.3]) максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Наконец, объединяя поднятия α и α' , получаем новое поднятие α'' кривой β , которое определено на $[a, c')$, что противоречит максимальнойности поднятия α .

Таким образом, имеем $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Заметим, что $\Gamma_{fE_j} > f\Gamma_j^*$, следовательно, $M(\Gamma_{fE_j}) \leq M(f\Gamma_j^*) \leq M(f\Gamma_{E_j})$. Поэтому по лемме 2.1 получаем

$$\text{cap } fE_j \leq \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x) \quad (3.3)$$

для каждой допустимой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma_{E_j}$. Заметим, что семейство Γ_{E_j} разбивается на три подсемейства:

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_j^1} \cup \Gamma_{E_j^2} \cup \Gamma_{E_j^3}, \quad (3.4)$$

где $\Gamma_{E_j^1}$ – семейство всех спрямляемых кривых $\alpha(t): [a, c) \rightarrow B(\varepsilon_0) \setminus C$ с началом в C_j таких, что $\text{dist}(\alpha(t), C) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow c-0$, $\Gamma_{E_j^2}$ – семейство всех спрямляемых кривых $\alpha(t): [a, c) \rightarrow B(\varepsilon_0) \setminus C$ с началом в C_j таких, что

$\text{dist}(\alpha(t), \partial B(\varepsilon_0)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow c - 0$, а $\Gamma_{E_j^3}$ – подсемейство всех неспрямляемых кривых семейства Γ_{E_j} . Заметим, что по определению Q -отображения в силу условия $M_Q(C) = 0$ имеем

$$M(f\Gamma_{E_j^1}) = 0. \quad (3.5)$$

Рассмотрим кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : r_j < |x| < \varepsilon_0\}$. По теореме Лузина при каждом $\varepsilon > 0$ существует борелевская функция $\psi_\varepsilon^*(t) = \psi_\varepsilon(t)$ для п.в. t . Тогда семейство

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \psi_{r_j}^*(|x|)/I(r_j), & x \in A_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_j, \end{cases}$$

состоит из борелевских функций и, кроме того, для любой кривой γ семейства $\Gamma_{E_j^2}$

$$\int_\gamma \rho_j ds \geq \frac{1}{I(r_j)} \int_{r_j}^{\varepsilon_0} \psi_{r_j}^*(t) dt = 1 \quad (3.6)$$

(см., например, [22, теорема 5.7]). Отсюда следует, что $\rho_j \in \text{adm } \Gamma_{E_j^2}$. Заметим также, что $\rho_j \in \text{adm } \Gamma_{E_j^3}$. Таким образом, в силу (3.2)–(3.6) имеем

$$\begin{aligned} \text{cap } fE_j &\leq \int_{r_j < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \rho_j^n(x) dm(x) \\ &= \frac{1}{I^n(r_j)} \int_{r_j < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi_{r_j}^n(|x|) dm(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, $h(fC_j) \geq a$, и в силу условия (3.1) по лемме 2.2 имеем $\text{cap } fE_j \geq \delta > 0$, где δ не зависит от j . Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 4. Устранение особенностей модуля нуль с весом

Говорят, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in L_{\text{loc}}^1(D)$, имеет *ограниченное среднее колебание* в области D , $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int_B |\varphi(x) - \varphi_B| dm(x) < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B \subset D$ и $\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int_B \varphi(x) dm(x)$ есть среднее значение функции φ в шаре B (см., например, [9]). С целью упрощения записи мы обозначаем в дальнейшем

$$\oint_A f(x) dm(x) := \frac{1}{|A|} \int_A f(x) dm(x),$$

где, как обычно, $|A|$ – лебегова мера множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L_{\text{loc}}^p(D)$, $p \in [1, \infty)$ (см., например, [9]). Следуя работе [3], говорим, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$, и записываем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty, \quad (4.1)$$

где $\bar{\varphi}_\varepsilon = \oint_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$.

Заметим, что при выполнении условия (4.1) возможна ситуация, когда $\bar{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Также говорим, что $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ – функция *конечного среднего колебания* в D , и записываем $\varphi \in FMO(D)$, или $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$. В частности, если в точке $x_0 \in D$ выполнено соотношение $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x)| dm(x) < \infty$, то функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 [3]. Очевидно, $BMO \subset FMO$. Версию следующей леммы можно найти, например, в [3, следствие 2.3].

ЛЕММА 4.1. Пусть $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 2$, – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} \frac{\varphi(x) dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

для некоторого $\varepsilon_0 \leq \text{dist}(0, \partial D)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $C \subset D$ – замкнутое подмножество области D такое, что $M_Q(C) = 0$, и пусть $f: D \setminus C \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное Q -отображение такое, что $\text{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(D \setminus C)) > 0$. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in C$, то f имеет непрерывное продолжение, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x_0 \in C$. Пусть $\varepsilon_0 < \min\{e^{-1}, \text{dist}(x_0, \partial D)\}$. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , то по лемме 4.1 для функции $0 < \psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x - x_0|) dm(x) &= \int_{\varepsilon < |y| < \varepsilon_0} Q(x_0 + y) \psi^n(|y|) dm(y) \\ &= \int_{\varepsilon < |y| < \varepsilon_0} \frac{Q(x_0 + y)}{(|y| \log \frac{1}{|y|})^n} dm(y) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Заметим, что

$$I(\varepsilon) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t) dt = \log \left(c \log \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad (4.3)$$

где $c = \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}$. На основании соотношений (4.2) и (4.3) теперь получаем, что для выбранной функции ψ в точности выполнено соотношение (3.2). Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. В частности, если в каждой точке $x_0 \in C$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) dm(x) < \infty, \quad (4.4)$$

то f имеет непрерывное продолжение, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть C – замкнутое подмножество области D такое, что $M_Q(C) = 0$, $f: D \setminus C \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное Q -отображение, $\text{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(D \setminus C)) > 0$. Если в каждой точке $x_0 \in C$ при $r \rightarrow 0$

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right), \quad (4.5)$$

где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение $Q(x)$ на сфере $|x - x_0| = r$, то f имеет непрерывное продолжение, $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая $\psi_\varepsilon(t) \equiv \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$ в лемме 3.1, получаем заключение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. В частности, если в каждой точке $x_0 \in C$

$$Q(x) = O\left(\log \frac{1}{|x - x_0|}\right)^{n-1} \quad \text{при } x \rightarrow x_0, \quad (4.6)$$

то f имеет непрерывное продолжение, $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

§ 5. Об изолированных сингулярностях

Наиболее интересным, на взгляд автора, является частный случай изолированной особой точки. Следующее утверждение показывает, что в случае изолированной особой точки $a \in \mathbb{R}^n$ из условий вида (3.2) следует, что множества вида $A = \{a\}$ являются также и множествами с $M_Q(A) = 0$.

ЛЕММА 5.1. Пусть D_0 – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая точку $x_0 = 0$. Предположим, что существует $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (5.1)$$

где $\psi(t)$ – неотрицательная на $(0, \infty)$ функция такая, что $\psi(t) > 0$ п.в. и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi(t) dt < \infty$$

для всех (фиксированных) ε' из $(0, \varepsilon_0]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Тогда $M_Q(\{0\}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Γ_0 семейство всех кривых в $\mathbb{R}^n$ с началом в точке $x_0 = 0$. Нужно доказать, что $M_Q(\Gamma_0) = 0$.

Заметим, что $\Gamma_0 > \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$, где Γ_i – семейство кривых, соединяющих точку $x_0 = 0$ со сферой $0 < |x| = r_i < \varepsilon_0$, r_i – некоторая последовательность и $r_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому, как и в случае обычного конформного модуля (см., например, [22]), достаточно доказать, что

$$M_Q(\Gamma_i) = 0. \quad (5.2)$$

Зафиксируем $i \geq 1$ и рассмотрим произвольное $\varepsilon \in (0, r_i)$. Рассмотрим кольцо $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < r_i\}$. По теореме Лузина существует борелевская функция $\psi_*(t) = \psi(t)$ для п.в. t . Следовательно, функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_*(|x|)/I(\varepsilon, r_i), & x \in A_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon, \end{cases}$$

корректно определена и является борелевской. Кроме того, для любого $\gamma \in \Gamma_i$

$$\int_{\gamma} \rho_\varepsilon |dx| \geq \frac{1}{I(\varepsilon, r_i)} \int_{\varepsilon}^{r_i} \psi_*(t) dt = 1$$

(см. [22, теорема 5.7]). Следовательно, $\rho_\varepsilon \in \text{adm } \Gamma_i$. Положим

$$\mathcal{F}(\varepsilon) := \frac{1}{I(\varepsilon, r_i)^n} \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi_*^n(|x|) dm(x). \quad (5.3)$$

Покажем, что $\mathcal{F}(\varepsilon) \rightarrow 0$. Учитывая (5.1), имеем следующее соотношение:

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi_*^n(|x|) dm(x) = G(\varepsilon) \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_*(t) dt \right)^n,$$

где $G(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = G(\varepsilon) \left(1 + \frac{\int_{r_i}^{\varepsilon_0} \psi_*(t) dt}{\int_\varepsilon^{r_i} \psi_*(t) dt} \right)^n,$$

где $\int_{r_i}^{\varepsilon_0} \psi_*(t) dt < \infty$ – фиксированное число, а $\int_\varepsilon^{r_i} \psi_*(t) dt \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку величина интеграла слева в (5.1) увеличивается при уменьшении ε . Таким образом, $\mathcal{F}(\varepsilon) \rightarrow 0$. Отсюда и из (5.3) следует, что

$$\int_{\varepsilon < |x| < r_i} Q(x) \rho_\varepsilon^n(x) dm(x) \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для некоторого семейства допустимых функций $\{\rho_\varepsilon\} \in \text{adm } \Gamma_i$, $\varepsilon \in (0, r_i)$. Соотношение (5.2) следует теперь (в силу минорирования) предельным переходом из (5.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, – открытое дискретное Q -отображение такое, что $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0$. Предположим, что существует $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (5.5)$$

где $\psi(t)$ – неотрицательная на $(0, \infty)$ функция такая, что $\psi(t) > 0$ п.в. и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int_\varepsilon^{\varepsilon'} \psi(t) dt < \infty$$

для всех (фиксированных) ε' из $(0, \varepsilon_0)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Тогда f имеет непрерывное продолжение, $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, в $\mathbb{B}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 5.1 и 3.1.

Следующие утверждения непосредственно вытекают из леммы 5.2.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение такое, что $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) > 0$. Если

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \quad (5.6)$$

при $r \rightarrow 0$, где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение $Q(x)$ на сфере $|x - x_0| = r$, то f имеет непрерывное продолжение, $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

В частности, если $Q(x) \leq [\log \frac{1}{|x-x_0|}]^{n-1}$ для любого $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ при некотором $\varepsilon(x_0)$, то выполнено (5.6) и, значит, справедливо заключение теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение такое, что $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) > 0$. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , то f имеет непрерывное продолжение, $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. В частности, если

$$\int_{|x-x_0|<\varepsilon} Q(x) dm(x) = O(\varepsilon^n) \quad (5.7)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, то f имеет непрерывное продолжение в D .

§ 6. Аналог теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D в $\mathbb{R}^n$ называется *устранимой*, если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Если $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом*. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если не существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если x_0 – существенная особая точка отображения f , то $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) = 0$ для любой окрестности U точки x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из теорем 5.2, 5.1 и следствия 5.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Тогда точка x_0 является *устранимой* для отображения f в том и только в том случае, когда f ограничено в некоторой окрестности U точки x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка x_0 *устранима*, т. е. существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < \infty$. Тогда $|f(x)| \leq |A| + 1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0 . Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)| \leq M$ для некоторого $M \in (0, \infty)$ и всех $x \in U \setminus \{x_0\}$. Тогда $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$ и заключение следует из теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$ для некоторой окрестности U точки x_0 , то f может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного Q -отображения $f: D \cup \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения, $f: D \cup \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, в силу теорем 5.2, 5.1 и следствия 5.1. Модуль семейства кривых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку, равен нулю (см. [22, п. 7.9]), откуда следует, что продолженное отображение $f: D \cup \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является Q -отображением.

Известно, что дискретные открытые отображения в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, либо сохраняют ориентацию, либо антисохраняют (см., например, [11, гл. I, § 4]). Пусть f для определенности сохраняет ориентацию. Покажем, что продолженное отображение сохраняет ориентацию, открыто и дискретно. Обозначим, как обычно, через $B_f(D)$ множество точек ветвления отображения f в области D , а через $B_f(D')$ – множество точек ветвления отображения f в области $D' = D \cup \{x_0\}$. Если x_0 – точка локальной гомеоморфности отображения f , доказательство очевидно.

Пусть $x_0 \in B_f(D')$. По теореме Чернавского верно равенство $\dim B_f(D) = \dim f(B_f(D)) \leq n - 2$ (см., например, [11, гл. I, теорема 4.6]), где $\dim$ обозначает топологическую размерность множества [19]. Тогда получим

$$\dim f(B_f(D')) \leq n - 2, \quad (6.1)$$

так как $f(B_f(D')) = f(B_f(D)) \cup \{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f(B_f(D))$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает $n - 2$ (см. [19, гл. III, § 3, следствие 1]).

Пусть G – область в D' , $G \subseteq D'$, и пусть $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда в силу (6.1) существует точка $y_0 \notin f(B_f(D'))$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, что и y . В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная, на каждой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$ (см. [13]) будем иметь

$$\mu(y, f, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x \in G \cap f^{-1}(y_0)} i(x, f) > 0.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D' .

Наконец, для любого $y \in f(D')$ в силу дискретности отображения f в области D множество $\{f^{-1}(y)\}$ не более чем счетно, и потому $\dim\{f^{-1}(y)\} = 0$. Следовательно, согласно [23, с. 333] отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 6.4 (аналог теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса). Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если x_0 – существенная особая точка отображения f , то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$ такая, что $f(x_k) \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что заключение теоремы неверно для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$h(f(x), a) \geq \varepsilon_0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\},$$

и по неравенству треугольника имеем $d_0 = h(B(a, \varepsilon_0/2), f(U \setminus \{x_0\})) \geq \varepsilon_0/2$. Следовательно, $\text{sar}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$. Отсюда по теореме 6.1 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0 , что противоречит первоначальному предположению.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть x_0 – изолированная точка границы D , $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если x_0 – существенная особая точка отображения f , то существует множество C типа F_σ нулевой емкости в $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что

$$N(y, f, U \setminus \{x_0\}) = \infty \quad (6.2)$$

для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0 . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(1/k) \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \dots$. Полагаем

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k). \quad (6.3)$$

По теореме 6.1 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (6.3) имеет нулевую емкость. Тогда C также имеет нулевую емкость (см., например, [25, с. 126]).

Осталось доказать соотношение (6.2). Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k). \quad (6.4)$$

Из (6.4) вытекает существование подпоследовательности $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $x_{k_i} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $f(x_{k_i}) = y$, $i = 1, 2, \dots$. Теорема доказана.

§ 7. Аналоги теоремы Пикара

Пусть D – область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, содержащая некоторую окрестность точки $x_0 = \infty$. Будем говорить, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ , если $\varphi^*(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0.

Заметим, что отображение $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ подобно отображает сферу $S(0, r)$ на сферу $S(0, 1/r)$, откуда следует, что $|J(x, \psi)| = (1/|x|)^{2n}$. Таким образом, прибегая к замене переменной в интеграле, мы можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ в следующем виде.

Будем говорить, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ , и записывать $\varphi \in FMO(\infty)$, если при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right),$$

где $\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \int_{|x|>R} \varphi(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}$, а Ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Аналогично, в случае бесконечности можно переформулировать условия вида (5.6), (5.7) соответственно:

$$\int_{S(0,R)} Q(x) dS = O([\log R]^{n-1}), \quad (7.1)$$

$$\int_{|x|>R} Q(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right). \quad (7.2)$$

Таким образом, на основании теорем 5.2, 5.1 и следствия 5.1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.1 (аналог теоремы Лиувилля). *Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное Q -отображение, функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (7.1), (7.2). Тогда $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) = 0$. В частности, f не может отображать все $\mathbb{R}^n$ на ограниченную область.*

При $n = 2$ теоремы об устранении особенностей могут быть сформулированы в другой, более удобной форме. Обозначим $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть $f: \Delta \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – открытое дискретное Q -отображение, которое не принимает по крайней мере три значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Если $Q(z)$ имеет конечное среднее колебание в нуле либо удовлетворяет одному из условий типа (5.6), (5.7) в точке $z_0 = 0$, то отображение f может быть непрерывным образом продолжено в Δ до открытого дискретного Q -отображения $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теореме Стоилова о факторизации (см. [24, гл. V, § 5]). Согласно упомянутой теореме отображение f может быть представлено как композиция $f = \varphi \circ g$, где g – гомеоморфизм, φ – аналитическая функция. В таком случае отображение g является Q -гомеоморфизмом. В силу [3, лемма 4.1, теорема 4.1 и следствие 4.2] отображение g допускает гомеоморфное продолжение $\tilde{g}$ в Δ . В таком случае $\tilde{g}(0)$ является изолированной точкой границы области $g(\Delta)$ для функции φ . Из условия вытекает, что φ также не принимает как минимум три значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Возможность непрерывного продолжения следует теперь из классической теоремы Пикара для аналитических функций.

ТЕОРЕМА 7.3 (аналог теоремы Пикара при $n = 2$). *Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – открытое дискретное Q -отображение, а $Q(z)$ имеет конечное среднее колебание в ∞ либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (7.1), (7.2). Тогда f принимает все значения в $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, двух.*

§ 8. О приложениях

Практически для всех известных ныне классов отображений установлены оценки вида (1.2). Сформулированные в статье результаты могут быть применены, например, к отображениям с конечным искажением длины, (см., например, [5, теорема 6.10]). Кроме того, все вышеизложенное справедливо для так называемых отображений с конечным искажением. Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$

называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$ и п.в. $\|f'(x)\|^n \leq K(x)J(x, f)$ для некоторой функции $K(x): D \rightarrow [1, \infty)$ (см., например, [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Каждое открытое дискретное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ с конечным искажением такое, что $K(x) \in L_{\text{loc}}^{n-1}$ и мера множества B_f точек ветвления отображения f равна нулю, является Q -отображением при $Q = K^{n-1}(x)$ (см. [5, замечание 4.10, теорема 6.10 и неравенство (4.14)]).

В известной работе В. А. Зорича [26] было сделано предположение о том, что аналог теоремы Пикара верен для отображений с ограниченным искажением. Для квазирегулярных отображений один из вариантов теоремы Пикара см. в работе [27]. Аналог теоремы Пикара, сформулированный в настоящей статье относительно изучаемого класса отображений, пока что доказан автором только при $n = 2$. Пока не известно, верно ли аналогичное утверждение в пространствах больших размерностей.

Список литературы

1. Г. Д. Суворов, *Об искусстве математического исследования*, ТЕАН, Донецк, 1999.
2. T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, New York; Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
3. А. А. Игнатьев, В. И. Рязанов, “Конечное среднее колебание в теории отображений”, *Укр. матем. вестник*, **2:3** (2005), 395–417; англ. пер.: A. A. Ignat'ev, V. I. Ryazanov, “Finite mean oscillation in the mapping theory”, *Ukr. Math. Bull.*, **2:3** (2005), 403–424.
4. P. Koskela, K. Rajala, “Mappings of finite distortion: removable singularities”, *Israel J. Math.*, **136:1** (2003), 269–283.
5. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “Mappings with finite length distortion”, *J. Anal. Math.*, **93:1** (2004), 215–236.
6. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “On Q -homeomorphisms”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **30:1** (2005), 49–69.
7. В. М. Миклюков, *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2005.
8. K. Rajala, “Mappings of finite distortion: removable singularities for locally homeomorphic mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132:11** (2004), 3251–3258.
9. F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14:3** (1961), 415–426.
10. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Distortion and singularities of quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **465** (1970), 1–13.
11. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
12. В. М. Миклюков, “Граничные свойства n -мерных квазиконформных отображений”, *Докл. АН СССР*, **193:3** (1970), 525–527; англ. пер.: V. M. Miklyukov, “Boundary properties of n -dimensional quasi-conformal mappings”, *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 969–971.
13. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
14. Ю. Ф. Стругов, *Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи*, ч. 1, деп. в ВИНТИ 2786-B94, 1994.

15. Ю. Ф. Стругов, *Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи*, ч. 2, деп. в ВИНТИ 2787-В94, 1994.
16. С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Весовые пространства Соболева и квазиконформные отображения”, *Докл. РАН*, **403**:5 (2005), 583–588; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, “Weighted Sobolev spaces and quasiconformal mappings”, *Dokl. Math.*, **72**:1 (2005), 561–566.
17. Ch. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **22** (2003), 1397–1420.
18. Ю. Г. Решетняк, “О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными”, *Сиб. матем. журн.*, **10**:5 (1969), 1109–1138; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, “The concept of capacity in the theory of functions with generalized derivatives”, *Siberian Math. J.*, **10**:5 (1969), 818–842.
19. W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.
20. К. Куратовский, *Топология*. 2, Мир, М., 1969; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, vol. 2, Academic Press, New York–London, 1968.
21. G. Th. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **28**, Amer. Math. Soc., New York, 1942.
22. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Berlin–New York, Springer-Verlag, 1971.
23. C. J. Titus, G. S. Young, “The extension of interiority, with some applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:2 (1962), 329–340.
24. С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, Наука, М., 1964; пер. с фр.: S. Stoilow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
25. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.
26. В. А. Зорич, “Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства”, *Матем. сб.*, **74(116)**:3 (1967), 417–433; англ. пер.: V. A. Zorič, “A theorem of M. A. Lavrent'ev on quasiconformal space map”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:3 (1967), 389–403.
27. S. Rickman, “On the number of omitted values of entire quasiregular mappings”, *J. Analyse Math.*, **37**:1 (1980), 100–117.

Е. А. Севостьянов (E. A. SEVOST'YANOV)
 Институт прикладной математики и механики
 НАН Украины, г. Донецк
E-mail: sevostyanov@skif.net;
e_sevostyanov@rambler.ru; brusin2006@rambler.ru

Поступило в редакцию
 14.04.2008