Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные трехмерные биквадрики,
Изв. РАН. Сер. матем., 2010, том 74, выпуск 4, 119–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:23:33

УДК 512.7

В. А. Краснов

Вещественные трехмерные биквадрики

Найдены топологические типы полных пересечений двух вещественных четырехмерных квадрик, называемых биквадриками. Жесткие изотопические классы вещественных трехмерных биквадрик уже давно описаны, таких классов всего девять. Находится соответствие топологических типов вещественных биквадрик с жесткими изотопическими классами. Показано, что только два жестких изотопических класса имеют одинаковые топологические типы, причем один из этих классов состоит из ГМ-многообразий, а в другом ГМ-многообразий нет. Изучаются множества вещественных прямых на вещественных биквадриках.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: биквадрики, дискриминантная гиперповерхность, максимальные многообразия, промежуточный якобиан, абелева поверхность.

Введение

Сначала приведем несколько обозначений и определений. Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – трехмерное комплексное проективное алгебраическое многообразие, заданное системой уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_5) = 0, \quad (0.1)$$

где $q_1(X_0, \dots, X_5) = q_1(X)$, $q_2(X_0, \dots, X_5) = q_2(X)$ – ненулевые непропорциональные квадратичные формы с комплексными коэффициентами, $X_0, \dots, X_5$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^5$. Такое многообразие будем называть *биквадрикой*. Биквадрике V однозначно соответствует пучок квадрик в $\mathbb{P}^5$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) = 0, \quad (0.2)$$

который определяет прямую в пространстве квадрик $\mathbb{P}^{20}$, где λ_1, λ_2 являются однородными координатами этой прямой. Таким образом, множество биквадрик содержится в многообразии Грассмана $\mathbb{G}(2, 21)$, которое обозначим через $\mathbb{G}$. Размерность многообразия Грассмана $\mathbb{G}$ равна 38.

Заметим, что биквадрика V , заданная системой уравнений (0.1), неособая тогда и только тогда, когда уравнение

$$\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = 0,$$

где A_1, A_2 – матрицы квадратичных форм $q_1(X), q_2(X)$, не имеет кратных корней на комплексной прямой $\mathbb{P}^1$. Множество точек $p \in \mathbb{G}$, для которых это

уравнение имеет кратные корни, образует дискриминантную гиперповерхность $\Delta \subset \mathbb{G}$.

Через $\mathbb{G}^*$ обозначим разность $\mathbb{G} \setminus \Delta$, это множество параметризует неособые биквадрики, а через $\mathbb{R}\mathbb{G}$, $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$ – множества вещественных точек из $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}^*$ соответственно. Если $p \in \mathbb{G}^*$, то через V_p обозначим соответствующую неособую комплексную биквадрику, поэтому при $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ комплексная биквадрика V_p может быть задана системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами. Тогда на комплексной биквадрике V_p определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: V_p \rightarrow V_p$. Пара (V_p, τ) называется *вещественной биквадрикой*, мы будем ее также обозначать через V_p , так как инволюция $\tau: V_p \rightarrow V_p$ однозначно восстанавливается из инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5$ и вложения $V_p \hookrightarrow \mathbb{P}^5$. Множество вещественных точек биквадрики V_p обозначается через $\mathbb{R}V_p$ и называется *вещественной частью биквадрики* V_p ; заметим, что она равна множеству неподвижных точек V_p^τ инволюции $\tau: V_p \rightarrow V_p$.

Множество $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$ является несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$ называются *жесткими изотопическими классами* неособых вещественных биквадрик в $\mathbb{P}^5$ (см. аналогичное определение для кривых в [1]).

Жесткие изотопические классы вещественных биквадрик описаны в [2]. Таких классов всего девять, мы обозначаем их через

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2).$$

Далее объясняются эти обозначения.

Пусть $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$; тогда через L_p обозначим соответствующую вещественную прямую в $\mathbb{P}^{20}$, а через $V_p \subset \mathbb{P}^5$ – соответствующую вещественную биквадрику, которая равна пересечению всех квадрик $Q_a \subset \mathbb{P}^5$, где $a \in L_p$. (Если точка a принадлежит пространству квадрик $\mathbb{P}^{20}$, то через Q_a обозначается соответствующая квадрика.) Пусть биквадрика V_p задается системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами. Тогда на вещественной прямой L_p квадратичные формы $q_1(X)$, $q_2(X)$ определяют вещественные однородные координаты λ_1 , λ_2 . Следовательно, пучок квадрик, соответствующий точке $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$, будет иметь уравнение вида (0.2). Рассмотрим уравнение

$$d_p(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = 0, \quad (0.3)$$

где A_1 , A_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм $q_1(X)$, $q_2(X)$, а точка $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ принадлежит $\mathbb{P}^1 = L_p$. Тогда уравнение (0.3) имеет ровно шесть решений в $\mathbb{P}^1 = L_p$, так как биквадрика V_p неособая. Заметим, что эти решения совпадают с точками пересечения прямой L_p и дискриминантной гиперповерхности $\Lambda \subset \mathbb{P}^{20}$, где Λ – множество особых квадрик.

Далее рассмотрим окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. Тогда уравнение шестой степени (0.3) можно рассматривать на этой окружности. Оно может иметь $2n$ корней на окружности S^1 , где $n = 0, 2, 4, 6$. (Заметим, что число n равно числу точек пересечения прямой $\mathbb{R}L_p$ с дискриминантной гиперповерхностью $\mathbb{R}\Lambda$.) Обозначим эти корни через $R_1, \dots, R_{2n}$, порядок которых индуцируется движением по окружности S^1 в фиксированном направлении от одного из фиксированных корней уравнения (0.3). (Заметим, что на

прямой $\mathbb{R}L_p$ нет канонической ориентации, поэтому ее нет также на двулистном накрытии $S^1 \rightarrow \mathbb{R}L_p$.) Через G_n обозначим множество точек $p \in \mathbb{R}G^*$, для которых уравнение (0.3) имеет $2n$ корней на окружности S^1 , т. е. число точек пересечения прямой $\mathbb{R}L_p$ с дискриминантной гиперповерхностью равно n . Тогда каждое из множеств $G_n \subset \mathbb{R}G^*$ состоит из целых компонент связности. Однако оказывается, что множества G_0, G_2 связные, поэтому далее рассматриваем случаи $n = 4, 6$.

Рассмотрим целочисленную функцию $\sigma_p(\lambda)$, $\lambda \in S^1$, принимающую целочисленные значения в пределах от -6 до 6 , равную сигнатуре квадратичной формы

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X).$$

Если $n > 0$, то точки $R_1, \dots, R_{2n}$ являются точками разрыва функции $\sigma_p(\lambda)$, причем при переходе через такие точки значения функции $\sigma_p(\lambda)$ изменяются на ± 2 . Фиксированное направление на окружности S^1 назовем *положительным*. Тогда точку R_j назовем также *положительной*, если при переходе через нее в положительном направлении значения функции $\sigma_p(\lambda)$ увеличиваются на 2, в противном случае точка R_j называется *отрицательной*. Можно так выбрать начальный корень R_1 уравнения (0.3) и направление на окружности S^1 , что возможны только следующие расположения знаков точек $R_1, \dots, R_{2n}$. (Вообще, расположение знаков может быть и другим, но мы выбирали одно из эквивалентных расположений.)

Если $n = 4$, то реализуются два (с точностью до эквивалентности) случая расположения знаков точек $R_1, \dots, R_8$:

$$++++-- --, \quad +--+-+ +-.$$

В этих случаях точка $p \in \mathbb{R}G^*$ по определению принадлежит множествам $G(4)$, $G(1, 1, 2)$ соответственно. (В скобках указываются последовательные числа, каждое из которых равно количеству знаков в отдельной группе из плюсов.)

Если $n = 6$, то реализуются пять (с точностью до эквивалентности) случаев расположения знаков точек $R_1, \dots, R_{12}$:

$$\begin{aligned} &+++++-- -- --, \quad +-- -- --+-+ ++ --, \\ &+-- -- ++-++ +- --, \quad ++--++- --++ --, \\ &+-- --+-+ --+-++ -. \end{aligned}$$

В этих случаях точка $p \in \mathbb{R}G^*$ принадлежит по определению множествам

$$G(6), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. (В скобках указываются количества знаков в группах из плюсов. Заметим, что циклическая перестановка этих чисел, а также изменение их порядка на противоположный приводят к эквивалентным обозначениям компонент связности множества неособых вещественных биквадрик. Заметим также, что число групп из плюсов всегда нечетно при $n = 4$ и $n = 6$.)

Далее мы сформулируем основную теорему настоящей статьи, которая описывает топологический тип многообразия $\mathbb{R}V_p$ в зависимости от принадлежности точки p компонентам

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. Но прежде мы определим пять гладких трехмерных многообразий $M_0, M_1, M_2, M'_3, M''_3$, которые участвуют в формулировке теоремы.

В трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ зафиксируем неособую вещественную двумерную квадрику K , множество вещественных точек которой $\mathbb{R}K$ является гиперboloидом. На квадрике K возьмем неособую вещественную кривую $D \subset K$ бистепени $(2, 3)$. Раздуем эту кривую. Тогда получим вещественное трехмерное многообразие $\hat{V}$, на котором собственный прообраз $\hat{K}$ квадрики K можно стянуть вдоль второго семейства прямых. Полученное вещественное алгебраическое многообразие обозначим через V (оно будет вещественной биквадрикой; см. далее п. 1.3). Вещественная кривая (D, τ) имеет род 2, для нее возможны следующие случаи (см. [3]):

0) множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из одной компоненты связности, которая разбивает топологическую поверхность D на две части (в этом случае многообразие $\mathbb{R}V$ обозначим через M_0);

1) множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из одной компоненты связности, которая не разбивает топологическую поверхность D на две части (в этом случае многообразие $\mathbb{R}V$ обозначим через M_1);

2) множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из двух компонент связности (в этом случае многообразие $\mathbb{R}V$ обозначим через M_2);

3') множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из трех компонент связности, каждая из которых не гомологична нулю на гиперboloиде $\mathbb{R}K$ (в этом случае многообразие $\mathbb{R}V$ обозначим через M'_3);

3'') множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из трех компонент связности, одна из которых не гомологична нулю на гиперboloиде $\mathbb{R}K$, а две другие гомологичны нулю (в этом случае многообразие $\mathbb{R}V$ обозначим через M''_3).

Таким образом, если рассматривать только вещественные части, то многообразия $M_0, M_1, M_2, M'_3, M''_3$ получаются следующим образом. В трехмерном проективном пространстве $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ раздувается кривая $\mathbb{R}D$, а затем стягивается собственный прообраз $\mathbb{R}\hat{K}$ гиперboloида $\mathbb{R}K$ вдоль собственных прообразов прямых на $\mathbb{R}K$, индекс пересечения которых с кривой $\mathbb{R}D$ не равен нулю со значениями в поле $\mathbb{F}_2$.

Если нас интересуют только гладкие многообразия $M_0, M_1, M_2, M'_3, M''_3$, то можно раздувать вместо кривой $\mathbb{R}D$ гладкую кривую Γ , гладко изотопную кривой $\mathbb{R}D$ на гиперboloиде $\mathbb{R}K$, причем можно брать кривую Γ наиболее просто устроенную. Далее указаны возможные варианты выбора кривой Γ (см. [3]). Для построения многообразия M_0 нужно взять связную гладкую ориентированную кривую Γ , которая с ориентированными прямыми первого семейства на гиперboloиде $\mathbb{R}K$ имеет индекс пересечения 2, а с ориентированными прямыми второго семейства индекс пересечения равен 1 или 3 (предполагается, что гиперboloид $\mathbb{R}K$ также ориентирован в соответствии с ориентациями прямых). Для построения многообразия M_1 можно взять в качестве кривой Γ прямую из первого семейства на гиперboloиде $\mathbb{R}K$. Для построения многообразия M_2 можно взять в качестве кривой Γ объединение прямой из первого семейства и гладкого овала на гиперboloиде. Для построения многообразия M'_3 можно взять в качестве кривой Γ объединение трех прямых из первого семейства. Для построения многообразия M''_3 можно взять в качестве кривой Γ объединение прямой из первого семейства и двух овалов, не образующих гнездо.

Принципиальным является тот факт, что на вещественной биквадрике могут отсутствовать вещественные прямые. В случае, когда на вещественной биквадрике V существуют вещественные прямые, множество вещественных точек $\mathbb{R}V$ может быть получено предыдущей геометрической конструкцией. В противном случае нужны другие конструкции. Мы используем метод малого возмущения особых биквадрик с особыми только комплексными точками. Такие особые биквадрики рассматривались в работах [4]–[6].

В настоящей статье доказана теорема, в которой содержится классификация топологических типов вещественных частей вещественных биквадрик, а также устанавливается связь между жесткими изотопическими классами неособых вещественных биквадрик и топологическими типами вещественных частей этих биквадрик.

ТЕОРЕМА 0.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p \in G_0$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно многообразию M_0 ;
- 2) если $p \in G_2$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно многообразию M_1 ;
- 3) если $p \in G(4)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно трехмерной сфере S^3 ;
- 4) если $p \in G(6)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ пустое;
- 5) если $p \in G(1, 1, 2)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно многообразию M_2 ;
- 6) если $p \in G(1, 1, 4)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно несвязному объединению $S^3 \sqcup S^3$ двух трехмерных сфер;
- 7) если $p \in G(1, 2, 3)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению сфер $S^1 \times S^2$;
- 8) если $p \in G(2, 2, 2)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно многообразию M'_3 ;
- 9) если $p \in G(1, 1, 1, 1, 2)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно M''_3 .

Заметим, что многообразия $M_0, M_1, M_2, M'_3, M''_3$, участвующие в формулировке теоремы 0.1, получены с помощью конструкций алгебраической геометрии. Желательно сделать это с помощью топологических конструкций. Для трех из этих многообразий, M_0, M_1, M'_3 , соответствующие топологические конструкции найдены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.2. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) многообразие M_0 диффеоморфно фактормногообразию $SO(3)/\{1, g\}$, где $\{1, g\}$ – группа второго порядка, действующая на многообразии $SO(3)$ по праву: инволюция $g: SO(3) \rightarrow SO(3)$ умножает на -1 два первых столбца матрицы из $SO(3)$;
- 2) многообразие M_1 диффеоморфно многообразию $S^1 \times S^2$;
- 3) многообразие M'_3 диффеоморфно произведению $S^1 \times S^1 \times S^1$.

Для многообразий M_2, M''_3 аналогичные топологические конструкции еще не найдены.

Возникает вопрос: какие из вещественных биквадрик являются ГМ-многообразиями (M -многообразиями)? Следующее предложение дает ответ на этот вопрос.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.3. *Справедливы утверждения:*

- 1) вещественная биквадрика V_p является ГМ-многообразием тогда и только тогда, когда $p \in G_0 \cup G_2 \cup G(1, 1, 2) \cup G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2)$;

2) вещественная биквадрика V_p является M -многообразием тогда и только тогда, когда $p \in G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2)$.

Обозначим через A_p множество прямых в $\mathbb{P}^5$, лежащих на биквадрике $V_p \subset \mathbb{P}^5$. Известно, что A_p является абелевой поверхностью (см., например, [7]). Если $p \in \mathbb{R}G^*$, то возникает вопрос о том, как устроено множество прямых на $\mathbb{R}V_p \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^3$, т. е. множество вещественных точек $\mathbb{R}A_p$ абелевой поверхности A_p . В статье также доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p \in G(4) \cup G(6) \cup G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3)$, то множество $\mathbb{R}A_p$ пустое;
- 2) если $p \in G_0 \cup G_2$, то множество $\mathbb{R}A_p$ диффеоморфно двумерному тору;
- 3) если $p \in G(1, 1, 2)$, то множество $\mathbb{R}A_p$ диффеоморфно несвязному объединению двух двумерных торов;
- 4) если $p \in G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2)$, то множество $\mathbb{R}A_p$ диффеоморфно несвязному объединению четырех двумерных торов.

Следующее предложение показывает, что только два жестких изотопических класса имеют одинаковые топологические типы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.5. *Пусть вещественные биквадрики $V_p, V_{p'}$ принадлежат разным жестким изотопическим классам. Тогда многообразия $\mathbb{R}V_p, \mathbb{R}V_{p'}$ диффеоморфны, если и только если $p \in G_2, p' \in G(1, 2, 3)$ или, наоборот, $p' \in G_2, p \in G(1, 2, 3)$.*

Изложим кратко содержание настоящей статьи. Кроме введения, она содержит три параграфа.

В § 1 рассматриваются комплексные биквадрики. Здесь формулируются основные понятия и факты из книги [7] для комплексных биквадрик.

В § 2 рассматриваются различные факты о вещественных биквадриках, которые потребуются при доказательстве теоремы 0.1 и предложений 0.2–0.5. Изложенный материал в этом параграфе, в основном, является известным.

В § 3 доказаны основные результаты данной статьи. Сначала доказывается теорема 0.1, а затем предложения 0.2–0.5. При доказательстве большинства утверждений теоремы 0.1 применяется метод малого возмущения биквадрики с комплексными особыми точками. Такие биквадрики изучались в [4]–[6].

§ 1. Неособые комплексные биквадрики

В этом параграфе мы приведем без доказательства некоторые свойства трехмерных комплексных биквадрик (см. [7]–[9]).

1.1. Когомологии биквадрики. Полная группа когомологий $H^*(V, \mathbb{Z})$ неособой биквадрики V свободная, и выполняются равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} H^0(V, \mathbb{Z}) &= \operatorname{rk} H^2(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^4(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^6(V, \mathbb{Z}) = 1, \\ \operatorname{rk} H^3(V, \mathbb{Z}) &= 4, \quad \operatorname{rk} H^1(V, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^5(V, \mathbb{Z}) = 0. \end{aligned}$$

Для чисел Ходжа справедливы равенства

$$h^{3,0} = h^{0,3} = 0, \quad h^{2,1} = h^{1,2} = 2.$$

Таким образом, определен промежуточный якобиан

$$J(V) = (H^{2,1})^*/H_3(V, \mathbb{Z}),$$

который является абелевой поверхностью.

Неособая комплексная трехмерная биквадрика V является многообразием Фано, ее канонический класс равен $-2H$, где H – гиперплоское сечение. Из этого факта, в частности, вытекает, что если V – вещественная биквадрика, то многообразие вещественных точек $\mathbb{R}V$ всегда ориентируемое.

1.2. Множество прямых на биквадрике. Пусть $p \in \mathbb{G}^*$ и $V_p = V \subset \mathbb{P}^5$ – соответствующая неособая трехмерная биквадрика. На многообразии V существуют прямые из проективного пространства $\mathbb{P}^5$. Множество таких прямых обозначим через $A_p = A$, оно является абелевой поверхностью.

Если $l \in A$, то имеются две возможности для нормального пучка $\mathcal{N}_{l/V}$:

$$\mathcal{N}_{l/V} = \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathcal{O}_l(1), \quad \mathcal{N}_{l/V} = \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l.$$

В первом случае прямая $l \subset V$ называется *специальной*, а во втором случае – *неспециальной*. Множество специальных прямых образует алгебраическую кривую на абелевой поверхности A (см. [7] о виде этой кривой, заметим только, что если биквадрика V вещественная, то вещественной будет и эта кривая).

Абелева поверхность A является якобианом гиперэллиптической кривой C рода 2, которую мы опишем.

Пусть $p \in \mathbb{G}^*$ и $L_p = L$ – соответствующая прямая в пространстве четырехмерных квадрик $\mathbb{P}^{20}$. Пусть $a_k \in L_p$, $k = 1, \dots, 6$, – точки пересечения прямой L с дискриминантной гиперповерхностью $\Lambda \subset \mathbb{P}^{20}$. Если $a \in L$, то через Q_a будем обозначать соответствующую четырехмерную квадрику в $\mathbb{P}^5$. Если квадрика Q_a неособая, то на ней имеются два семейства плоскостей. Если квадрика Q_a особая, т.е. точка a совпадает с одной из точек $a_1, \dots, a_6$, то на ней имеется только одно семейство плоскостей. Определим кривую инцидентности $C_p = C$ следующим образом. Точками кривой C являются пары (a, r) , где $a \in L$, r – семейство плоскостей на квадрике Q_a . Тогда определена проекция $\pi: C \rightarrow L$, которая является двулистным накрытием с точками ветвления $a_1, \dots, a_6$. Таким образом, кривая C является гиперэллиптической кривой рода 2. Многообразие прямых A на биквадрике $V_p = V$ изоморфно якобиану $J(C)$ кривой C , а также промежуточному якобиану $J(V)$ биквадрики V (см. следующий пункт).

Кривая C вкладывается в $\mathbb{P}^3$. Чтобы построить такое вложение, зафиксируем неспециальную прямую $l \in A$. Пусть B_l – множество прямых $l' \in A$, которые пересекаются в $\mathbb{P}^5$ с прямой l (прямая l множеству B_l не принадлежит). Оказывается, что для любой неспециальной прямой l кривая инцидентности B_l изоморфна гиперэллиптической кривой C . (Соответствующий изоморфизм построен в следующем пункте.) Обозначим через $\mathbb{P}(l)$ множество плоскостей в $\mathbb{P}^5$, проходящих через прямую $l \subset \mathbb{P}^5$. (Пространство $\mathbb{P}(l)$ можно отождествить с любым подпространством $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$, не пересекающим прямую l .) Тогда имеем отображение $B_l \rightarrow \mathbb{P}(l)$, которое прямой $l' \in B_l$ сопоставляет плоскость

$\langle l, l' \rangle$, проходящую через прямые l, l' . Таким образом, если l – неспециальная прямая, то получаем отображение $B_l \rightarrow \mathbb{P}(l)$, которое, как оказывается, отображает кривую B_l изоморфно на кривую пятой степени D_l в $\mathbb{P}(l)$. Кроме этого, оказывается, что кривая D_l лежит на единственной квадрике $K_l \subset \mathbb{P}(l)$, причем эта квадрика неособая, а кривая $D_l \subset K_l$ имеет бистепень $(2, 3)$. Если мы отождествили пространство $\mathbb{P}(l)$ с подпространством $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$, то отображение $B_l \rightarrow \mathbb{P}^3$ сопоставляет прямой $l' \in B_l$ точку пересечения плоскости $\langle l, l' \rangle$ с пространством $\mathbb{P}^3$.

1.3. Рациональность биквадрики. Пусть $p \in \mathbb{G}^*$ и $V_p = V \subset \mathbb{P}^5$ – соответствующая неособая трехмерная биквадрика. На биквадрике V имеются неспециальные прямые, зафиксируем одну из них и обозначим ее через l . Через $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ обозначим трехмерное проективное подпространство, не пересекающее прямую l . Тогда рассмотрим проекцию $\pi_l: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ с центром в прямой l . Эта проекция не определена в точках на прямой l . После раздутия прямой $l \subset V$ получается трехмерное многообразие $\bar{V}$, а прямая $l \subset V$ раздувается в неособую двумерную квадрику $\bar{K}_l = \bar{K} \subset \bar{V}$. Рациональное отображение $\pi_l: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ продолжается до бирационального морфизма $\pi_l: \bar{V} \rightarrow \mathbb{P}^3$, при котором квадрика $\bar{K}$ изоморфно отображается на квадрику $K_l = K \subset \mathbb{P}^3$ из предыдущего пункта.

Множество критических значений морфизма $\pi_l: \bar{V}_p \rightarrow \mathbb{P}^3$ составляет неособую кривую $D_l = D \subset K$ из п. 1.2, которая, как уже говорилось, канонически изоморфна гиперэллиптической кривой C . Опишем соответствующий изоморфизм $\alpha: D \xrightarrow{\sim} C$. Возьмем точку $x \in D$, через эту точку и прямую $l \subset V$ проходит единственная плоскость в $\mathbb{P}^5$, которую мы обозначим через $\langle x, l \rangle$. Существует единственная точка $a \in L_p$ такая, что квадрика Q_a содержит плоскость $\langle x, l \rangle$. Пусть r – семейство плоскостей на квадрике Q_a , которому принадлежит плоскость $\langle x, l \rangle$. Тогда по определению полагаем $\alpha(x) = (a, r) \in C$.

Кривая D лежит на квадрике $K \subset \mathbb{P}^3$ и имеет бистепень $(2, 3)$. Если мы раздуем эту кривую на $\mathbb{P}^3$, то из проективного пространства $\mathbb{P}^3$ получится многообразие $\hat{V}$. Существует единственный изоморфизм $\bar{V} \xrightarrow{\sim} \hat{V}$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{V} & \xrightarrow{\sim} & \hat{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^3 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

причем при этом изоморфизме квадрика $\bar{K}$ изоморфно отображается на квадрику $\hat{K}$, которая равна собственному прообразу квадрики $K \subset \mathbb{P}^3$.

Таким образом, биквадрику V можно получить из многообразия $\hat{V}$, если стянуть собственный прообраз $\hat{K}$ квадрики K вдоль прямых, которые являются собственными прообразами прямых на квадрике K , имеющих индекс пересечения с кривой D , равный 3. Из этих фактов вытекает, что существует канонический изоморфизм групп гомологий

$$H_1(D, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_3(V, \mathbb{Z}),$$

который одномерному циклу γ на кривой D сопоставляет трехмерный цикл на биквадрике V , образованный прямыми $l' \in B_l$, удовлетворяющими условию $\pi_l(l') \in \gamma$.

Наоборот, возьмем произвольную неособую квадрику $K \subset \mathbb{P}^3$ и неособую кривую D бистепени $(2, 3)$ на квадрике K . Тогда с помощью предыдущих бирациональных преобразований (раздутия кривой D , а затем стягивания квадрики $\hat{K}$) из проективного пространства $\mathbb{P}^3$ получается биквадрика V . Вложение $V \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ получается с помощью линейного расслоения, равного $-(1/2)K_V$, где K_V – каноническое расслоение на V .

§ 2. Вещественные биквадрики

Пусть $p \in \mathbb{R}G^*$, L_p – соответствующая вещественная прямая в $\mathbb{P}^{20}$, а $V_p \subset \mathbb{P}^5$ – соответствующая вещественная биквадрика. Через $n = n(p)$ обозначим число вещественных точек пересечения прямой $L_p \subset \mathbb{P}^{20}$ с дискриминантной гиперповерхностью Λ . Число $n(p)$ в зависимости от p может принимать значения 0, 2, 4, 6. Через $m = m(p)$ обозначим число, равное $3 - \frac{1}{2}n(p)$. Заметим, что числа $n(p), m(p)$ зависят только от жесткого изотопического класса вещественной биквадрики V_p .

Пусть C_p – гиперэллиптическая кривая, соответствующая прямой L_p . Тогда C_p является вещественной кривой, причем при гиперэллиптической проекции $C_p \rightarrow L_p$ вещественные точки пересечения прямой L_p с дискриминантной гиперповерхностью Λ являются вещественными точками ветвления двулистного накрытия $C_p \rightarrow L_p$. Таким образом, число вещественных точек ветвления двулистного накрытия $C_p \rightarrow L_p$ равно $n(p)$.

2.1. Канонические формы уравнений. Пусть неособая вещественная биквадрика V_p задана уравнениями (0.1) с вещественными коэффициентами. Будем предполагать, что матрица первого уравнения из (0.1) невырожденная. Тогда существует линейное вещественное преобразование проективных координат $X_0, \dots, X_5$ с положительным определителем

$$(X_0, \dots, X_5) = (x_1, \dots, x_n, y_1, z_1, \dots, y_m, z_m) \begin{pmatrix} E & \cdots & G \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F & \cdots & H \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

такое, что система уравнений (0.1) примет вид (см., например, [6], [10])

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 + 2y_1 z_1 + \cdots + 2y_m z_m = 0, \\ q_2 &= b_1 x_1^2 + \cdots + b_n x_n^2 + \beta_1 (y_1^2 - z_1^2) \\ &\quad + 2\alpha_1 y_1 z_1 + \cdots + \beta_m (y_m^2 - z_m^2) + 2\alpha_m y_m z_m = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где все коэффициенты вещественные, $a_1 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$, вещественные числа $b_1/a_1, \dots, b_n/a_n$ различные, также различными являются комплексные числа $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_m + i\beta_m$, причем можем считать, что $\beta_1 > 0, \dots, \beta_m > 0$, в крайнем случае, заменим форму q_2 на форму $-q_2$.

ЛЕММА 2.1. Пусть вещественная биквадрика V в координатах $x_1, \dots, x_n, y_1, z_1, \dots, y_m, z_m$ задана системой уравнений

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 + 2y_1 z_1 + \dots + 2y_m z_m &= 0, \\ b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2 + (y_1^2 - z_1^2) + 2(y_2^2 - z_2^2) + \dots + m(y_m^2 - z_m^2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где коэффициенты $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ те же, что и в системе (2.2). Тогда биквадрики V_p, V жестко изотопны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что все числа $\beta_1, \dots, \beta_m$ в системе (2.2) положительные. В верхней части комплексной плоскости $\{u + iv \mid v > 0\}$ выберем непересекающиеся параметрические кривые

$$u + iv = \varphi_1(t) + i\chi_1(t), \quad \dots, \quad u + iv = \varphi_m(t) + i\chi_m(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

такие, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \alpha_1, \quad \chi_1(0) = \beta_1, \quad \dots, \quad \varphi_m(0) = \alpha_m, \quad \chi_m(0) = \beta_m, \\ \varphi_1(1) &= 0, \quad \chi_1(1) = 1, \quad \varphi_2(1) = 0, \quad \chi_2(1) = 2, \quad \dots, \quad \varphi_m(1) = 0, \quad \chi_m(1) = m. \end{aligned}$$

Тогда непрерывное семейство неособых вещественных биквадрик $V(t)$, заданных системой уравнений

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 + 2y_1 z_1 + \dots + 2y_m z_m &= 0, \\ b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2 + \chi_1(t)(y_1^2 - z_1^2) \\ &+ 2\varphi_1(t)y_1 z_1 + \dots + \chi_m(t)(y_m^2 - z_m^2) + 2\varphi_m(t)y_m z_m = 0, \end{aligned}$$

соединяет вещественную биквадрику V_p в пространстве $\mathbb{R}G^*$ с вещественной биквадрикой V . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть вещественная биквадрика V в координатах $x_1, \dots, x_n, y_1, z_1, \dots, y_m, z_m$ задана системой уравнений (2.3). Тогда она жестко изотопна биквадрике $\bar{V}$, заданной в координатах $x_1, \dots, x_n, y_1, z_1, \dots, y_m, z_m$ системой уравнений

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 x_1^2 + \dots + \bar{a}_n x_n^2 + 2y_1 z_1 + \dots + 2y_m z_m &= 0, \\ \bar{b}_1 x_1^2 + \dots + \bar{b}_n x_n^2 + (y_1^2 - z_1^2) + 2(y_2^2 - z_2^2) + \dots + m(y_m^2 - z_m^2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\bar{a}_j = \frac{a_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}, \quad \bar{b}_j = \frac{b_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство вещественных неособых биквадрик $V(t)$, $0 \leq t \leq 1$, заданное системой уравнений

$$\begin{aligned} a_1(t)x_1^2 + \dots + a_n(t)x_n^2 + 2y_1 z_1 + \dots + 2y_m z_m &= 0, \\ b_1(t)x_1^2 + \dots + b_n(t)x_n^2 + (y_1^2 - z_1^2) + 2(y_2^2 - z_2^2) + \dots + m(y_m^2 - z_m^2) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$a_j(t) = a_j \left(\frac{t}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}} + (1-t) \right), \quad b_j(t) = b_j \left(\frac{t}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}} + (1-t) \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда получаем, что $V(0) = V$, $V(1) = \bar{V}$. Лемма доказана.

2.2. Жесткие изотопические классы вещественных неособых биквадрик. Заметим, что в работе [2] фактически не приводится полного доказательства связности множеств G_0 , G_2 , $G(4)$, $G(6)$, $G(1, 1, 2)$, $G(1, 1, 4)$, $G(1, 2, 3)$, $G(2, 2, 2)$, $G(1, 1, 1, 1, 2)$, причем, как мне кажется, множество G_0 пропущено (см. формулировку следствия A4.2.3 в [2]). Поэтому для полноты изложения докажем связность этих множеств (точнее, одного из них, отличного от G_0).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Множества*

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

связные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем только для множества $G(1, 1, 2)$, так как для остальных множеств рассуждения аналогичны.

Пусть точки p, p' принадлежат множеству $G(1, 1, 2)$, а V, V' – соответствующие биквадрики. В силу лемм 2.1, 2.2 можно заменить точки p, p' на другие точки в их компонентах связности, чтобы существовали две системы координат:

$$x_1, \dots, x_4, y_1, z_1, \quad x'_1, \dots, x'_4, y'_1, z'_1,$$

в которых новые биквадрики V, V' (жестко изотопны старым биквадрикам V, V') задавались системами уравнений

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_4 x_4^2 + 2y_1 z_1 = 0, \quad b_1 x_1^2 + \dots + b_4 x_4^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} a'_1 (x'_1)^2 + \dots + a'_4 (x'_4)^2 + 2y'_1 z'_1 &= 0, \\ b'_1 (x'_1)^2 + \dots + b'_4 (x'_4)^2 + (y'_1)^2 - (z'_1)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

соответственно, причем плоские векторы (a_j, b_j) , (a'_j, b'_j) имеют единичную длину при $j = 1, \dots, 4$. Систему уравнений (2.6) заменим на систему уравнений

$$a'_1 x_1^2 + \dots + a'_4 x_4^2 + 2y_1 z_1 = 0, \quad b'_1 x_1^2 + \dots + b'_4 x_4^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0. \quad (2.7)$$

Биквадрика, заданная системой уравнений (2.7), получается из биквадрики V' вещественным проективным преобразованием с положительным определителем, поэтому она жестко изотопна биквадрике V' . Следовательно, можно считать, что биквадрика V' изначально задавалась системой уравнений (2.7).

На рис. 1 и рис. 2 изображены окружности с корнями $R_1, \dots, R_8, R'_1, \dots, R'_8$ и знаками этих корней для соответствующих пучков квадрик. (На окружностях зафиксированы направления против часовой стрелки.) Заметим, что каждый из корней R_j имеет координаты $(\pm b_{r(j)}, \mp a_{r(j)})$; аналогично, каждый из корней R'_j имеет координаты $(\pm b'_{s(j)}, \mp a'_{s(j)})$. Заметим также, что выполняется следующее свойство. Пусть корень R_j положительный (отрицательный). Тогда если отложить вектор $(a_{r(j)}, b_{r(j)})$ от точки R_j , то он станет касательным вектором к окружности, направленным в положительном (отрицательном) направлении относительно направления на окружности. Аналогичное свойство выполняется для второй окружности.

Мы можем устроить такую изотопию окружности $\varphi_t: S^1 \rightarrow S^1$, $0 \leq t \leq 1$, что выполняются равенства $\varphi_1(R_j) = R'_j$, $j = 1, \dots, 8$. Пусть $(a_{r(j)}(t), b_{r(j)}(t)) -$

Рис. 1

Рис. 2

единичный вектор, отложенный от точки $\varphi_t(R_j)$, касательный к окружности и направленный в положительном направлении, $j = 1, 4, 6, 7$. Тогда рассмотрим семейство биквадрик $V(t)$, заданных системой уравнений

$$a_1(t)x_1^2 + \dots + a_4(t)x_4^2 + 2y_1z_1 = 0, \quad b_1(t)x_1^2 + \dots + b_4(t)x_4^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0. \quad (2.8)$$

Биквадрика $V(1)$ жестко изотопна биквадрике V . С другой стороны, система уравнений (2.8) при $t = 1$ будет отличаться от системы уравнений (2.7) порядком координат $x_1, \dots, x_4$, т. е. она будет иметь вид

$$a'_1x_{k_1}^2 + \dots + a'_4x_{k_4}^2 + 2y_1z_1 = 0, \quad b'_1x_{k_1}^2 + \dots + b'_4x_{k_4}^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0, \quad (2.9)$$

где $k_1, \dots, k_4$ – перестановка чисел $1, \dots, 4$. Остается заметить, что биквадрика $V(1)$, заданная системой уравнений (2.9), жестко изотопна биквадрике V' , так как одну из другой можно получить вещественным проективным преобразованием с положительным определителем. Предложение доказано.

2.3. Вещественные биквадрики с особыми комплексными точками.

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество вещественных трехмерных биквадрик, которые могут иметь особые точки, но они обязаны быть комплексными. Если $p \in \mathcal{G}$, то вещественная часть биквадрики $\mathbb{R}V_p$ – гладкое трехмерное многообразие или пустое множество. Вложение $\mathbb{R}\mathbb{G}^* \hookrightarrow \mathcal{G}$ индуцирует отображение компонент связности $\pi_0(\mathbb{R}\mathbb{G}^*) \rightarrow \pi_0(\mathcal{G})$. Оказывается, что это отображение биективно. Действительно, замыкание множества $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$ в $\mathcal{G}$ совпадает с множеством $\mathcal{G}$. Поэтому отображение компонент связности $\pi_0(\mathbb{R}\mathbb{G}^*) \rightarrow \pi_0(\mathcal{G})$ сюръективно. С другой стороны, число компонент связности множества $\mathcal{G}$ равно девяти (см., например, [4]). Образы компонент связности

$$G_0, G_2, G(4), G(6), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 1, 2)$$

при отображении $\pi_0(\mathbb{R}\mathbb{G}^*) \rightarrow \pi_0(\mathcal{G})$ будем обозначать через

$$\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}(4), \mathcal{G}(6), \mathcal{G}(1, 1, 2), \mathcal{G}(1, 1, 4), \mathcal{G}(1, 2, 3), \mathcal{G}(2, 2, 2), \mathcal{G}(1, 1, 1, 1, 2)$$

соответственно. Заметим, что если точки p_1, p_2 принадлежат одной компоненте связности множества $\mathcal{G}$, то гладкие многообразия $\mathbb{R}V_{p_1}, \mathbb{R}V_{p_2}$ диффеоморфны.

В работах [4]–[6] описаны специальные точки множеств $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}(4), \mathcal{G}(1, 1, 2), \mathcal{G}(1, 1, 4), \mathcal{G}(1, 2, 3), \mathcal{G}(2, 2, 2), \mathcal{G}(1, 1, 1, 2)$, которые принадлежат границам множеств $G_0, G_2, G(4), G(1, 1, 2), G(1, 1, 4), G(1, 2, 3), G(2, 2, 2), G(1, 1, 1, 2)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_0X_1 + X_2X_3 + X_4X_5 = 0,$$

принадлежит границе множества G_0 ;

2) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_2X_3 + X_4X_5 = 0,$$

принадлежит границе множества G_2 ;

3) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_4X_5 = 0,$$

принадлежит границе множества $G(4)$;

4) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_4X_5 = 0,$$

принадлежит границе множества $G(1, 1, 2)$;

5) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0,$$

принадлежит границе множества $G(1, 1, 4)$;

6) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0,$$

принадлежит границе множества $G(1, 2, 3)$;

7) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0,$$

принадлежит границе множества $G(2, 2, 2)$;

8) *биквадрика, заданная системой уравнений*

$$2X_0^2 + X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0, \quad X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0,$$

принадлежит границе множества $G(1, 1, 1, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что все восемь биквадрик в условии предложения особые, причем они имеют только комплексные особые точки. Затем рассмотрим восемь семейств биквадрик, где $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 & X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \\
 & X_0X_1 + (1+t)X_2X_3 + (1+2t)X_4X_5 = 0; \\
 & X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \\
 & tX_0^2 - tX_1^2 + X_2X_3 + (1+t)X_4X_5 = 0; \\
 & X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \\
 & tX_1^2 + 2tX_2^2 + 3tX_3^2 + X_4X_5 = 0; \\
 & X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \\
 & X_1^2 - X_2^2 - (1+t)X_3^2 + X_4X_5 = 0; \\
 & X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \\
 & X_1^2 - X_2^2 - (1+t)X_3^2 - (1+2t)X_4^2 - (1+3t)X_5^2 = 0; \\
 & X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \\
 & tX_0^2 + (1+t)X_1^2 + (1+2t)X_2^2 - (1+t)X_3^2 - (1+2t)X_4^2 - (1+3t)X_5^2 = 0; \\
 & X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \\
 & tX_0^2 + 2tX_1^2 + (1+t)X_2^2 + (1+2t)X_3^2 - (1+2t)X_4^2 - (1+3t)X_5^2 = 0; \\
 & 2X_0^2 + X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0, \\
 & X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - (1+t)X_5^2 = 0.
 \end{aligned}$$

При $t = 0$ каждая из этих систем совпадает с соответствующей системой в условии предложения. При $0 < t \leq 1$ эти системы задают биквадрики, принадлежащие множествам G_0 , G_2 , $G(4)$, $G(1, 1, 2)$, $G(1, 1, 4)$, $G(1, 2, 3)$, $G(2, 2, 2)$, $G(1, 1, 1, 1, 2)$ соответственно. Эти утверждения проверяются непосредственно. Предложение доказано.

§ 3. Доказательство основных результатов

3.1. Доказательство теоремы 0.1. Мы будем последовательно доказывать утверждения теоремы 0.1. Для доказательства утверждений 1), 2) этой теоремы напомним определение многообразий M_0 , M_1 .

В трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ зафиксируем неособую вещественную двумерную квадрику K , множество вещественных точек которой $\mathbb{R}K$ является гиперboloидом. На квадрике K возьмем неособую вещественную кривую $D \subset K$ бистепени $(2, 3)$. Раздуем эту кривую и тогда получим вещественное трехмерное многообразие $\hat{V}$, на котором точный прообраз $\hat{K}$ квадрики K можно стянуть вдоль второго семейства прямых. Полученное вещественное алгебраическое многообразие обозначим через V (оно будет вещественной биквадрикой; см. п. 1.2). Вещественная кривая (D, τ) имеет род 2,

для ее расположения на квадрике K возможны разные случаи (см. [3]), мы рассмотрим сначала два из них:

0) множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из одной компоненты связности, которая разбивает топологическую поверхность D на две части; в этом случае многообразии $\mathbb{R}V$ мы обозначили через M_0 , а через p' обозначим соответствующую точку в $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$;

1) множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из одной компоненты связности, которая не разбивает топологическую поверхность D на две части; в этом случае многообразии $\mathbb{R}V$ мы обозначили через M_1 , а через p'' обозначим соответствующую точку в $\mathbb{R}\mathbb{G}^*$.

Рассмотрим вещественную кривую $(C_{p'}, \tau)$, она изоморфна вещественной кривой (D, τ) в случае 0). Тогда множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из одной компоненты связности, которая разбивает топологическую поверхность D на две части. Следовательно, множество вещественных точек $\mathbb{R}C_{p'}$ также состоит из одной компоненты связности, которая разбивает топологическую поверхность $C_{p'}$ на две части. Это означает, что двулистное накрытие $C_{p'} \rightarrow L_{p'}$ не имеет вещественных точек ветвления. Следовательно, уравнение $d_{p'}(\lambda) = 0$ не имеет корней. Поэтому точка p' принадлежит компоненте G_0 .

Рассмотрим вещественную кривую $(C_{p''}, \tau)$, она изоморфна вещественной кривой (D, τ) в случае 1). Тогда множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из одной компоненты связности, которая не разбивает топологическую поверхность D на две части. Следовательно, множество вещественных точек $\mathbb{R}C_{p''}$ также состоит из одной компоненты связности, которая не разбивает топологическую поверхность $C_{p''}$ на две части. Это означает, что двулистное накрытие $C_{p''} \rightarrow L_{p''}$ имеет две вещественные точки ветвления. Следовательно, уравнение $d_{p''}(\lambda) = 0$ имеет два корня. Поэтому точка p'' принадлежит компоненте G_2 . Таким образом, утверждения 1), 2) теоремы 0.1 доказаны.

Докажем утверждение 3) теоремы 0.1. Для этого применим утверждение 3) предложения 2.4. Из него следует, что если $p \in G(4)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно многообразию в $\mathbb{R}\mathbb{P}^5$, заданному системой

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_4 X_5 = 0.$$

Однако эта система определяет сферу S^3 . Утверждение 3) доказано.

Для доказательства утверждения 4) теоремы 0.1 рассмотрим систему уравнений

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0, \quad X_1^2 - X_2^2 + 2X_3^2 - 2X_4^2 + 3X_5^2 = 0.$$

Вещественная биквадрика, определенная этой системой уравнений, имеет пустое множество вещественных точек. С другой стороны, непосредственно проверяется, что эта биквадрика принадлежит классу $G(6)$.

Для доказательства утверждения 5) теоремы 0.1 и построения многообразия M_2 рассмотрим следующий случай расположения кривой (D, τ) на квадрике K (см. [3]):

2) множество вещественных точек $\mathbb{R}D$ состоит из двух компонент связности.

Конструкция, которая дает определение многообразия M_2 , приводит к вещественной гиперэллиптической кривой $C \rightarrow L$, которая имеет четыре вещественные точки ветвления. Поэтому полученная вещественная биквадрика имеет

вид V_p , где $p \in G_4$. Нам нужно показать, что $p \in G(1, 1, 2)$. Для этого заметим, что множество G_4 состоит из двух компонент связности $G(4)$, $G(1, 1, 2)$. Поскольку многообразие M_2 не диффеоморфно сфере S^3 , точка $p \in G_4$ не может принадлежать компоненте $G(4)$ в силу утверждения 3) теоремы 0.1. Утверждение 5) теоремы 0.1 доказано.

Для доказательства утверждения 6) рассмотрим систему уравнений

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0. \quad (3.1)$$

Добавим к этой системе еще одно уравнение $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 4$. Тогда полученная система из трех уравнений эквивалентна системе

$$X_0^2 = 2, \quad X_1^2 = 1, \quad X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 1. \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) определяет в $\mathbb{R}^6$ произведение сфер $S^0 \times S^0 \times S^3$. Гладкое многообразие $\mathbb{R}V$, определенное системой уравнений (3.1) в $\mathbb{RP}^5$, диффеоморфно фактормногообразию $(S^0 \times S^0 \times S^3)/\{1, g\}$, где инволюция

$$g: S^0 \times S^0 \times S^3 \rightarrow S^0 \times S^0 \times S^3$$

действует умножением на -1 на каждом сомножителе (т.е. на каждом сомножителе инволюция действует антиподально). Следовательно, многообразие $\mathbb{R}V$, определенное системой уравнений (3.1) в $\mathbb{RP}^5$, диффеоморфно произведению $S^0 \times S^3$. Применим теперь утверждение 5) предложения 2.4. Тогда получим, что утверждение 6) теоремы 0.1 доказано.

Доказательство утверждения 7) теоремы 0.1 аналогично доказательству утверждения 6). Для этого рассмотрим систему уравнений

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0. \quad (3.3)$$

Добавим к этой системе еще одно уравнение $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 4$. Тогда полученная система из трех уравнений эквивалентна системе

$$X_0^2 = 2, \quad X_1^2 + X_2^2 = 1, \quad X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 1. \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.4) определяет в $\mathbb{R}^6$ произведение сфер $S^0 \times S^1 \times S^2$. Многообразие $\mathbb{R}V$, определенное системой уравнений (3.3) в $\mathbb{RP}^5$, диффеоморфно фактормногообразию $(S^0 \times S^1 \times S^2)/\{1, g\}$, где инволюция

$$g: S^0 \times S^1 \times S^2 \rightarrow S^0 \times S^1 \times S^2$$

действует умножением на -1 на каждом сомножителе. Следовательно, гладкое многообразие $\mathbb{R}V$, определенное системой уравнений (3.3) в $\mathbb{RP}^5$, диффеоморфно произведению $S^1 \times S^2$. Применим теперь утверждение 6) предложения 2.4. Тогда получим, что утверждение 7) теоремы 0.1 доказано.

Для доказательства утверждений 8), 9) теоремы 0.1 потребуются несколько лемм.

ЛЕММА 3.1. *Если $p \in G(2, 2, 2)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению окружностей $S^1 \times S^1 \times S^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему уравнений

$$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0. \quad (3.5)$$

Добавим к этой системе еще одно уравнение $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 4$. Тогда полученная система из трех уравнений эквивалентна системе

$$X_0^2 + X_1^2 = 2, \quad X_2^2 + X_3^2 = 1, \quad X_4^2 + X_5^2 = 1. \quad (3.6)$$

Система уравнений (3.6) определяет в $\mathbb{R}^6$ произведение сфер $S^1 \times S^1 \times S^1$, которое является трехмерным тором, т. е. трехмерной коммутативной связной компактной группой Ли. Будем считать, что $S^1 = \{e^{i\varphi}\}$. Обозначим элементы $(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in S^1 \times S^1 \times S^1$ через ± 1 . Тогда многообразие $\mathbb{R}V$, определенное системой уравнений (3.5) в $\mathbb{RP}^5$, является факторгруппой $(S^1 \times S^1 \times S^1)/\{\pm 1\}$. Следовательно, многообразие $\mathbb{R}V$ изоморфно тору $S^1 \times S^1 \times S^1$. Осталось применить утверждение 7) предложения 2.4. Лемма доказана.

Из леммы 3.1 следует, что если $p \in G(2, 2, 2)$, то вещественная биквадрика (V_p, τ) является M -многообразием, т. е. выполняется равенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(V_p, \mathbb{F}_2).$$

ЛЕММА 3.2. Если $p \in G(1, 1, 1, 1, 2)$, то вещественная биквадрика (V_p, τ) является M -многообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку выполняется равенство (его можно вывести из п. 1.1)

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(V_p, \mathbb{F}_2) = 8,$$

то для доказательства леммы нужно установить следующее равенство:

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) = 8. \quad (3.7)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$2X_0^2 + X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0, \quad X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = 0. \quad (3.8)$$

Добавим к этой системе еще одно уравнение $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 1$. Тогда полученная система трех уравнений определяет в $\mathbb{R}^6$ многообразие $\widetilde{M}$, полная структура которого нам неизвестна, но в [6] доказано равенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(\widetilde{M}, \mathbb{F}_2) = 5.$$

(В статье [5] в качестве гипотезы утверждается, что это многообразие $\widetilde{M}$ диффеоморфно связной сумме пяти произведений $S^1 \times S^2$.)

Многообразие $\widetilde{M}$ является двулистным неразветвленным накрытием многообразия $\mathbb{R}V$, определенного системой (3.8) в $\mathbb{RP}^5$. Обозначим для краткости многообразие $\mathbb{R}V$ через M . Тогда для двулистного накрытия $\widetilde{M} \rightarrow M$ получаем длинную точную последовательность когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^0(\widetilde{M}) \rightarrow H^0(M) \xrightarrow{\omega} H^1(M) \rightarrow H^1(\widetilde{M}) \rightarrow H^1(M) \xrightarrow{\omega} H^2(M) \\ \rightarrow H^2(\widetilde{M}) \rightarrow H^2(M) \xrightarrow{\omega} H^3(M) \rightarrow H^3(\widetilde{M}) \rightarrow H^3(M) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где ω – характеристический класс накрытия $\widetilde{M} \rightarrow M$, гомоморфизм умножения на него также обозначается через ω . Из равенства $\dim H^1(\widetilde{M}) = 5$ и точной последовательности (3.9) вытекает неравенство

$$\dim H^1(M) \geq 3.$$

Применим теперь утверждение 8) предложения 2.4. Тогда получим неравенство

$$\dim H^1(\mathbb{R}V_p) \geq 3.$$

Из него следует неравенство

$$\dim H^*(\mathbb{R}V_p) \geq 8.$$

Применим неравенство Гарнака–Смита–Тома $\dim H^*(\mathbb{R}V_p) \leq \dim H^*(V_p) = 8$. Тогда получим равенство (3.5). Лемма доказана.

Заметим, что из уже доказанных утверждений теоремы 0.1 следует, что при

$$p \notin G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2)$$

вещественная биквадрика (V_p, τ) не является M -многообразием.

Пусть точки $p', p'' \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ такие, что вещественные части $\mathbb{R}V_{p'}, \mathbb{R}V_{p''}$ диффеоморфны многообразиям M'_3, M''_3 соответственно. Тогда вещественные биквадрики $(V_{p'}, \tau), (V_{p''}, \tau)$ являются M -многообразиями. Это утверждение вытекает из равенств

$$\dim H^*(M'_3, \mathbb{F}_2) = 8, \quad H^*(M''_3, \mathbb{F}_2) = 8,$$

которые проверяются из построения многообразий M'_3, M''_3 .

Таким образом, из лемм 3.1, 3.2 следует, что в принципе может реализоваться одна из следующих четырех возможностей:

- (a) $p', p'' \in G(2, 2, 2)$; (c) $p' \in G(1, 1, 1, 1, 2), p'' \in G(2, 2, 2)$;
 (b) $p', p'' \in G(1, 1, 1, 1, 2)$; (d) $p' \in G(2, 2, 2), p'' \in G(1, 1, 1, 1, 2)$.

Нужно показать, что фактически реализуется возможность (d).

Заметим, что для многообразий $M'_3 \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^5, M''_3 \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^5$ определены точные последовательности вида (3.9), где соответствующие классы когомологий ω', ω'' равны ограничению образующей группы $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^5)$ на многообразия M'_3, M''_3 соответственно.

ЛЕММА 3.3. *Выполняются равенства $(\omega')^2 = 0, (\omega'')^2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем рассуждение для класса когомологий ω' .

Если $p' \in G(2, 2, 2)$, то согласно лемме 3.1 многообразие M'_3 диффеоморфно произведению $S^1 \times S^1 \times S^1$. Тогда для любого класса когомологий $\omega \in H^1(S^1 \times S^1 \times S^1)$ выполняется равенство $\omega^2 = 0$.

Если $p' \in G(1, 1, 1, 1, 2)$, то из точной последовательности вида (3.9) для двулистного накрытия $\widetilde{M}'_3 \rightarrow M'_3$ и равенства $H^1(\widetilde{M}'_3) = 5$ следует, что гомоморфизм

$$\omega': H^1(M'_3) \rightarrow H^2(M'_3)$$

равен нулю. Поэтому, в частности, равен нулю квадрат $(\omega')^2$.

Рассуждение для класса когомологий ω'' аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Размерность ядра гомоморфизма умножения на ω' ,*

$$\omega': H^1(M'_3) \rightarrow H^2(M'_3),$$

равна 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего напомним определение многообразия M'_3 .

В трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ зафиксируем неособую вещественную двумерную квадрику K , множество вещественных точек которой $\mathbb{R}K$ является гиперboloидом. На квадрике K возьмем неособую вещественную кривую $D \subset K$ бистепени $(2, 3)$, причем такую, что множество вещественных точек $\mathbb{R}D \subset \mathbb{R}K$ имеет три компоненты связности D_1, D_2, D_3 , которые не гомологичны нулю на гиперboloиде $\mathbb{R}K$. Раздуем кривую D , тогда получим вещественное трехмерное алгебраическое многообразие $\widehat{V}$, на котором собственный прообраз $\widehat{K}$ квадрики K можно стянуть вдоль второго семейства прямых. Полученное вещественное алгебраическое многообразие обозначим через V . Оно будет вещественной биквадрикой (см. п. 1.2). Множество его вещественных точек $\mathbb{R}V$ является многообразием M'_3 .

Заметим, что можно так ориентировать компоненты D_1, D_2, D_3 , гиперboloид $\mathbb{R}K$ и прямые из двух семейств на нем, что индексы пресечения всех трех компонент D_1, D_2, D_3 с прямыми гиперboloида из двух семейств будут равны 0 и 1 соответственно (см. [3]).

После раздутия вещественной кривой $D \subset K$ и стягивания квадрики $\widehat{K}$ из топологических кривых D_1, D_2, D_3 получаются топологические поверхности (возможно, с особенностями) Π_1, Π_2, Π_3 . Они определяют классы гомологий

$$[\Pi_1], [\Pi_2], [\Pi_3] \in H_2(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2).$$

Сумма этих классов гомологий равна нулю, так как поверхности Π_1, Π_2, Π_3 получаются из полного прообраза гиперboloида $\mathbb{R}K$ после стягивания собственного прообраза $\mathbb{R}\widehat{K}$, а класс гомологий $[\mathbb{R}K] \in H_2(\mathbb{R}\mathbb{P}^3, \mathbb{F}_2)$ равен нулю. Других соотношений между классами гомологий $[\Pi_1], [\Pi_2], [\Pi_3] \in H_2(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2)$ не существует.

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ двойственные классы когомологий

$$[\Pi_1]^*, [\Pi_2]^*, [\Pi_3]^* \in H^1(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2).$$

Из леммы 3.3 следует, что достаточно доказать неравенства

$$\omega' \cdot \alpha_1 \neq 0, \quad \omega' \cdot \alpha_2 \neq 0, \quad \omega' \cdot \alpha_3 \neq 0. \quad (3.10)$$

Тогда утверждение леммы будет выполняться.

Поскольку поверхности Π_1, Π_2, Π_3 могут иметь особенности, рассмотрим собственные прообразы $\widehat{\Pi}_1, \widehat{\Pi}_2, \widehat{\Pi}_3$ поверхностей Π_1, Π_2, Π_3 при отображении $\sigma: \mathbb{R}\widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}V$. Поверхности $\widehat{\Pi}_1, \widehat{\Pi}_2, \widehat{\Pi}_3$ являются раздутиями кривых D_1, D_2, D_3 , их классы гомологий

$$[\widehat{\Pi}_1], [\widehat{\Pi}_2], [\widehat{\Pi}_3] \in H_2(\mathbb{R}\widehat{V}, \mathbb{F}_2)$$

независимы. Заметим, что поверхности $\widehat{\Pi}_1, \widehat{\Pi}_2, \widehat{\Pi}_3$ являются двумерными торами. Двойственные классы коомологий

$$[\widehat{\Pi}_1]^*, [\widehat{\Pi}_2]^*, [\widehat{\Pi}_3]^* \in H^1(\mathbb{R}\widehat{V}, \mathbb{F}_2)$$

обозначим через $\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3$ соответственно.

Гиперболоид $\mathbb{R}\widehat{K}$ при отображении $\sigma: \mathbb{R}\widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}V$ стягивается на прямую. Обозначим через $\beta \in H^1(\mathbb{R}\widehat{V}, \mathbb{F}_2)$ класс коомологий, двойственный классу коомологий $[\mathbb{R}\widehat{K}]$. Пересечения торов $\widehat{\Pi}_1, \widehat{\Pi}_2, \widehat{\Pi}_3$ с гиперболоидом $\mathbb{R}\widehat{K}$ обозначим через $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \widehat{D}_3$. Заметим, что выполняются равенства

$$\sigma(\widehat{D}_1) = D_1, \quad \sigma(\widehat{D}_2) = D_2, \quad \sigma(\widehat{D}_3) = D_3.$$

Поскольку кривые D_1, D_2, D_3 не гомологичны нулю в $\mathbb{R}V$, то кривые $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \widehat{D}_3$ не гомологичны нулю в $\mathbb{R}\widehat{V}$. Следовательно, выполняются равенства

$$\sigma^*(\alpha_1) = \widehat{\alpha}_1 + \beta, \quad \sigma^*(\alpha_2) = \widehat{\alpha}_2 + \beta, \quad \sigma^*(\alpha_3) = \widehat{\alpha}_3 + \beta, \quad (3.11)$$

так как ядро гомоморфизма $\sigma_*: H_2(\mathbb{R}\widehat{V}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_2(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2)$ порождено классом коомологий $[\mathbb{R}\widehat{K}]$.

Класс коомологий $\sigma^*(\omega')$ обозначим через $\widehat{\omega}'$. Из равенств (3.11) следует, что неравенства (3.10) равносильны неравенствам

$$\widehat{\omega}' \cdot (\widehat{\alpha}_1 + \beta) \neq 0, \quad \widehat{\omega}' \cdot (\widehat{\alpha}_2 + \beta) \neq 0, \quad \widehat{\omega}' \cdot (\widehat{\alpha}_3 + \beta) \neq 0. \quad (3.12)$$

Заметим теперь, что класс коомологий $\widehat{\omega}'$ равен сумме $[W]^* + \beta$, где W – прообраз общей плоскости $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^3$ при отображении $\mathbb{R}\widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^3$. Обозначим класс коомологий $[W]^* \in H^1(\mathbb{R}\widehat{V}, \mathbb{F}_2)$ через ψ . Тогда неравенства (3.12) можно переписать следующим образом:

$$(\psi + \beta) \cdot (\widehat{\alpha}_1 + \beta) \neq 0, \quad (\psi + \beta) \cdot (\widehat{\alpha}_2 + \beta) \neq 0, \quad (\psi + \beta) \cdot (\widehat{\alpha}_3 + \beta) \neq 0. \quad (3.13)$$

Так как суммы $\widehat{\alpha}_1 + \beta, \widehat{\alpha}_2 + \beta, \widehat{\alpha}_3 + \beta$ принадлежат пространству $\sigma^*(H^1(\mathbb{R}\widehat{V}, \mathbb{F}_2))$, то выполняются равенства

$$\beta \cdot (\widehat{\alpha}_1 + \beta) = 0, \quad \beta \cdot (\widehat{\alpha}_2 + \beta) = 0, \quad \beta \cdot (\widehat{\alpha}_3 + \beta) = 0.$$

Следовательно, неравенства (3.13) равносильны следующим неравенствам:

$$\psi \cdot (\widehat{\alpha}_1 + \beta) \neq 0, \quad \psi \cdot (\widehat{\alpha}_2 + \beta) \neq 0, \quad \psi \cdot (\widehat{\alpha}_3 + \beta) \neq 0. \quad (3.14)$$

Неравенства (3.14) означают, что одномерные циклы

$$W \cap \widehat{\Pi}_1 + W \cap \mathbb{R}\widehat{K}, \quad W \cap \widehat{\Pi}_2 + W \cap \mathbb{R}\widehat{K}, \quad W \cap \widehat{\Pi}_3 + W \cap \mathbb{R}\widehat{K}$$

не гомологичны нулю в $\mathbb{R}\widehat{V}$. Докажем, что первая сумма не гомологична нулю, для остальных сумм рассуждения аналогичны.

Кривая $W \cap \widehat{\Pi}_1$ является окружностью на торе $\widehat{\Pi}_1$, полученной раздутием точки из D_1 . Обозначим эту окружность через s . Пересечение $W \cap \mathbb{R}\widehat{K}$ будет коникой на гиперболоиде $\mathbb{R}\widehat{K}$, обозначим ее через k . Нам нужно показать, что кривые s, k не гомологичны друг другу. Заметим, что окружность s не пересекается с поверхностью $\widehat{\Pi}_2$, а индекс пересечения коники k с поверхностью $\widehat{\Pi}_2$ равен 1 в поле $\mathbb{F}_2$. Следовательно, выполняются неравенства (3.14). Лемма доказана.

Аналогично, но более просто доказывается следующая

ЛЕММА 3.5. *Размерность ядра гомоморфизма умножения на ω'' ,*

$$\omega'' : H^1(M_3'') \rightarrow H^2(M_3''),$$

равна 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы не будем проводить подробные рассуждения, а только отметим отличия от доказательства леммы 3.4.

Из построения многообразия M_3'' следует, что компонента D_1 устроена так же, как и раньше, а компоненты D_2, D_3 гомологичны нулю на гиперboloиде $\mathbb{R}K$ (см. [3]). Мы должны доказать вместо неравенств (3.10) равенства

$$\omega' \cdot \alpha_1 = 0, \quad \omega' \cdot \alpha_2 = 0, \quad \omega' \cdot \alpha_3 = 0. \quad (3.15)$$

Поскольку $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$, то достаточно установить два последних равенства из (3.15).

Так как кривые $\widehat{D}_2, \widehat{D}_3$ гомологичны нулю на гиперboloиде $\mathbb{R}\widehat{K} \subset \mathbb{R}\widehat{V}$, то выполняются равенства

$$\sigma^*(\alpha_2) = \widehat{\alpha}_2, \quad \sigma^*(\alpha_3) = \widehat{\alpha}_3.$$

Поэтому два последних равенства из (3.15) равносильны следующим равенствам:

$$\psi \cdot \widehat{\alpha}_2 = 0, \quad \psi \cdot \widehat{\alpha}_3 = 0,$$

а эти равенства означают, что одномерные циклы $W \cap \widehat{\Pi}_2, W \cap \widehat{\Pi}_3$ гомологичны нулю в $\mathbb{R}\widehat{V}$. Однако эти циклы получились раздутием четного числа точек на каждой из компонент D_2, D_3 . Следовательно, они гомологичны нулю на торах $\widehat{\Pi}_2, \widehat{\Pi}_3$, а поэтому гомологичны нулю на многообразии $\mathbb{R}\widehat{V}$. Лемма доказана.

Чтобы закончить доказательство теоремы 0.1, применим леммы 3.4, 3.5 к точным последовательностям вида (3.9) для многообразий M_3', M_3'' . Тогда получаем равенства

$$\dim H^1(\widetilde{M}_3', \mathbb{F}_2) = 3, \quad \dim H^1(\widetilde{M}_3'', \mathbb{F}_2) = 5.$$

Осталось заметить, что если $p' \in G(2, 2, 2)$, то $\dim H^1(\widetilde{\mathbb{R}V}_{p'}, \mathbb{F}_2) = 3$ (см. лемму 3.1). Если $p'' \in G(1, 1, 1, 1, 2)$, то $\dim H^1(\widetilde{\mathbb{R}V}_{p''}, \mathbb{F}_2) = 5$ (см. [6]). Тогда получаем, что реализуется последняя из четырех возможностей принадлежности топологических типов многообразий M_3', M_3'' жестким изотопическим классам вещественных биквадрик. Доказательство утверждений 8), 9) теоремы 0.1 закончено.

3.2. Доказательство основных предложений. Здесь мы будем доказывать по порядку предложения 0.2–0.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.2. Рассмотрим сначала многообразие в $\mathbb{RP}^5$, заданное системой уравнений

$$X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_0X_1 + X_2X_3 + X_4X_5 = 0.$$

Добавим к этой системе еще одно уравнение $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 2$. Тогда полученная система из трех уравнений эквивалентна системе

$$X_0^2 + X_2^2 + X_4^2 = 1, \quad X_1^2 + X_3^2 + X_5^2 = 1, \quad X_0X_1 + X_2X_3 + X_4X_5 = 0. \quad (3.16)$$

Система уравнений (3.16) задает множество пар векторов

$$\mathbf{e}_1 = (X_0, X_2, X_4), \quad \mathbf{e}_2 = (X_1, X_3, X_5)$$

в $\mathbb{R}^3$, которые имеют единичную длину и ортогональны. Пусть $\mathbf{e}_3$ – векторное произведение векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Тогда три вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определяют элемент группы $\mathrm{SO}(3)$. Таким образом, множество решений системы (3.16) совпадает с группой $\mathrm{SO}(3)$. Пусть

$$g: \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$$

– инволюция, которая умножает на -1 два первых столбца матрицы из $\mathrm{SO}(3)$. Тогда из предыдущих рассуждений вытекает

ЛЕММА 3.6. *Множество вещественных решений в $\mathbb{RP}^5$ системы*

$$X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_0X_1 + X_2X_3 + X_4X_5 = 0$$

диффеоморфно фактормногообразию $\mathrm{SO}(3)/\{1, g\}$, где $\{1, g\}$ – группа второго порядка, действующая на многообразии $\mathrm{SO}(3)$ по следующему правилу: инволюция

$$g: \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$$

умножает на -1 два первых столбца матрицы из $\mathrm{SO}(3)$.

Рассмотрим теперь многообразие в $\mathbb{RP}^5$, заданное системой уравнений

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_2X_3 + X_4X_5 = 0.$$

Добавим к этой системе еще одно уравнение $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 2$. Тогда полученная система из трех уравнений эквивалентна системе

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_4^2 = 1, \quad X_3^2 + X_5^2 = 1, \quad X_2X_3 + X_4X_5 = 0. \quad (3.17)$$

Система уравнений (3.17) задает множество пар векторов

$$\mathbf{e}_1 = (0, 0, X_3, X_5), \quad \mathbf{e}_2 = (X_0, X_1, X_2, X_4)$$

в $\mathbb{R}^4$, которые имеют единичную длину и ортогональны. Покажем, что множество таких пар векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ образует произведение $S^1 \times S^2$.

Пусть E – множество пар векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Рассмотрим сферу S^3 в $\mathbb{R}^4$, заданную уравнением $Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 = 1$. Векторы вида $\mathbf{e}_1$ образуют на этой сфере главную окружность S^1 . Для каждой фиксированной точки $\mathbf{e}_1 \in S^1$

векторы $\mathbf{e}_2$ образуют двумерную сферу $S^2(\mathbf{e}_1) \subset S^3$, ортогональную вектору $\mathbf{e}_1$. Тем самым получаем тривиальное расслоение $E \rightarrow S^1$. Следовательно, $E = S^1 \times S^2$.

Инволюция

$$(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \rightarrow (-X_0, -X_1, -X_2, -X_3, -X_4, -X_5)$$

действует на произведении $S^1 \times S^2$ отдельно по сомножителям следующим образом. На окружности S^1 она равна антиподальной инволюции, а на сфере S^2 она равна композиции отражения относительно экватора и антиподальной инволюции.

Из предыдущих рассуждений вытекает

ЛЕММА 3.7. *Множество вещественных решений системы в $\mathbb{RP}^5$*

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0, \quad X_2X_3 + X_4X_5 = 0$$

диффеоморфно многообразию $S^1 \times S^2$.

Заметим теперь, что предложение вытекает из лемм 3.6, 3.7, 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.3. Пусть $V_p \subset \mathbb{P}^5$ – вещественная биквадрика и $H \subset V_p$ – вещественное гиперплоское сечение биквадрики V_p . Тогда справедливо следующее утверждение (см. [11]): *биквадрика (V_p, τ) тогда и только тогда будет GM-многообразием, когда класс гомологий $[\mathbb{R}H] \in H_2(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю.* Рассмотрим двулистное накрытие $\widetilde{\mathbb{R}V_p} \rightarrow \mathbb{R}V_p$, индуцированное накрытием $S^5 \rightarrow \mathbb{RP}^5$. Класс гомологий $[\mathbb{R}H]$ равен нулю тогда и только тогда, когда накрытие $\widetilde{\mathbb{R}V_p} \rightarrow \mathbb{R}V_p$ тривиально. Из доказательства теоремы 0.1 видно, что накрытие $\widetilde{\mathbb{R}V_p} \rightarrow \mathbb{R}V_p$ тривиально тогда и только тогда, когда

$$p \in G(4) \cup G(6) \cup G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3).$$

Итак, утверждение 1) доказано. Утверждение 2) следует из лемм 3.1, 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.4. Если $V \subset \mathbb{P}^5$ – вещественная биквадрика, A – множество комплексных прямых на V , то A является вещественной абелевой поверхностью, но множество вещественных точек $\mathbb{R}A$ может быть пустым.

Рассмотрим тотальное пространство прямых на неособых комплексных биквадриках

$$\mathcal{A} = \{(p, l) \mid p \in \mathbb{G}^*, l \in A_p\}.$$

Оно является неособым 40-мерным вещественным алгебраическим многообразием. Проекция $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{G}^*$ является гладким проективным отображением. Рассмотрим ограничение этой проекции на вещественные точки $\pi_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{G}^*$. Тогда получаем, что множества $\mathbb{R}A_p$ для каждой точки $p \in \mathbb{R}\mathbb{G}^*$ из фиксированной компоненты связности диффеоморфны. Таким образом, справедлива

ЛЕММА 3.8. *Если вещественные биквадрики $V_{p'}, V_{p''}$ жестко изотопны, то топологические поверхности $\mathbb{R}A_{p'}, \mathbb{R}A_{p''}$ диффеоморфны.*

Пусть существует хотя бы одна вещественная прямая l на биквадрике V . Тогда множество вещественных точек $\mathbb{R}A$ на абелевой поверхности A состоит из нескольких топологических двумерных торов. Число таких торов может быть 1, 2, 4 (см. [12]). Следовательно, существует вещественная неспециальная прямая l на биквадрике V . Поэтому проекция $\pi_l: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ вещественная, если $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ – вещественное подпространство. Следовательно, многообразия D , K вещественные. Тогда изоморфизм между якобианом $J(D)$ и абелевой поверхностью A будет вещественным (см., например, конкретную конструкцию этого изоморфизма, изложенную в [8]). Число торов во множестве вещественных точек якобиана $J(D)$ равно 2^d , где

$$d = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(T, H_1(D, \mathbb{Z})) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(T, H_3(V, \mathbb{Z})), \quad (3.18)$$

$T = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка, порожденная вещественной структурой τ (см., например, [13]). Заметим, что канонический изоморфизм групп гомологий

$$H_1(D, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_3(V, \mathbb{Z})$$

антикоммутирует с инволюцией τ_* , но равенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(T, H_1(D, \mathbb{Z})) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(T, H_3(V, \mathbb{Z}))$$

все-таки выполняется (см., например, [13]).

Докажем утверждение 1) предложения. Если

$$p \in G(4) \cup G(6) \cup G(1, 1, 4) \cup G(1, 2, 3),$$

то многообразие (V_p, τ) не является ГМ-многообразием. Поэтому гиперплоское сечение $\mathbb{R}H$ гомологично нулю на $\mathbb{R}V_p$. Следовательно, на V_p не существует вещественных прямых.

Прежде чем доказать другие утверждения предложения, заметим, что на многообразиях M_0 , M_1 , M_2 , M'_3 , M''_3 имеются прямые. Поэтому из теоремы 0.1 и леммы 3.8 вытекает, что если

$$p \in G_0 \cup G_2 \cup G(1, 1, 2) \cup G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 1, 2),$$

то на многообразии $\mathbb{R}V_p$ имеются прямые. Множество этих прямых составляет объединение двумерных торов, число которых равно 2^d . Число d вычисляется по формуле (3.18).

Пусть $p \in G_0 \cup G_2$; тогда многообразие V_p является ГМ-многообразием. Поэтому выполняется равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) = 4 + \dim H^1(T, H_3(V_p, \mathbb{F}_2)). \quad (3.19)$$

Поскольку $\dim H_*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) = 4$, то

$$d = \dim H^1(T, H_3(V_p, \mathbb{Z})) = \frac{1}{2} \dim H^1(T, H_3(V_p, \mathbb{F}_2)) = 0.$$

Пусть $p \in G(1, 1, 2)$; тогда многообразие V_p является ГМ-многообразием. Поэтому выполняется равенство (3.19). Поскольку $\dim H_*(\mathbb{R}V_p, \mathbb{F}_2) = 6$, то

$$d = \dim H^1(T, H_3(V_p, \mathbb{Z})) = \frac{1}{2} \dim H^1(T, H_3(V_p, \mathbb{F}_2)) = 1.$$

Если $p \in G(2, 2, 2) \cup G(1, 1, 1, 2)$, то многообразие V_p является M -многообразием. Поэтому выполняются равенства

$$d = \dim H^1(T, H_3(V_p, \mathbb{Z})) = \frac{1}{2} \dim H^1(T, H_3(V_p, \mathbb{F}_2)) = \frac{1}{2} \dim H_3(V_p, \mathbb{F}_2) = 2.$$

Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.5. Из теоремы 0.1 и предложения 0.2 следует, что если $p \in G_2 \cup G(1, 2, 3)$, то многообразие $\mathbb{R}V_p$ диффеоморфно произведению $S^1 \times S^2$. Из теоремы 0.1 также следует, что, в принципе, могут быть диффеоморфны следующие пары вещественных биквадрик: M_0, M_1 и M'_3, M''_3 . Покажем, что этого не происходит.

Из предложения 0.2 следует, что для многообразия M_0 существует четырехлистное универсальное накрытие $S^3 \rightarrow M_0$. Для многообразия M_1 универсальное накрытие бесконечнолистное и имеет вид $\mathbb{R} \times S^2 \rightarrow M_1$. Следовательно, многообразия M_0, M_1 не диффеоморфны.

Из леммы 3.5 следует, что существует ненулевой класс когомологий $\omega'' \in H^1(M''_3, \mathbb{F}_2)$ такой, что гомоморфизм умножения на ω'' ,

$$\omega'' : H^1(M''_3, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(M''_3, \mathbb{F}_2),$$

тождественно равен нулю. Для многообразия $M'_3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ такого ненулевого класса когомологий не существует. Поэтому многообразия M'_3, M''_3 не диффеоморфны. Предложение доказано.

Список литературы

1. В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33**:5 (1978), 77–89; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Complex topological characteristics of real algebraic curves”, *Russian Math. Surveys*, **33**:5 (1978), 85–98.
2. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
3. А. И. Дегтярев, В. М. Харламов, “Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: du côté de chez Rokhlin”, *УМН*, **55**:4 (2000), 129–212; англ. пер.: A. I. Degtyarev, V. M. Kharlamov, “Topological properties of real algebraic varieties: du côté de chez Rokhlin”, *Russian Math. Surveys*, **55**:4 (2000), 735–814.
4. А. А. Аграчев, Р. В. Гамкредидзе, “Квадратичные отображения и гладкие вектор-функции: эйлеровы характеристики множеств уровня”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, **35**, ВИНТИ, М., 1989, 179–239; англ. пер.: A. A. Agrachev, R. V. Gamkrelidze, “Quadratic maps and smooth vector-valued functions: Euler characteristics of level sets”, *J. Soviet Math.*, **55**:4 (1991), 1892–1928.
5. S. López de Medrano, “Topology of the intersection of quadrics in $\mathbb{R}^n$ ”, *Algebraic topology* (Arcata, CA, 1986), Lecture Notes in Math., **1370**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 280–292.
6. C. T. C. Wall, “Stability, pencils and polytopes”, *Bull. London Math. Soc.*, **12**:6 (1980), 401–421.
7. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.

8. I. Dolgachev, *Topics in classical algebraic geometry*, www.math.lsa.umich.edu/~idolga/topics1.pdf.
9. M. Reid, *The complete intersection of two or more quadrics*, Cambridge Ph. D. thesis, Jun 1972; www.warwick.ac.uk/~masada/3folds/qu.pdf.
10. P. Muth, “Über reelle Äquivalenz aus Scharen reeller quadratischer Formen”, *J. für die reine und angew. Math. (Crelle)*, **128** (1905), 302–321.
11. В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM-многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Real algebraic GM-varieties”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 465–491.
12. A. Comessatti, “Sulle varietà abeliane reali”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **2**:1 (1925), 67–106.
13. В. А. Краснов, “Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий”, *Матем. заметки*, **32**:3 (1982), 365–374; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Albanese mapping for real algebraic varieties”, *Math. Notes*, **32**:3 (1982), 661–666.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
14.05.2008