Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Жгун, О вложениях универсальных торсеров над поверхностями дель Пеццо в конусы над многообразиями флагов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 5, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:18:47

УДК 512.745.2

В. С. Жгун

О вложениях универсальных торсеров над поверхностями дель Пеццо в конус над многообразием флагов, где рассматриваемое многообразие флагов является замкнутой орбитой в проективизации квазимикровесового представления. Предложен подход, позволяющий получить соответствующие вложения для торсеров над поверхностями дель Пеццо степени 1. Этот подход использует стабильность по Мамфорду и несколько отличается от подхода указанных авторов.

Следуя работам А. Н. Скоробогатова и В. В. Сергановой, мы строим вложения универсальных торсеров над поверхностями дель Пеццо в конус над многообразием флагов, где рассматриваемое многообразие флагов является замкнутой орбитой в проективизации квазимикровесового представления. Предложен подход, позволяющий получить соответствующие вложения для торсеров над поверхностями дель Пеццо степени 1. Этот подход использует стабильность по Мамфорду и несколько отличается от подхода указанных авторов.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: микровесовые представления, поверхности дель Пеццо, универсальный торсер, фактор Мамфорда.

Введение

Пусть G – односвязная простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, $Z(G)$ – центр этой группы, T – максимальный тор в G , а B – содержащая его борелевская подгруппа, U – унипотентный радикал подгруппы B . Этим определяются система корней Δ и ее подмножества положительных и отрицательных корней Δ^+ и Δ^- .

Пусть Δ – система корней одного из следующих типов: A_4 , D_5 , E_6 , E_7 , E_8 . Обозначим через α корень, соответствующий концевой вершине в диаграмме Дынкина: для системы D_5 мы положим $\alpha = \varepsilon_4 - \varepsilon_5$, для систем типа E_* и системы A_4 возьмем $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (здесь ε_i – стандартный базис в векторном пространстве, порожденном весами). Систему корней, соответствующую диаграмме Дынкина с удаленной концевой вершиной, мы обозначим через Δ' . Обозначим через β корень, соответствующий смежной вершине (рис. 1). Фундаментальный вес, двойственный к α , мы обозначим через π_α . Через π'_β обозначим фундаментальный вес из множества фундаментальных весов для системы корней Δ' , двойственный к β (следует отметить, что $(\pi'_\beta, \alpha) \neq 0$). Системы простых корней для систем Δ и Δ' мы обозначим Π и Π' соответственно.

Рис. 1

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-01-00287, 09-01-12169, 09-01-12170).

Заметим, что представление $V(\pi_\alpha)$ со старшим весом π_α – это микровесовое представление для всех систем, кроме E_8 , т. е. группа Вейля действует транзитивно на весах представления. В случае E_8 рассматривается присоединенное представление, где группа Вейля действует транзитивно на весах, отличных от нуля, а нулевой вес имеет кратность 8.

Пусть P – параболическая подгруппа, стабилизирующая точку $\langle v_{\pi_\alpha} \rangle \in \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$, где v_{π_α} – вектор старшего веса. Пусть L – подгруппа Леви группы P . Полупростую часть L мы обозначим через G' , а ее систему корней – через $\Delta' \subset \Delta$. Неприводимое представление группы G' со старшим весом ω обозначим $V'(\omega)$. Стабилизатором в группе G' точки $\langle v_{\pi'_\beta} \rangle \in \mathbb{P}(V'(\pi'_\beta))$ будет параболическая подгруппа P' с подгруппой Леви L' , соответствующей системе простых корней $\Pi'' := \Pi \setminus \{\alpha, \beta\}$. Полупростую часть L' обозначим через G'' , а ее систему корней – через Δ'' .

Как известно из [1], поверхности дель Пеццо можно сопоставить систему корней Δ одного из рассматриваемых выше типов. Поэтому через X_Δ мы будем обозначать произвольную поверхность дель Пеццо, для которой система корней имеет тип Δ .

Напомним определение универсального торсера. Предположим, что действие некоторого тора T_0 на нормальном многообразии $\mathcal{T}$ свободно в смысле теории схем и существует геометрический фактор $\mathcal{T} \rightarrow X$. Пусть $\mathcal{O}(\mathcal{T})^*$ – множество регулярных обратимых функций на $\mathcal{T}$. Тогда имеет место точная последовательность из [2], которую мы обозначим (CTS):

$$1 \rightarrow \mathcal{O}(X)^*/\mathbb{K}^* \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{T})^*/\mathbb{K}^* \rightarrow \Xi(T_0) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{T}) \rightarrow 0,$$

где $\Xi(T_0)$ – решетка характеров тора T_0 . Отметим, что эта последовательность функториальна по $\mathcal{T}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Торсер $\mathcal{T}$ называется *универсальным*, если отображение $\Xi(T_0) \rightarrow \text{Pic}(X)$ является изоморфизмом.

Напомним также определения множеств полустабильных и стабильных точек, введенных Мамфордом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Пусть X – алгебраическое многообразие с действием редуктивной группы H , L – обратимый обильный H -линеаризованный пучок на X .

(i) *Множеством полустабильных точек* называется

$$X_L^{ss} = \{x \in X \mid \exists n > 0, \exists \sigma \in \Gamma(X, L^{\otimes n})^H : \sigma(x) \neq 0\}.$$

(ii) *Множеством стабильных точек* называется

$$X_L^s = \{x \in X_L^{ss} \mid \text{орбита } Hx \text{ замкнута в } X_L^{ss} \text{ и стабилизатор } H_x \text{ конечен}\}.$$

В рассматриваемом случае, когда $H = T$, $X = G/P$, а в качестве пучка L берется $i^*\mathcal{O}(1)$, где $i: G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$, через $(G/P)^{sf}$ мы будем обозначать множество точек $x \in (G/P)^s$, для которых стабилизатор T_x равен $Z(G)$.

Рассмотрим тор $T \times \mathbb{K}^\times$. Определим действие этого тора на пространстве $V(\pi_\alpha)$ таким образом, что компонента $\mathbb{K}^\times$ действует на $V(\pi_\alpha)$ гомотетиями, а другая компонента – как подгруппа в G . Поскольку представление $V(\pi_\alpha)$ неприводимо, ядро неэффективности действия $T \times \mathbb{K}^\times$ на $V(\pi_\alpha)$ изоморфно $Z(G)$. Через $\hat{T}$ обозначим фактор $T \times \mathbb{K}^\times$ по этому ядру.

Нашей целью будет доказательство в общем случае теоремы, которая была доказана А. Н. Скоробогатовым и В. В. Сергановой [3] в случае, когда система корней Δ имеет тип, отличный от E_8 .

ТЕОРЕМА 0.3. *Существует локально замкнутое $\hat{T}$ -эquivариантное вложение универсального торсера $\hat{T}$ с действием тора $\hat{T}$ над поверхностью дель Пеццо X_Δ (в случае E_8 рассматривается достаточно общая поверхность X_Δ) в аффинный конус в $V(\pi_\alpha)$ над подмножеством точек $(G/P)^{sf}$ многообразия флагов $G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$, стабильных относительно действия максимального тора T и имеющих стабилизатор $Z(G)$. Рассмотрим пересечение $\hat{T}$ с $\hat{T}$ -инвариантной гиперплоскостью $v_\omega = 0$, где ω – ненулевой вес представления $V(\pi_\alpha)$. Образом этого пересечения при морфизме факторизации по действию тора $\hat{T}$ является (-1) -кривая на поверхности X_Δ . Все (-1) -кривые на X_Δ получаются таким способом.*

ЗАМЕЧАНИЕ 0.4. Связь универсальных торсеров над поверхностями дель Пеццо и многообразий флагов, вложенных в проективизацию микровесовых представлений, была замечена В. В. Батыревым (см. также [4]). Полные координатные кольца поверхностей дель Пеццо были вычислены В. В. Батыревым и О. Н. Поповым в [4]. Полную историю вопроса можно найти в работе [3].

Приведем краткий план доказательства, который будет реализован ниже. Отметим, что общая схема доказательства заимствована из [3], однако шаги будут немного изменены, также будут даны доказательства, отличные от доказательств из [3].

Сначала мы докажем, что фактор по Мамфорду многообразия флагов G/P по некоторой однопараметрической подгруппе $\lambda: \mathbb{K}^\times \rightarrow T$ изоморфен раздутию $\mathbb{P}(V(\pi'_\beta))$ в многообразии флагов G'/P' , которое мы обозначим через $\text{Bl}(\mathbb{P}(V(\pi'_\beta)), G'/P')$. Предположим по индукции, что для T' -торсера T' над $X_{\Delta'}$ построено его вложение в G'/P' (оно получено вложением универсального торсера $\hat{T}'$ в конус над G'/P' и последующей проекцией на G'/P'). Зафиксируем весовой базис в $V'(\pi'_\beta)$. Тогда точке $s \in \mathbb{P}(V'(\pi'_\beta))$, все координаты которой ненулевые, можно сопоставить преобразование проективного пространства $\mathbb{P}(V'(\pi'_\beta))$, умножающее координаты точки из $\mathbb{P}(V'(\pi'_\beta))$ на координаты точки s .

Пусть e_Δ – точка на поверхности $X_{\Delta'}$, а $\tilde{\sigma}: X_\Delta \rightarrow X_{\Delta'}$ – раздутие этой точки. Рассмотрим точку s торсера T' , лежащую в слое над точкой e_Δ . Пусть $s' \in G'/P'$ – достаточно общая точка. Растяжением $s's^{-1}$ вдоль весовых векторов пространства $V'(\pi'_\beta)$ мы добьемся того, что образ торсера $s's^{-1}T'$ пересекает G'/P' по одной T' -орбите Ts' , лежащей над точкой e_Δ . Далее возьмем собственный прообраз $\tilde{T}$ торсера $s's^{-1}T'$ относительно раздутия $\mathbb{P}(V(\pi'_\beta))$ вдоль G'/P' , а затем полный прообраз относительно факторизации по λ . Обозначим полученный торсер через T . Мы покажем, что аффинный конус над T будет искомым торсером.

В случае группы G типа E_8 мы не можем отождествить фактор $\lambda \parallel (G/P)^{ss}$ с раздутием. Однако здесь мы можем рассмотреть фактор $\lambda \parallel (G/P)^{ss} \cap D_\alpha$ (для некоторого T -инвариантного дивизора, определенного ниже), снабженный проекцией p_0 на $\mathbb{P}(V_1)$. Найдется T' -инвариантная окрестность точки $s' \in G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ такая, что ее прообраз изоморфен взвешенному раздутию в подмногообразии G'/P' . Локальное вычисление из предложения 4.8 позволит закончить доказательство так же, как и для поверхностей дель Пеццо степеней больше 1.

Приведем коммутативную диаграмму, иллюстрирующую схему доказательства:

$$\begin{array}{ccc}
 T \hookrightarrow & & (G/P)^{sf} \\
 \lambda \parallel \downarrow & & \lambda \parallel \downarrow \\
 \tilde{T} \hookrightarrow & & \mathrm{Bl}(\mathbb{P}(V(\pi'_\beta)); G'/P') \\
 \begin{array}{c} T' \parallel \swarrow \\ \sigma \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \sigma \downarrow \end{array} \\
 X_\Delta & \xrightarrow{s' s^{-1} T'} & s' s^{-1} G'/P' \hookrightarrow \mathbb{P}(V'(\pi'_\beta)) \\
 \begin{array}{c} \tilde{\sigma} \downarrow \\ T' \parallel \swarrow \end{array} & & \nearrow \\
 X_{\Delta'} & \xrightarrow{T'} & G'/P'
 \end{array}$$

Пусть $W = N_G(T)/T$ – группа Вейля группы G , C – доминантная камера Вейля для системы корней Δ . Отражение, соответствующее корню γ , обозначим $s_\gamma \in W$. Пусть $w \in W$; через n_w обозначим какой-либо его представитель в $N_G(T)$. Пусть H – полупростая подгруппа в G , нормализуемая тором T . Обозначим через W_H группу Вейля группы H , причем можно считать, что $W_H \subset W$. Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ зафиксируем стандартный базис, состоящий из e_γ , где $\gamma \in \Delta$, и h_ϑ , где $\vartheta \in \Pi$.

Пусть V – некоторый T -модуль. Через $\mathrm{supp}(V)$ обозначим множество весов модуля V относительно действия T .

Для микровесового представления $V(\pi_\alpha)$ зафиксируем базис из весовых векторов $v(\omega)$, где $\omega \in \mathrm{supp}(V(\pi_\alpha))$. Через $V^*(-\pi_\alpha)$ мы обозначим двойственный модуль к $V(\pi_\alpha)$ с младшим весом $-\pi_\alpha$, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническое спаривание, а через $\{v^*(-\omega)\}$ – его базис, двойственный к $\{v(\omega)\}$.

Для бирационального морфизма $p: X \rightarrow Y$ и подмногообразия $Z \subset Y$ обозначим через $p_*^{-1}(Z)$ собственный прообраз Z в X .

Автор благодарит своего научного руководителя И. В. Аржанцева за постоянное внимание к работе. Также приношу благодарности А. Н. Скоробогатову и В. В. Сергановой за исправление ошибки в теореме 3.5 и Ю. Г. Прохорову за обсуждение вопросов, связанных с экстремальными стягиваниями. Благодарю Э. Б. Винберга, В. Л. Попова и Т. Е. Панова за внимание к работе.

§ 1. Геометрия вложений многообразий флагов в проективизации микровесовых представлений

Для изучения геометрии рассматриваемых многообразий флагов нам понадобится следующая лемма из [5], описывающая строение многообразий Шуберта при данном проективном вложении.

ЛЕММА 1.1 [5, п. 2.12]. Пусть $w \in W$ – элемент группы Вейля, B^-wP/P – соответствующая ему клетка Шуберта. Рассмотрим замкнутое вложение $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$, где χ – доминантный вес. Пусть $f \in V(\chi)$ – вектор из орбиты старшего вектора. Тогда $\langle f \rangle \in B^-wP/P$, если и только если $w\chi \in \text{supp}(f)$ и $f \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b}^-)v_{w\chi}$, где $\mathfrak{U}(\mathfrak{b}^-)$ – универсальная обертывающая алгебры Ли $\mathfrak{b}^-$, а $v_{w\chi} = wv_\chi$ – вектор веса $w\chi$, имеющего кратность 1 в неприводимом представлении $V(\chi)$.

Перейдем к изучению G' -подмодулей в представлении $V(\pi_\alpha)$.

Рассмотрим ограничение представления $V(\pi_\alpha)$ на подгруппу $G' \subset P$. Заметим, что спаривание $(\pi_\alpha, \cdot)$ задает градуировку на $V(\pi_\alpha)$. А именно, вектор $v = \sum v_\chi$ принадлежит компоненте V_i , если и только если $(\pi_\alpha, \chi) = (\pi_\alpha, \pi_\alpha) - i$ для всех χ таких, что $v_\chi \neq 0$.

Имеет место разложение

$$V = \langle v(\pi_\alpha) \rangle \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_{\geq 3}.$$

Рассматриваемая градуировка G' -инвариантна. Чтобы в этом убедиться, необходимо проверить, что действие элемента $e_\tau \in \mathfrak{g}'$ стандартного базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}'$, где $\tau \in \Delta'$, переводит весовой вектор v_{χ_0} в весовой вектор v_χ , для которого $(\pi_\alpha, \chi_0) = (\pi_\alpha, \chi)$. Заметим, что $e_\tau v_{\chi_0} = v_{\chi_0 + \tau}$ и $(\pi_\alpha, \tau) = 0$, так как $\mathfrak{g}'$ стабилизирует прямую $\langle v_{\pi_\alpha} \rangle$. Отсюда получаем требуемое.

Поскольку α является единственным простым корнем, спаривающимся нетривиально с π_α , легко видеть, что

$$\begin{aligned} \text{supp}(V_1) &= \left(\pi_\alpha - \alpha - \sum_{\gamma \in \Pi'} \mathbb{Q}_+\gamma \right) \cap \text{supp}(V(\pi_\alpha)), \\ \text{supp}(V_2) &= \left(\pi_\alpha - 2\alpha + \sum_{\gamma \in \Delta'} \mathbb{Q}_+\gamma \right) \cap \text{supp}(V(\pi_\alpha)). \end{aligned}$$

Заметим, что вес $\pi_\alpha - \alpha$ является доминантным для представления $G' : V_1$ (действительно, $(\pi_\alpha - \alpha, \beta) = 1$ и $(\pi_\alpha - \alpha, \gamma) = 0$ для $\gamma \in \Pi''$), откуда $\text{supp}(V_1) \subset \text{supp}(V) \subset s_\alpha(\pi_\alpha - \sum_{\gamma \in \Pi} \mathbb{Q}_+\gamma)$, а значит, для G' -модуля V_1 имеет место вложение $\text{supp}(V_1) \subset \pi_\alpha - \alpha - \sum_{\gamma \in \Pi'} \mathbb{Q}_+\gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Компонента $V_{\geq 3}$ отлична от нуля только для групп типа E_7 и E_8 . В случае E_7 имеет место равенство $V_{\geq 3} = V_3 = \langle v_{-\pi_\alpha} \rangle$. Равенство $V_{\geq 3} = 0$ для оставшихся групп следует из того, что $\langle \pi_\alpha, \pi_\alpha - w_0\pi_\alpha \rangle < 3$, где $w_0\pi_\alpha$ – младший вес представления $V(\pi_\alpha)$.

ЛЕММА 1.3. Представление $G' : V_1$ является неприводимым микровесовым представлением. Пусть $G' : \mathfrak{p}_u^-$ – присоединенное представление полупростой

части подгруппы Леви L на унитарном радикале $\mathfrak{p}_u^-$ параболической под-алгебры $\mathfrak{p}^-$. Тогда:

1) если Δ не является системой корней типа E_8 , имеет место изоморфизм G' -модулей $V_1 \cong V(\pi'_\beta) \cong \mathfrak{p}_u^-$;

2) если Δ – система корней типа E_8 , мы имеем изоморфизмы G' -модулей $V_1 \cong V(\pi'_\beta)$ и $V_1 \oplus \langle v_0 \rangle \cong \mathfrak{p}_u^-$, где $v_0 = e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha}$ – вектор нулевого веса (для системы корней типа E_8 вес $\pi_\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_9$ является корнем).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что представление V_1 неприводимо. Заметим, что все веса V_1 имеют кратность 1. (Веса V_1 – это те веса τ представления $V(\pi_\alpha)$, которые лежат в гиперплоскости $\langle \pi_\alpha, \pi_\alpha - \tau \rangle = 1$. Однако ненулевые веса представления $V(\pi_\alpha)$ однократны.) Если V_1 приводимо, то в его разложение входят два представления со старшими весами ω_1 и ω_2 . Поскольку представление $V(\pi_\alpha)$ неприводимо, разность этих весов является целочисленной линейной комбинацией простых корней из Δ . Другими словами, существует вес ω такой, что

$$\omega = \omega_1 - n_\alpha \alpha - \sum_{\gamma \in I_1 \subset \Pi'} n_\gamma \gamma = \omega_2 - m_\alpha \alpha - \sum_{\gamma \in I_2 \subset \Pi'} m_\gamma \gamma,$$

и при этом все коэффициенты $n_\alpha, n_\gamma, m_\alpha, m_\gamma$ неотрицательны и множества I_1 и I_2 не пересекаются.

Заметим, что $(\pi_\alpha, \omega_1) = (\pi_\alpha, \omega_2) = (\pi_\alpha, \pi_\alpha) - 1$, откуда, учитывая равенство $(\pi_\alpha, \gamma) = 0$ для $\gamma \in \Pi'$, мы получаем

$$(\omega, \pi_\alpha) = (\omega_1, \pi_\alpha) - n_\alpha (\alpha, \pi_\alpha) = (\omega_2, \pi_\alpha) - m_\alpha (\alpha, \pi_\alpha).$$

Тем самым, $n_\alpha = m_\alpha$, и мы можем считать, что $n_\alpha = m_\alpha = 0$.

Покажем, что вес ω доминантен относительно G' . Пусть $\gamma_0 \notin I_2 \subset \Pi'$. Тогда

$$(\omega, \gamma) = (\omega_2, \gamma_0) - \sum_{\gamma \in I_2 \subset \Pi'} m_\gamma (\gamma, \gamma_0) \geq 0,$$

так как ω_2 доминантен, а $\langle \gamma, \gamma_0 \rangle \leq 0$ для $\gamma \neq \gamma_0$. Аналогичное неравенство выполнено для $\gamma_0 \notin I_1 \subset \Pi'$, что и требовалось доказать. Поскольку ω доминантен и получается из ω_1 и ω_2 вычитанием корней, этот вес встречается среди весов обоих неприводимых модулей и, значит, имеет кратность не менее двух, что противоречит тому, что все веса представления V_1 имеют кратность 1.

Чтобы показать, что $V_1 \cong V(\pi'_\beta)$, вычислим отметки веса $\pi_\alpha - \alpha$ на диаграмме Дынкина для Δ' . Как мы уже видели, $(\pi_\alpha - \alpha, \beta) = 1$ и $(\pi_\alpha - \alpha, \gamma) = 0$ для $\gamma \in \Pi''$, что и требовалось показать.

Далее заметим, что $\mathfrak{p}_u^- v(\pi_\alpha) \subset V_{\geq 1}$, при этом $\mathfrak{p}_u^- v(\pi_\alpha)$ не содержится целиком в $V_{\geq 2}$, так как $\mathfrak{p}_u^-$ содержит корень $-\alpha$, а значит, $\mathfrak{p}_u^- v(\pi_\alpha)$ содержит $e_{-\alpha} v(\pi_\alpha) \in V_1$.

Сравнивая размерности, мы получаем, что $\dim V(\pi'_\beta) = \dim V_1 = \dim(\mathfrak{p}_u^-)$. Учитывая, что существует нетривиальная проекция G' -модуля $\mathfrak{p}_u^-$ на V_1 , мы получаем, что имеет место изоморфизм этих модулей в случае 1).

В случае 2), когда Δ имеет тип E_8 , доказательство аналогично.

Как и ранее, все веса модуля V_1 имеют кратность 1 (только нулевой вес в модуле $V(\pi_\alpha)$ является кратным, и он принадлежит компоненте V_2). Также

заметим, что $v_0 = e_{-\pi_\alpha} v(\pi_\alpha) = h_{\pi_\alpha}$ есть G' -неподвижный вектор. Остается воспользоваться тем, что V_1 неприводимо, а также равенством $\dim \mathfrak{p}_u^- = \dim V_1 + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Отрезки, соединяющие вес π_α с весами $\pi_\alpha - \delta$, где $\delta \in \Delta_{\mathfrak{p}_u^-}$ (соответственно, $\delta \in \Delta_{\mathfrak{p}_u^-} \setminus \pi_\alpha$ в случае E_8), являются ребрами многогранника весов представления $V(\pi_\alpha)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что конус с вершиной π_α , натянутый на корни $\delta \in \Delta_{\mathfrak{p}_u^-}$, совпадает с конусом, порожденным ребрами многогранника, которые сходятся в вершине π_α . Утверждение следует из того, что рассматриваемые отрезки лежат на ребрах конуса с вершиной в π_α над выпуклым многогранником, образованным весами $\pi_\alpha - \delta$, являющимися вершинами многогранника весов представления V_1 , которые являются вершинами многогранника весов представления $V(\pi_\alpha)$.

Мы не приводим доказательство для системы корней E_8 , поскольку оно аналогично приведенному.

Из предложения 1.3 мы получили, что микровесовое представление V_1 группы G' вкладывается в микровесовое представление $V(\pi_\alpha)$. Следующая лемма связывает многообразия флагов G/P и G'/P' , лежащие в проективизациях этих микровесовых представлений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Пусть $V(\pi_\alpha)$ – микровесовое представление, $G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$ – вложение многообразия флагов в качестве проективизации орбиты старшего вектора. Рассмотрим разложение на неприводимые компоненты ограничения представления $V(\pi_\alpha)$ на G' :*

$$V(\pi_\alpha)|_{G'} = \langle v(\pi_\alpha) \rangle \oplus V_1 \oplus \cdots.$$

Тогда пересечение $G/P \cap \mathbb{P}(V_1)$ изоморфно многообразию флагов G'/P' , вложенному в $\mathbb{P}(V_1)$ в качестве G' -орбиты точки $\langle e_{-\alpha} v(\pi_\alpha) \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle v \rangle \in G/P \cap \mathbb{P}(V_1)$. Поскольку представление V_1 микровесовое, мы можем считать, что $v_{\pi_\alpha - \alpha} \neq 0$. Действительно, найдется компонента $v_\omega \neq 0$ для некоторого веса ω . Поскольку группа Вейля системы корней Δ' действует транзитивно на весах V_1 , существует элемент группы Вейля w , переводящий вес ω в вес $\pi_\alpha - \alpha$. Заметим, что любой представитель $n_w \in G'$ элемента w переводит G/P и $\mathbb{P}(V_1)$ в себя. При этом компонента веса $\pi_\alpha - \alpha$ вектора $n_w v$ не равна нулю (поскольку компонента $(n_w v)_{\pi_\alpha - \alpha}$ пропорциональна компоненте v_ω с ненулевым коэффициентом). Далее вместо точки $\langle v \rangle$ мы можем рассматривать точку $n_w \langle v \rangle \in G/P \cap \mathbb{P}(V_1)$.

Заметим, что если $v_{\pi_\alpha - \alpha} \neq 0$, то компонента $(s_\alpha v)_{\pi_\alpha} = s_\alpha v_{\pi_\alpha - \alpha}$ вектора $s_\alpha v$ не равна нулю (здесь мы воспользовались тем, что $s_\alpha \pi_\alpha = \pi_\alpha - \alpha$). Согласно лемме 1.1 мы получаем, что $\langle s_\alpha v \rangle$ принадлежит открытой клетке $P_u^- P/P$. Последнее означает, что $\langle s_\alpha v \rangle = \langle u(s_\alpha v)_{\pi_\alpha} \rangle$, где $u \in P_u^-$. Воспользовавшись экспоненциальным представлением элемента $u \in P_u^-$ (а именно,

$u = \exp(\sum_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}} c_\gamma e_{-\gamma})$, где $c_\gamma \in \mathbb{K}$, а $e_{-\gamma}$ – элемент стандартного базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$), мы можем записать $\langle v \rangle$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \left\langle s_\alpha \left(\exp \left(\sum_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}} c_\gamma e_{-\gamma} \right) (s_\alpha v)_{\pi_\alpha} \right) \right\rangle = \left\langle \exp \left(\sum_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}} c_\gamma s_\alpha e_{-\gamma} \right) v_{\pi_\alpha - \alpha} \right\rangle \\ &= \left\langle v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{\sum c_\gamma s_\alpha e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{(\sum c_\gamma s_\alpha e_{-\gamma})^2}{2!} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \dots \right\rangle. \end{aligned}$$

Покажем, что $\langle v \rangle$ принадлежит G' -орбите вектора $v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Предположим, что это не так. Тогда в экспоненциальном представлении найдется корень γ такой, что $s_\alpha \gamma \notin \Delta'$. Вес $\pi_\alpha - \gamma$ экстремален по следствию 1.4, т.е. γ не представляется в виде суммы не менее чем двух корней из $s_\alpha \Delta_{\mathfrak{p}_u}$. Мы покажем, что у вектора v компонента веса $s_\alpha(\pi_\alpha - \gamma) = \pi_\alpha - \alpha - s_\alpha \gamma$, а именно $c_\gamma e_{-s_\alpha \gamma} v_{\pi_\alpha - \alpha}$, не равна нулю. Из экспоненциального представления и экстремальности веса $\pi - \gamma$ мы получаем, что компонента веса $s_\alpha(\pi - \gamma)$ равна $c_\gamma e_{-s_\alpha \gamma} v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Предположим, что эта компонента равна нулю. Это означало бы, что вектор $v_{\pi_\alpha - \alpha}$ является младшим весом представления трехмерной подалгебры $\mathfrak{sl}_2$, порожденной тройкой $\{e_{-s_\alpha \gamma}, h_{s_\alpha \gamma}, e_{s_\alpha \gamma}\}$, что невозможно в силу соотношений $(\pi_\alpha - \alpha, s_\alpha \gamma) = (s_\alpha \pi_\alpha, s_\alpha \gamma) = (\pi_\alpha, \gamma) > 0$. Последнее неравенство следует из того, что $\gamma \in \mathfrak{p}_u^-$, а P является стабилизатором прямой, натянутой на старший вектор веса π_α .

Заметим, что компонента вектора v веса $\pi_\alpha - \alpha - s_\alpha \gamma$ не принадлежит V_1 . Мы приходим к противоречию с тем, что в экспоненциальное представление входит такой корень γ , что $s_\alpha \gamma \notin \Delta'$. Отсюда мы получаем, что $\sum_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}} c_\gamma e_{-s_\alpha \gamma} \in \mathfrak{g}'$, а значит, $\exp(\sum_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}} c_\gamma e_{-s_\alpha \gamma}) \in U \cap G'$, откуда имеем включение $G/P \cap \mathbb{P}(V_1) \subseteq G' \langle v_{\pi_\alpha - \alpha} \rangle$. Из G' -инвариантности пересечения следует, что имеет место равенство $G/P \cap \mathbb{P}(V_1) = G'/P'$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Пусть группа G имеет один из рассматриваемых выше типов, и пусть $i: G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$ – вложение многообразия флагов в проективизацию микровесового представления. Для действия тора T рассмотрим множество $(G/P)_T^s$ стабильных точек относительно пучка $i^* \mathcal{O}(1)$. Тогда дополнение до множества $(G/P)_T^s$ в G/P имеет коразмерность больше 1. Коразмерность точек из G/P со стабилизатором, строго содержащим $Z(G)$, не меньше 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $W_{\pi_\alpha}^{st}$ множество элементов $w \in W$ таких, что $\langle w\pi_\alpha, \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C$. Согласно [6, теорема 1.6] множество стабильных точек выражается следующей формулой:

$$(G/P)_T^s = \bigcap_{\tilde{w} \in W} \bigcup_{w \in W_{\pi_\alpha}^{st}} \tilde{w} B w P / P.$$

Заметим, что в разложении Шуберта для G/P существует единственная клетка коразмерности 1, а именно $B w_0 s_\alpha P / P$. Отсюда, воспользовавшись предыдущей формулой, мы видим, что для доказательства предложения достаточно показать, что $w_0 s_\alpha \in W_{\pi_\alpha}^{st}$.

Положим $w_0\lambda = -\sum a_\gamma\pi_\gamma \in -C$, где $a_\gamma \geq 0$. Следующие соотношения показывают, что $w_0s_\alpha \in W_{\pi_\alpha}^{st}$:

$$-(w_0s_\alpha\pi_\alpha, \lambda) = (\pi_\alpha - \alpha, -w_0\lambda) = a_\alpha \left((\pi_\alpha, \pi_\alpha) - \frac{(\alpha, \alpha)}{2} \right) + \sum_{\gamma \neq \alpha, \gamma \in \Pi} a_\gamma (\pi_\alpha, \pi_\gamma) > 0,$$

где мы воспользовались тем, что во всех рассматриваемых случаях $(\pi_\alpha, \pi_\alpha) - \frac{(\alpha, \alpha)}{2} > 0$, а также тем, что $(\pi_\alpha, \pi_\gamma) > 0$ для простой системы корней Δ (ср. с [3, предложение 2.4]).

Доказательство последнего утверждения предложения см. в [3, предложение 2.4].

§ 2. Фактор G/P по однопараметрической подгруппе λ

Зададим однопараметрическую подгруппу λ , соответствующую весу π_α , с помощью спаривания с весами $\chi \in \Xi(T)$ по формуле

$$\chi(\lambda(t)) = t^{\langle \pi_\alpha, \chi \rangle}.$$

Рассмотрим действие λ на G/P левыми сдвигами. Зафиксируем линеаризацию действия λ , определяемую G -линеаризованным пучком $i^*\mathcal{O}(1)$, где $i: G/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$ — G -эквивариантное вложение. Мы можем рассмотреть множество стабильных точек $(G/P)^s$ относительно действия λ (из доказательства следующей теоремы будет видно, что множество стабильных точек $(G/P)^s$ в случае системы корней, отличной от E_8 , совпадает с множеством $(G/P)^{ss}$ полустабильных точек). Через $p_{\pi_\alpha}: (G/P)^s \rightarrow \lambda\|(G/P)^s$ обозначим морфизм факторизации по действию однопараметрической подгруппы λ .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть G — простая группа одного из рассматриваемых типов, за исключением типа E_8 . Геометрический фактор $\tilde{X} = \lambda\|(G/P)^s$ изоморфен раздутию $\mathbb{P}(V_1)$ в многообразии флагов G'/P' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.2. Существует проекция p_0 искомого фактора $\tilde{X}$ на $\mathbb{P}(V_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle v \rangle \in (G/P)^{ss}$. Тогда точке $\langle v \rangle$ мы сопоставим точку $\langle v_1 \rangle \in \mathbb{P}(V_1)$, где v_1 — проекция v на подпространство V_1 вдоль подпространства $\mathbb{K}v(\pi_\alpha) \oplus V_{\geq 2}$.

Заметим, что данное отображение пропускается через $\tilde{X}$. Это следствие универсальности фактора и того, что λ действует на $\mathbb{P}(V_1)$ тривиально (действие $\lambda(t)$ умножает векторы из V_1 на $t^{\langle \pi_\alpha, \pi_\alpha - \alpha \rangle} = t^{\langle \pi_\alpha, \pi_\alpha \rangle - 1}$).

Осталось проверить, что p_0 определено на $(G/P)^{ss}$. Для этого заметим, что для всех рассматриваемых типов групп G (кроме типа E_8) пространство $\langle v_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V_1$ имеет положительные веса при действии λ , а $V_2 \oplus V_{\geq 3}$ — отрицательные (в случае E_8 пространство V_2 имеет нулевой вес, а $V_{\geq 3}$ — отрицательный). Тем самым, для стабильности $\langle v \rangle$ необходимо, чтобы компонента v в пространстве $\langle v_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V_1$ была ненулевой. Пусть отображение p_0 не определено в точке $\langle v \rangle$, т.е. $v_1 = 0$. Тогда, поскольку $\langle v \rangle \in (G/P)^{ss}$, имеем $v_{\pi_\alpha} \neq 0$. Отсюда мы

получаем, что вектор v принадлежит открытой клетке $P_u^- P/P$. Представим v в виде экспоненты от элемента алгебры Ли $\mathfrak{p}_u^-$, примененной к v_{π_α} :

$$v = \exp\left(\sum_{\gamma \in \Delta_{P_u}} c_\gamma e_{-\gamma}\right) v_{\pi_\alpha} = v_{\pi_\alpha} + \underbrace{\frac{\sum c_\gamma e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha}}_{\in V_1} + \underbrace{\frac{(\sum c_\gamma e_{-\gamma})^2}{2!} v_{\pi_\alpha}}_{\in V_2} + \dots \quad (2.1)$$

Из того, что $v_1 = 0$, следует, что все коэффициенты c_γ равны нулю (векторы $e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha}$, где $\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u^-}$, имеют различные веса и составляют базис $\mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha} \cong V_1$). Отсюда $\langle v \rangle = \langle v_{\pi_\alpha} \rangle$, но эта точка нестабильна. Лемма доказана.

Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов. Сначала построим факторы для стабильных орбит, лежащих в открытой клетке, потом – для стабильных орбит, лежащих в дополнении к открытой клетке (шаги 1, 2). Затем, используя проекцию p_0 на фактор $\tilde{X}$ и теорему Мойшезона о стягивании [7], установим, как эти множества склеиваются (шаг 3).

Шаг 1. Рассмотрим открытую клетку $P_u^- P/P$. Покажем, что фактор $\lambda \backslash (P_u^- P/P)$ изоморфен проективному пространству $\mathbb{P}(V_1)$ с удаленным из него многообразием флагов G'/P' .

Как и ранее, воспользуемся экспоненциальным представлением (2.1).

Заметим, что набор $\{c_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{P_u}}$ с точностью до умножения на константу однозначно определяет орбиту λ , поэтому фактор $\lambda \backslash ((P_u^- P/P) \setminus \langle v_{\pi_\alpha} \rangle)$ отождествляется с $\mathbb{P}(V_1)$. Чтобы получить $\lambda \backslash (P_u^- P/P)^{ss}$, мы должны удалить из $\mathbb{P}(V_1)$ те точки $(c_{\gamma_1} : \dots : c_{\gamma_{\dim V_1}})$, для которых соответствующие им орбиты $\lambda(t) \langle v \rangle$ нестабильны.

Орбита точки $\langle v \rangle$ из открытой клетки нестабильна, если и только если v принадлежит $\mathbb{K}v(\pi_\alpha) \oplus V_1$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.3. Пусть $v \in \mathbb{K}v(\pi_\alpha) \oplus V_1$. Имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) (G/P \cap \mathbb{P}(\mathbb{K}v(\pi_\alpha) \oplus V_1)) = G/P \cap \mathbb{P}(V_1) = G'/P'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя предложение 1.5, мы видим, что в доказательстве нуждается только предельный переход:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \langle v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle t^{\langle \pi_\alpha, \pi_\alpha \rangle} v_{\pi_\alpha} + \frac{\sum c_\gamma t^{\langle \pi_\alpha, \pi_\alpha - \gamma \rangle} e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha} \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle t v_{\pi_\alpha} + \frac{\sum c_\gamma e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha} \right\rangle = \left\langle \frac{\sum c_\gamma e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha} \right\rangle \in \mathbb{P}(V_1). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\langle \pi_\alpha, \gamma \rangle = 1$ для всех $\gamma \in \Delta_{P_u}$. Заметим также, что $\langle v_1 \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \langle v \rangle$. Лемма доказана.

По лемме 2.3 мы получаем, что для $\langle v \rangle \notin (P_u^- P/P)^{ss}$ выполнено включение $\langle v_1 \rangle \in G'/P'$. Покажем, что это условие также достаточно. Рассмотрим вектор $v = \exp(e_{-\alpha}) v_{\pi_\alpha} = v_{\pi_\alpha} + e_{-\alpha} v_{\pi_\alpha}$; легко видеть, что $\langle v \rangle \notin (G/P)^{ss}$. Из того, что G' и λ коммутируют, орбита $G' \langle v \rangle$ также нестабильна. При этом $p_0(G' \langle v \rangle) = G' \langle v_1 \rangle = G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$.

Из сказанного выше, а также в силу изоморфизма $\lambda \backslash ((P_u^- P/P) \setminus \langle v_{\pi_\alpha} \rangle) \cong \mathbb{P}(V_1)$ мы получаем, что нестабильные точки проецируются с помощью p_0

в точности на G'/P' . Таким образом, мы доказали, что $\lambda \backslash (P_u^- P/P)^{ss} \cong \mathbb{P}(V_1) \setminus (G'/P')$.

Шаг 2. Пространство стабильных орбит из дополнения к $P_u^- P/P$ изоморфно проективизации нормального расслоения в $\mathbb{P}(V_1)$ к многообразию флагов G'/P' .

Из лемм 1.1, 2.2 мы получаем, что стабильные орбиты из дополнения к клетке $P_u^- P/P$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) компонента вектора v веса π_α равна нулю (так как $\langle v \rangle \notin P_u^- P/P$);
- 2) компонента вектора v , лежащая в V_1 , отлична от нуля (вследствие стабильности $\langle v \rangle$).

В частности, эти орбиты лежат в замыкании дивизора Шуберта $\overline{B^- s_\alpha P/P}$. Действительно, в разложении Брюа многообразия флагов G/P есть только одна клетка коразмерности один: $B^- s_\alpha P/P$, и она содержит в своем замыкании все клетки меньшей размерности.

ЛЕММА 2.4. Пусть точка $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$ стабильна, причем компонента вектора v веса π_α равна нулю. Тогда компонента v_1 вектора v , принадлежащая V_1 , отлична от нуля и $\langle v_1 \rangle \in \mathbb{P}(V_1) \cap G/P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = \sum_{i \geq 1} v_i$, где $v_i \in V_i$, причем по условию $v_1 \neq 0$. Тогда имеют место равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \lambda(t)v \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle v_1 + \sum_{i > 1} t^{-i+1} v_i \right\rangle = \langle v_1 \rangle.$$

Поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \lambda(t)v \rangle \in G/P$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Заметим, что действие G' коммутирует с $\lambda(t)$, а пересечение $\mathbb{P}(V_1) \cap G/P = G'/P'$ состоит из одной орбиты по предложению 1.5. Согласно лемме 2.4 для компоненты $v_1 \in V_1$ вектора v выполнено включение $\langle v_1 \rangle \in G'/P'$. Подействовав элементом из группы G' на v , мы можем считать, что $v_1 = v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Запишем элемент v в виде экспоненты (от алгебры Ли $\mathfrak{u}$), примененной к $v_{\pi_\alpha - \alpha}$:

$$v = v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{\sum c_\gamma e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{(\sum c_\gamma e_{-\gamma})^2}{2!} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \dots$$

В силу сделанных предположений имеем $\pi_\alpha - \alpha - \gamma \notin \text{supp}(V_1)$, откуда коэффициенты c_γ могут быть не равны нулю для корней $\gamma = m\alpha + k\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta$, где $a_\theta \geq 0$, только в случае выполнения неравенств $m, k > 0$.

Поскольку P' стабилизирует $\langle v_{\pi_\alpha - \alpha} \rangle$, векторы с весами $\pi_\alpha - \alpha + \gamma$ образуют P' -модуль $\mathcal{N}$. (Векторное пространство $\mathcal{N}$ изоморфно модулю $\mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Структура P' -модуля на $\mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha - \alpha}$ определяется следующим образом. Для $p' \in P'$, учитывая равенство $p' v_{\pi_\alpha - \alpha} = v_{\pi_\alpha - \alpha}$, имеем

$$p' \mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha - \alpha} = (\text{Ad}(p') \mathfrak{p}_u^-)(p' v_{\pi_\alpha - \alpha}) \subset \mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha - \alpha},$$

где $\text{Ad}(P') : \mathfrak{p}_u^-$ – присоединенное представление.)

Докажем следующую лемму о структуре P' -модуля $\mathcal{N}$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}$ – положительный корень такой, что $\pi_\alpha - \alpha + \gamma \in \text{supp}(\mathcal{N})$. Рассмотрим разложение $\gamma = m\alpha + k\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta$ корня γ в сумму простых корней. Тогда в этом разложении $k = 2$, $m = 1$. Имеет место включение $\mathcal{N} \subset V_2$. Также выполнено равенство $(\alpha, \gamma) = 0$.

Модуль $\mathcal{N}$ является простым P' -модулем с тривиальным действием P'_u . Как $(G'' \ltimes P'_u)$ -модуль он изоморфен слою нормального расслоения к многообразию флагов $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ в точке $\langle v(\pi_\alpha - \alpha) \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через V'_1 и V'_2 неприводимые L' -подмодули в V_1 , являющиеся градуированными компонентами веса $\langle \pi'_\beta, \pi'_\beta \rangle - 1$ и $\langle \pi'_\beta, \pi'_\beta \rangle - 2$ соответственно относительно спаривания с π'_β .

Сначала заметим, что как L' -модуль слой касательного расслоения к G'/P' в точке $\langle v(\pi_\alpha - \alpha) \rangle$ можно отождествить с модулем $\mathfrak{p}'_u v(\pi_\alpha - \alpha)$, который по лемме 1.3 изоморфен V'_1 . Отсюда слой нормального расслоения в точке $\langle v(\pi_\alpha - \alpha) \rangle$ отождествляется с фактормодулем $V_1/(\mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha) \oplus V'_1)$. Согласно замечанию 1.2 имеем изоморфизм L' -модулей $V'_2 \cong V_1/(\mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha) \oplus V'_1)$. Поскольку слой нормального расслоения как L' -модуль изоморфен простому модулю V'_2 , группа P'_u действует на нем тривиально, а $Z(L')$ действует умножением на скаляр. Отсюда для доказательства последней части леммы достаточно проверить изоморфизм G'' -модулей $\mathcal{N} \cong V'_2$.

Пусть коэффициент c_γ не равен нулю для корня $\gamma = m\alpha + k\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta$, где $a_\theta > 0$. Поскольку вес $s_\alpha \pi_\alpha - \gamma$ принадлежит многограннику весов, вес $\pi_\alpha - s_\alpha \gamma$ также ему принадлежит. Отсюда мы получаем, что $s_\alpha \gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}$. Воспользовавшись равенством $s_\alpha \beta = \beta + \alpha$ и тем, что s_α оставляет неподвижными $\theta \in \Pi''$, мы получаем

$$s_\alpha \gamma = -m\alpha + k(\beta - \alpha) + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta = k\beta + (k - m)\alpha + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta.$$

Поскольку $s_\alpha \gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}$, из леммы 1.3 следует, что коэффициент при α в разложении $s_\alpha \gamma$ в сумму простых корней равен 1, а значит, $k - m = 1$. Поскольку V_1 – микровесовое представление для систем корней типа A_4 , D_5 или E_6 , коэффициент при β в разложении $s_\alpha \gamma$ не больше 2 (это следует из того, что вектор веса $s_\alpha \gamma - \alpha$ лежит в градуированной компоненте с весом не меньше, чем $(\pi'_\beta, \pi'_\beta) - 2$, относительно $(\pi'_\beta, \cdot)$; см. замечание 1.2). Отсюда $m = 1$ и $k = 2$. Так как коэффициент при β в этом разложении равен 2, корень $s_\alpha \gamma$ принадлежит V'_2 . Таким образом, мы получаем, что элемент s_α переводит модуль $\mathcal{N}$ в модуль V'_2 . Поскольку элемент s_α действует на G'' тождественно, он задает морфизм G'' -модуля $\mathcal{N}$ в неприводимый G'' -модуль V'_2 . Так как $s_\alpha^2 = 1$, это отображение задает изоморфизм модулей, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы завершает следующее вычисление:

$$(\alpha, \gamma) = \left(\alpha, \alpha + 2\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta \right) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) = 0,$$

где использованы равенства $(\alpha, \beta) = -1$, $(\alpha, \theta) = 0$ для $\theta \in \Pi''$.

Поскольку L' отличается от G'' на центральный тор, из изоморфизма G'' -модулей $V_2' \cong \mathcal{N}$ следует изоморфизм L' -многообразий $\mathbb{P}(V_2') \cong \mathbb{P}(\mathcal{N})$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Орбиты $\langle \lambda(t)v \rangle$ точек $\langle v \rangle \in (G/P)^{ss}$, для которых $v_{\pi_\alpha} = 0$, параметризуются многообразием $G' *_{P'} \mathbb{P}(\mathcal{N})$. Оно изоморфно проективизации нормального расслоения к G'/P' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что орбиты $\langle \lambda(t)v \rangle$ такие, что $v_{\pi_\alpha} = 0$ и $v_1 = v_{\pi_\alpha - \alpha}$, параметризуются проективным пространством $\mathbb{P}(\mathcal{N})$. Поскольку $\mathcal{N} \subset V_2$, однопараметрическая подгруппа $\lambda(t)$ действует на $\mathcal{N}$ умножением на t^{-2} , а на вектор $v_{\pi_\alpha - \alpha}$ — умножением на t^{-1} . Отсюда отображение

$$\langle v \rangle \rightarrow \left(\frac{\langle v, v^*(-\pi_\alpha + \alpha + \gamma_1) \rangle}{\langle v, v^*(-\pi_\alpha + \alpha) \rangle} : \dots : \frac{\langle v, v^*(-\pi_\alpha + \alpha + \gamma_{\dim \mathcal{N}}) \rangle}{\langle v, v^*(-\pi_\alpha + \alpha) \rangle} \right)$$

отождествляет рассматриваемое пространство $\lambda(t)$ -орбит и $\mathbb{P}(\mathcal{N})$. (Отметим, что $\frac{\langle v, v^*(-\pi_\alpha + \alpha + \gamma) \rangle}{\langle v, v^*(-\pi_\alpha + \alpha) \rangle}$ есть коэффициент c_γ при векторе $e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha - \alpha}$ в экспоненциальном представлении для $\langle v \rangle$.) По лемме 2.5 проективное пространство $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ изоморфно проективизации слоя нормального расслоения в точке $\langle v_{\pi_\alpha - \alpha} \rangle$.

По лемме 2.4 многообразие орбит $\langle \lambda(t)v \rangle$ таких, что $v_{\pi_\alpha} = 0$, проецируется с помощью p_0 сюръективно на многообразие флагов G'/P' . Из G' -эквивариантности проекции p_0 получаем, что

$$G' *_{P'} p_0^{-1}(\langle v_{\pi_\alpha - \alpha} \rangle) \cong G' *_{P'} \mathbb{P}(\mathcal{N}),$$

где мы воспользовались изоморфизмом P' -многообразий $p_0^{-1}(\langle v_{\pi_\alpha - \alpha} \rangle) \cong \mathbb{P}(\mathcal{N})$.

Однородное расслоение $G' *_{P'} \mathbb{P}(\mathcal{N})$ изоморфно проективизации нормального расслоения к G'/P' . Действительно, по лемме 2.5 слои рассматриваемых расслоений над точкой eP'/P' изоморфны как P' -многообразия. Из G' -эквивариантности следует изоморфизм расслоений на проективные пространства.

Шаг 3. Обозначим через $D_{\mathcal{N}} \subset \tilde{X}$ дивизор, отвечающий подмногообразию $G' *_{P'} \mathbb{P}(\mathcal{N})$ в $\tilde{X}$, а через $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ — линейное расслоение, соответствующее этому дивизору.

Чтобы закончить доказательство теоремы, мы воспользуемся теоремой Мойшезона о стягивании [7].

Для этого нам необходимо доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Для всех точек $x \in D_{\mathcal{N}}$ ограничение расслоения $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ на слой $p_0^{-1}(p_0(x))$, который является слоем проективизации нормального расслоения $\mathcal{N}$ к многообразию флагов G'/P' , изоморфно пучку $\mathcal{O}(-1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что расслоение $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ можно считать G' -линеаризованным. Дивизор $D_{\mathcal{N}}$ инвариантен относительно действия G' . Проекция p_0 эквивариантна относительно G' , и последняя группа действует транзитивно на $p_0(D_{\mathcal{N}}) \simeq G'/P'$. Из сказанного выше следует, что условие теоремы Мойшезона о стягивании достаточно проверить лишь для одной точки $x \in D_{\mathcal{N}}$.

Опишем расслоение $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$. Напомним, что прообразом дивизора $D_{\mathcal{N}}$ относительно морфизма факторизации будет дивизор, полученный пересечением дивизора Шуберта $\overline{B^{-s_{\alpha}}P/P}$ и $(G/P)^{ss}$. Расслоение, соответствующее этому дивизору, можно задать как $\mathcal{L} = G *_P k_{\pi_{\alpha}}$, где $k_{\pi_{\alpha}}$ – одномерный модуль, на котором P действует умножением на характер π_{α} . Заметим, что сечение расслоения $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ может рассматриваться как функция на $V_{\pi_{\alpha}}$, поскольку линейная система, соответствующая $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$, задает вложение $G/P \subset \mathbb{P}(V_{\pi_{\alpha}})$. Сечение $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$, обращающееся в нуль на $\overline{B^{-s_{\alpha}}P/P}$, задается уравнением $\langle v_{-\pi_{\alpha}}^*, \cdot \rangle = 0$, оно полуинвариантно относительно действия B^- с весом $-\pi_{\alpha}$ (см. [6]).

Мы хотим спустить пучок $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ до пучка $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}}$ на факторе множества $(G/P)^{ss}$ по однопараметрической подгруппе λ таким образом, чтобы дивизор Вейля, заданный сечением $\langle v_{-\pi_{\alpha}}^*, \cdot \rangle = 0$, при отображении факторизации $p_{\pi_{\alpha}}$ перешел в сечение пучка $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}}$ (см. [8]). Этого можно добиться, если сделать сечение $\langle v_{-\pi_{\alpha}}^*, \cdot \rangle = 0$ инвариантным относительно λ , что достигается заменой расслоения $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ на изоморфное ему расслоение $\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \otimes k_{-\pi_{\alpha}}$, на котором действие λ подкручивается на характер $-\pi_{\alpha}$. Образ дивизора $\overline{B^{-s_{\alpha}}P/P}$ на факторе $\tilde{X}$ задается сечением $\langle v_{-\pi_{\alpha}}^*, \cdot \rangle = 0$ расслоения $\lambda \backslash (\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \otimes k_{-\pi_{\alpha}})$.

В качестве слоя p_0 , на который мы собираемся ограничить расслоение $-\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$, выберем слой над точкой $v_{\pi_{\alpha}-\alpha}$. Тогда слой над этой точкой задается в виде $\exp(\sum_{\pi_{\alpha}-\alpha-\gamma \in \mathcal{N}} c_{\gamma} e_{-\gamma}) s_{\alpha} P/P$. Ограничение расслоения $-\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \otimes k_{\pi_{\alpha}}$ на этот слой задается формулой

$$(-\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \otimes k_{\pi_{\alpha}})|_{D_{\mathcal{N}}} = \exp\left(\sum_{\pi_{\alpha}-\alpha-\gamma \in \mathcal{N}} c_{\gamma} e_{-\gamma}\right) s_{\alpha} P *_P (k_{-\pi_{\alpha}} \otimes k_{\pi_{\alpha}}).$$

Это ограничение является расслоением над аффинным пространством, изоморфным $\mathcal{N}$. Фактором этого ограничения по действию λ является расслоение над проективным пространством $\mathbb{P}(\mathcal{N})$. Для того чтобы доказать, что последнее расслоение изоморфно $\mathcal{O}(1)$, необходимо проверить, что при умножении координат $\{c_{\gamma}\}$ на t слой расслоения умножается на t^{-1} . Последнее вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} & \lambda(t^{-1})(-\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \otimes k_{\pi_{\alpha}})|_{D_{\mathcal{N}}} \\ &= \left(\lambda(t^{-1}) \exp\left(\sum_{\pi_{\alpha}-\alpha-\gamma \in \mathcal{N}} c_{\gamma} e_{-\gamma}\right) \lambda(t) \lambda(t^{-1}) s_{\alpha} P *_P k_{-\pi_{\alpha}} \right) \otimes \lambda(t^{-1}) k_{\pi_{\alpha}} \\ &= \left(\exp\left(\sum_{\pi_{\alpha}-\alpha-\gamma \in \mathcal{N}} c_{\gamma} \lambda(t^{-1}) e_{-\gamma} \lambda(t)\right) s_{\alpha} (s_{\alpha} \lambda)(t^{-1}) P *_P k_{-\pi_{\alpha}} \right) \otimes \lambda(t^{-1}) k_{\pi_{\alpha}} \\ &= \left(\exp\left(\sum_{\pi_{\alpha}-\alpha-\gamma \in \mathcal{N}} c_{\gamma} t^{\langle \pi, \gamma \rangle} e_{-\gamma}\right) s_{\alpha} P *_P t^{-\langle \pi_{\alpha}-\alpha, -\pi_{\alpha} \rangle} k_{-\pi_{\alpha}} \right) \otimes t^{-\langle \pi_{\alpha}, \pi_{\alpha} \rangle} k_{\pi_{\alpha}} \\ &= \left(\exp\left(\sum_{\pi_{\alpha}-\alpha-\gamma \in \mathcal{N}} c_{\gamma} t e_{-\gamma}\right) s_{\alpha} P *_P t^{\langle \pi_{\alpha}-\alpha, \pi_{\alpha} \rangle} k_{-\pi_{\alpha}} \right) \otimes t^{-\langle \pi_{\alpha}, \pi_{\alpha} \rangle} k_{\pi_{\alpha}} \\ &= \left(\exp\left(\sum_{\pi_{\alpha}-\alpha-\gamma \in \mathcal{N}} c_{\gamma} t e_{-\gamma}\right) s_{\alpha} P *_P t^{-1} k_{-\pi_{\alpha}} \right) \otimes k_{\pi_{\alpha}}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенствами $\langle \alpha, \pi_{\alpha} \rangle = 1$, $\lambda(t^{-1}) e_{-\gamma} \lambda(t) = t^{\langle \pi, \gamma \rangle} e_{-\gamma}$, а также $(s_{\alpha} \lambda)(t) = s_{\alpha} \lambda(t) s_{\alpha} = t^{\langle s_{\alpha} \pi_{\alpha}, \cdot \rangle} = t^{\langle \pi_{\alpha}-\alpha, \cdot \rangle}$. Предложение доказано.

Используем теорему Мойшезона для морфизма $p_0: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}(V_1)$ и исключительного дивизора $D_{\mathcal{N}}$, который стягивается на многообразии флагов G'/P' . Мы получаем, что $\tilde{X}$ является раздутием $\mathbb{P}(V_1)$ в многообразии флагов G'/P' , что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Из доказательства теоремы 2.1 можно получить описание $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ как множества нулей однородной системы уравнений (порождающей идеал $\mathcal{J}_{G'/P'}$). А именно, зададим открытую клетку $P_u^- P/P$ из G/P в виде экспоненты алгебры Ли $\mathfrak{p}_u^-$, примененной к v_{π_α} (см. формулу (2.1)).

Как мы видели, множество нестабильных точек относительно $\lambda(t)$ задается условием $V_2 = 0$, что также влечет обращение в нуль компонент $V_{\geq 3}$. Другими словами, это условие записывается как система уравнений для $\{c_\gamma\}$:

$$p_\mu(c) = \sum_{\pi - \gamma - \delta = \mu} c_\gamma c_\delta (e_{-\gamma} e_{-\delta} v_{\pi_\alpha}) = 0$$

при $\mu \in \text{supp}(V_2)$. Заметим, что все веса рассматриваемых квадратичных уравнений различны, т. е. компонента $\mathcal{J}_{G'/P'}(\mu)$ веса μ идеала $\mathcal{J}_{G'/P'}$ имеет размерность 1.

В лемме 2.3 было показано, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) (P_u^- P/P \cap \mathbb{P}(\mathbb{K}v(\pi_\alpha) \oplus V_1)) = G/P \cap \mathbb{P}(V_1) = G'/P'.$$

Поскольку действие $\lambda(t)$ не меняет набор однородных координат $\{c_\gamma\}$, многообразие флагов G'/P' в проективном пространстве $\mathbb{P}(V_1)$ задается системой однородных уравнений $p_\mu(c) = 0$, где $\mu \in \text{supp}(V_2)$.

Далее нам понадобятся уравнения, соответствующие обращению в нуль компонент, лежащих в V_3 :

$$q_\nu(c) = \sum_{\pi_\alpha - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = \nu} c_{\mu_1} c_{\mu_2} c_{\mu_3} (e_{-\mu_1} e_{-\mu_2} e_{-\mu_3} v_{\pi_\alpha}) = 0,$$

которые обращаются в нуль также на многообразии флагов G'/P' . В случае E_7 это всего одно уравнение, для которого $\nu = -\pi_\alpha$.

§ 3. Фактор по подгруппе λ многообразия флагов G/P из $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ в случае группы типа E_8

Исследуем случай, когда система корней Δ имеет тип E_8 . Вместо микровесовых представлений, которые не существуют для E_8 , нам приходится рассматривать присоединенное представление $\text{Ad} : \mathfrak{g}$. Нашей первой задачей будет изучение P' -модуля $\mathcal{N} = \langle \mathfrak{p}_u^- v(\pi_\alpha - \alpha) \rangle$ (рис. 2, а).

Модуль $\mathcal{N}$ состоит из весов вида $s_\alpha \pi_\alpha - \gamma = s_\alpha \pi_\alpha - m\alpha - k\beta - \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta$, где $m, k > 0$ и $a_\theta \geq 0$. Наша цель – определить значения m, k , а также найти разложение $\mathcal{N}$ на неприводимые G'' -подмодули. Для этого нам понадобится разложение V_1 в сумму простых G'' -модулей:

$$V_1 = \mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha) \oplus V'_1 \oplus V'_2 \oplus V'_3.$$

На рис. 2, б показана ортогональная проекция многогранника весов на плоскость, порожденную α и π_α (поскольку $\pi'_\beta = \pi_\alpha/2 - \alpha$, то $\text{supp}(V'_i)$ проецируется в точку).

Рис. 2

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}$ – положительный корень такой, что $\pi_\alpha - \alpha + \gamma \in \text{supp}(\mathcal{N})$. Рассмотрим разложение $\gamma = t\alpha + k\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta$ корня γ в сумму простых корней, где $a_\theta \geq 0$, $t, k > 0$. Тогда имеем следующие возможности для значений коэффициентов t, k :

1) векторы с весами $\pi_\alpha - \alpha + \gamma$, для которых $t = 1, k = 2$, принадлежат V_2 и образуют неприводимый G''' -модуль, изоморфный V'_2 ; в этом случае выполнено равенство $(\alpha, \gamma) = 0$;

2) пусть $t = 1, k = 3$, этому условию удовлетворяет единственный вектор $h_{\pi_\alpha - \alpha}$ с нулевым весом, имеет место изоморфизм G''' -модулей $\mathcal{N} \cap V_2 \cong \mathbb{K}h_{\pi_\alpha - \alpha} \oplus V'_2$;

3) пусть $t = 2, k = 3$, этому условию удовлетворяет только вектор $v(-\alpha) \in V_3$.

Проективное пространство $\mathbb{P}(\mathcal{N} \cap V_2)$ изоморфно как P' -многообразие проективизации слоя нормального расслоения к многообразию флагов $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ в точке $\langle v(\pi_\alpha - \alpha) \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим веса модуля $\mathcal{N}$ в виде

$$s_\alpha \pi_\alpha - \gamma = s_\alpha \pi_\alpha - t\alpha - k\beta - \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta,$$

где $t, k > 0$. Применим к этим весам отражение s_α . Вес $s_\alpha \pi_\alpha$ при этом переходит в π_α . Заметим, что веса $\pi - s_\alpha \gamma$ принадлежат многограннику весов. Так как $s_\alpha \gamma$ является корнем, то мы получаем $s_\alpha \gamma \in \mathfrak{p}_u$ согласно лемме 1.3, что эквивалентно $s_\alpha \pi_\alpha - \gamma \in V_1 \oplus \mathbb{K}e_{-\pi_\alpha} v(\pi_\alpha)$. Поскольку рассматриваемое представление присоединенное, имеем $e_{-\pi_\alpha} v(\pi_\alpha) = [e_{-\pi_\alpha}, e_{\pi_\alpha}] = h_{\pi_\alpha} \in \mathfrak{h}$.

Имеет место равенство

$$s_\alpha \gamma = -t\alpha + k\alpha + k\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta.$$

Заметим, что $k \leq 3$, поскольку микровесовое представление $G' : V_1$ имеет градуировку не выше трех относительно спаривания с π'_β (спаривание с π'_β не меньше $\langle \pi'_\beta, \pi'_\beta \rangle - 3$). Опишем векторы γ и веса модуля $\mathcal{N}$. Рассмотрим следующие случаи.

Пусть $\pi_\alpha - s_\alpha \gamma = 0$ (в этом случае $k - m = 2$). Отсюда получаем, что вес $(\pi_\alpha - \alpha) - \gamma$ равен нулю. Ему соответствует вектор

$$e_{\alpha-\pi_\alpha}(e_{-\alpha}v(\pi_\alpha)) = e_{\alpha-\pi_\alpha}v(\pi_\alpha - \alpha) = [e_{\alpha-\pi_\alpha}, e_{\pi_\alpha-\alpha}] = -h_{\pi_\alpha-\alpha}.$$

Пусть $\pi_\alpha - s_\alpha \gamma \in V_1$ (в этом случае $m - k = 1$). Тогда мы можем разложить G' -модуль V_1 на градуированные компоненты, где градуировка определяется спариванием с π'_β :

$$V_1 = \mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha) \oplus V'_1 \oplus V'_2 \oplus V'_3.$$

Пусть $k = 3, m = 2$. Тогда рассматриваемый вес принадлежит пространству V'_3 , которое одномерно и натянуто на младший вектор v_τ представления $G' : V_1$. Поскольку $G' : V_1$ самодвойственно (система E_7 не имеет внешних автоморфизмов), то $\pi_\alpha - \alpha \equiv -\tau \pmod{\mathbb{Q}\pi}$, откуда $\tau = \alpha$. Этому весу соответствует вектор $e_{-\pi_\alpha}v(\pi_\alpha - \alpha) = v(-\alpha)$.

Если $k = 2, m = 1$, то $\pi_\alpha - s_\alpha \gamma \in V'_2$. При этом элемент s_α задает изоморфизм неприводимого G'' -модуля V'_2 и подмодуля из $\mathcal{N}$. В этом случае выполняется равенство $(\gamma, \alpha) = 0$. Действительно,

$$(\gamma, \alpha) = \left(\alpha + 2\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta, \alpha \right) = (\alpha, \alpha) + 2(\beta, \alpha) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Проективизации фактормодуля $V_1/(V'_1 \oplus \mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha))$ и модуля $\mathcal{N} \cap V_2$ изоморфны как P' -многообразия. Первый модуль может быть отождествлен со слоем нормального расслоения к многообразию флагов $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ в точке $\langle v(\pi_\alpha - \alpha) \rangle$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Модули $\mathcal{N} \cap V_2$ и $V_1/(V'_1 \oplus \mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha))$ изоморфны как $(G'' \ltimes P'_u)$ -модули, но не изоморфны как P' -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.2. Модуль $V_1/(V'_1 \oplus \mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha))$ может быть отождествлен с L' -модулем $\tilde{V} = V'_3 \oplus V'_2$, на котором задано следующее действие e_β (P' порождается $\exp(e_\beta)$ и L'):

- i) на компоненте V'_2 действие e_β тривиально;
- ii) на V'_3 действие e_β рассматривается как действие на V_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Для доказательства того, что P' порождается $\exp(e_\beta)$ и L' , достаточно заметить, что линейная оболочка элементов $L'e_\beta$ порождает алгебру Ли $\mathfrak{p}'_u$. Последнее выполнено, поскольку на унитарном радикале $\mathfrak{p}'_u$ действие L' неприводимо.

Из сказанного выше имеем разложение $\mathcal{N} \cap V_2 := \mathbb{K}h_{\pi_\alpha-\alpha} \oplus \mathcal{N}_2$ в виде суммы неприводимых G'' -модулей, где модуль $\mathcal{N}_2$ порождается векторами $e_\gamma v(\pi_\alpha - \alpha)$ для корней $\gamma \in \mathfrak{p}_u$ таких, что $e_{s_\alpha \gamma} v(\pi_\alpha) \in V'_2$.

Покажем, что элемент $e_{-\alpha}$ переводит $\tilde{V}$ в модуль $\mathbb{K}(h_{\pi_\alpha-\alpha} + v_0) \oplus \mathcal{N}_2$, где v_0 – некоторый вектор нулевого веса. При этом будет доказано, что $e_\beta v_0 = 0$,

откуда будет следовать, что $(G'' \ltimes P'_u)$ -модуль $\mathbb{K}(h_{\pi_\alpha - \alpha} + v_0) \oplus \mathcal{N}_2$ изоморфен $\mathcal{N} \cap V_2$.

Докажем, что $e_{-\alpha}$ переводит G'' -модуль V'_2 в модуль $\mathcal{N}_2$. Действительно, веса V'_2 имеют вид $\pi_\alpha - (\alpha + 2\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta)$ и переводятся в веса модуля $\mathcal{N}_2$ действием s_α . Последние имеют вид $\pi_\alpha - (2\beta + \sum_{\theta \in \Pi''} a_\theta \theta)$, откуда видно, что они получаются из весов V'_2 вычитанием α . Заметим, что действие $e_{-\alpha}$ коммутирует с G'' (корень α ортогонален корням из Δ'' , соответствующим группе G''). Поскольку G'' -модуль V'_2 неприводим, для доказательства изоморфизма нам надо проверить, что $e_{-\alpha}V'_2 \neq 0$. Выберем весовой вектор $v_\chi \in V'_2$. Веса χ и $\chi - \alpha$ являются концами одного ребра многогранника весов (см. следствие 1.4), откуда имеем, что вектор $e_{-\alpha}v_\chi$ не равен нулю.

Далее заметим, что $e_{-\alpha}$ переводит весовой вектор из V'_3 в $e_{-\alpha}v_\alpha = h_\alpha$ и что $[e_\beta, h_\alpha] = (\beta, \alpha)e_\beta = -(\beta, \pi_\alpha - \alpha)e_\beta = -[e_\beta, h_{\pi_\alpha - \alpha}]$, поскольку $(\beta, \pi_\alpha) = 0$. Отсюда получаем, что $e_{-\alpha}v_\alpha = h_\alpha = -h_{\pi_\alpha - \alpha} + v_0$ для некоторого вектора v_0 , который аннулируется e_β .

Наконец, нам осталось показать, что морфизм $e_\alpha: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}h_{\pi_\alpha - \alpha} \oplus \mathcal{N}_2$ эквивалентен относительно действия e_β . Поскольку $[e_\beta, e_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_{\beta - \alpha} = 0$ (последнее выполнено, так как разность простых корней не может быть корнем), имеем цепочку равенств

$$e_\beta e_{-\alpha}V'_2 = e_{-\alpha}e_\beta V'_2 + [e_\beta, e_{-\alpha}]V'_2 = e_{-\alpha}e_\beta V'_2,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что элемент $h_{\pi'_\beta}$ и алгебра $\mathfrak{g}'' + \mathfrak{p}'_u$ порождают $\mathfrak{p}'$. Поэтому для доказательства предложения нам необходимо проверить, что $h_{\pi'_\beta}$ действует одинаково на $\mathbb{P}(\mathcal{N} \cap V_2)$ и $\mathbb{P}(V_1/(V'_1 \oplus \mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha)))$. Однако последнее является следствием равенства

$$\text{supp}(\mathcal{N} \cap V_2) = \text{supp}(V_1/(V'_1 \oplus \mathbb{K}v(\pi_\alpha - \alpha))) + \alpha.$$

Предложение доказано, что влечет доказательство предложения 3.1.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Рассмотрим множество стабильных точек $(G/P)_\varepsilon^s$ для действия λ (соответственно, T) относительно очень обильного пучка $\mathcal{M} = \mathcal{O}(2)|_{G/P} \otimes k_{-\pi_\alpha}$. Как пучок он изоморфен $\mathcal{O}(2)|_{G/P}$, однако действие λ (соответственно, T) подкручено на характер $-\pi_\alpha$. При такой линейаризации можно считать, что λ действует на компоненте V_i с весом t^{3-2i} , при этом веса подпространства $\langle v_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V_1$ положительны, а веса подпространства $V_{\geq 2}$ отрицательны.

Напомним определения взвешенного раздутия и взвешенных проективных пространств. Пусть $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\mathbb{K}w \oplus V)$ – естественное вложение проективного пространства в качестве подпространства $w = 0$. Определим на $\mathbb{P}(\mathbb{K}w \oplus V)$ инволюцию ι , действующую по формулам $\iota(w) = -w$ и $\iota(v) = v$ для $v \in V$. Рассмотрим фактор $\mathbb{P}(\mathbb{K}w \oplus V)/\iota$ пространства $\mathbb{P}(\mathbb{K}w \oplus V)$ по действию инволюции ι . Этот фактор будет взвешенным проективным пространством с весами $(2, 1, \dots, 1)$ (см. [9]). Отображение факторизации

$$p_i: \mathbb{P}(Kw \oplus V) \rightarrow \mathbb{P}_{wt}(Kw \oplus V)$$

может быть записано в однородных координатах:

$$p_i: (z_0 : z_1 : \dots : z_n) \rightarrow (z_0^2 : z_1 : \dots : z_n).$$

На многообразии $\mathbb{P}(Kw \oplus V)$ множество ветвления морфизма p , которое, в частности, является множеством неподвижных точек относительно инволюции ι , состоит из дивизора $\mathbb{P}(V) = (0 : z_1 : \dots : z_n)$ и изолированной точки ветвления $(1 : 0 : \dots : 0)$. При этом точки дивизора $p((0 : z_1 : \dots : z_n)) \subset \mathbb{P}_{wt}(Kw \oplus V)$ являются гладкими точками многообразия $\mathbb{P}_{wt}(Kw \oplus V)$, а $p((1 : 0 : \dots : 0))$ – изолированной особой точкой. Отметим, что пространство $\mathbb{P}(Kw \oplus V)/\iota$ является конусом над квадратичным вложением Веронезе проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ (см. [9]). Это отображение может быть записано во взвешенных координатах:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Kw \oplus V) &\rightarrow \mathbb{P}_{wt}(Kw \oplus V) \rightarrow \mathbb{P}(Kw \oplus V^{\otimes 2}), \\ (z_0 : z_1 : \dots : z_n) &\rightarrow (z_0^2 : z_1 : \dots : z_n) \rightarrow (z_0^2 : z_1^2 : \dots : z_j z_i : \dots)_{0 < j \leq i}. \end{aligned}$$

Пусть $V = V_0 \oplus V_1$, где $(z_1, \dots, z_k)$ – координаты V_0 , а остальные $(z_{k+1}, \dots, z_n)$ – координаты V_1 . Тогда можно рассмотреть взвешенное раздутие $Kw \oplus V$ в подпространстве V_1 с весом 2 на подпространстве Kw и весом 1 на подпространстве V_0 . Оно может быть задано как подмногообразие $V \times \mathbb{P}_{wt}(Kw \oplus V_1)$, где $\mathbb{P}_{wt}(Kw \oplus V_0)$ – взвешенное проективное пространство с весами $(2, 1, \dots, 1)$ и координатами $(\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_k)$, следующей системой уравнений:

$$z_i \xi_j = z_j \xi_i, \quad z_0 \xi_j^2 = z_j^2 \xi_0.$$

Другими словами, это взвешенная проективизация $\text{Proj}_{wt}(\oplus \mathcal{I}^n)$, где $\mathcal{I} = (z_0, z_1, \dots, z_k)$ – идеал, задающий V_1 . При этом мы считаем, что координата z_0 имеет вес 2, а остальные координаты – вес 1.

Нашей задачей является изучение фактора $\lambda \backslash (G/P)_\varepsilon^{ss}$ для случая системы корней типа E_8 . Последнее множество, по-видимому, имеет более сложное описание, чем аналогичное множество из теоремы 2.1, однако для построения вложения $\mathcal{T}$ будет достаточно полученных ниже результатов.

Рассуждения в целом повторяют доказательство теоремы 2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $\mathbb{P}_{wt} := \mathbb{P}_{wt}(\langle e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V_1)$ – взвешенное проективное пространство с весами $(2, \underbrace{1, \dots, 1}_{\dim V_1})$, полученное факторизацией векторного пространства $\langle e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V_1$ по однопараметрической подгруппе λ . Многообразие флагов G'/P' вкладывается в $\mathbb{P}_{wt}$ посредством композиции естественных вложений $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1) \subset \mathbb{P}_{wt}$. Тогда фактор $\lambda \backslash (P_u^- P/P)_\varepsilon^s$ изоморфен $\mathbb{P}_{wt} \setminus (G'/P')$ – пространству $\mathbb{P}_{wt}$ с удаленным из него многообразием G'/P' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим орбиту $\langle \lambda(t)v \rangle \subset P_u^- P/P$. Представим вектор v в виде экспоненты алгебры Ли $\mathfrak{p}_u^-$, примененной к вектору v_{π_α} :

$$v = \exp\left(\sum_{\gamma \in \Delta_{P_u}} c_\gamma e_{-\gamma}\right) v_{\pi_\alpha} = v_{\pi_\alpha} + \underbrace{\frac{\sum_{\gamma \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}} c_\gamma e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha}}_{\in V_1} + \underbrace{c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha} + \frac{(\sum_{\gamma \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}} c_\gamma e_{-\gamma})^2}{2!} v_{\pi_\alpha}}_{\in V_2} + \dots$$

(Иными словами, мы рассматриваем вложение открытой клетки $P_u^- P/P$ в пространство $\mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$ в качестве орбиты точки $\langle v_{\pi_\alpha} \rangle$.)

Рассмотрим выражение для компоненты v_0 нулевого веса вектора v :

$$v_0 = c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}} c_\gamma c_{\pi_\alpha - \gamma} (e_{-\gamma} e_{-\pi_\alpha + \gamma} + e_{-\pi_\alpha + \gamma} e_{-\gamma}) v_{\pi_\alpha}.$$

Используя вложение $\mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{g}$, определяемое положительными корнями $\{\gamma, \pi_\alpha - \gamma, \pi_\alpha\}$, можно показать с помощью непосредственного вычисления для $\mathfrak{sl}_3$, что выражение $(e_{-\gamma} e_{-\pi_\alpha + \gamma} + e_{-\pi_\alpha + \gamma} e_{-\gamma}) v_{\pi_\alpha}$ пропорционально $(h_{-\gamma} - h_{-\pi_\alpha + \gamma}) = h_{\pi_\alpha - 2\gamma}$. Поскольку $(\pi_\alpha - 2\gamma, \pi_\alpha) = 0$, мы получаем, что при $c_{\pi_\alpha} = 0$ вектор v_0 удовлетворяет равенству $(v_0, h_{\pi_\alpha}) = 0$. Отсюда следует, что ортогональная (относительно формы Картана–Киллинга) проекция v на компоненту $h_{\pi_\alpha} \in V_2$ равна $c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle \lambda(t)v \rangle = & \left\langle v_{\pi_\alpha} + \sum_{\gamma \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}} t c_\gamma e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha} + t^2 c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left(\sum_{\gamma \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}} t c_\gamma e_{-\gamma} \right)^2 v_{\pi_\alpha} + \dots \right\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что наборы коэффициентов $(t^2 c_{\pi_\alpha}, t c_{\gamma_1}, \dots, t c_{\gamma_{\dim V_1}})$, где $\gamma_i \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}$, задают орбиту $\lambda(t)$ из открытой клетки. Рассматривая λ -эквивариантное отображение $(P_u^- P/P) \setminus \langle v(\pi_\alpha) \rangle \rightarrow \mathbb{P}_{wt}$,

$$\langle v \rangle \rightarrow \left(\frac{(v, h_{\pi_\alpha})}{(v, v(-\pi_\alpha))} : \frac{(v, v(-\pi_\alpha + \gamma_1))}{(v, v(-\pi_\alpha))} : \dots : \frac{(v, v(-\pi_\alpha + \gamma_{\dim V_1}))}{(v, v(-\pi_\alpha))} \right),$$

мы получаем изоморфизм исследуемого пространства орбит на взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}_{wt}(\langle h_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V_1)$.

Осталось выяснить, какие точки $\mathbb{P}_{wt}$ соответствуют нестабильным орбитам и должны быть исключены. Орбита $\lambda\langle v \rangle$ нестабильна только в случае, когда компонента вектора v , лежащая в $V_{\geq 2}$, равна нулю. В частности, должны быть равны нулю компоненты $c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha}$ и $(\sum_{\gamma \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}} c_\gamma e_{-\gamma})^2 v_{\pi_\alpha}$, ортогональные относительно формы Киллинга. Поскольку $v \in \mathbb{K} v_{\pi_\alpha} \oplus V_1$, по лемме 2.3 мы имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\langle v \rangle = \langle v_1 \rangle \in \mathbb{P}(V_1) \cap G/P = G'/P',$$

где v_1 – проекция v на V_1 .

Итак, чтобы $\langle v \rangle \notin (G/P)^{ss}$, необходимо $c_{\pi_\alpha} = 0$ и $\langle v_1 \rangle \in G'/P'$, что является также достаточным условием. Пусть $v = \exp(e_{-\alpha})v_{\pi_\alpha} = v_{\pi_\alpha} + e_{-\alpha}v_{\pi_\alpha}$; легко видеть, что $\langle v \rangle \notin (G/P)^{ss}$. В тоже время, так как G' и λ коммутируют, орбита $G'\langle v \rangle$ неустойчива. При этом проекция $G'\langle v \rangle$ на $\mathbb{P}(V_1)$ равна $G'\langle v_1 \rangle \cong G'/P'$. Поскольку отображение $\lambda \setminus ((P_u^-/P/P) \setminus \langle v_{\pi_\alpha} \rangle) \rightarrow \mathbb{P}_{wt}$ является изоморфизмом, мы получаем, что неустойчивые орбиты проектируются в точности на $G'/P' \subset \mathbb{P}_{wt}$, т.е. $\lambda \setminus (P_u^-/P/P)^{ss} = \mathbb{P}_{wt} \setminus (G'/P')$. Предложение доказано.

Опишем множество орбит λ , которые не принадлежат открытой клетке. Снова воспользовавшись леммой 2.4 и предложением 1.5, мы получаем, что для компоненты $v_1 \in V_1$ вектора v выполнено включение $\langle v_1 \rangle \in G'/P'$. Действуя G' , мы будем полагать, что $v_1 = v_{\pi_\alpha}$ (действие G' коммутирует с λ). Также отсюда следует, что образ при ортогональной проекции на $\mathbb{P}(V_1)$ множества орбит λ , не принадлежащих открытой клетке, равен G'/P' .

ЛЕММА 3.6. *Рассмотрим пространство λ -орбит точек $\langle v \rangle$, для которых проекция v на подпространство $\langle v_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V_1$ пропорциональна $v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Это пространство орбит как G'' -многообразие отождествляется с фактором модуля $\langle e_{-\pi_\alpha}v(\pi_\alpha - \alpha) \rangle \oplus \mathcal{N} \cap V_2$ по однопараметрической подгруппе λ , где λ действует на первой компоненте с весом 2, а на $\mathcal{N} \cap V_2$ — с весом 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим элемент v в виде экспоненты (от элемента алгебры Ли $\mathfrak{u}$), примененной к $v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Мы получаем, что

$$v = v_{\pi_\alpha - \alpha} + \sum c_\gamma e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha - \alpha} + c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{1}{2!} \left(\sum c_\gamma e_{-\gamma} \right)^2 v_{\pi_\alpha - \alpha} + \dots,$$

где обе суммы берутся по корням γ таким, что $\pi_\alpha - \alpha + \gamma \in \mathcal{N} \cap V_2$.

Выпишем значение компоненты $v_{-\alpha}$ вектора v :

$$v_{-\alpha} = c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{1}{2!} \sum_{\gamma + \delta = \pi_\alpha} c_\gamma c_\delta e_{-\gamma} e_{-\delta} v_{\pi_\alpha - \alpha},$$

где $\gamma, \delta \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}$ такие, что $\pi_\alpha - \gamma, \pi_\alpha - \delta \in \text{supp}(V_2')$. Покажем, что компонента $v_{-\alpha}$ вектора v равна $c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Из включений $\pi_\alpha - \gamma, \pi_\alpha - \delta \in \text{supp}(V_2')$ мы получаем, что равенство $\gamma + \delta = \pi_\alpha$ невозможно (действительно, последнее равенство противоречит равенствам $(\gamma - \pi_\alpha, \pi'_\beta) = (\delta - \pi_\alpha, \pi'_\beta) \neq 0$ и $(\pi_\alpha, \pi'_\beta) = 0$), откуда имеем $v_{-\alpha} = c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha}$.

Набор коэффициентов $(t^2 c_{\pi_\alpha}, t c_{\gamma_1}, \dots, t c_{\gamma_k})$, где $\gamma_i \in \Delta_{P_u} \setminus \{\pi_\alpha\}$, однозначно определяет орбиту. Значит, пространство орбит может быть отождествлено со взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K} e_{-\pi_\alpha} v(\pi_\alpha - \alpha) \oplus \mathcal{N} \cap V_2)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Для точек $\langle v \rangle \in (G/P)_\varepsilon^{ss}$, отличных от $\langle v_{\pi_\alpha} + \mathbb{K} h_{\pi_\alpha} \rangle$, ортогональная проекция на подпространство V_1 не равна нулю. Тем самым для них определена λ -эквивариантная проекция на $\mathbb{P}(V_1)$, а вместе с ней отображение

$$\sigma_0: \lambda \setminus ((G/P)_\varepsilon^{ss} \setminus \langle v_{\pi_\alpha} + \mathbb{K} h_{\pi_\alpha} \rangle) \rightarrow \mathbb{P}(V_1).$$

Через $D_{h_{\pi_\alpha}}$ обозначим G' -инвариантное гиперплоское сечение в $\mathbb{P}(V)$, заданное обращением в нуль координаты при векторе h_{π_α} . Из замечания 3.7 следует, что определена λ -эквивариантная проекция на $\mathbb{P}(V_1)$ множества $(G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}}$, и тем самым определено отображение $\sigma_0: \lambda \backslash ((G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}}) \rightarrow \mathbb{P}(V_1)$. Нашей следующей целью является изучение фактора $\lambda \backslash ((G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}})$ в окрестности слоя $\sigma_0^{-1}(z)$, где $z \in G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ – достаточно общая точка.

Выберем в $\mathbb{P}(V)$ карту $\mathcal{U}_\alpha = \{\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V) | v_{\pi_\alpha - \alpha} \neq 0\}$. Напомним, что нормальное расслоение к $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ отождествляется с $G' *_{P'} \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} \cong V_1 / (\langle v_{\pi_\alpha - \alpha} \rangle \oplus V'_1)$ – слой над точкой $v_{\pi_\alpha - \alpha}$ (при этом слой $\mathcal{N}$ надлен структурой P' -модуля).

Рассмотрим ограничение нормального расслоения на открытую клетку $(P'_u)^- P' / P' = G' / P' \cap \mathcal{U}_\alpha$. На $(P'_u)^- P' / P'$ транзитивно действует группа $(P')^-$, при этом стабилизатор точки eP' / P' равен L' . Поэтому ограничение нормального расслоения изоморфно $(P')^- *_{L'} \mathcal{N}|_{L'}$, где $\mathcal{N}|_{L'} \cong V'_2 \oplus \langle v_\alpha \rangle - P'$ -модуль $\mathcal{N}$, рассматриваемый как L' -модуль. Из последнего изоморфизма, в частности, получаем, что ограничение нормального расслоения на открытую клетку $(P'_u)^- P' / P'$ изоморфно прямой сумме подрасслоений $(P')^- *_{L'} V'_2$ и $(P')^- *_{L'} \langle v_\alpha \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Фактор $\lambda \backslash ((G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}} \cap \mathcal{U}_\alpha)$ изоморфен взвешенному раздутию многообразия $\mathbb{P}(V_1) \cap \mathcal{U}_\alpha$ в подмногообразии $(P'_u)^- P' / P'$. Прообраз $(P'_u)^- P' / P'$ изоморфен проективизации нормального расслоения к $(P'_u)^- P' / P'$ в $\mathbb{P}(V_1) \cap \mathcal{U}_\alpha$, при этом слои подрасслоения $(P')^- *_{L'} \langle v_\alpha \rangle$ имеют вес 2, а слои $(P')^- *_{L'} V'_2$ имеют вес 1.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. В ходе доказательства предложения 3.8 будет уточнено, каким образом выбираются веса взвешенного раздутия и какими уравнениями оно задается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.8. Пусть $\langle v \rangle \in (G/P)_\varepsilon^{ss} \cap \mathcal{U}_\alpha$. Воспользовавшись леммой 1.1, представим вектор v в виде экспоненты, зависящей от элемента $\tilde{u} \in \text{Ad}(s_\alpha) \mathfrak{p}_u^-$ алгебры Ли и примененной к вектору $v_{\pi_\alpha - \alpha}$:

$$v = \exp(\tilde{u}) v_{\pi_\alpha - \alpha}.$$

Отображение $\text{Ad}(s_\alpha) \mathfrak{p}_u^- \rightarrow \text{Ad}(s_\alpha) \mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha - \alpha} \subset V$ задает L' -эквивариантное вложение алгебры Ли в G -модуль V . Имеет место следующий изоморфизм L' -модулей:

$$\text{Ad}(s_\alpha) \mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha - \alpha} \cong \langle v_{\pi_\alpha} \rangle \oplus V'_1 \oplus s_\alpha V'_2 \oplus \langle v_{-\alpha} \rangle.$$

Последнее разложение позволяет представить вектор v в виде

$$v = \exp \left(b_\alpha e_\alpha + \sum_{\pi_\alpha - \alpha - \delta \in \text{supp}(V'_1)} b_\delta e_{-\delta} + \sum_{\pi_\alpha - \alpha - \gamma \in \text{supp}(V_2)} c_\gamma e_{-\gamma} + c_{\pi_\alpha} e_{-\pi_\alpha} \right) v_{\pi_\alpha - \alpha},$$

где $\gamma, \delta \in s_\alpha \Delta_{\mathfrak{p}_u^-}$. Также необходимо заметить, что спаривание с весами π_α и π'_β задает L' -инвариантные градуировки на $V(\pi_\alpha)$. К тому же значения градуировок однозначно определяют компоненты разложения модуля $\text{Ad}(s_\alpha) \mathfrak{p}_u^- v_{\pi_\alpha - \alpha}$ на неприводимые L' -модули. Последнее означает, что, используя эти градуировки, мы можем определить, каким модулям принадлежат соответствующие

мономы в экспоненциальном представлении вектора v . Отсюда мы сразу же получаем, что компонента вектора v веса $\pi_\alpha - \alpha - \delta \in \text{supp}(V'_1)$ равна $b_\delta e_{-\delta} v_{\pi_\alpha - \alpha}$, компонента веса $\pi_\alpha - \alpha - \gamma \in \text{supp}(V_2)$ равна $c_\gamma e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha - \alpha}$, а компонента веса $\pi_\alpha - \gamma \in \text{supp}(V'_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} v_{\pi_\alpha - \gamma} &= \frac{1}{2!} \sum_{\gamma=\delta_1+\delta_2+\alpha} b_{\delta_1} b_{\delta_2} (e_{-\delta_1} e_{-\delta_2} + e_{-\delta_2} e_{-\delta_1}) v_{\pi_\alpha - \alpha} \\ &\quad + \frac{1}{2!} b_\alpha c_\gamma (e_\alpha e_{-\gamma} + e_{-\gamma} e_\alpha) v_{\pi_\alpha - \alpha} \\ &= \sum_{\gamma=\delta_1+\delta_2+\alpha} b_{\delta_1} b_{\delta_2} e_{-\delta_1} e_{-\delta_2} v_{\pi_\alpha - \alpha} + b_\alpha c_\gamma e_{-\gamma} e_\alpha v_{\pi_\alpha - \alpha}, \end{aligned}$$

где $\pi_\alpha - \alpha - \delta_i \in \text{supp}(V'_1)$, а равенство выполнено в силу $[e_{-\delta_2}, e_{-\delta_1}] = 0$ и $[e_\alpha, e_{-\gamma}] = 0$.

Далее найдем коэффициент при компоненте h_{π_α} . Сначала выпишем компоненту нулевого веса для вектора v :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \sum_{\delta+\gamma=\pi_\alpha-\alpha} b_\delta c_\gamma (e_{-\delta} e_{-\gamma} + e_{-\gamma} e_{-\delta}) v_{\pi_\alpha - \alpha} + c_{\pi_\alpha - \alpha} e_{-\pi_\alpha + \alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha} - \frac{1}{2!} b_{-\alpha} c_{\pi_\alpha} h_{\pi_\alpha + \alpha} \\ = \frac{1}{2} \sum_{\delta+\gamma=\pi_\alpha-\alpha} b_\delta c_\gamma h_{-\pi_\alpha + \alpha + 2\delta} + c_{\pi_\alpha - \alpha} h_{-\pi_\alpha + \alpha} - \frac{1}{2} b_{-\alpha} c_{\pi_\alpha} h_{\pi_\alpha + \alpha}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $e_{-\delta} e_{-\gamma} + e_{-\gamma} e_{-\delta} = h_{\pi_\alpha - \alpha - 2\delta}$ (полученным вычислением в $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебре, порожденной $e_{-\delta}$ и $e_{-\gamma}$) и равенством $e_{-\pi_\alpha + \alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha} = h_{\pi_\alpha - \alpha}$ (переписанным равенством $[e_{-\pi_\alpha + \alpha}, e_{\pi_\alpha - \alpha}] = -h_{\pi_\alpha - \alpha}$). Отсюда, учитывая, что $\langle \delta, \pi_\alpha \rangle = 0$, а также то, что величины проекций $h_{\pi_\alpha - \alpha}$ и $h_{\pi_\alpha + \alpha}$ на компоненту h_{π_α} равны $(\pi_\alpha - \alpha, \pi_\alpha)/(\pi_\alpha, \pi_\alpha) = 1/2$ и $(\pi_\alpha + \alpha, \pi_\alpha)/(\pi_\alpha, \pi_\alpha) = 3/2$ соответственно, мы получаем, что проекция v на компоненту h_{π_α} имеет вид

$$x_{h_{\pi_\alpha}} := -\frac{1}{2} \left(c_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\delta+\gamma=\pi_\alpha-\alpha} b_\delta c_\gamma \right) - \frac{3}{2} b_{-\alpha} c_{\pi_\alpha}.$$

Выпишем также компоненту веса α вектора v :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \sum_{\delta_1+\delta_2+\delta_3=\pi_\alpha-2\alpha} b_{\delta_1} b_{\delta_2} b_{\delta_3} e_{-\delta_1} e_{-\delta_2} e_{-\delta_3} v_{\pi_\alpha - \alpha} \\ &\quad + \frac{1}{6} c_{-\pi_\alpha} b_\alpha^2 (e_\alpha^2 e_{-\pi_\alpha} + e_\alpha e_{-\pi_\alpha} e_\alpha) v_{\pi_\alpha - \alpha} \\ &\quad + \frac{1}{2} b_\alpha c_{\pi_\alpha - \alpha} (e_\alpha e_{-\pi_\alpha + \alpha} + e_{-\pi_\alpha + \alpha} e_\alpha) v_{\pi_\alpha - \alpha} \\ &\quad + \frac{1}{6} b_\alpha \sum_{\delta+\gamma=\pi_\alpha-\alpha} c_\gamma b_\delta (e_{-\delta} e_\alpha e_{-\gamma} + e_{-\delta} e_{-\gamma} e_\alpha + e_\alpha e_{-\delta} e_{-\gamma} + e_\alpha e_{-\gamma} e_{-\delta}) v_{\pi_\alpha - \alpha}. \end{aligned}$$

Отметим, что в последнем слагаемом мы не выписали заведомо нулевые мономы $e_{-\gamma} e_\alpha e_{-\delta} v_{\pi_\alpha - \alpha}$ и $e_{-\gamma} e_{-\delta} e_{-\alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Их тривиальность следует из того, что веса векторов $e_\alpha e_{-\delta} v_{\pi_\alpha - \alpha} = e_{-\delta} e_{-\alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha}$ равны $\pi_\alpha - \delta$ и не принадлежат

многограннику весов представления (в силу равенства $(\pi_\alpha, \delta) = 0$). Также имеем $e_\alpha e_{-\gamma} e_{-\delta} v_{\pi_\alpha - \alpha} = 0$. Действительно, $e_{-\gamma} e_{-\delta} v_{\pi_\alpha - \alpha} = [e_{-\gamma} [e_{-\delta}, e_{\pi_\alpha - \alpha}]] = N_{\delta, \pi_\alpha - \alpha} [e_{-\gamma}, e_\gamma] = -N_{\delta, \pi_\alpha - \alpha} h_\gamma$, но $[e_\alpha, h_\gamma] = 0$, поскольку $(\gamma, \alpha) = 0$, что и требовалось доказать.

Сократим слагаемые в выражении для v_α , используя коммутационные соотношения $[e_{-\pi_\alpha + \alpha}, e_\alpha] = 0$, $[e_{-\delta}, e_\alpha] = 0$ и $[e_\alpha, e_{-\gamma}] = 0$:

$$\begin{aligned} v_\alpha = & \sum_{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \pi_\alpha - 2\alpha} b_{\delta_1} b_{\delta_2} b_{\delta_3} e_{-\delta_1} e_{-\delta_2} e_{-\delta_3} v_{\pi_\alpha - \alpha} - \frac{1}{2} c_{-\pi_\alpha} b_\alpha^2 e_\alpha \\ & + b_\alpha c_{\pi_\alpha - \alpha} (e_\alpha e_{-\pi_\alpha + \alpha}) v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{1}{2} b_\alpha \sum_{\delta + \gamma = \pi_\alpha - \alpha} c_\gamma b_\delta (e_\alpha e_{-\delta} e_{-\gamma}) v_{\pi_\alpha - \alpha}. \end{aligned}$$

Обозначая первое слагаемое через q_α , получим

$$v_\alpha = q_\alpha + A c_{-\pi_\alpha} b_\alpha^2 (e_\alpha^2 e_{-\pi_\alpha}) v_{\pi_\alpha - \alpha} + x_{h_{\pi_\alpha}} b_\alpha e_\alpha e_{-\pi_\alpha + \alpha} v_{\pi_\alpha - \alpha},$$

где A – ненулевая константа, значение которой нам в дальнейшем не понадобится.

Чтобы найти пересечение $\mathcal{U}_\alpha$ с дивизором $D_{h_{\pi_\alpha}}$, необходимо положить координату $x_{h_{\pi_\alpha}}$ равной нулю, откуда для $\langle v \rangle \in G/P \cap \mathcal{U}_\alpha \cap D_{h_{\pi_\alpha}}$ имеем

$$v_\alpha = q_\alpha + A c_{-\pi_\alpha} b_\alpha^2 (e_\alpha^2 e_{-\pi_\alpha}) v_{\pi_\alpha - \alpha}.$$

Обозначим через x_ω координату при весовом векторе $v(\omega)$. Идеал $\mathcal{J}$ подмногообразия $(P'_u)^- P'/P' \subset \mathbb{P}(V_1) \cap \mathcal{U}_\alpha$ порождается следующими элементами:

$$\begin{aligned} Q_\alpha v(\alpha) &:= x_\alpha v(\alpha) - \sum_{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \pi_\alpha - 2\alpha} x_{\delta_1} x_{\delta_2} x_{\delta_3} e_{-\delta_1} e_{-\delta_2} e_{-\delta_3} v_{\pi_\alpha - \alpha}, \\ P_{\pi_\alpha - \gamma} v(\pi_\alpha - \gamma) &:= x_{\pi_\alpha - \gamma} v(\pi_\alpha - \gamma) - \sum_{\mu = \delta_1 + \delta_2 + \alpha} x_{\delta_1} x_{\delta_2} e_{-\delta_1} e_{-\delta_2} v_{\pi_\alpha - \alpha}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\pi_\alpha - \gamma \in \text{supp}(V'_2)$. Последнее видно из того, что элемент $(P'_u)^- P'/P'$ представляется в виде $\exp(\sum_{\pi_\alpha - \alpha - \delta \in \text{supp}(V'_1)} b_\delta e_{-\delta}) v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Нормальное расслоение к $(P'_u)^- P'/P'$ в $\mathbb{P}(V_1)$ отождествляется с $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ и также порождено уравнениями (3.1). Действительно, количество этих уравнений равно размерности слоя нормального расслоения, а линейные части этих уравнений равны координатам x_α и $x_{\pi_\alpha - \gamma}$ для $\pi_\alpha - \gamma \in \text{supp}(V'_2)$, что влечет независимость этих уравнений по модулю $\mathcal{J}^2$ (уравнения, входящие в этот идеал, не имеют линейных частей).

Соотношения для координат вектора $\langle v \rangle \in (G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}} \cap \mathcal{U}_\alpha$ могут быть записаны в виде

$$Q_\alpha = c_{-\pi_\alpha} b_\alpha^2 N_\alpha, \quad P_{\pi_\alpha - \gamma} = b_\alpha c_\gamma N_{\pi_\alpha - \gamma}, \quad (3.2)$$

где $N_\alpha = A |(e_\alpha^2 e_{-\pi_\alpha}) v_{\pi_\alpha - \alpha}| / |v(\alpha)|$, $N_{\pi_\alpha - \gamma} = |e_{-\gamma} e_\alpha v_{\pi_\alpha - \alpha}| / |v(\pi_\alpha - \gamma)|$ – нормировочные константы.

Заметим, что, поскольку имеет место расщепление $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ в прямую сумму двух расслоений $(P')^- *_L \langle v_\alpha \rangle$ и $(P')^- *_L V'_2$, можно рассматривать взвешенную проективизацию $(P')^- *_L \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K} v_\alpha \oplus V'_2)$ с весом 2 на первом подрасслоении и

с весом 1 на втором. Также корректно определено взвешенное раздутие Bl_{wt} многообразия $\mathcal{U}_\alpha \cap D_{h_{\pi_\alpha}}$ в $(P'_u)^- P'/P'$. А именно, можно рассмотреть взвешенную проективизацию $\text{Proj}_{wt} \oplus \mathcal{J}^n$, где образующая Q_α модуля $\mathcal{J}$ имеет вес 2, а остальные образующие $P_{\pi_\alpha - \gamma}$ – вес 1.

Приведем теперь рассуждения, позволяющие получить явные уравнения для фактора и тем самым отождествить его со взвешенным раздутием. В локальных координатах раздутие Bl_{wt} может быть описано как подмногообразие в $\mathbb{K}^{\dim V_1 - 1} \times \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V'_2)$. Здесь мы отождествляем $\mathbb{K}^{\dim V_1 - 1}$ с $V'_1 \oplus V'_2 \oplus \mathbb{K}v_{\pi_\alpha}$. Обозначим через c_{π_α} , c_γ для $\pi_\alpha - \gamma \in \text{supp}(V'_2)$ взвешенные координаты пространства $\mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V'_2)$, при этом первая координата имеет вес 2, а остальные – вес 1. Итак, Bl_{wt} задается следующей системой уравнений:

$$P_{\pi_\alpha - \gamma_i} c_{\gamma_j} = P_{\pi_\alpha - \gamma_j} c_{\gamma_i}, \quad Q_\alpha c_{\gamma_j}^2 = P_{\pi_\alpha - \gamma_j}^2 c_{\pi_\alpha} \quad (3.3)$$

для $\pi_\alpha - \gamma \in \text{supp}(V'_2)$. Легко заметить, что данная система уравнений инвариантна относительно действия однопараметрической группы λ . Исходя из уравнений (3.2) для координат $\langle v \rangle \in (G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}} \cap \mathcal{U}_\alpha$, мы получаем, что искомым фактор $\lambda \backslash ((G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}} \cap \mathcal{U}_\alpha)$ задается системой уравнений (3.3) и тем самым отождествляется со взвешенным раздутием многообразия $\mathbb{P}(V_1) \cap \mathcal{U}_\alpha$ в подмногообразии $P'_u P'/P'$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Для некоторых целей полезна следующая интерпретация рассматриваемого взвешенного раздутия. А именно, пусть $\mathbb{K}^{l_0+l}$ – векторное пространство, которое мы хотим раздуть в подпространстве $\mathbb{K}^{l_0}$ с весами $(a_1, \dots, a_l)$ на подпространстве $\mathbb{K}^l$. Пусть также $\mu = \mu_{a_1} \times \dots \times \mu_{a_l}$ – произведение групп корней из единицы порядков $(a_1, \dots, a_l)$. Рассмотрим морфизм факторизации $\tau: \mathbb{K}^l \rightarrow \mathbb{K}^l$ по действию группы μ , задаваемый на i -й координате $z_i \rightarrow z_i^{a_i}$. Также рассмотрим морфизм факторизации $\tau_{\mathbb{P}}$ проективного пространства $\mathbb{P}(\mathbb{K}^l)$ по действию группы μ , который отображает $\mathbb{P}(\mathbb{K}^l)$ во взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_l)$. В однородных координатах имеем

$$(z_1 : \dots : z_l) \rightarrow (z_1^{a_1} : \dots : z_l^{a_l}).$$

Действие группы μ может быть продолжено на раздутие пространства $W \oplus \mathbb{K}^l$ в подпространстве W , заданное уравнениями $\text{Bl} := \{(v, z, \xi) \in \mathbb{K}^{l_0+l} \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^l) \mid z_i \xi_j = z_j \xi_i\}$. А именно, образующая $\varepsilon_i \in \mu_{a_i}$ действует по формуле $z_i \rightarrow \varepsilon_i z_i$ на координатах в $\mathbb{K}^l$ и по формуле $\xi_i \rightarrow \varepsilon_i \xi_i$ на однородных координатах в $\mathbb{P}(\mathbb{K}^l)$. Фактор $\tilde{\tau}$ раздутия Bl по рассматриваемому действию μ отождествляется со взвешенным раздутием $\text{Bl}_{wt} = \{(v, z, \xi) \in \mathbb{K}^{l_0+l} \times \mathbb{P}(a_1, \dots, a_l) \mid z_i^{a_j} \xi_j^{a_i} = z_j^{a_i} \xi_i^{a_j}\}$. Отображение факторизации является ограничением отображения

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{l_0+l} \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^l) &\rightarrow \mathbb{K}^{l_0+l} \times \mathbb{P}(a_1, \dots, a_l), \\ (w \oplus (z_1, \dots, z_l)) \times (\xi_1 : \dots : \xi_l) &\rightarrow (w \oplus (z_1^{a_1}, \dots, z_l^{a_l})) \times (\xi_1^{a_1} : \dots : \xi_l^{a_l}). \end{aligned}$$

Действительно, делая подстановку $z_i \rightarrow z_i^{a_i}$, $\xi_i \rightarrow \xi_i^{a_i}$ в уравнении $z_i^{a_j} \xi_j^{a_i} = z_j^{a_i} \xi_i^{a_j}$, мы получаем $(z_i \xi_j)^{a_i a_j} = (z_j \xi_i)^{a_i a_j}$, что является следствием уравнений, определяющих раздутие Bl .

Подводя итоги к сказанному выше, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K}^{l_0+l} & \longleftarrow & \mathrm{Bl}^{\zeta} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{l_0+l} \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^l) \\
 \tau \downarrow & & \tilde{\tau} \downarrow & & \tau \times \tau_{\mathbb{P}} \downarrow \\
 \mathbb{K}^{l_0+l} & \longleftarrow & \mathrm{Bl}_{wt}^{\zeta} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{l_0+l} \times \mathbb{P}(a_1, \dots, a_l)
 \end{array}$$

§ 4. Вложение торсера над X_{Δ} в аффинный конус над G/P

Сформулируем основную теорему из работы [3]. Мы будем следовать общей схеме доказательства этой теоремы, однако модифицируем некоторые детали, что позволит получить аналогичные результаты в случае системы корней типа E_8 .

ТЕОРЕМА 4.1. *Рассмотрим вложение G/P в проективизацию микровесового представления $\mathbb{P}(V(\pi_{\alpha}))$. Для левого действия максимального тора T на G/P обозначим через $(G/P)^s$ множество стабильных точек относительно G -линеаризованного пучка $\mathcal{O}(1)|_{G/P}$. Пусть $\tau: (G/P)^s \rightarrow T \backslash (G/P)^s$ – морфизм факторизации. Существует вложение ι поверхности дель Пеццо X_{Δ} степени $9 - \mathrm{rk} \Delta$ в фактор $T \backslash (G/P)^s$ такое, что для торсера $\mathcal{T} = \tau^{-1}(\iota(X_{\Delta}))$ выполнены следующие условия:*

- 1) пусть $H_{\omega} = \{\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V(\pi_{\alpha})) \mid v_{\omega} = 0\}$ – гиперплоскость; тогда дивизор $E_{\alpha} = \tau(H_{\alpha} \cap \mathcal{T}) \subset X_{\Delta}$ является (-1) -кривой на X_{Δ} ;
- 2) (-1) -кривые E_{ω_1} и E_{ω_2} не пересекаются, если и только если веса ω_1 и ω_2 не являются смежными в многограннике весов.

Искомый торсер будем строить индуктивно. База индукции следует из того, что имеет место изоморфизм $X_{A^4} \cong T \backslash (G/P)$, где $G = \mathrm{SL}(5)$, что было доказано в [10].

Предположим, что торсер $\mathcal{T}' \subset G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$ уже построен. Обозначим через τ' фактор по левому действию тора T' . При этом фактором $\tau'(\mathcal{T}') = T' \backslash \mathcal{T}'$ является поверхность дель Пеццо $X_{\Delta'}$ степени $9 - \mathrm{rk} \Delta'$. Это плоскость с раздутыми $\mathrm{rk} \Delta'$ точками e_i в общем положении (см. [1]). Под общностью положения подразумевается, что никакие три из точек e_i не лежат на одной прямой и никакие шесть не лежат на одной конике.

Дивизоры, соответствующие исключительным кривым, лежащим над точками e_i , обозначим через E_i . Мы хотим построить торсер $\mathcal{T} \subset G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_{\alpha}))$ над поверхностью дель Пеццо X_{Δ} , которая получается из $X_{\Delta'}$ раздутием точки $e_{\mathrm{rk} \Delta} \in X_{\Delta'}$, находящейся в общем положении с точками e_i , где $i \leq \mathrm{rk} \Delta'$ (проекцию точки $e_{\mathrm{rk} \Delta}$ при стягивании $X_{\Delta'} \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ мы также будем обозначать через $e_{\mathrm{rk} \Delta}$).

Пусть $s \in G'/P'$ – точка, для которой $p_{\pi_{\alpha}}(s) = e_{\mathrm{rk} \Delta}$, а $s' \in G'/P'$ – некоторая другая точка многообразия флагов (впоследствии мы будем ее считать достаточно общей). Пусть $\{s_{\omega}\}$ – набор однородных координат точки $s \in \mathbb{P}(V_1)$ относительно весового базиса пространства V_1 (он определен корректно, поскольку V_1 – микровесовое представление). Под действием s на точке проективного пространства $x = \langle v \rangle$ мы будем понимать действие $sx = \langle \sum s_{\omega} v_{\omega} \rangle$.

Докажем следующую теорему (см. [3, п. 6.3]).

ТЕОРЕМА 4.2. *Рассмотрим вложение $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$. Пусть $s \in G'/P'$ – точка многообразия флагов, для которой $p_{\pi_\alpha}(s) = e_{\text{rk } \Delta}$. Рассмотрим уравнения $p_\mu(x) = 0$ и $q_\nu(x) = 0$ из замечания 2.8. Для общей точки $s' \in G'/P'$ имеют место следующие утверждения:*

1) *ограничения уравнений $p_\mu(x) = 0$ и $q_\nu(x) = 0$ на $s's^{-1}T'$ нетривиальны, образы множеств нулей этих уравнений определяют нетривиальные дивизоры на $X_{\Delta'}$, собственные прообразы которых при раздутии $\sigma: X_\Delta \rightarrow X_{\Delta'}$ являются (-1) -кривыми;*

2) *многообразия $s's^{-1}T'$ и G'/P' пересекаются по единственной T' -орбите, т. е. $s's^{-1}T' \cap G'/P' = T's'$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Мы приводим альтернативное доказательство теоремы 4.2, которое, в отличие от [3, п. 6.3], единообразно записывается для $p_\mu(x)$ и $q_\nu(x)$, а также обобщается в случае E_8 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Для точек $x \in T'$ под фразой “уравнение $x_\omega = 0$ (или $p_\mu(x) = 0$, $q_\nu(x) = 0$) задает дивизор (кривую) на поверхности $X_{\Delta'}$ ” мы будем подразумевать следующее: равенство $x_\omega = 0$ (или $p_\mu(x) = 0$, $q_\nu(x) = 0$) определяет дивизор нулей сечения расслоения $\mathcal{O}(1)$ (соответственно, $\mathcal{O}(2)$, $\mathcal{O}(3)$) на $\mathbb{P}(V_1)$. Мы можем пересечь дивизор с торсером T' . В случае, когда это пересечение нетривиально, из полуинвариантности сечений относительно действия T' следует, что равенство $x_\omega|_{T'} = 0$ (или $p_\mu(x)|_{T'} = 0$, $q_\nu(x)|_{T'} = 0$) определяет также дивизоры на факторе $X_{\Delta'} = T' \backslash T'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Утверждение 1) эквивалентно тому, что ограничения на T' уравнений $p_\mu(s's^{-1}x) = 0$ и $q_\nu(s's^{-1}x) = 0$ нетривиальны. Заметим, что эти уравнения обращаются в нуль в точке s , поскольку $p_\mu(x)$ и $q_\nu(x)$ равны нулю на многообразии флагов G'/P' . По предположению индукции уравнения $x_\omega = 0$ задают (-1) -кривые E_ω на $X_{\Delta'}$, а также на $T' \backslash (s's^{-1}T')$.

Рассмотрим кривые C степени 2 на $X_{\Delta'}$ относительно спаривания с каноническим классом (т. е. $(K_{X_{\Delta'}}, C) = 2$), проходящие через $e_{\text{rk } \Delta}$ (они переходят в (-1) -кривые при раздутии $e_{\text{rk } \Delta}$). Покажем, что эти кривые задаются уравнениями. Из [1] легко извлечь, что при стягивании $X_{\Delta'}$ на $\mathbb{P}^2$ такая кривая переходит либо в прямую, проходящую через $e_{\text{rk } \Delta}$ и e_i для некоторого i (например, при $i = 1$ получаем $C = L_0 - E_1 - e_{\text{rk } \Delta}$), либо в конику, проходящую через какие-либо четыре точки и точку $e_{\text{rk } \Delta}$ (при этом $C = L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - e_{\text{rk } \Delta}$), либо в кубику (например, $C = L_0 - 2E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 - E_7 - e_{\text{rk } \Delta}$) с обыкновенной двойной точкой в какой-либо из e_i , проходящую через все точки e_i (этот случай реализуется для системы корней Δ' типа E_7). Заметим, что размерности линейных систем, определяемых такими кривыми, равны нулю. Покажем, что $p_\mu(s's^{-1}x) = 0$ задает кривую рассматриваемого типа (в случае, когда $p_\mu(s's^{-1}x)$ не тождественно равно нулю на T').

В первом случае имеем следующие представления класса кривой C в виде суммы двух классов (-1) -кривых (рис. 3, а):

$$C = (L_0 - E_1 - E_i) + E_i, \quad i \neq 1.$$

Рис. 3

Во втором (см. рис. 3, *b*) и третьем случаях имеем соответственно

$$\begin{aligned}
 C &= (2L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4) = (L_0 - E_1 - E_2) + (L_0 - E_3 - E_4) \\
 &= (L_0 - E_1 - E_4) + (L_0 - E_3 - E_2) = (L_0 - E_1 - E_3) + (L_0 - E_2 - E_4) \\
 &= (2L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5) + E_5 \\
 &= (2L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_6) + E_6, \\
 C &= \left(3L_0 - 2E_1 - \sum_{i \neq 1} E_i \right) = (L_0 - E_1 - E_i) + \left(2L_0 - \sum_{j \neq 1, i} E_j \right), \quad i \neq 1.
 \end{aligned}$$

Классы (-1) -кривых находятся в биективном соответствии с весами ω (см. [1]), данные разложения соответствуют представлению некоторого веса μ в виде суммы: $\mu = \gamma_i + \delta_i$, где γ_i – вес, соответствующий $L_0 - E_1 - E_i$ (исключительная кривая задается уравнением $x_{\gamma_i} = 0$), а δ_i – вес, соответствующий E_i (с уравнением $x_{\delta_i} = 0$). Линейная система $|L_0 - E_1|$ имеет размерность 1, а рассмотренные разложения соответствуют приводимым элементам этой линейной системы. Их линейная комбинация

$$p_\mu(s's^{-1}x) = \sum_{\pi - \gamma - \delta = \mu} x_\gamma x_\delta \frac{s'_\gamma s'_\delta}{s_\gamma s_\delta} (e_{-\gamma} e_{-\delta} v_{\pi_\alpha}) = 0$$

определяет некоторый элемент этой линейной системы (либо нулевой элемент), проходящий через $e_{rk \Delta}$. Отсюда мы получаем, что $p_\mu(s's^{-1}x) = 0$ задает кривую C .

Перепишем $p_\mu(s's^{-1}x) = 0$ как уравнение от s' :

$$\tilde{p}_\mu(s') = p_\mu(s's^{-1}x) = \sum_{\pi - \gamma - \delta = \mu} p_{\gamma\delta} \frac{x_\gamma x_\delta}{s_\gamma s_\delta} s'_\gamma s'_\delta = 0.$$

Теперь докажем нетривиальность ограничения $p_\mu(s's^{-1}x) = 0$ на торсер $\mathcal{T}'$ для общей точки $s' \in G'/P'$. Пусть это не так; тогда ограничение $p_\mu(s's^{-1}x)|_{\mathcal{T}'}$ тривиально для всех $s' \in G'/P'$, другими словами, $\tilde{p}_\mu(s') \in \mathcal{J}_{G'/P'}(\mu)$ для всех $x \in \mathcal{T}'$. Легко видеть, что для $\tilde{p}_\mu(s') \in \mathcal{J}_{G'/P'}(\mu)$ все его мономы имеют вид $s'_\gamma s'_\delta$ при $\pi - \gamma - \delta = \mu$ (где вес μ рассматривается как вес $\mathcal{T}'$). Поскольку $\mathcal{J}_{G'/P'}(\mu)$ порождается уравнением $p_\mu(s') = 0$, мы получаем, что набор коэффициентов

$\{p_{\gamma\delta} \frac{x_\gamma x_\delta}{s_\gamma s_\delta}\}$ пропорционален набору $\{p_{\gamma\delta}\}$, откуда для любых двух пар γ_1, δ_1 и γ_2, δ_2 таких, что $\pi - \gamma_1 - \delta_1 = \mu$ и $\pi - \gamma_2 - \delta_2 = \mu$, имеем

$$\frac{x_{\gamma_1} x_{\delta_1}}{s_{\gamma_1} s_{\delta_1}} = \frac{x_{\gamma_2} x_{\delta_2}}{s_{\gamma_2} s_{\delta_2}}. \quad (4.1)$$

Напомним, что уравнения $x_\omega = 0$ задают (-1) -кривые на $X_{\Delta'}$. Выберем точку, лежащую на (-1) -кривой, отсекаемой $x_{\gamma_1} = 0$, и не лежащую на других (-1) -кривых. Возьмем какой-нибудь ее прообраз на торсере T' с координатами $\{x_\omega^0\}$. Тогда $x_{\gamma_1}^0 = 0$, но $x_{\gamma_2}^0 \neq 0$ и $x_{\delta_2}^0 \neq 0$, что противоречит равенству (4.1), откуда получаем требуемое.

Приведем другое доказательство этого же факта и его обобщение в случае кубики $q_\nu(x)$.

Предположим, что утверждение 1) не выполнено. Тогда ограничения $\tilde{p}_\mu(s') = p_\mu(s's^{-1}x)$ (соответственно, $\tilde{q}_\nu(s') = q_\nu(s's^{-1}x)$) для $x \in T'$ тождественно равны нулю на G'/P' . Рассмотрим ограничение $\tilde{p}_\mu(s')$ ($\tilde{q}_\nu(s')$) на открытую клетку $(P'_u)^-P'/P' = \exp(\sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{p}'_u)} c_\gamma e_{-\gamma})v_{\pi_\alpha - \alpha}$. Тогда $\tilde{p}_\mu(s')$ (соответственно, $\tilde{q}_\nu(s')$) являются многочленами (на открытой клетке, которая отождествляется с линейным пространством) от координат c_γ , где $\gamma \in \Delta(\mathfrak{p}'_u)$. Мы покажем, что для некоторой точки $x \in T'$ для многочлена $\tilde{p}_\mu(s')$ (соответственно, $\tilde{q}_\nu(s')$) коэффициент при некотором мономе от координат c_γ не равен нулю, что влечет нетривиальность $\tilde{p}_\mu(s')$ (соответственно, $\tilde{q}_\nu(s')$) как многочлена от s' .

Зафиксируем весовые базисы $\{v_\omega\}$ и $\{v'_\omega\}$ пространств $V(\pi_\alpha)$ и V_1 соответственно. Отметим, что мы не предполагаем согласованность этих базисов. Коэффициенты многочленов $\tilde{p}_\mu(s')$ (соответственно, $\tilde{q}_\nu(s')$) выберем относительно базиса $\{v_\omega\}$, т. е.

$$\begin{aligned} v_{\pi_\alpha - \gamma} &= e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha}, & \gamma &\in \Delta_{\mathfrak{p}_u}; \\ e_{-\gamma} e_{-\delta} v_{\pi_\alpha} &= p_{\gamma\delta} v_\mu, & \pi - \gamma - \delta &= \mu; \\ e_{-\mu_1} e_{-\mu_2} e_{-\mu_3} v_{\pi_\alpha} &= q_{\mu_1\mu_2\mu_3} v_\nu, & \pi_\alpha - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 &= \nu. \end{aligned}$$

Соответственно, для пространства V_1 имеем

$$\begin{aligned} v'_{(\pi_\alpha - \alpha) - \gamma'} &= e_{-\gamma'}(e_{-\alpha} v_{\pi_\alpha}) = n_{\gamma'} v_{\pi_\alpha - \gamma}, & \gamma' &\in \Delta_{\mathfrak{p}'_u}, & \gamma &= \alpha + \gamma'; \\ e_{-\gamma'} e_{-\delta'}(e_{-\alpha} v_{\pi_\alpha}) &= p'_{\gamma'\delta'} v'_{\mu'}, & (\pi_\alpha - \alpha) - \gamma' - \delta' &= \mu'. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.5. *Имеет место равенство $[e_{-\alpha}, e_{-\gamma'}] = -n_{\gamma'} e_{-\gamma}$, где $\gamma' \in \Delta_{\mathfrak{p}'_u}$, $\alpha = \gamma + \gamma'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\gamma' \in \Delta_{\mathfrak{p}'_u}$, имеем $\langle \alpha, \gamma' \rangle = 0$, откуда $e_{\gamma'} v_{\pi_\alpha} = 0$. Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} c e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha} &= [e_{-\alpha}, e_{-\gamma'}] v_{\pi_\alpha} = (e_{-\alpha} e_{-\gamma'} - e_{-\gamma'} e_{-\alpha}) v_{\pi_\alpha} \\ &= -e_{-\gamma'} e_{-\alpha} v_{\pi_\alpha} = -n_{\gamma'} e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha} \end{aligned}$$

получаем, что $c = -n_{\gamma'}$. Лемма доказана.

Без ограничения общности можно считать, что (-1) -кривая, соответствующая $v_{\pi_\alpha - \alpha} = 0$, есть $E_{\text{rk} \Delta'}$, а один из мономов p_μ равен $s'_\alpha s'_\omega$, где $\omega = L - E_1 - E_{\text{rk} \Delta'}$. Напомним, что мы рассматриваем точки $s' = \langle v \rangle$, лежащие в открытой клетке, т. е.

$$v = v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{\sum_{\gamma \in \Delta_{p'_u}} c_\gamma e_{-\gamma}}{1!} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \frac{(\sum_{\gamma \in \Delta_{p'_u}} c_\gamma e_{-\gamma})^2}{2!} v_{\pi_\alpha - \alpha} + \dots$$

Рассмотрим кривые $s'_\gamma = 0$ и $s'_\delta = 0$, где $\pi_\alpha - \gamma = L - E_1 - E_2$, а $\pi_\alpha - \delta = E_2$ (веса $\pi_\alpha - \alpha - \gamma'$ и $\pi_\alpha - \alpha - \delta'$ как веса модуля V_1 соответствуют тем же кривым $L - E_1 - E_2$ и E_2 , которые мы рассматриваем как кривые, лежащие в поверхности дель Пеццо, где кривая $E_{\text{rk} \Delta'}$ стянута). Несложно проверить (проводя вычисление с весами или перебирая кривые, порождаемые линейными системами, в которые входят кривые $L - E_1 - E_2$ и E_2), что только $s_{\gamma'} s_{\delta'}$ и $s'_\alpha s'_\omega$, где $\omega = \gamma + \delta - \alpha$, содержат моном $c_\gamma c_\delta$.

Мы получаем $v_{\pi_\alpha - \omega} = p'_{\gamma' \delta'} c_{\gamma'} c_{\delta'} + \dots$, где отсутствуют члены, не содержащие $c_{\gamma'}$ и $c_{\delta'}$ (здесь мы воспользовались тем, что e_{γ_i} при $\gamma_i \in \Delta_{p'_u}$ коммутируют между собой). Тогда коэффициент при $c_\gamma c_\delta$ в многочлене $\tilde{p}_\mu(s')$ равен

$$p'_{\gamma' \delta'} p_{\alpha \omega} \frac{x_\alpha x_\omega}{s_\alpha s_\omega} + n'_\gamma n'_\delta p_{\gamma \delta} \frac{x_\gamma x_\delta}{s_\gamma s_\delta}. \quad (4.2)$$

Заметим, что $x_\alpha x_\omega$ и $x_\gamma x_\delta$ линейно независимы в линейной системе коник на поверхности дель Пеццо $X_{\Delta'}$ (при стягивании некоторых (-1) -кривых можно добиться, что данные мономы задают две пары прямых, которые являются элементами линейной системы коник, проходящих через четыре фиксированные точки $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, e_{i_4}$), откуда следует, что выражение (4.2) не равно нулю тождественно.

Рис. 4

Докажем теперь нетривиальность $\tilde{q}_\nu(s')$. В случае E_8 без ограничения общности можно считать, что кубика имеет вид $C = L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_7 - 2e_{\text{rk} \Delta}$ (этого можно добиться выбором стягивания $X_{\text{rk} \Delta'} \rightarrow \mathbb{P}^2$, поскольку группа Вейля W' действует транзитивно на весах V_3 , соответствующих рассматриваемым кубикам). В случае E_7 мы рассматриваем поверхность,

полученную раздутием точек $e = i$, где $i = 1, \dots, 7$, $i \neq 6$. В этом случае такая кубика единственна. Зафиксируем (-1) -кривые $H_\alpha = E_7$, $H_\mu = E_2$, $H_\nu = L_0 - E_1 - E_2$, $H_\delta = E_1$, $H_\gamma = 2L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5$ (рис. 4). Искомая кубика может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} C &= L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_7 - 2e_{\text{rk}\Delta} \\ &= E_7 + (E_2 + (L_0 - E_1 - E_2)) + (E_1 + (2L_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5)). \end{aligned}$$

Рассмотрим выражения $s'_{\vartheta_1} s'_{\vartheta_2} s'_{\vartheta_3}$ от переменных $\{c_\vartheta\}_{\vartheta \in \mathfrak{p}'_u}$ и изучим, в какие из них входит моном $c_\mu c_\nu c_\gamma c_\delta$. Заметим, что s'_{ϑ_i} определяет некоторую линейную систему. В случае, когда $s'_{\vartheta_i} = n'_\zeta c_\zeta$, где $\zeta \in \mathfrak{p}'_u$, это просто кривая на $X_{\Delta'}$, соответствующая весу $\pi - \alpha - \zeta$ (ту же кривую можно рассматривать на $X_{\Delta''}$, но тогда она будет соответствовать весу $\pi'_\beta - \zeta$). Если $s'_{\vartheta_i} = \sum_{\zeta_1 + \zeta_2 = \gamma + \delta - 2\alpha} p'_{\zeta_1 \zeta_2} c_{\zeta_1} c_{\zeta_2}$, где $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{p}'_u$, то кривая $s'_{\vartheta_i} = 0$, рассматриваемая как кривая на $X_{\Delta''}$, принадлежит линейной системе, порожденной парами (-1) -кривых $c_{\zeta_1} = 0$ и $c_{\zeta_2} = 0$ для всех $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{p}'_u$ (аналогично поступаем в случае, когда s'_{ϑ_i} — кубика от переменных c_ζ).

Выпишем линейные системы, соответствующие s'_{ϑ_1} , s'_{ϑ_2} , s'_{ϑ_3} и такие, что каждая линейная система, соответствующая s'_{ϑ_i} , содержит моном, являющийся подмоном в $c_\mu c_\nu c_\gamma c_\delta$, а произведение таких подмономов равно $c_\mu c_\nu c_\gamma c_\delta$.

Всевозможные образующие $s'_{\vartheta_1} s'_{\vartheta_2} s'_{\vartheta_3}$ представлены на рис. 5 (для краткости под записью $\sum c_\gamma c_\delta$ мы понимаем сумму вида $\sum_{\zeta_1 + \zeta_2 = \gamma + \delta - 2\alpha} p'_{\zeta_1 \zeta_2} c_{\zeta_1} c_{\zeta_2}$, в которую входит моном $c_\gamma c_\delta$.)

Теперь несложно вычислить коэффициент при мономе $c_\mu c_\nu c_\gamma c_\delta$:

$$\begin{aligned} q_{\alpha(\mu\nu)(\delta\gamma)} p'_{\delta'\gamma'} p'_{\mu'\nu'} \frac{x_\alpha x_{(\mu\nu)} x_{(\delta\gamma)}}{s_\alpha s_{(\mu\nu)} s_{(\delta\gamma)}} + q_{\alpha(\mu\gamma)(\nu\delta)} p'_{\nu'\delta'} p'_{\mu'\gamma'} \frac{x_\alpha x_{(\mu\gamma)} x_{(\nu\delta)}}{s_\alpha s_{(\mu\gamma)} s_{(\nu\delta)}} \\ + q_{\mu\gamma(\nu\delta)} p'_{\nu'\delta'} n_{\mu'} n_{\gamma'} \frac{x_\mu x_\gamma x_{(\nu\delta)}}{s_\mu s_\gamma s_{(\nu\delta)}} + q_{\mu\nu(\delta\gamma)} p'_{\delta'\gamma'} n_{\mu'} n_{\nu'} \frac{x_\mu x_\nu x_{(\delta\gamma)}}{s_\mu s_\nu s_{(\delta\gamma)}} \\ + q_{\delta\nu(\mu\gamma)} p'_{\mu'\gamma'} n_{\delta'} n_{\nu'} \frac{x_\delta x_\nu x_{(\mu\gamma)}}{s_\delta s_\nu s_{(\mu\gamma)}} + q_{\delta\gamma(\nu\mu)} p'_{\nu'\mu'} n_{\delta'} n_{\gamma'} \frac{x_\delta x_\gamma x_{(\nu\mu)}}{s_\delta s_\gamma s_{(\nu\mu)}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где для краткости под записью, например, $(\zeta_1 \zeta_2)$ мы понимаем вес $\zeta_1 + \zeta_2 - \alpha$.

Коэффициенты при дробях равны ± 1 . Для доказательства этого заметим, что $e_{-\vartheta}$ для рассматриваемых $\vartheta \in \mathfrak{p}_u$ коммутируют между собой (соотношение $[e_{-\vartheta_1}, e_{-\vartheta_2}] \neq 0$ возможно только в случае E_8 , но тогда элементы $e_{-\vartheta_1}$, $e_{-\vartheta_2}$ не коммутируют, только если $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi_\alpha$, что в рассматриваемой ситуации не выполнено, поскольку такие кривые соответствуют кубическим кривым, проходящим через точки $e_1, \dots, e_7$). Любые два монома в выражении (4.3) имеют общую неизвестную x_ϑ . Сделаем какую-нибудь из аналогичных друг другу проверок:

$$\begin{aligned} q_{\mu\gamma(\nu\delta)} v_{(\mu\gamma\nu\delta)} &= e_{-(\nu\delta)} e_{-\mu} e_{-\gamma} v_{\pi_\alpha} = n_\gamma^{-1} n_\mu^{-1} e_{-(\nu\delta)} [e_{-\alpha}, e_{-\mu'}] [e_{-\alpha}, e_{-\gamma'}] v_{\pi_\alpha} \\ &= n_\gamma^{-1} n_\mu^{-1} e_{-(\nu\delta)} (e_{-\alpha} e_{-\mu'} - e_{-\mu'} e_{-\alpha}) (e_{-\alpha} e_{-\gamma'} - e_{-\gamma'} e_{-\alpha}) v_{\pi_\alpha} \\ &= -n_\gamma^{-1} n_\mu^{-1} e_{-(\nu\delta)} e_{-\alpha} e_{-\mu'} e_{-\gamma'} e_{-\alpha} v_{\pi_\alpha} \\ &= -n_\gamma^{-1} n_\mu^{-1} p'_{\mu'\gamma'} e_{-\alpha} e_{-(\nu\delta)} e_{-(\mu\gamma)} v_{\pi_\alpha} \\ &= -n_\gamma^{-1} n_\mu^{-1} p'_{\mu'\gamma'} q_{-\alpha(\nu\delta)(\mu\gamma)} v_{(\mu\gamma\nu\delta)}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $e_{-\gamma'} v_\pi = 0$, $e_{-\alpha} e_{-\gamma} v_\pi = 0$, а также леммой 4.5.

Рис. 5

Из следующей элементарной леммы следует, что выражение (4.3) не может быть равно нулю тождественно.

ЛЕММА 4.6. Пусть точки e_i находятся в общем положении. Пусть l_{ij} – прямая, проходящая через точки e_i, e_j , а q_{ij} – коника, проходящая через точки e_i, e_j, e_3, e_4, e_5 , кроме того, E_i , как и ранее, обозначают исключительные кривые – прообразы e_i . Нормируем уравнения таким образом, что $l_{ij}(e_{\text{rk}} \Delta) = q_{ij}(e_{\text{rk}} \Delta) = 1$. Тогда ограничение выражения

$$l_{12}q_{26}E_2 - l_{12}q_{16}E_1 + l_{16}q_{12}E_1 - l_{16}q_{26}E_6 + l_{26}q_{16}E_6 - l_{26}q_{12}E_2$$

на прямую $l_\Delta = L - E_1 - e_{\text{rk}} \Delta$ не равно нулю (заметим, что прямая l_Δ , рассматриваемая как кривая на $X_{\Delta'}$, имеет степень 2 относительно $K_{\Delta'}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что кривая l_Δ пересекается с каждой из кривых $E_1, q_{16}, l_{26}, q_{12}$ по одной точке (обозначим эти точки через a, b, c, d соответственно), а с кривой q_{26} – по двум точкам (рис. 6).

Заметим, что, поскольку прямые l_{12} и l_{16} не пересекают l_Δ , кривые $l_{16}q_{26}E_6$ и $l_{12}q_{26}E_2$ определяют одно и то же сечение пучка $\mathcal{O}(2)$ на кривой l_Δ , которое также равно $q_{26}|_{l_\Delta}$. Действительно, все три кривые пересекают l_Δ по двум фиксированным точкам, при этом все три сечения равны 1 в точке $e_{\text{rk}} \Delta$. Отсюда мы получаем, что $(l_{16}q_{26}E_6 - l_{12}q_{26}E_2)|_{l_\Delta} = 0$. Без ограничения общности считаем, что все точки лежат в аффинной карте, где $x = 0$. Тогда из условия нормировки в точке 0 (т.е. $l_{ij}(e_{\text{rk}} \Delta) = q_{ij}(e_{\text{rk}} \Delta) = 1$) наше выражение принимает вид

$$\begin{aligned} & -l_{12}q_{16}E_1 + l_{26}q_{16}E_6 - l_{26}q_{12}E_2 + l_{16}q_{12}E_1 \\ &= -\frac{1}{ab}(x-a)(x-b) + \frac{1}{bc}(x-b)(x-c) - \frac{1}{cd}(x-c)(x-d) + \frac{1}{da}(x-d)(x-a) \\ &= \frac{(b-d)(c-a)}{abcd}x^2. \end{aligned}$$

Рис. 6

Последнее выражение равно нулю при $a = c$ или $b = d$, но первое равенство означает, что точки e_1, e_2, e_3 лежат на одной прямой, а второе – что коники q_{12} и q_{16} пересекаются по пяти точкам, откуда следует, что шесть точек лежат на конике, а это противоречит общности положения. Лемма доказана.

Утверждение 2) предложения 4.2 легко следует из того факта, что уравнения $p_\mu(x) = 0$, $\mu \in \text{supp}(V_1)$, задают G'/P' , а также из того, что на факторе $X_{\Delta'} = T \amalg s's^{-1}T'$ эти уравнения задают коники, пересекающиеся в точности по точке $e_{\text{rk } \Delta}$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Пусть $T = p_{\pi_\alpha}^{-1}\sigma_0^{-1}(s's^{-1}T')$ – композиция собственного прообраза $s's^{-1}T'$ при раздутии σ_0 и полного прообраза при морфизме факторизации p_{π_α} . Тогда фактор $T \amalg T$ является поверхностью X_Δ , полученной раздутием поверхности дель Пеццо $X_{\Delta'}$ в точке $e_{\text{rk } \Delta} = p_{T'}(s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фактор $\tilde{T} = \lambda \amalg T$. Легко видеть, что это собственный прообраз $s's^{-1}T'$ при раздутии $\text{Bl}(\mathbb{P}(V_1), G'/P')$ пространства $\mathbb{P}(V_1)$ в многообразии флагов G'/P' (морфизм стягивания обозначим через σ_0).

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xleftarrow{p_{T'}} & \tilde{T} & \longrightarrow & \text{Bl}(\mathbb{P}(V_1), G'/P') \\ \tilde{\sigma} \downarrow & & \sigma \downarrow & & \sigma_0 \downarrow \\ X_{\Delta'} & \xleftarrow{p_{T'}} & s's^{-1}T' & \longrightarrow & \mathbb{P}(V_1) \end{array}$$

где поверхность $\tilde{X}$ определяется как фактор $T' \amalg \tilde{T}$. Заметим, что, поскольку $s's^{-1}T' \cap G'/P' = T's'$, имеет место изоморфизм

$$\tilde{T} \setminus \sigma_0^{-1}(T's') = s's^{-1}T' \setminus T's'.$$

При переходе к факторам получаем изоморфизм

$$\tilde{X} \setminus \tilde{\sigma}^{-1}(e_{\text{rk } \Delta}) = X_{\Delta'} \setminus (e_{\text{rk } \Delta}).$$

Отсюда непосредственно следует, что $\tilde{\sigma}$ является композицией раздутий с центрами вне $X_{\Delta'} \setminus e_{\text{rk } \Delta}$, или, другими словами, $\tilde{X}$ получается раздутием $X_{\Delta'}$ в подсхеме с носителем в $e_{\text{rk } \Delta}$ (см. [11]), определенной идеалом $\mathcal{J}_{e_{\text{rk } \Delta}}$. Наша цель – показать, что $\tilde{\sigma} = X_{\Delta}$, или, другими словами, что идеал $\mathcal{J}_{e_{\text{rk } \Delta}}$ максимальный. Используя свойство универсальности раздутия (см. [11, предложение 7.14, следствие 7.15]) для правой части диаграммы, мы получаем, что идеал, определяющий раздутие, равен ограничению идеала $\mathcal{J}_{G'/P'}$ на $s's^{-1}T'$, т. е. $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_{G'/P'}|_{s's^{-1}T'}$.

Заметим, что предложение можно проверять локально. Перейдем к T' -инвариантной аффинной карте $U = \text{Спец}(\mathcal{A})$ на $s's^{-1}T'$, содержащей орбиту $T's'$. При морфизме $p_{T'}$ она перейдет в аффинную карту $T' \parallel U = \text{Спец}(\mathcal{A}^{T'})$, содержащую точку $e_{\text{rk } \Delta}$. Уменьшая карту, мы считаем, что дивизоры, определяемые $p_{\mu}(x)$, являются главными и задаются регулярными функциями $f_{\mu} \in \mathcal{A}^{T'} = \mathcal{O}(U)$. Обратные образы этих функций будут инвариантными функциями на U с теми же дивизорами нулей, что и для $p_{\mu}(x)$ (поскольку нули $p_{\mu}(x)$ T' -инвариантны), поэтому они также определяют $\mathcal{J}_0|_U$.

Применим свойство универсальности раздутия для левой части диаграммы. Переформулируя предложение 7.14, следствие 7.15 из [11], мы получаем, что $\mathcal{J}_0$ равен идеалу кольца $\mathcal{A}$, порожденному идеалом $\mathcal{J}_{e_{\text{rk } \Delta}} \subset \mathcal{A}^{T'}$. Отсюда имеем $\mathcal{J}_0^{T'} = \mathcal{J}_{e_{\text{rk } \Delta}}$ (см. [12]). Как было показано, идеал $\mathcal{J}_{e_{\text{rk } \Delta}} = \mathcal{J}_0^{T'}$ содержит функции f_{μ} , но нули последних совпадают с кривыми $p_{\mu}(x) = 0$ на поверхности $X_{\Delta'}$. Любые две такие кривые пересекаются трансверсально в точке $e_{\text{rk } \Delta}$ (хотя нам достаточно знать трансверсальность пересечения, например, кривых $L - E_1 - e_{\text{rk } \Delta}$ и $L - E_2 - e_{\text{rk } \Delta}$). Тем самым, идеал $\mathcal{J}_{e_{\text{rk } \Delta}}$ совпадает с максимальным идеалом точки $e_{\text{rk } \Delta}$. Предложение доказано.

Для случая E_8 докажем следующий аналог предложения 4.7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть G – присоединенная группа типа E_8 , $p_{\pi_{\alpha}}$ – морфизм факторизации по λ , а σ_0 – морфизм $\lambda \parallel ((G/P)_{\varepsilon}^{ss} \cap D_{h_{\pi_{\alpha}}}) \rightarrow \mathbb{P}(V_1)$, определяемый проекцией p_0 на $\mathbb{P}(V_1)$. Пусть дано вложение универсального торсера T' над поверхностью дель Пеццо степени 2 в $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$, не содержащееся ни в какой T' -инвариантной гиперплоскости. Зафиксируем достаточно общие точки $s, s' \in G'/P'$ и обозначим через $T = p_{\pi_{\alpha}}^{-1} \sigma_{0*}^{-1}(s's^{-1}T')$ композицию собственного прообраза $s's^{-1}T'$ при взвешенном раздутии σ_0 и полного прообраза при морфизме факторизации по λ . Тогда фактор $T \parallel T$ является поверхностью X_{Δ} , полученной раздутием поверхности дель Пеццо $X_{\Delta'}$ в точке $e_{\text{rk } \Delta} = p_{T'}(s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $(G/P)_{\varepsilon}^{ss} \cap D_{h_{\pi_{\alpha}}} \cap \mathcal{U}_{\alpha}$ – открытую T' -инвариантную карту. Согласно предложению 3.8 имеем, что

$$\lambda \parallel ((G/P)_{\varepsilon}^{ss} \cap D_{h_{\pi_{\alpha}}} \cap \mathcal{U}_{\alpha}) \rightarrow \mathbb{P}(V_1) \cap \mathcal{U}_{\alpha}$$

изоморфно взвешенному раздутию σ_0 многообразия $\mathbb{P}(V_1) \cap \mathcal{U}_{\alpha}$ в $(P'_u)^- P'/P'$. Прообраз $\sigma_0^{-1}((P'_u)^- P'/P')$ отождествляется с $(P')^- *_L \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_{\alpha} \oplus V'_2)$. Поскольку стабилизатор действия T' в точке s' тривиален, многообразие $\sigma_0^{-1}(T's')$ отождествляется с $T's' \times \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_{\alpha} \oplus V'_2)$. В частности, $T' \parallel \sigma_0^{-1}(T's') \cong \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_{\alpha} \oplus V'_2)$.

По индукции имеем вложение $T' \subset G'/P'$. Как было доказано, $s's^{-1}T'$ пересекает G'/P' по орбите $T's'$ трансверсально. При этом фактор $T' \backslash s's^{-1}T'$ есть гладкая поверхность дель Пеццо степени 2. Последнее означает, что в окрестности точки $p_{T'}(s')$ росток поверхности является полным пересечением и может быть задан регулярной системой уравнений $(f_0, \dots, f_l)$, где $l = \dim V_1 - \dim T' - 4$. Поскольку T' -многообразие может быть покрыто T' -инвариантными аффинными картами, можно считать, что $s' \in U_{s'}$ для некоторой T' -инвариантной аффинной окрестности, при этом $f_i \in \mathbb{K}[T' \backslash U_{s'}] = \mathbb{K}[U_{s'}]^{T'}$. Из сказанного выше росток торсера $s's^{-1}T'$ также задается рассматриваемой регулярной последовательностью $(f_0, \dots, f_l)$.

Пусть $\tilde{T} = \lambda \backslash T$ – собственный прообраз $s's^{-1}T'$ при взвешенном раздутии σ_0 . Наша цель – показать, что фактор $\tilde{T} \cap \sigma_0^{-1}(s') \cong \tilde{T} \cap \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V_2')_{s'}$ по действию тора T' изоморфен $\mathbb{P}^1$.

На рассматриваемой T' -инвариантной карте $U_{s'}$ можно считать, что многообразии $(P'_u)^-P'/P'$ задано обращением в нуль уравнений $p_{\pi_\alpha - \gamma_i}, q_\alpha$. Несложно проверить, что эти уравнения при переходе к карте $v_{\pi_\alpha} \neq 0$ задают уравнения, отвечающие обращению в нуль компонент с весами $s_\alpha(\pi_\alpha - \gamma_i)$ и $-\alpha$ соответственно для точек многообразия флагов G/P . В частности, при переходе к фактору $T \backslash s's^{-1}T'$ уравнения $p_{\pi_\alpha - \gamma_i} = 0$ задают на поверхности дель Пеццо степени 2 коники, проходящие через точку e_8 , а уравнение $q_\alpha = 0$ – кубикку с двойной точкой в e_8 .

Напомним, что взвешенное раздутие $\sigma_0: \lambda \backslash ((G/P)_\varepsilon^{ss} \cap D_{h_{\pi_\alpha}}) \rightarrow \mathbb{P}(V_1)$ задается как подмногообразие в $\mathbb{K}^{\dim V_1 - 1} \times \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V_2')$ системой уравнений

$$p_{\pi_\alpha - \gamma_i} c_{\gamma_j} = p_{\pi_\alpha - \gamma_j} c_{\gamma_i}, \quad q_\alpha c_{\gamma_j}^2 = p_{\pi_\alpha - \gamma_j}^2 c_{\pi_\alpha}.$$

Представим уравнения f_i , определяющие $s's^{-1}T'$, в виде суммы линейной части по переменным $p_{\pi_\alpha - \gamma_j}$ (которую мы считаем ненулевой) и остатка, состоящего из мономов большего веса относительно рассматриваемой взвешенной градуировки:

$$f_i = \sum_j a_{ij} p_{\pi_\alpha - \gamma_j} + f_i^{>1},$$

где коэффициенты a_{ij} зависят от переменных b_γ . При этом мы считаем, что a_{ij} записаны в виде многочленов от $(b_\gamma - (b_\gamma)_{s'})$ с постоянными членами $\bar{a}_{ij}$, где $(b_\gamma)_{s'}$ – координаты точки s' в $P'_u P'/P'$. Наша цель – определить, какое многообразие высекает уравнение $f_i = 0$ в слое над точкой s' , где обращаются в нуль все координаты $p_{\pi_\alpha - \gamma_j}, q_\alpha$. Переходя к карте $c_{\gamma_1} \neq 0$, получаем

$$f_i = p_{\pi_\alpha - \gamma_1} \sum_j a_{ij} \frac{c_{\gamma_j}}{c_{\gamma_1}} + p_{\pi_\alpha - \gamma_1}^2 \tilde{f}_i^{>1},$$

где $\tilde{f}_i^{>1}$ – многочлен от $p_{\pi_\alpha - \gamma_j}$. Разделив выражение для f_i на $p_{\pi_\alpha - \gamma_1}$, подставляя значение $p_{\pi_\alpha - \gamma_1} = 0$ и переходя к однородному уравнению по переменным $c_{\pi_\alpha - \gamma_j}$, мы получаем, что пересечение собственного прообраза многообразия $f_i = 0$ и слоя $\sigma_0^{-1}(s') \cong \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V_2')$ задается в слое $\mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V_2')$ уравнением

$$\bar{f}_i = \sum_j \bar{a}_{ij} c_{\gamma_j}.$$

Аналогичным образом мы получаем, что уравнение

$$f = q_\alpha + \sum_{i,j} d_{ij} p_{\pi_\alpha - \gamma_i} p_{\pi_\alpha - \gamma_j} + f^{>2}$$

в слое над точкой s' , изоморфном $\mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V'_2)$, определяет гиперповерхность $f = c_{\pi_\alpha} + \sum_{i,j} \bar{d}_{ij} c_{\gamma_i} c_{\gamma_j}$, где $\bar{d}_{ij}$ определяются аналогично $\bar{a}_{ij}$.

Покажем, что матрица, состоящая из однородных компонент $\bar{f}_i$ степени 1 многочленов f_i , имеет ранг, равный $\dim \mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V'_2) - 2$. Заметим, что на поверхности $T' \parallel s'^{-1} T'$ уравнение $q_\alpha = 0$ задает кубик с двойной точкой в e_8 . Последнее, в частности, означает, что дифференциал dq_α равен нулю при ограничении на касательное пространство к торсеру в точке s' , откуда следует линейная зависимость между dq_α и $df_0, \dots, df_l$. Таким образом, можно считать, что $df_1, \dots, df_l$ и dq_α линейно независимы, а линейная часть многочлена df_0 пропорциональна q_α . Заметим, что df_i обращаются в нуль при ограничении на $t's' \subset T_{s'}(G'/P')$. В пространстве, порожденном формами db_δ , рассмотрим подпространство форм, обращающихся в нуль на подпространстве $t's'$. В нем выберем базис $\tilde{db}_k$, где $k = \dim G'/P' - \dim T'$. Запишем df_i для $i \geq 1$ в базисе $dp_{\pi_\alpha - \gamma_j}, dq_\alpha, \tilde{db}_k$. Мы получим матрицу, в первых $\dim(V_1) - \dim G'/P' - 2$ строках которой стоят элементы $\bar{a}_{ij}$. Поскольку матрица, составленная из $df_1, \dots, df_l$, имеет ранг $\dim V_1 - \dim T' - 3$, матрица коэффициентов $\bar{a}_{ij}$ имеет ранг не менее $\dim \mathbb{P}(V_1) - \dim T' - 3 - (\dim G'/P' - \dim T') = \dim V'_2 - 2$. Заметим, что на поверхности $T' \parallel s'^{-1} T'$ уравнения $p_{\pi_\alpha - \gamma_i} = 0$ задают коники, проходящие через точку e_8 и пересекающиеся в ней трансверсально. Последнее, в частности, означает, что дифференциалы $dp_{\pi_\alpha - \gamma_1}$ и $dp_{\pi_\alpha - \gamma_2}$ порождают касательное пространство к поверхности в e_8 , откуда следует линейная независимость $dp_{\pi_\alpha - \gamma_1}, dp_{\pi_\alpha - \gamma_2}, df_1, \dots, df_l$. Отсюда получаем, что ранг матрицы $\bar{a}_{ij}$ не больше $\dim V'_2 - 2$, а значит, равен $\dim V'_2 - 2$.

Предыдущие рассуждения показывают, что уравнения $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_l$ задают в пространстве $\mathbb{P}_{wt}(\mathbb{K}v_\alpha \oplus V'_2)$ взвешенное проективное подпространство $\mathbb{P}(2, 1, 1)$. Уравнение $\bar{f}_0 = c_{\pi_\alpha} + \sum_{i,j} \bar{d}_{ij} c_{\gamma_i} c_{\gamma_j}$ задает рациональную неособую кривую, поскольку она является образом коники $c_0^2 + \sum_{i,j} \bar{d}_{ij} c_{\gamma_i} c_{\gamma_j} = 0$ при отображении факторизации $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}(2, 1, 1)$ по инволюции, меняющей знак первой координаты. Таким образом, мы получаем, что интересующий нас слой над точкой s' состоит из неособой рациональной кривой (несложная проверка в локальных координатах показывает, что полученная поверхность неособа).

Тем самым мы получаем, что $T' \parallel \mathcal{T}$ является поверхностью X_Δ , полученной раздутием поверхности дель Пеццо $X_{\Delta'}$ в точке $e_{rk \Delta} = p_{T'}(s)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Чтобы определить пересечение слоя σ_0^{-1} и собственного прообраза гиперповерхности $f = 0$, можно рассуждать следующим образом. Воспользуемся реализацией раздутия из замечания 3.10. Пусть $\bar{f}$ – компонента f , состоящая из мономов с минимальной градуировкой d по переменным z_i :

$$\bar{f} = \sum_{\sum_j a_j i_j = d} p_{i_1 \dots i_l}(w) z_1^{i_1} \dots z_l^{i_l}.$$

Тогда $\tau^* f = \sum_{\sum_j a_j i_j = d} p_{i_1 \dots i_l}(w) z_1^{a_1 i_1} \dots z_l^{a_l i_l} + f^{>d}$, где компонента $f^{>d}$ имеет степень больше d . Пересечение слоя σ_0^{-1} и собственного прообраза многообразия $f = 0$ для обычного раздутия Bl задается однородной компонентой младшей степени $\tau^* f = \sum_{\sum_j a_j i_j = d} p_{i_1 \dots i_l}(w) z_1^{a_1 i_1} \dots z_l^{a_l i_l}$ (в терминах Proj это проекция на $\mathcal{J}^d / \mathcal{J}^{d+1}$, где $\mathcal{J} = (z_1, \dots, z_l)$). Чтобы получить уравнение для пересечения слоя σ_0^{-1} и собственного прообраза многообразия $f = 0$ для взвешенного раздутия Bl , рассмотрим фактор многообразия $(\tau^* f = 0)$ по $\tau_{\mathbb{P}}$. Легко видеть, что оно задано уравнением $\sum_{\sum_j a_j i_j = d} p_{i_1 \dots i_l}(w) z_1^{i_1} \dots z_l^{i_l} = 0$. Иными словами, последнее есть проекция на компоненту степени d алгебры $\text{Proj}_{wt} \bigoplus \mathcal{J}^i / \mathcal{J}^{i+1}$, на которой рассматривается взвешенная градуировка с обременяющими $\mathcal{J} = (z_1, \dots, z_l)$, снабженными весами $(a_1, \dots, a_l)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Предыдущее замечание позволяет дать следующую интерпретацию ситуации, описанной в предложении 4.8. Рассмотрим раздутие в нуле конуса $z_0^2 = z_1 z_2$, лежащего в пространстве $\mathbb{K}^3$. Это раздутие разрешает рассматриваемую особенность. Над особой точкой этого конуса вклеивается коника $\xi_0^2 = \xi_1 \xi_2$, которая является (-2) -кривой. Далее рассмотрим на $\mathbb{K}^3 \times \mathbb{P}^3$ инволюцию, действующую на координатах z_0 и ξ_0 умножением на -1 . Фактором раздутия $\mathbb{K}^3$ в нуле по этой инволюции будет взвешенное раздутие, заданное в $\mathbb{K}^3 \times \mathbb{P}(2, 1, 1)$ уравнениями

$$z_0 \xi_i^2 = z_i^2 \xi_0, \quad z_1 \xi_2 = z_2 \xi_1.$$

Фактором рассматриваемого раздутого конуса будет собственный прообраз при взвешенном раздутии поверхности, заданной уравнением $z_0 = z_1 z_2$. Заметим, что при факторизации по рассматриваемой инволюции коника $\xi_0^2 = \xi_1 \xi_2$, лежащая над нулем, двулистно отображается на рациональную кривую в $\mathbb{P}(2, 1, 1)$, заданную уравнением $\xi_0 = \xi_1 \xi_2$. По формуле проекции из теории пересечений последняя кривая является, тем самым, (-1) -кривой. К тому же легко проверить в локальных координатах, что образ раздутого конуса при рассматриваемой факторизации – гладкая поверхность, которая является раздутием аффинной плоскости.

Из предложения 4.8 легко следует утверждение 2) теоремы 4.2. Действительно, пусть ω – соседний вес к π_α ; тогда $\omega \in V_1$. Кривая E_{π_α} является раздутием точки $e_{\text{rk } \Delta}$ на поверхности $X_{\Delta'}$, кривые E_ω – это (-1) -кривые поверхности $X_{\Delta'}$, которые не пересекаются с E_{π_α} , поскольку не проходят через $e_{\text{rk } \Delta}$.

Кривые E_μ и E_ν соответствуют несмежным весам, задаются уравнениями $p_\mu = 0$ и $q_\nu = 0$, где $\mu \in V_2$, $\nu \in V_3$, и являются кривыми степени 2 и 3 относительно $-K_{X_{\Delta'}}$. Индексы их пересечения с кривой E_{π_α} равны 1 и 2, поскольку первая кривая проходит через точку $e_{\text{rk } \Delta}$, а вторая имеет в $e_{\text{rk } \Delta}$ двойную точку.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 4.2 (следуя работе [3]).

Мы построили вложение $\mathcal{T} \subset (G/P)^s$. Рассмотрим весовые гиперплоскости $H_\omega = \{\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V(\pi_\alpha)) \mid v_\omega = 0\}$. По построению дивизор $E_\omega = \tau(H_\omega \cap \mathcal{T}) \subset X_\Delta$ является (-1) -кривой на X_Δ , причем все (-1) -кривые получаются таким способом. Хорошо известно [1], что E_ω порождают $\text{Pic}(X_\Delta)$.

В качестве $\widehat{\mathcal{T}}$ возьмем прообраз в $V(\pi_\alpha)$ торсера $\mathcal{T}$ при проективизации $V(\pi_\alpha) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$.

Пусть $(G/P)_T^s$ – множество стабильных точек относительно пучка $i^*\mathcal{O}(1)$ для действия тора T , где i – вложение $G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$. Рассмотрим подмножество $(G/P)^{sf} \subset (G/P)^s$ точек со стабилизатором $Z(G)$. Как было показано, множество $(G/P)^{sf}$ имеет коразмерность больше 1 в G/P , откуда $\text{Pic}((G/P)^{sf}) = \text{Pic}(G/P) = \Xi(P) = \mathbb{Z}\pi_\alpha$ (см. [13]). Обозначим через $\widehat{G/P}$ прообраз $(G/P)^{sf}$ относительно проективизации $V(\pi_\alpha) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$. Отсюда непосредственно видно, что $\text{Pic}(\widehat{G/P}) = 0$. Поскольку на $\widehat{G/P}$ нет регулярных $\widehat{T}$ -полуинвариантных обратимых функций, из точной последовательности получаем, что торсер G/P универсален. При этом образы гиперплоскостей $\widehat{H}_\omega = \{v \in \mathbb{V}(\pi_\alpha) \mid v_\omega = 0\}$ при морфизме факторизации порождают $\text{Pic}(\widehat{T} \backslash\backslash (\widehat{G/P})) \cong \text{Pic}_{\widehat{T}}(\widehat{G/P})$.

Далее покажем, что торсер $\widehat{T}$ также универсален. Воспользовавшись точной последовательностью (CTS) для торсеров $\widehat{T}$ и $\widehat{G/P}$, мы получаем коммутативную диаграмму, где правая вертикальная стрелка индуцирована вложением $\widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G/P}$:

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & \Xi(\widehat{T}) & \longrightarrow & \text{Pic}(\widehat{T} \backslash\backslash (\widehat{G/P})) & \longrightarrow \\ & \parallel \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & \Xi(\widehat{T}) & \longrightarrow & \text{Pic}(X_\Delta) & \longrightarrow \end{array}$$

Однако мы видели, что факторы $\widehat{T} \backslash\backslash \widehat{H}_\omega$ гиперплоскостей $\widehat{H}_\omega$ порождают группу Пикара $\text{Pic}(X_\Delta)$, откуда получаем, что вертикальное отображение сюръективно и, тем самым, все отображения в коммутативной диаграмме – изоморфизмы. Отсюда следует универсальность торсера $\widehat{T}$.

В случае, когда система корней имеет тип E_8 , теорема 4.2 формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть Δ – система корней типа E_8 . Рассмотрим вложение G/P в проективизацию присоединенного представления $\mathbb{P}(V(\pi_\alpha)) = \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Для левого действия максимального тора T на G/P обозначим через $(G/P)_\varepsilon^s$ множество стабильных точек относительно G -линеаризованного пучка $\mathcal{O}(2)|_{G/P} \otimes k_{-\pi_\alpha}$. Пусть $\tau: (G/P)_\varepsilon^s \rightarrow T \backslash\backslash (G/P)^s$ – морфизм факторизации. Рассмотрим достаточно общую поверхность дель Пеццо X_Δ степени 1. Существует вложение ι поверхности X_Δ в фактор $T \backslash\backslash (G/P)_\varepsilon^s$ такое, что для торсера $T = \tau^{-1}(\iota(X_\Delta))$ выполнены следующие условия:

- 1) пусть $H_\omega = \{v \in \mathbb{P}(V(\pi_\alpha)) \mid v_\omega = 0\}$ – гиперплоскость; тогда дивизор $E_\alpha = \tau(H_\omega \cap T) \subset X_\Delta$ является (-1) -кривой на X_Δ ;
- 2) (-1) -кривые E_{ω_1} и E_{ω_2} не пересекаются, если и только если веса ω_1 и ω_2 не являются смежными в многограннике весов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что построено вложение T' -торсера над X_Δ в многообразие флагов $G'/P' \subset \mathbb{P}(V_1)$. Пусть $e_8 \in X_\Delta$ – точка, при раздутии которой из X_Δ мы получаем X_Δ . Возьмем точку $s \in G'/P'$ такую, что $\tau(s) = e_8$. По теореме 4.2 для общей точки $s' \in G'/P'$ имеем $s's^{-1}T' \cap G'/P' = Ts'$. Заметим, что по предложению 4.7 полным прообразом

торсера $s's^{-1}T'$ при взвешенном раздутии $\text{Bl}_{wt}(\mathbb{P}(V(\pi'_\beta)), G'/P') \rightarrow \mathbb{P}(V(\pi'_\beta))$ является T' -торсер над X_Δ , который мы обозначим через $\tilde{T}'$.

По теореме 3.5 фактор $\lambda \backslash (G/P)_\varepsilon^s \cap D_{h_\alpha} \cap \mathcal{U}_\alpha$ изоморфен взвешенному раздутию $\text{Bl}_{wt}(\mathbb{P}(V(\pi'_\beta)), G'/P')$. Определим искомый торсер, взяв сначала прообраз торсера $\tilde{T}'$ относительно факторизации по λ , а затем рассмотрев аффинный конус в $V(\pi_\alpha)$ над ним.

Далее рассуждения аналогичны доказательству теоремы 4.1, поэтому мы приведем только доказательства недостающих утверждений. Докажем, утверждение 2).

Рис. 7

Наша задача – показать, что для достаточно общей точки e_8 однородный многочлен $q_4(s's^{-1}x)$ веса 4 не обращается в нуль тождественно на полученном торсере для общей точки s' (для уравнений меньших степеней это было доказано в теореме 4.2). Рассмотрим экспоненциальное представление для точки $\langle v \rangle \in P_u^- P/P$:

$$\langle v \rangle = \left\langle \exp \left(\sum_{\gamma \in \Delta_{P_u}} x_\gamma e_{-\gamma} \right) v_{\pi_\alpha} \right\rangle.$$

Напомним, что уравнение $q_4(x)$ степени 4 от $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{P_u}}$ получается приравниванием нулю координаты при $v(-\pi_\alpha)$. Этот многочлен определяет кривую четвертой степени относительно $-K_{X_{\Delta'}}$ на поверхности $X_{\Delta'}$.

Будем действовать так же, как при доказательстве теоремы 4.2. Мы считаем, что точка s' принадлежит открытой клетке G'/P' , т. е. она представляется как экспонента:

$$s' = \left\langle \exp \left(\sum_{\gamma \in \Delta_{P'_u}} c_\gamma e_{-\gamma} \right) v(\pi_\alpha - \alpha) \right\rangle.$$

Подставим последнее выражение вместо s' в $q_4(s's^{-1}x)$.

Рассмотрим коэффициент R при мономе $c_{\delta_1}^2 c_{\delta_2}^2 c_{\delta_3}^2$, где $\delta_1 = L_1 = L - E_1 - E_2$, $\delta_2 = L_2 = L - E_3 - E_4$, $\delta_3 = L_3 = L - E_5 - E_6$ (рис. 7). Наша цель – установить нетривиальность этого коэффициента. Подмономы в этом мономе встречаются в выражении для линейных систем, порождающих следующие кривые:

1) $C = 3L - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 - 2E_7$, соответствующая весу $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - 2\alpha$;

2) $Q_1 = 2L - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 - E_7$, соответствующая весу $\delta_2 + \delta_3 - \alpha$;

3) $Q_2 = 2L - E_1 - E_2 - E_5 - E_6 - E_7$, соответствующая весу $\delta_1 + \delta_3 - \alpha$;

4) $Q_3 = 2L - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_7$, соответствующая весу $\delta_1 + \delta_2 - \alpha$.

Как и в теореме 4.2, через $(\delta_1\delta_2\delta_3)$ мы обозначим вес $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - 2\alpha$, соответствующий кубику C . Аналогично, обозначим через $(\delta_i\delta_j)$ вес $\delta_i + \delta_j - \alpha$, соответствующий конике Q_k , $k \neq i, j$.

Коэффициент при мономе $c_{\delta_1}^2 c_{\delta_2}^2 c_{\delta_3}^2$ обозначим через R . Заметим, что $x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}^2$ (последний моном, задающий кривую C^2) содержится только в одном мономе $\frac{x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}^2 x_\alpha^2}{s_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}^2 s_\alpha^2}$, входящем в R .

Однородный многочлен несложно выписать, однако мы не будем его выписывать полностью. Первые несколько мономов в R имеют вид

$$r_{2C} \frac{x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}^2 x_\alpha^2}{s_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}^2 s_\alpha^2} + r_{C,Q_1,L_1} \frac{x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} x_{\delta_1} x_{(\delta_2\delta_3)}}{s_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} s_{\delta_1} s_{(\delta_2\delta_3)}} + r_{C,Q_2,L_2} \frac{x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} x_{\delta_2} x_{(\delta_1\delta_3)}}{s_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} s_{\delta_2} s_{(\delta_1\delta_3)}} \\ + r_{C,Q_3,L_3} \frac{x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} x_{\delta_3} x_{(\delta_1\delta_2)}}{s_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} s_{\delta_3} s_{(\delta_1\delta_2)}} + \dots,$$

где $r_{\dots}$ – коэффициенты, зависящие только от выбора базиса в пространстве представления $V(\pi_\alpha)$. Невыписанные мономы содержат степень по $x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}$, строго меньшую 2.

Докажем, что коэффициент R при $c_{\delta_1} c_{\delta_2} c_{\delta_3}$ не равен нулю для достаточно общей точки e_8 (напомним, что точка $s \in \mathbb{P}(V_1)$ лежит в T' -орбите, проектирующейся в e_8 при морфизме факторизации). Рассмотрим ограничение R на прямую $L_{78} = L - E_7 - e_8$. Зафиксируем эту прямую и докажем, что для общей точки этой прямой $R \neq 0$. Пусть l_i и q_j – точки пересечения L_{78} и кривых L_i и Q_j соответственно, а c – точка пресечения C и L_{78} , отличная от e_8 . Как и раньше, заметим, что значения всех мономов из R в точке e_8 равны константам, зависящим только от выбора базиса в $V(\pi_\alpha)$. Выберем координату x на прямой L_{78} так, чтобы точка e_8 имела координату 0. Тогда мономы при ограничении на L_{78} могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \frac{x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}^2 x_\alpha^2}{s_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}^2 s_\alpha^2} \right|_{L_{78}} = \frac{1}{c^2 e_7^4} (x - c)^2 (x - e_7)^4, \\ \left. \frac{x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} x_{\delta_1} x_{(\delta_2\delta_3)}}{s_{(\delta_1\delta_2\delta_3)} s_{\delta_1} s_{(\delta_2\delta_3)}} \right|_{L_{78}} = \frac{1}{cl_1 q_1 e_7^3} (x - c)(x - l_1)(x - q_1)(x - e_7)^3, \\ \dots\dots\dots$$

Мы не стали выписывать все мономы, поскольку они имеют аналогичный вид. Возьмем на L_{78} точку e_8 достаточно близкой к точке c , а именно $|c - e_8| < \varepsilon$. Тогда $\min_{i,k} (|e_8 - l_i|, |e_8 - q_k|) > A$ и $|e_8 - e_7| < B$ для некоторых констант A, B . Все коэффициенты $r_{\dots}$ ограничены по модулю константой $r_{\max}$.

Коэффициент при x^6 в выражении R больше $\frac{r_{2C}}{\varepsilon^2 B^4} - C_1 \frac{r_{\max}}{\varepsilon A^5} - C_2 \frac{r_{\max}}{A^6}$, где C_1 – число мономов в R , содержащих $x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}$, а C_2 – число мономов в R , не содержащих $x_{(\delta_1\delta_2\delta_3)}$. Последнее выражение больше нуля при малых ε . Отсюда R как функция от x не равна нулю тождественно для достаточно общей точки e_8 , что и требовалось доказать. Теорема доказана.

§ 5. Приложение

Предложение 1.5 является частным случаем следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $H \subset G$ – некоторая полупростая подгруппа, нормализуемая тором T . Пусть $V(\omega)$ – неприводимый G -модуль со старшим весом ω . Рассмотрим весовой вектор $v_\chi \in V(\omega)$, для которого вес χ является вершиной многогранника весов представления $V(\omega)$, или, другими словами, $\chi = w\omega$ для некоторого $w \in W$. Рассмотрим модуль $V_H = \langle Hv_\chi \rangle$, порожденный вектором v_χ . Тогда имеет место равенство

$$G\langle v_\omega \rangle \cap \mathbb{P}(V_H) = H\langle v_\chi \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем считать, что $\chi = \omega$. Обозначим через P_ω стабилизатор в группе G прямой $\langle v_\omega \rangle$. Заметим, что поскольку v_ω – старший вектор для группы G , то он будет также старшим вектором для H . Отсюда получаем, что V_H – неприводимый H -модуль. Отметим, что можно отождествить $\text{supp}_H(V_H)$ с подмножеством в $\text{supp}(V) \cap (\omega - \sum_{\gamma \in \Delta_H} \mathbb{Z}_+ \gamma)$. Отсюда, если учесть включение $\omega \in \text{supp}(V_H)$ для доминантного веса ω , следует, что вершины многогранника весов V , лежащие в $\text{supp}_H(V_H)$, суть вершины многогранника весов V_H .

Пусть $\langle v \rangle \in G/P_\omega \cap \mathbb{P}(V_H)$. Покажем, что вектор v имеет отличную от нуля компоненту веса $w\omega$, где $w \in W_H$ (напомним, что вес $w\omega$ будучи вершиной многогранника весов имеет кратность 1). Действительно, $\langle v \rangle \in \bigcup_{w \in W} B^- w P_\omega / P_\omega \cap \mathbb{P}(V_H)$, в частности $\langle v \rangle \in B^- \tilde{w} P_\omega / P_\omega \cap \mathbb{P}(V_H)$ для некоторого $\tilde{w} \in W$. По лемме 1.1 мы получаем, что компонента $v_{\tilde{w}\omega}$ вектора v не равна нулю. Поэтому, так как $\langle v_{\tilde{w}\omega} \rangle \in \mathbb{P}(V_H)$, можно полагать, что элемент $\tilde{w} \in W$ лежит в W_H . Применяя элемент $n_{\tilde{w}}^{-1}$ к вектору v , можно считать, что его компонента v_ω не равна нулю. Тогда из леммы 1.1 мы получаем, что $\langle v \rangle$ принадлежит открытой клетке $P_u^- P / P$ в G/P . Отсюда $\langle v \rangle = \langle uv_\omega \rangle$ для некоторого $u \in P_u^-$. Используя представление u в виде экспоненты, получаем $\langle v \rangle = \langle \exp(\sum_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}} c_\gamma e_{-\gamma}) v_\omega \rangle$. Предположим, что существует $\gamma \notin \Delta_H^+$ такой, что $c_\gamma \neq 0$. Среди таких корней выберем корень γ_0 , не выражающийся через корни $\mu \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}$, для которых $c_\mu \neq 0$, в виде линейной комбинации с целыми положительными коэффициентами. Тогда компонента вектора v веса $\omega - \gamma_0$ имеет вид $v_{\omega - \gamma_0} = c_{\gamma_0} e_{-\gamma_0} v_\omega$. Покажем, что эта компонента не равна нулю. Вес ω доминантен, и $\langle \omega, \gamma_0 \rangle > 0$ (последнее неравенство следует из того, что P – стабилизатор прямой, натянутой на старший вектор веса ω , и того факта, что $\gamma_0 \in \Delta_{\mathfrak{p}_u}$). Значит, он не может быть младшим весом представления трехмерной подалгебры, порожденной тройкой $\{e_{-\gamma_0}, h_{\gamma_0}, e_{\gamma_0}\}$, откуда $e_{-\gamma_0} v_\omega \neq 0$.

С другой стороны, компонента $v_{\omega - \gamma_0}$ не может быть ненулевой, поскольку $v \in V_H$, а $\text{supp}(V_H) \subset \omega - \sum_{\gamma \in \Delta_H^+} \mathbb{Z}_+ \gamma$. Таким образом, мы приходим к противоречию с тем, что существует $\gamma_0 \notin \Delta_H^+$, для которого $c_{\gamma_0} \neq 0$, что влечет включение $u \in P_u^- \cap H$. Доказательство завершается аналогично доказательству предложения 1.5.

Список литературы

1. Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972; англ. пер.: Yu. I. Manin, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland, Amsterdam–London; Elsevier, New York, 1974.
2. J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, “La descente sur les variétés rationnelles. II”, *Duke Math. J.*, **54**:2 (1987), 375–492.
3. V. V. Serganova, A. N. Skorobogatov, “Del Pezzo surfaces and representation theory”, *Algebra Number Theory*, **1**:4 (2007), 393–419.
4. V. V. Batyrev, O. N. Popov, “The Cox ring of a del Pezzo surface”, *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties* (Palo Alto, CA, USA, 2002), *Progr. Math.*, **226**, Birkhäuser, Boston, MA, 2004, 85–103.
5. И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, “Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P ”, *УМН*, **28**:3 (1973), 3–26; англ. пер.: I. N. Bernstein, I. M. Gel’fand, S. I. Gel’fand, “Schubert cells and cohomology of the spaces G/P ”, *Russian Math. Surveys*, **28**:1 (1973), 1–26.
6. В. С. Жгун, “Вариация фактора Мамфорда действия тора на многообразиях полных флагов. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 29–46; англ. пер.: V. S. Zhgoon, “Variation of Mumford quotients by torus actions on full flag varieties. I”, *Izv. Math.*, **71**:6 (2007), 1105–1122.
7. Б. Г. Мойшезон, “Теорема Кастельнуово–Энрикеса о стягивании для произвольной размерности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:5 (1969), 974–1025; англ. пер.: B. G. Mořezon, “The Castelnuovo–Enriques contraction theorem for arbitrary dimension”, *Math. USSR-Izv.*, **3**:5 (1969), 917–966.
8. F. Knop, H. Kraft, Th. Vust, “The Picard group of a G -variety”, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., **13**, Birkhäuser, Basel, 1989, 77–87.
9. I. Dolgachev, “Weighted projective varieties”, *Group actions and vector fields* (Vancouver, BC, 1981), *Lecture Notes in Math.*, **956**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 34–71.
10. A. N. Skorobogatov, “On a theorem of Enriques–Swinerton-Dyer”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **2**:3 (1993), 429–440.
11. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
12. Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987; пер. с нем.: H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, *Aspects Math.*, **D1**, Vieweg, Braunschweig, 1984.
13. В. Л. Попов, “Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322; англ. пер.: V. L. Popov, “Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.

В. С. Жгун (V. S. ZHGOON)
 Научно-исследовательский институт
 системных исследований РАН, г. Москва;
 Лаборатория Понселе
 Независимого московского университета
 E-mail: zhgoon@mail.ru

Поступило в редакцию
 25.04.2008
 05.02.2010