Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Законы больших чисел в неархимедовой теории вероятностей,
Изв. РАН. Сер. матем., 2000, том 64, выпуск 1, 211–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:02:03

УДК 519

А. Ю. Хренников

Законы больших чисел в неархимедовой теории вероятностей

Рассматриваются неколмогоровские вероятностные модели, а именно модели с p -адическими вероятностями. Получен аналог теоремы Бернулли для симметричной схемы.

Библиография: 9 наименований.

Новые физические исследования стимулируют развитие новых математических формализмов. В частности, исследования в неархимедовой математической физике (см. [1]) стимулировали построение ряда новых разделов неархимедовой математики. В работах автора [2]–[5] была развита модель теории вероятностей, в которой вероятности могут принадлежать полям p -адических чисел Q_p . В этой статье доказывается предельная теорема для сумм одинаково распределенных независимых случайных величин (СВ), которую (несмотря на существенные отличия) можно рассматривать как аналог обычной теоремы Бернулли (мы ограничиваемся симметричным случаем).

§ 1. Вероятностное пространство Бернулли

Пусть Ω_B – стандартное вероятностное пространство Бернулли, состоящее из последовательностей $\omega = (\omega_j)_{j=1}^\infty$, $\omega_j = 0, 1$. Пусть $I = \bigcup_n I_n$, где I_n – множество всех векторов длины n с координатами 0, 1. Пусть $i \in I_n$ и $B_i = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\}$ – цилиндрическое множество с основанием i . Обозначим символом F алгебру, порожденную цилиндрическими множествами. Стандартная мера Бернулли μ определяется на цилиндрических множествах равенством $\mu(B_i) = 1/2^n$, $i \in I_n$, и продолжается по аддитивности на алгебру F . Эта мера σ -аддитивна и может быть продолжена до стандартной бернуллиевской вероятности P_∞ на σ -алгебре F_∞ , порожденной F . $(\Omega_B, F_\infty, P_\infty)$ – вероятностное пространство в смысле аксиоматики Колмогорова.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Символ Q_∞ часто используется в теории чисел для обозначения поля вещественных чисел. Нам удобно использовать индекс ∞ при обозначении вещественных объектов.

Как обычно, положим $\xi_n(\omega) = \omega_n$. Это – независимые СВ,

$$P_\infty(\xi_n(\omega) = \alpha) = \mu(\xi_n(\omega) = \alpha) = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 0, 1.$$

Согласно теореме Бернулли для $T_n = S_n/n$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$,

$$T_n(\omega) \rightarrow \xi_{\lim}(\omega), \tag{1.1}$$

где $\xi_{\lim}(\omega) = 1/2$ п.в. В частности, имеет место предельный переход для распределений СВ $T_n(\omega)$:

$$P_{\infty, T_n} \rightarrow P_{\infty, \xi_{\lim}}, \quad (1.2)$$

где предельное распределение равно $\delta_{1/2}$ (всюду символом δ_a обозначается δ -мера Дирака, сосредоточенная в точке a), который означает слабую сходимость распределений:

$$\mathbf{M}f(T_n(\omega)) = \int f(x) P_{\infty, T_n}(dx) \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1.3)$$

для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$.

Далее,

$$\mathbf{M}f(T_n(\omega)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} \mu(B_i).$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}f(T_n(\omega)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k, \quad (1.4)$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Эти выкладки для математического ожидания основаны только на цилиндрической мере μ .

Таким образом, (1.3) может быть переписано как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k = f\left(\frac{1}{2}\right). \quad (1.5)$$

Но нас интересует другое продолжение μ . Так как μ принимает значения в Q , ее можно также рассматривать как p -адическизначную меру.

Всюду далее символом Q_p обозначается поле p -адических чисел, $|\cdot|_p$ – абсолютное значение на Q_p , $U_r(a) = \{x : |x - a|_p \leq r\}$ – шар радиуса $r > 0$ с центром в точке a , $U_r \equiv U_r(0)$. Как обычно, Z_p – кольцо целых p -адических чисел, $Z_p = U_1$.

Далее дается краткое введение в теорию интегрирования по Q_p -значным мерам [6], [7]. Пусть Ω – компактное ультраметрическое пространство, т.е. имеет место усиленное неравенство треугольника:

$$\rho(x, y) \leq \max[\rho(x, z), \rho(z, y)].$$

Шары $W_r(a) = \{x \in \Omega : \rho(x, a) \leq r\}$ являются одновременно открытыми и замкнутыми. Например, p -адическая метрика $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ является ультраметрикой, каждый шар $U_r(a)$ – компактное ультраметрическое пространство.

Обозначим символом $F(\Omega)$ алгебру открыто-замкнутых подмножеств Ω . Мера ν на Ω – это конечно-аддитивная функция, $\nu : F(\Omega) \rightarrow Q_p$. Мера называется *ограниченной*, если

$$\text{var}(\nu) = \sup\{|\nu(A)|_p : A \in F(\Omega)\} < \infty.$$

Обозначим символом $C(\Omega, Q_p)$ пространство непрерывных функций $f : \Omega \rightarrow Q_p$. Это Q_p -линейное банахово пространство с нормой $\|f\| = \max_{x \in \Omega} |f(x)|_p$. Имеет

место взаимно однозначное соответствие между ограниченными мерами и ограниченными Q_p -линейными функционалами на пространстве $C(\Omega, Q_p)$ и $\|\nu\| = \text{var}(\nu)$. Интеграл от непрерывной функции $f(x)$ по ограниченной мере ν определяется как предел сумм Римана:

$$\int_{\Omega} f(x) \nu(dx) = \lim_{\alpha} \sum_{i=1}^n f(a_i) \nu(A_i),$$

где $\alpha = (A_i)$ – покрытие Ω , $A_i \in F(\Omega)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $a_i \in A_i$.

Ограниченная нормализованная мера $\nu: F(\Omega) \rightarrow Q_p$, $\nu(\Omega) = 1$, называется p -адической вероятностью, где Ω – пространство элементарных исходов, $F(\Omega)$ – алгебра событий, $(\Omega, F(\Omega), \nu)$ – p -адическая вероятностная модель. Случайные величины – это непрерывные функции $\xi: \Omega \rightarrow Q_p$. Математическое ожидание СВ определяется как интеграл по вероятности. Определение независимости СВ такое же, как и в аксиоматике Колмогорова. В частности, $\mathbf{M}\zeta\eta = \mathbf{M}\zeta\mathbf{M}\eta$ для независимых СВ. Пусть $\xi(\Omega) \subset U_r(a)$, вероятностное распределение СВ ξ на шаре $U_r(a)$ определяется, как и в обычной теории вероятностей:

$$\nu_{\xi}(D) = \nu(\xi^{-1}(D)), \quad D \in F(U_r(a)).$$

Это – вероятность на $U_r(a)$; $(U_r(a), F(U_r(a)), \nu_{\xi})$ – вероятностная модель.

Теперь вернемся к мере Бернулли. Пространство Бернулли Ω_B изоморфно кольцу целых 2-адических чисел Z_2 , цилиндрические множества B_i – это шары $U_{2^{-n}}(a)$, где a – произвольная точка Z_2 со свойством $a_0 = i_1, \dots, a_{n-1} = i_n$. Алгебра F совпадает с алгеброй открыто-замкнутых множеств $F(\Omega)$, и мера Бернулли μ на F может быть рассмотрена как Q_p -значная мера. Эта мера ограничена, если $p \neq 2$.

Таким образом, для $p = 3, 5, \dots, 127, \dots$ имеем p -адические вероятностные модели $(Z_2, F(Z_2), P_p)$, где $P_p = \mu - Q_p$ -значные бернуллиевские вероятности.

Интересно, что вероятности P_{∞} и P_p совпадают для всех событий B_i , зависящих лишь от конечного числа экспериментов. Таким образом, невозможно различить эти распределения на эксперименте. Но эти вероятности имеют различные асимптотические свойства.

Бернуллиевские СВ ξ_n – непрерывные функции на Z_2 . Более того, как и в обычной теории, $P_p(\xi_n = \alpha) = \mu(\xi_n = \alpha) = 1/2$, $\alpha = 0, 1$. Возможно изучение асимптотики сумм $S_n(\omega)$ или нормированных сумм $T_n(\omega)$. Мы будем изучать асимптотику подпоследовательностей $\{S_{n_k}(\omega)\}$; эта асимптотика существенно зависит от асимптотики подпоследовательности $\{n_k\}$ в Q_p . Слабая сходимость распределений определяется, как в обычной теории вероятностей.

Метод характеристических функций – это один из наиболее мощных методов доказательства предельных теорем. Однако в p -адическом случае отсутствует теорема о связи между сходимостью характеристических функций и распределений. Таким образом, нельзя применить технику характеристических функций непосредственно. Но такая теорема имеет место для сходимости обобщенных функций на неархимедовых пространствах [5], [8]. Поэтому сначала рассмотрим предельный переход (1.2) для обобщенных функций и найдем предельные законы распределения, которые оказываются вероятностными мерами в хороших случаях. В этих случаях

доказывается слабая сходимость вероятностных распределений. В рамках теории обобщенных функций удастся получить более широкий класс предельных теорем, чем в рамках теории вероятностных мер. В частности, имеет место предельная теорема для обобщенной вероятности P_2 , которая не является ограниченной мерой. Но в этом случае сходимость имеет место для более узкого класса функций.

§ 2. Метод характеристических функций

Мы используем теорию аналитических обобщенных функций на неархимедовых пространствах [5], [8]. Более удобно работать на пространстве комплексных p -адических чисел C_p . Здесь C_p – это пополнение алгебраического замыкания Q_p^a поля p -адических чисел Q_p (см., например, [6]); $|\cdot|_p$ – продолжение p -адического абсолютного значения на C_p , $|C_p| = \{r \in \mathbb{R}_+ : r = |z|_p, z \in C_p\}$. Положим $U_r = \{z \in C_p : |z|_p \leq r\}$. Это шары в C_p с центром в нуле.

Функция $f: U_r \rightarrow C_p$, $r \in |C_p|$, называется *аналитической*, если ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad f_n \in C_p,$$

сходится равномерно на U_r . Топология в пространстве $A_r \equiv A(U_r)$ функций, аналитических на шаре U_r , определяется неархимедовой нормой

$$\|f\|_r = \max_{x \in U_r} |f(x)|_p.$$

Это – неархимедово банахово пространство. Функция $f: C_p \rightarrow C_p$ называется *целой*, если она аналитична на любом шаре U_r . Топология в пространстве целых функций $A \equiv A(C_p)$ определяется системой норм $\{\|\cdot\|_r\}$. Последовательность целых функций $\{f_n\}$ сходится в A тогда и только тогда, когда она сходится равномерно на любом шаре U_r . Это – неархимедово пространство Фреше с топологией проективного предела последовательности банаховых пространств:

$$A = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{proj } A_r.$$

Функция f называется *аналитической в нуле*, если существует такое r , что $f \in A_r$. Пространство $A_0 \equiv A_0(C_p)$ функций, аналитических в нуле, наделяется топологией индуктивного предела, $A_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \text{ind } A_r$.

Мы выбираем пространства аналитических функций A и A_0 в качестве пространств основных функций, сопряженные пространства A' и A'_0 – пространства обобщенных функций (аналитических распределений).

В дальнейшем будет использоваться

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть ν – ограниченная мера на шаре U_r в Q_p . Тогда функционал

$$f \mapsto \nu(f) = \int_{U_r} f(x) \nu(dx), \quad f \in A,$$

непрерывен на пространстве A .

Таким образом, любой ограниченной мере соответствует распределение $\nu \in A'$. Различным мерам соответствуют различные распределения.

Пусть $\{\gamma_n\}$ – последовательность распределений в пространстве A' . Если эта последовательность сходится к распределению γ в слабой топологии пространства A' , то $\{\gamma_n\}$ называется *A-слабо сходящейся к γ* . Это означает, что $(\gamma_n, f) \rightarrow (\gamma, f)$ для любой целой аналитической функции f .

В силу предложения 2.1 можно говорить об *A-слабой сходимости* для вероятностных распределений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Преобразование Лапласа распределения $g \in A'_0$ определяется равенством $L(g)(y) = (g, \exp\{yx\})$.

ТЕОРЕМА 2.1 [8]. *Преобразование Лапласа $L: A'_0 \rightarrow A$ является изоморфизмом.*

Таким образом, имеется неархимедово исчисление Лапласа

$$A'_0 \xrightarrow{L} A, \quad A_0 \xleftarrow{L'} A'.$$

Преобразование Лапласа в неархимедовом случае имеет все свойства обычного преобразования Лапласа.

Если распределение $\gamma \in A'$ является образом ограниченной меры на U_r , то

$$L'(\gamma)(y) = \int_{U_r} e^{xy} \gamma(dx)$$

для достаточно малых $y \in C_p$.

Если $p \neq 2$, то вероятностные распределения $P_{p, T_{n_k}}$ случайных величин $T_{n_k}(\omega)$ – ограниченные меры на соответствующих шарах, они определяют распределения, принадлежащие пространству A' . Таким образом,

$$\varphi_{n_k}(z) = \mathbf{M} \exp\{z T_{n_k}(\omega)\} = \int_{U_r} \exp\{zx\} P_{p, T_{n_k}}(dx) = L'(P_{p, T_{n_k}})(z).$$

Воспользовавшись независимостью СВ, имеем

$$\varphi_{n_k}(z) = \prod_{j=1}^{n_k} \mathbf{M} e^{z \xi_j(\omega)/n_k} = [(1 + e^{z/n_k})/2]^{n_k}. \quad (2.1)$$

Если $p = 2$, то мера Бернулли μ неограничена, но она может быть реализована как распределение $P_2 \in A'$ (см. [5], [8]). В этом случае также возможно ввести распределения $P_{2, T_{n_k}} \in A'$. Формула (2.1) по-прежнему верна. Чтобы доказать ее, нужно лишь использовать то, что преобразование Лапласа свертки равно произведению преобразований Лапласа.

Положим $\varphi(z; a) = [(1 + e^{z/a})/2]^a$ для $a \in Z_p, a \neq 0$. Эта функция определена для достаточно малых z . Так как $L': A' \rightarrow A_0$ – изоморфизм, то существует распределение $\varkappa_a \in A'$ такое, что $L'(\varkappa_a)(z) = \varphi(z; a)$.

Положим $r(p) = 1/p$, если $p \neq 2$, и $r(2) = 1/4$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $a \neq 0$ принадлежит Z_p и $\{n_k\}$ – последовательность натуральных чисел, $n_k \rightarrow a$ в Q_p . Тогда функциональная последовательность $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ сходится к $\{\varphi(z; a)\}$ в пространстве $A_0(C_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно записать $n_k = m_k + a$, где $m_k \rightarrow 0$. Здесь $|n_k|_p = |a|_p$ для достаточно больших k . Далее,

$$\varphi_{n_k}(z) = \left[\frac{1 + e^{z/n_k}}{2} \right]^a \left[\frac{1 + e^{z/n_k}}{2} \right]^{m_k} = (1 + \Delta_{n_k})^a (1 + \Delta_{n_k})^{m_k}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & \left| (1 + \Delta_{n_k})^a - \left[1 + \frac{e^{z/a} - 1}{2} \right]^a \right|_p \\ &= \left| \exp\{a \ln(1 + \Delta_{n_k})\} - \exp\left\{a \ln\left(1 + \frac{e^{z/a} - 1}{2}\right)\right\} \right|_p \\ &= |a|_p \left| \ln(1 + \Delta_{n_k}) - \ln\left(1 + \frac{e^{z/a} - 1}{2}\right) \right|_p = \left| \frac{a}{2} \right|_p |e^{z/n_k} - e^{z/a}|_p \\ &= \frac{|m_k|_p |z|_p}{|2a|_p} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где предельный переход имеет место равномерно на шаре U_r , $r = r(p)|a|_p$. Здесь мы использовали изометрические свойства экспоненты e^z и логарифма $\ln(1+z)$ на U_r (см., например, [6]). Отметим, что все функции определены при $z \in U_r$.

Аналогично доказывается, что $|(1 + \Delta_{n_k})^{m_k} - 1|_p \rightarrow 0$ на том же шаре.

Следующая теорема является простым следствием (см. [5], [8]) леммы 2.1.

ТЕОРЕМА 2.2 (теорема Бернулли для обобщенных функций). Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ стремится к $a \in Z_p$, $a \neq 0$. Тогда последовательность распределений $\{P_{p, T_{n_k}}\}$ сходится A -слабо к распределению $\varkappa_a$.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $a = 1$. Тогда $\varkappa_1 = (\delta_0 + \delta_1)/2$. Таким образом, предельное распределение последовательности $\{T_{n_k}(\omega)\}$ совпадает с начальным распределением СВ $\zeta_n(\omega)$. Если, например, выбрать $n_k = 1 + p^k$, то

$$\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{n_k}(\omega)}{1 + p^k} \rightarrow \xi_{\lim}(\omega),$$

где $\xi_{\lim}(\omega)$ – СВ с распределением $\varkappa_1$. Когда вычислялось среднее значение (1.4) по цилиндрической мере Бернулли μ , использовались лишь рациональные числа. Следовательно, эта формула остается верной и в p -адическом случае. Итак,

$$\frac{1}{2p^{k+1}} \sum_{j=0}^{1+p^k} f\left(\frac{j}{1+p^k}\right) C_{1+p^k}^j \rightarrow \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$$

для любой целой аналитической функции f .

Далее, пусть $p = 3$. Тогда $n_k = 4^{3^k} \rightarrow 1$ и

$$\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{4^{3^k}}(\omega)}{4^{3^k}} \rightarrow \xi_{\lim}(\omega).$$

Эта асимптотика означает, что

$$\left(\frac{1}{2^{4^{3^k}}}\right) \sum_{j=0}^{4^{3^k}} f\left(\frac{j}{4^{3^k}}\right) C_{4^{3^k}}^j \rightarrow \frac{1}{2}(f(0) + f(1)).$$

Если $p = 2$, то, например, $n_k = (2m+1)^{2^k} \rightarrow 1$ для $m = 1, 2, \dots$, следовательно,

$$\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{(2m+1)^{2^k}}(\omega)}{(2m+1)^{2^k}} \rightarrow \xi_{\lim}(\omega).$$

ПРИМЕР 2.2. Пусть $a = 2$. Тогда предельное распределение имеет вид $\varkappa_2 = (1/4)\delta_0 + (1/2)\delta_{1/2} + (1/4)\delta_1$. Более того, если $a = m$ – натуральное число, то предельное распределение имеет вид

$$\varkappa_m = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^m C_m^j \delta_{j/m}.$$

Таким образом, если $n_k = m + p^k$, то

$$\frac{1}{2^{m+p^k}} \sum_{j=0}^{m+p^k} C_{m+p^k}^j f\left(\frac{j}{m+p^k}\right) \rightarrow \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^m C_m^j f\left(\frac{j}{m}\right)$$

для любой целой аналитической функции f .

§ 3. Теорема Бернулли для вероятностных распределений

Теперь мы хотим доказать аналог теоремы 2.2 для слабой сходимости *вероятностных* распределений. Следовательно, рассматривается случай $p \neq 2$. Сначала будет найдена асимптотика сумм $S_{n_k}(\omega)$, а затем нормированных сумм $T_{n_k}(\omega)$. Заметим, что $|S_n(\omega)|_p \leq 1$. Следовательно, все вероятностные распределения P_{p, S_n} сосредоточены на Z_p . Удобно воспользоваться теорией Малера [9], [6] интегрирования по кольцу целых p -адических чисел Z_p .

Рассмотрим биномиальные функции

$$C(x, k) = C_x^k = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

Любая функция $f \in C(Z_p, Q_p)$ раскладывается в ряд (разложение Малера):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C(x, k). \quad (3.1)$$

Этот ряд сходится равномерно на Z_p , потому что $a_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и $\|f\| = \max_k |a_k|_p$. Если ν – ограниченная мера на Z_p , то

$$\int_{Z_p} f(x) \nu(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{Z_p} C(x, k) \nu(dx).$$

Положим $\lambda_{mn} = \mathbf{MC}(S_n(\omega), m) = \int_{Z_p} C(x, k) P_{p, S_n}(dx)$.

ЛЕММА 3.1. Если $m \leq n$, то $\lambda_{mn} = C_n^m / 2^m$, если $m > n$, то $\lambda_{mn} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой [6]

$$e^{tx} = \sum_{m=0}^{\infty} (e^t - 1)^m C(x, m).$$

Таким образом,

$$\mathbf{M} \exp\{tS_n(\omega)\} = \sum_{m=0}^{\infty} (e^t - 1)^m \lambda_{mn}.$$

Далее,

$$\mathbf{M} \exp\{tS_n(\omega)\} = \left[\frac{1 + e^t}{2} \right]^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{(e^t - 1)^m}{2^m}.$$

Теперь покажем, что обобщенная функция $\varkappa_a$, определенная в предыдущем параграфе с помощью преобразования Лапласа, является ограниченной мерой на шаре $U_{1/|a|_p}$. Рассмотрим сначала функцию $\psi(z; a) = [(1 + e^z)/2]^a$. Этой функции также соответствует обобщенная функция, принадлежащая $A'(C_p)$. Обозначим ее символом α_a ; здесь $a \in Z_p$ любое (в частности, $a = 0$).

ЛЕММА 3.2. *Имеют место равенства*

$$(\alpha_a, C(\cdot, m)) = \frac{C(a, m)}{2^m}.$$

ЛЕММА 3.3. *Обобщенной функции α_a соответствует ограниченная мера на Z_p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a \in Z_p$, то $|C(a, m)|_p \leq 1$ (см. [6]). Остается воспользоваться леммой 3.2.

Заметим, что

$$\int_{Z_p} f(x) \alpha_a(dx) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m C(a, m)}{2^m}.$$

Рассмотрим функционал на пространстве $C(U_{1/|a|_p}, Q_p)$, $a \neq 0$,

$$(\beta_a, g) = \int_{Z_p} g\left(\frac{x}{a}\right) \alpha_a(dx).$$

Этот функционал ограничен, т.е. β_a – ограниченная мера на шаре $U_{1/|a|_p}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Обобщенной функции $\varkappa_a$ соответствует ограниченная мера на шаре $U_{1/|a|_p}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя преобразования Лапласа, получаем

$$L'(\beta_a)(t) = \int_{Z_p} e^{tx/a} \alpha_a(dx) = \varphi(t; a).$$

Итак, $\varkappa_a = \beta_a$.

ТЕОРЕМА 3.1 (теорема Бернулли для ненормированных сумм). Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ сходится к целому p -адическому числу a . Тогда для любой $f \in C(Z_p, Q_p)$

$$\mathbf{M}f(S_{n_k}(\omega)) = \int_{Z_p} f(x) P_{p, S_{n_k}}(dx) \rightarrow \int_{Z_p} f(x) \alpha_a(dx).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для среднего значения имеем

$$\mathbf{M}f(S_{n_k}(\omega)) = \sum_{m=0}^{n_k} a_m \lambda_{mn_k}.$$

Для достаточно большого N получаем $\max_{N < m < \infty} |a_m|_p < \varepsilon$. Поэтому достаточно оценить

$$\sum_{m=0}^N a_m \left(\lambda_{mn_k} - \frac{C(a, m)}{2^m} \right).$$

Но коэффициенты a_m ограничены нормой $\|f\|$. Таким образом, достаточно показать, что $\lambda_{mn_k} \rightarrow C(a, m)/2^m$ при фиксированном m . Но

$$\lambda_{mn_k} = \frac{n_k(n_k - 1) \dots (n_k - m + 1)}{m! 2^m},$$

и остается перейти к пределу при $n_k \rightarrow a$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $a \neq 0$. Тогда для любой функции $f \in C(U_{1/|a|_p}, Q_p)$

$$\max_{\omega \in Z_2} \left| \frac{S_{n_k}(\omega)}{a} - T_{n_k}(\omega) \right|_p \rightarrow 0, \quad n_k \rightarrow a.$$

ТЕОРЕМА 3.2 (теорема Бернулли для нормированных сумм). Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ сходится к целому p -адическому числу a , отличному от нуля. Тогда для любой функции $f \in C(U_{1/|a|_p}, Q_p)$

$$\mathbf{M}f(T_{n_k}(\omega)) = \int_{U_{1/|a|_p}} f(x) P_{p, T_{n_k}}(dx) \rightarrow \int_{U_{1/|a|_p}} f(x) \kappa_a(dx).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, во-первых, что для $f \in C(U_{1/|a|_p}, Q_p)$

$$\mathbf{M}f\left(\frac{S_{n_k}(\omega)}{a}\right) \rightarrow \int_{Z_p} f\left(\frac{x}{a}\right) \alpha_a(dx) = \int_{U_{1/|a|_p}} f(x) \kappa_a(dx).$$

Далее,

$$\left| \mathbf{M}f\left(\frac{S_{n_k}(\omega)}{a}\right) - \mathbf{M}f(T_{n_k}(\omega)) \right|_p \leq \text{var } P_p \max_{\omega \in Z_2} \left| f\left(\frac{S_{n_k}(\omega)}{a}\right) - f(T_{n_k}(\omega)) \right|_p.$$

Остается воспользоваться леммой 3.4 и равномерной непрерывностью функции $f(x)$.

Заметим, что если функция $f(x)$ принимает только рациональные значения в рациональных точках, то выражение для среднего $\mathbf{M}f(T_n(\omega))$ одно и то же как в обычной теории вероятностей над полем вещественных чисел, так и в p -адических теориях (см. формулу (1.4)). Таким образом, теорема 3.2 показывает, что известные вероятностные средние по симметричному биномиальному распределению, кроме обычной вещественной асимптотики, имеют еще дополнительные p -адические асимптотики.

Например, пусть $f(x) = x^l$. Тогда в силу обычной теоремы Бернулли

$$\sigma(n, l) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{j}{n}\right)^l \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^l, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь если $n_k \rightarrow 1$ в Q_p , то $\sigma(n_k, l) \rightarrow 1/2$ в Q_p . Если же $n_k \rightarrow 2$, то $\sigma(n_k, l) \rightarrow 1/2^{l+1} + 1/4$.

Далее будем выбирать в качестве $f(x)$ индикаторы открыто-замкнутых множеств $A \in F(Z_p)$. Тогда для $n_k \rightarrow 1$ имеем

$$P_p(\{\omega \in \Omega_B : T_{n_k}(\omega) \in A\}) \rightarrow \frac{\chi_A(0) + \chi_A(1)}{2}.$$

Пусть $A = U_\varepsilon$, $\varepsilon < 1$; тогда

$$P_p\left(\left|\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{n_k}(\omega)}{n_k}\right|_p \leq \varepsilon\right) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

$$P_p\left(\left|\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{n_k}(\omega)}{n_k} - 1\right|_p \leq \varepsilon\right) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Если $c \neq 0, 1$, то для достаточно малого ε

$$P_p\left(\left|\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{n_k}(\omega)}{n_k} - c\right|_p \leq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Можно рассматривать эти равенства как p -адический аналог закона больших чисел.

Рассмотрим теперь индикаторы p -адических сфер $S_r = \{x \in Z_p : |x|_p = r\}$, $r = 1/p^l$, $l = 0, 1, 2, \dots$:

$$P_p\left(\left|\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{n_k}(\omega)}{n_k}\right|_p = 1\right) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

при $l = 1, 2, \dots$

$$P_p\left(\left|\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{n_k}(\omega)}{n_k}\right|_p = \frac{1}{p^l}\right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

§ 4. Комбинаторные следствия p -адической теоремы Бернулли

Как известно, обычная теорема Бернулли имеет простой комбинаторный смысл. Посмотрим, как обстоят дела в p -адическом случае. Ограничимся подпоследовательностями $n_k \rightarrow 1$. Здесь

$$A_{l,n} = \left\{ \omega : |T_{n_k}(\omega)|_p = \frac{1}{p^l} \right\} = \left\{ \omega : |S_{n_k}(\omega)|_p = \frac{1}{p^l} \right\}.$$

Каков смысл событий $A_{l,n}$? Событие $A_{l,n}$ состоит в том, что сумма единиц, выпавших в течение n испытаний, делится ровно на p^l (т.е. на p^{l+1} уже не делится). Асимптотика (3.6) означает, что p -адическая вероятность события A_{l,n_k} , $l \neq 0$, стремится к нулю, $k \rightarrow \infty$. А это равносильно тому, что $P_p(A_{l,n_k})$ делится на все большую степень p с ростом k . Однако эту вероятность можно подсчитать непосредственно с помощью простых комбинаторных выкладок. Пусть $m(l, n)$ – количество $i \in I_n$, для которых $|i| = i_1 + \dots + i_n$ делится ровно на p^l . Несложно выписать выражение для $m(l, n)$ через сумму C_n^j . Таким образом, $P_p(A_{l,n}) = m(l, n)/2^n$. Но 2^n не делится на p , значит, асимптотика (3.6) эквивалентна тому, что $m(l, n_k)$ делится на все большую степень p с ростом k .

Далее, $P_p(A_{0,n}) = m(0, n)/2^n$, и асимптотика (3.5) означает, что $m(0, n_k)/2^{n_k} \rightarrow 1/2$ в Q_p . Например, $p = 3$ и $n_k = 1 + 3^k$. Тогда $2^{n_k} \rightarrow -2$. Итак, $m(0, n_k) \rightarrow -1$, т.е. $m(0, n_k) + 1 \rightarrow 0$. Следовательно, $m(0, n_k) + 1$ делится на все большую степень p с ростом k .

Заметим, что асимптотику (3.6) несложно найти непосредственно из комбинаторного выражения для вероятности. Например, $m(1, n)$ равно сумме C_n^{jp} , где j не делится на p , но

$$\begin{aligned} |m(1, 1 + p^k)|_p &\leq \max_j |C_{1+p^k}^{jp}|_p \\ &= \left| \frac{p^k}{pj} \cdot \frac{p^k - p}{p} \cdot \frac{p^k - 2p}{2p} \dots \frac{p^k - p(j-1)}{(j-1)p} \right|_p = \frac{1}{p^{k-1}}. \end{aligned}$$

Здесь мы получаем уточнение асимптотики (3.6). А именно, вероятность $P_p(A_{1, 1+p^k})$ уменьшается в p раз после каждого шага. Этот результат несложно обобщить на любую последовательность $n_k \rightarrow 1$ в Q_p . Действительно, $n_k = 1 + j_k p^{m_k}$, где $m_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, j_k – натуральные числа, которые не делятся на p . Тогда

$$|C_{n_k}^{pj}|_p = \left| \frac{(p^{m_k} j_k)(p^{m_k} j_k - p) \dots (p^{m_k} j_k - p(j-1))}{p(2p) \dots (j-1)p \cdot (jp)} \right|_p = \frac{1}{p^{m_k-1}}.$$

Здесь после каждого шага вероятность события $P_p(A_{1, n_k})$ уменьшается в $p^{m_{k+1}-m_k}$ раз. Теперь рассмотрим событие A_{l, n_k} , $l \neq 0$. Здесь

$$|C_{n_k}^{p^l j}|_p = \left| \frac{(p^{m_k} j_k) \dots (p^{m_k} j_k - p^l j + p)}{p \dots (p^l j - p) p^l j} \right|_p = \frac{1}{p^{m_k-l}}.$$

В частности, если $n_k = 1 + p^k$, то имеем $1/p^{k-l}$.

С помощью прямых комбинаторных выкладок мы можем получить общую предельную теорему (не вытекающую из теоремы 3.2). Для этого нам понадобятся две технические леммы.

Для любых $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим через (n, k) наибольший общий делитель этих чисел. Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $M_p(n)$ вычет по модулю p числа n : $n = M_p(n) \pmod{p}$. Мы полагаем

$$\theta_p(n) = \begin{cases} |n - M_p(n)|_p, & n \geq p. \\ 1, & 1 \leq n \leq p-1. \end{cases}$$

ЛЕММА 4.1. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, и $M_p(n) \geq M_p(k)$. Тогда

$$|C_n^k|_p = \frac{\theta_p(n)}{\theta_p(k)}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = \alpha + ip^N$, $k = \beta + jp^l$, где $0 \leq \alpha, \beta \leq p-1$, $i, j, N, l \in \mathbb{N}$, $(i, p) = (j, p) = 1$. Мы имеем

$$|C_n^k|_p = \left| (ip^N) \cdot \frac{(ip^N - p)}{p} \cdots \frac{(ip^N - jp^l + p)}{(jp^l - p)} \cdot \frac{1}{(jp^l)} \right|_p = \left| \frac{p^N}{p^l} \right|_p = p^{l-N}. \quad (4.2)$$

Для получения равенства (4.2) мы использовали следующие рассуждения: поскольку $n - k + 1 = ip^N - jp^l + (\alpha + 1 - \beta)$, $0 < \alpha + 1 - \beta \leq p$, последний член в числителе биномиального коэффициента $C_n^k = \frac{n \cdots (n - k + 1)}{1 \cdots k}$, который делится на p , равен $(ip^N - jp^l + p)$. Случаи $n = \alpha$ или $k = \beta$, $0 \leq \alpha, \beta \leq p-1$, рассматриваются аналогично.

ЛЕММА 4.2. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, и $M_p(n) + 1 \leq M_p(k)$. Тогда

$$|C_n^k|_p = \theta_p(n). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = \alpha + ip^N$, $k = \beta + jp^l$, где $(i, p) = (j, p) = 1$, $0 \leq \alpha, \beta \leq p-1$. Имеем

$$|C_n^k|_p = \left| (ip^N) \frac{(ip^N - p)}{p} \cdots \frac{(ip^N - jp^l)}{jp^l} \right|_p = |p^N|_p = p^{-N}. \quad (4.4)$$

Для получения равенства (4.4) мы использовали следующие рассуждения: поскольку $n - k + 1 = (ip^N - jp^l) - (\beta - \alpha - 1)$, $0 \leq \beta - \alpha - 1 < p$, последний член в числителе биномиального коэффициента $C_n^k = \frac{n \cdots (n - k + 1)}{1 \cdots k}$, который делится на p , равен $(ip^N - jp^l)$. Случаи $n = \alpha$ или $k = \beta$, $0 \leq \alpha, \beta \leq p-1$, рассматриваются аналогично.

ТЕОРЕМА 4.1. Для любого $l \in \mathbb{N}$ p -адическая вероятность

$$P_p \left(\left\{ \omega : |S_n(\omega) - M_p(S_n(\omega))|_p = \frac{1}{p^l}, M_p(S_n(\omega)) \leq M_p(n) \right\} \right)$$

стремится к нулю в Q_p , если $|n - M_p(n)|_p \rightarrow 0$, $n \neq M_p(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3.1, получаем

$$P_p \left(\left\{ \omega : |S_n(\omega) - M_p(S_n(\omega))|_p = \frac{1}{p^l}, M_p(S_n(\omega)) \leq M_p(n) \right\} \right) \leq p^l |n - M_p(n)|_p.$$

ТЕОРЕМА 4.2. p -адическая вероятность

$$P_p(\{\omega : M_p(S_n(\omega)) \geq M_p(n) + 1\})$$

стремится к нулю при $|n - M_p(n)|_p \rightarrow 0$.

Доказательство опирается на лемму 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. p -адическая вероятность $P_p(\{\omega : M_p(S_n(\omega)) \geq 1\})$ стремится к нулю при $|n|_p \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. p -адическая вероятность $P_p(\{\omega : M_p(S_n(\omega)) \geq 2\})$ стремится к нулю при $|n - 1|_p \rightarrow 0$.

Список литературы

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
2. Хренников А. Ю. p -адическая вероятность и статистика // Докл. РАН. 1992. Т. 332. № 6. С. 1075–1079.
3. Хренников А. Ю. Неархимедова вероятность: Сб. статей К 70-летию академика В. С. Владимирова // Тр. МИАН. 1994. Т. 203. С. 184–193.
4. Хренников А. Ю. p -адическая теория вероятностей и ее приложения. Принцип статистической стабилизации частот // ТМФ. 1993. Т. 97. № 3. С. 348–363.
5. Khrennikov A. Yu. p -adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publ., 1994.
6. Schikhov W. Ultrametric Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
7. Монна А. Analyse non-Archimédienne. Berlin: Springer, 1970.
8. Хренников А. Ю. Обобщенные функции и гауссовские континуальные интегралы по неархимедовым функциональным пространствам // Изв. РАН. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 780–814.
9. Mahler K. p -adic numbers and their functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.

Поступило в редакцию
10.V.1995