Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Юхименко, Канонические произведения, порожденные возмущениями целочисленной последовательности, и их асимптотические оценки, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 5, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:52:16

УДК 517.547.2+517.538.2

А. А. Юхименко

Канонические произведения, порожденные возмущениями целочисленной последовательности, и их асимптотические оценки

Получены асимптотические оценки для канонических произведений с комплексными нулями вида $\lambda_n = n + o(n)$. Найдена формула для избытка системы экспонент $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$. Рассмотрены некоторые частные случаи последовательности $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: каноническое произведение, асимптотические оценки, медленно меняющаяся функция, избыток системы.

§ 1. Введение

При изучении аппроксимационных свойств систем экспонент в пространствах L^p на конечном интервале возникает потребность в точных оценках канонических произведений, нулевое множество которых имеет вид $\Lambda = \{\lambda_n = n + o(n), n \in \mathbb{Z}\}$. О таких канонических произведениях мы будем говорить, что они порождены последовательностью Λ ; обозначим их через $F_\Lambda(z)$. Если последовательность Λ дополнительно удовлетворяет условию

$$\text{v. p. } \sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n|=1}^N \frac{1}{\lambda_n} = \delta, \quad |\delta| < \infty,$$

то $F_\Lambda(z)$ имеет (с точностью до множителя $e^{\delta z}$) вид

$$F_\Lambda(z) = (z - \lambda_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \left(1 - \frac{z}{\lambda_{-n}}\right). \quad (1)$$

Хорошо известен следующий результат (см., например, [1]), относящийся к регулярным возмущениям целочисленной последовательности: если $\lambda_n = n + \Delta \operatorname{sign} n$, $\Delta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $|F_\Lambda(z)| \asymp |z|^{-2\Delta}$, $\operatorname{Im} z = 1$. В работе [2] был рассмотрен более общий случай

$$\lambda_n = n + \left(\Delta + \frac{\alpha}{\ln |n|}\right) \operatorname{sign} n, \\ n \neq 0, \pm 1, \quad \alpha, \Delta \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = -\lambda_{-1} = c,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00225а).

и получена следующая оценка:

$$|F_{\Lambda}(x)| \asymp |x|^{-2\Delta} \ln^{-2\alpha} |x|, \quad \text{dist}(x, \Lambda) > \varepsilon > 0.$$

В статье автора [3] была рассмотрена последовательность Λ еще более общего вида:

$$\lambda_n = n + (\Delta + l(|n|)) \text{sign } n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $l(t)$ – некоторая медленно меняющаяся, убывающая к нулю функция. Была найдена точная оценка для $F_{\Lambda}(z)$:

$$|F_{\Lambda}(z)| \asymp |z|^{-2\Delta} R(|z|), \quad \text{Im } z = 1, \quad R(t) = \exp\left(-2 \int_1^t \frac{l(u)}{u} du\right).$$

Эта оценка позволила получить следующий критерий полноты: если $1 < p \leq 2$, то для полноты системы $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в $L^p(-\pi, \pi)$ необходимо и достаточно, чтобы $R^q(t)/t \notin L^1(1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$.

Все три приведенные выше результата относятся к действительным возмущениям целочисленной последовательности. Для чисто мнимых возмущений долгое время был известен только один факт: если

$$\lambda_n = n + i\delta_n, \quad \delta_n \in \mathbb{R}, \quad |\delta_n| \leq C < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

то $|F_{\Lambda}(z)| \asymp 1$, $\text{Im } z = H$, $H > C$ (см., например, [1]).

А. М. Седлецким была доказана следующая теорема [4]: если

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = n + \Delta \text{sign } n + i\alpha \ln |n|, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \Delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

то

$$|F_{\Lambda}(x)| \asymp |x|^{\pi\alpha - 2\Delta}, \quad |x| > 2 + |\Delta|. \quad (3')$$

Этот результат позволил найти оценки снизу и сверху для избытков систем экспонент вида $\{e^{i(n+ih(|n|))}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (где $h(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$) в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$.

В настоящей статье рассмотрен более общий как по сравнению с (2), так и по сравнению с (3) случай:

$$\lambda_n = n + l(|n|) \text{sign } n + i h(|n|), \quad (4)$$

где $l(t)$ – произвольная правильно меняющаяся функция с монотонной производной, а $h(t)$ – некоторая вогнутая не слишком быстро растущая функция. Получена точная оценка для $F_{\Lambda}(z)$. С помощью этой оценки найдена формула для избытка системы экспонент $\{e^{i(n+ih(|n|))}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в $L^2(-\pi, \pi)$. Рассмотрены некоторые частные случаи функций $l(t)$ и $h(t)$.

§ 2. Основные определения, теоремы и обозначения

В статье используются следующие обозначения. В случае, когда найдутся числа c , C такие, что $0 < c \leq |F(z)|/|G(z)| \leq C < \infty$, $z \in B \subseteq \mathbb{C}$, будем записывать $|F(z)| \asymp |G(z)|$, $z \in B$. Обозначим $f(z) \doteq g(z)$, если $f(z) = O(1) + g(z)$, $z \in B \subseteq \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА А. Пусть последовательности Λ и M вещественны и отделены. Пусть $|\lambda_n - \mu_n| \leq \alpha_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где неотрицательные последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\alpha_{-n}\}_{n=1}^\infty$ не возрастают и $\sum \alpha_n/|n| < \infty$. Тогда если бесконечное произведение

$$\Phi(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\lambda_n| < R, |\mu_n| < R} \left(\frac{1 - \frac{z}{\mu_n}}{1 - \frac{z}{\lambda_n}} \right)$$

сходится в каждой точке прямой $\operatorname{Im} z = 1$, то на этой прямой $|\Phi(z)| \leq M < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти в [1, § 5.2, лемма 2, следствие 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [5, § 1.1]. Положительная функция $l(t)$ называется *медленно меняющейся* (на бесконечности), если она измерима на полуоси $[A, \infty]$, $A > 0$, и при всех $\lambda > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(\lambda t)}{l(t)} = 1.$$

Класс медленно меняющихся функций обозначается L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5, § 1.1]. Функция $R(x)$ называется *правильно меняющейся* на бесконечности, если она представима в виде

$$R(x) = x^\alpha l(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad l(x) \in L.$$

При этом α называют *порядком* функции $R(x)$. Класс правильно меняющихся функций порядка α обозначают через R_α .

ЛЕММА А. Пусть $f(t)$ – положительная и дифференцируемая на (a, ∞) функция. Если $f'(t)$ положительна и убывает или $f'(t)$ отрицательна и возрастает, то $f'(t) = O((1 + f(t))/t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f'(t)$ знакопостоянна и $|f'(t)| \downarrow 0$, то

$$|c| + |f(x)| \geq |f(x) - c| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| = \int_a^x |f'(t)| dt \geq (x - a)|f'(x)|. \quad (5)$$

Разделим неравенство (5) на x и получим требуемое.

ЛЕММА В [5, теорема 2.6]. Пусть $l(t) \in L$, а функция $f(t)$ определена на интервале (c, ∞) , $0 < c < \infty$, и $\int_c^\infty t^\rho f(t) dt < \infty$ при некотором $\rho > 0$. Тогда

$$\int_c^\infty f(t)l(xt) dt = l(x) \left(\int_c^\infty f(t) dt + o(1) \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА С [5, теорема 2.7]. Пусть функция $l(t) \in L$ ограничена на каждом конечном интервале из $\mathbb{R}_+$. Пусть функция $f(t)$ определена на интервале $(0, c)$, $0 < c < \infty$, и $\int_0^c t^{-\rho} f(t) dt < \infty$ при некотором $\rho > 0$. Тогда

$$\int_0^c f(t)l(xt) dt = l(x) \left(\int_0^c f(t) dt + o(1) \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА В [6]. Пусть функция $l(t) \in R_\alpha$, $\alpha \geq 0$, дифференцируема на интервале $(0, \infty)$ и $l'(t) = O(l(t)/t)$. Пусть функция $g(t)$ измерима на $[0, \infty)$ и обладает ограниченной производной в некоторой окрестности точки 1. Пусть также при некотором $\rho > 0$

$$\int_1^\infty |g(t)|t^{\alpha-1+\rho} dt < \infty, \quad \int_0^1 |g(t)|t^{\alpha-\rho} dt < \infty.$$

Тогда равномерно относительно $\varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)}{t - e^{i\varphi}} \right) l(xt) dt = l(x) \left(\int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{g(t)t^\alpha}{t - e^{i\varphi}} \right) dt + o(1) \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА С [1, § 4.3]. Пусть Λ – последовательность корней некоторой целой функции $F(z)$ экспоненциального типа, причем все корни различные. Пусть $h_F(\theta)$ – индикатор роста $F(z)$, причем $h_F(\pm\pi/2) \geq \pi$. Пусть также

$$\exists m > 0: \quad |F(x)| \geq \delta |x|^{-m}, \quad \delta > 0, \quad |x| > 1,$$

и $F(x) \notin L^2(\mathbb{R})$. Тогда система $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ полна в $L^2(-\pi, \pi)$.

ТЕОРЕМА D [1, § 2.3]. Пусть функция $F(z)$ аналитична и ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z| < H$. Пусть, кроме того, все нули $F(z)$ лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < h < H$, причем на прямой $\operatorname{Im} z = h$ модуль $F(z)$ отделен от нуля. Тогда для z , лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$ и вне кружков радиуса δ с центрами в нулях функции $F(z)$, верна оценка

$$|F(z)| \geq c(\delta) > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число s называется *избытком* полной системы в банаховом пространстве, если система остается полной после удаления из нее s точек, но становится неполной после удаления $s + 1$ точек.

§ 3. Возмущения по действительной оси

Пусть $\pm l(t) \in R_\alpha$, $t > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ (т.е. $l(t) = \pm t^\alpha s(t)$, $s(t) \in L$) и $l(t) = o(t)$. Составим последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_0 = 0, \lambda_n = n + l(n) \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_{-n} = -\lambda_n\}.$$

Обозначим через $\Lambda(t)$ считающую функцию последовательности $\Lambda \setminus \{0\}$, т.е. функцию, которая при $t > 0$ равна количеству членов Λ на промежутке $(0, t]$, а при $t < 0$ равна количеству членов Λ на $[t, 0)$ с противоположным знаком. В нашем случае $\Lambda(t)$ будет нечетной, поскольку $\lambda_{-n} = -\lambda_n$.

Пусть $\delta > 0$. Обозначим $\Omega_\delta(\Lambda) = \{z \in \mathbb{C}: |z - \lambda_n| \geq \delta \forall n \in \mathbb{Z}\}$. Если $s(t)$ дифференцируема, то можно ввести функцию

$$\varepsilon(t) = \frac{ts'(t)}{s(t)}.$$

Наша задача – найти асимптотику функции $F_\Lambda(z)$ на множестве $\Omega_\delta(\Lambda)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\pm l(t) \in R_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $l(t) = o(t)$, функция $l(t)$ дифференцируема и $l'(t)$ монотонна. При $\alpha = 1$ потребуем также, чтобы $-\varepsilon(t) \in L$. Тогда

$$\ln |F_\Lambda(z)| \doteq \pi |\operatorname{Im} z| + K_\alpha(z), \quad z \in \Omega_\delta(\Lambda),$$

где

$$K_0(z) = -2 \int_c^{|z|} \frac{l(t)}{t} dt + o(l(|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (6)$$

$$K_\alpha(z) = -l(|z|) \left(\pi \frac{\cos(\alpha(\frac{\pi}{2} - |\varphi|))}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)} + o(1) \right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (7)$$

$$K_1(x+i) = -\frac{\pi^2}{2} l(|x|) (s(|x|) - \varepsilon(|x|)) (1 + o(1)), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку мы рассматриваем только такие $l(t)$, что $l(t) = o(t)$, то в случае $\alpha = 1$ функция $s(t)$ должна стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$, а значит, функция $\varepsilon(t)$ не может принимать только положительные значения. Именно поэтому мы требуем, чтобы $-\varepsilon(t) \in L$, так как отсюда следует, что $\varepsilon(t) < 0$ при достаточно больших t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка (7) в случае $\alpha = 1$, $\varphi \rightarrow 0$ или $\varphi \rightarrow \pi$ дает лишь то, что $K_\alpha(z) = o(l(|z|))$. Поэтому мы рассматриваем в теореме 1 этот случай подробнее и получаем оценку (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Будем доказывать теорему в случае, когда $l(t) = t^\alpha s(t)$, $s(t) \in L$. Доказательство в случае $l(t) = -t^\alpha s(t)$ отличается только заменой знака при $s(t)$. Все оценки $|F_\Lambda(z)|$ сначала будем проводить на множестве $|\operatorname{Im} z| \geq 1$, а потом распространим их и на все $\Omega_\delta(\Lambda)$.

2) Поскольку $l(t) = o(t)$ и производная $l'(t)$ монотонна, по лемме А имеем $l'(t) = o(1)$. В силу того, что значения $l(t)$ на конечном интервале не влияют на асимптотику $F_\Lambda(z)$, можно считать, что $|l'(t)| < 1$, $t > 0$. Тогда функция $\lambda(t) := t + l(t)$ монотонна на $\mathbb{R}_+$, следовательно, можно определить функцию $\lambda^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, обратную к $\lambda(t)$. Из определения считающей функции ясно, что

$$\Lambda(t) = [\lambda^{-1}(t)],$$

где через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

Найдем теперь приближенное значение $\lambda^{-1}(t)$. Из условия $l(t) = o(t)$ следует, что

$$\lambda^{-1}(t) = t + o(t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (9)$$

При помощи этой грубой оценки получим более точную. Подставив $x = \lambda^{-1}(t)$ в уравнение $x = \lambda(x) - l(x)$, получим

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(\lambda^{-1}(t)) = t - l(t) + (l(t) - l(\lambda^{-1}(t))). \quad (10)$$

По теореме Лагранжа имеем

$$l(t) - l(\lambda^{-1}(t)) = l'(\xi(t))(t - \lambda^{-1}(t)),$$

где $\xi(t)$ – некоторая точка, лежащая между t и $\lambda^{-1}(t)$. Поэтому, пользуясь оценкой (9), заключаем, что

$$\xi(t) \sim t, \quad t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из убывания $|l'(t)|$, оценки (11) и леммы А следует, что

$$A(t) := l'(\xi(t)) = O\left(l'\left(\frac{t}{2}\right)\right) = O\left(\frac{l(t)+1}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В новых обозначениях перепишем (10) следующим образом:

$$\lambda^{-1}(t)(1 + A(t)) = t - l(t) + A(t)t.$$

Разделим левую и правую части последнего равенства на $1 + A(t)$ и воспользуемся оценкой (12):

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(t) + l(t) \frac{A(t)}{1 + A(t)} = t - l(t) + O\left(\frac{l^2(t) + l(t)}{t}\right) = t - l(t) + o(l(t)). \quad (13)$$

Обозначим для удобства $p(t) := t - \lambda^{-1}(t)$ и найдем оценку сверху для $p'(t)$:

$$\begin{aligned} p'(t) &= (t - \lambda^{-1}(t))' = 1 - \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(t))} = 1 - \frac{1}{1 + l'(\lambda^{-1}(t))} \\ &= l'(\lambda^{-1}(t))(1 + O(l'(\lambda^{-1}(t)))) = O\left(\frac{l(t)}{t}\right) = O\left(\frac{p(t)}{t}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Нам также понадобится следующая оценка, вытекающая из (13):

$$p(t) = l(t) \left(1 + O\left(\frac{1 + l(t)}{t}\right)\right). \quad (15)$$

3) Логарифмируя выражение (1) для $F_\Lambda(z)$ и переходя к интегралу Стильтеса, получаем

$$\begin{aligned} \ln |F_\Lambda(z)| &= \ln |z| + \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \ln \left(1 - \left(\frac{z}{t} \right)^2 \right) d\Lambda(t) \right) \\ &= \ln |z| + \operatorname{Re} \left(\ln \left(1 - \left(\frac{z}{t} \right)^2 \right) \Lambda(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2z^2}{t(z^2 - t^2)} \Lambda(t) dt \right), \\ &|\operatorname{Im} z| \geq 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\Lambda(R) = O(R)$ и $\Lambda(0) = 0$, имеем

$$\ln \left(1 - \left(\frac{z}{t} \right)^2 \right) \Lambda(t) \Big|_0^R \sim \frac{-\Lambda(R)z^2}{R^2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Выберем действительное число c следующим образом: $0 < c < \lambda_1$. Тогда

$$\ln |F_\Lambda(z)| = \ln |z| + \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z^2}{t(z^2 - t^2)} \Lambda(t) dt, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (16)$$

4) Покажем, что если в (16) заменить $\Lambda(t)$ на $\lambda^{-1}(t) - 1/2$, то при этом $\ln |F_\Lambda(z)|$ на множестве $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ изменится не более чем на $O(1)$. Пусть $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$, где $\{\cdot\}$ – стандартное обозначение для дробной части. Тогда

$$\psi(t) := \Lambda(t) - \left(\lambda^{-1}(t) - \frac{1}{2} \right) = [\lambda^{-1}(t)] - \left(\lambda^{-1}(t) - \frac{1}{2} \right) = \rho(\lambda^{-1}(t)).$$

Докажем ограниченность первообразной $\Psi(t)$ функции $\psi(t)$, т. е.

$$|\Psi(x)| = \left| \int_0^x \rho(\lambda^{-1}(t)) dt \right| \leq C, \quad x > 0.$$

Делая замену переменной $u = \lambda^{-1}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x \rho(\lambda^{-1}(t)) dt &= \int_{\lambda^{-1}(0)}^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) \lambda'(u) du = \int_{\lambda^{-1}(0)}^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) (1 + l'(u)) du \\ &= \int_{\lambda^{-1}(0)}^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) du + \int_{\lambda^{-1}(0)}^{\lambda^{-1}(x)} \rho(u) l'(u) du = I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Ясно, что $|I_1(x)| \leq 1/8$, а $I_2(x)$ сходится при $x \rightarrow +\infty$ по признаку Дирихле сходимости интеграла. Итак, $|\Psi(t)| < C$, $t > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_c^\infty \frac{2z^2}{t(z^2 - t^2)} \psi(t) dt \right| &= \left| O(1) + \int_c^\infty \left(-\frac{2}{t^2} + \frac{1}{(z-t)^2} + \frac{1}{(z+t)^2} \right) \Psi(t) dt \right| \\ &\leq A + C \int_c^\infty \frac{2dt}{t^2} + C \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} \leq D, \quad z = x + iy, \quad |y| \geq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано асимптотическое равенство

$$\ln |F_\Lambda(z)| \doteq \ln |z| + \operatorname{Re} \int_c^\infty \left(\lambda^{-1}(t) - \frac{1}{2} \right) \frac{2z^2}{t(z^2 - t^2)} dt, \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1. \quad (17)$$

Выразим $\lambda^{-1}(t)$ через $p(t)$ и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln |F_\Lambda(z)| &\doteq \ln |z| + \operatorname{Re} \int_c^\infty \left(t - p(t) - \frac{1}{2} \right) \frac{2z^2}{t(z^2 - t^2)} dt \\ &\doteq \ln |z| + I_1(z) + I_2(z) + I_3(z), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1, \\ I_1(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z^2}{z^2 - t^2} dt = \operatorname{Re} \left(z \ln \left(\frac{z+t}{z-t} \right) \Big|_c^\infty \right) \doteq \pi |\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C}, \\ I_2(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{z^2}{t(t^2 - z^2)} dt = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) \Big|_c^\infty \right) \doteq -\ln |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \\ I_3(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z^2}{t(t^2 - z^2)} p(t) dt = \int_{c/|z|}^\infty p(u|z|) \operatorname{Re} \frac{2e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} du; \end{aligned}$$

в последнем равенстве мы сделали замену переменной $u = t/|z|$.

5) Теперь для нахождения асимптотики функции $\ln |F_\Lambda(z)|$ остается оценить интеграл $I_3(z)$. Рассмотрим отдельно случаи $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$.

А) Сначала рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$. Из оценки (15) следует, что $p(t) \in R_\alpha$, кроме того, согласно оценке (14) имеем $p'(t) = O(p(t)/t)$, поэтому для функции $p(t)$ выполнены все условия теоремы В. Согласно этой теореме получаем

$$\begin{aligned} I_3(z) &\doteq \int_0^\infty p(u|z|) \operatorname{Re} \frac{2e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} du \\ &\doteq l(|z|)(1 + o(1)) \left(\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{2e^{2i\varphi} u^{\alpha-1}}{u^2 - e^{2i\varphi}} du + o(1) \right) \\ &\doteq -l(|z|) \left(\pi \frac{\cos(\alpha(\frac{\pi}{2} - |\varphi|))}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)} + o(1) \right), \quad |z| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В) Если $\alpha = 0$, то функции под интегралом, определяющим $I_3(z)$, перестают удовлетворять условиям теоремы В. В этом случае представим $I_3(z)$ в виде

$$\begin{aligned} I_3(z) &= \int_{c/|z|}^2 + \int_2^\infty \\ &= -2 \int_{c/|z|}^2 \frac{p(u|z|)}{u} du + \operatorname{Re} \int_{c/|z|}^2 \left(\frac{1}{u - e^{i\varphi}} + \frac{1}{u + e^{i\varphi}} \right) p(u|z|) du \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_2^\infty \frac{2e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} p(u|z|) du = J_1(z) + J_2(z) + J_3(z). \end{aligned}$$

Преобразуем $J_1(z)$, используя оценку (15):

$$\begin{aligned} J_1(z) &= -2 \int_{c/|z|}^2 \frac{p(u|z|)}{u} du \doteq -2 \int_1^{2|z|} \frac{l(t)(1 + O(\frac{1+l(t)}{t}))}{t} dt \\ &\doteq -2 \int_1^{2|z|} \frac{l(t)}{t} dt = -2 \int_1^{|z|} -2 \int_{|z|}^{2|z|} \\ &= -2 \int_1^{|z|} \frac{l(t)}{t} dt - l(\zeta) \ln 4 = -2 \int_1^{|z|} \frac{l(t)}{t} dt - (\ln 4 + o(1))l(|z|), \quad (18) \end{aligned}$$

где ζ – некоторое число из интервала $(|z|, 2|z|)$. Поскольку $p(t) \in L$, то, пользуясь леммой С, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{c/|z|}^2 \left(\frac{1}{u - e^{i\varphi}} + \frac{1}{u + e^{i\varphi}} \right) p(u|z|) du \\ \doteq p(|z|)(1 + o(1)) \operatorname{Re} \int_0^2 \left(\frac{1}{u - e^{i\varphi}} + \frac{1}{u + e^{i\varphi}} \right) du \\ = l(|z|)(1 + o(1)) \ln(4 - e^{2i\varphi}). \end{aligned} \quad (19)$$

Для оценки $J_3(z)$ применим теорему В:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_2^\infty \frac{2e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} p(u|z|) du &= p(|z|)(1 + o(1)) \operatorname{Re} \int_2^\infty \frac{2e^{2i\varphi}}{u(u^2 - e^{2i\varphi})} du \\ &= l(|z|)(1 + o(1))(\ln 4 - \ln(4 - e^{2i\varphi})). \end{aligned} \quad (20)$$

Суммируя равенства (18)–(20), получаем

$$I_3(z) \doteq -2 \int_1^{|z|} \frac{l(t)}{t} dt + o(l(|z|)).$$

Поскольку $l(|z|) = o(\int_c^{|z|} (l(t)/t) dt)$ (см., например, [5, с. 52]), главный член асимптотики функции $\ln |F_\Lambda(z)|$ нами найден.

С) Теперь рассмотрим случай $\alpha = 1$. Найдем производную функции $p(t)/t$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p(t)}{t} \right)' &= \left(1 - \frac{\lambda^{-1}(t)}{t} \right)' = \frac{1}{t^2} (-t(\lambda^{-1}(t))' + \lambda^{-1}(t)) \\ &= \frac{(1 + l'(\lambda^{-1}(t)))(t - l(t) + O(s(t))) - t}{t^2(1 + l'(\lambda^{-1}(t)))} = -\frac{s(t)(s(t) - \varepsilon(t))}{t}. \end{aligned} \quad (21)$$

Интегрируя $I_3(z)$ по частям и пользуясь оценкой (21), получаем

$$\begin{aligned} I_3(z) &= \operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z}{t^2 - z^2} z \frac{p(t)}{t} dt = \operatorname{Re} \int_c^\infty z \frac{p(t)}{t} d \ln \left| \frac{t - z}{t + z} \right| \\ &\doteq -\operatorname{Re} \int_c^\infty z \left(\frac{p(t)}{t} \right)' \ln \left| \frac{t - z}{t + z} \right| dt \doteq -\operatorname{Re} \int_0^\infty, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z = x + i. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $t = |z|u$, а потом воспользуемся оценкой (21):

$$\begin{aligned} I_3(z) &\doteq \operatorname{Re} \int_0^\infty s(u|z|)(s(u|z|) - \varepsilon(u|z|))(1 + o(1)) \frac{z}{u} \ln \left| \frac{u - e^{i\varphi}}{u + e^{i\varphi}} \right| du, \\ |z| &\rightarrow \infty, \quad z = x + i, \quad \varphi = \arg z. \end{aligned}$$

Поскольку сумма и произведение медленно меняющихся функций является медленно меняющейся функцией, то $s(t)(s(t) - \varepsilon(t)) \in L$. Поэтому к последнему интегралу можно применить теорему В:

$$\begin{aligned} I_3(z) &= |z| s(|z|)(s(|z|) - \varepsilon(|z|))(1 + o(1)) \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{e^{i\varphi}}{u} \ln \left| \frac{u - e^{i\varphi}}{u + e^{i\varphi}} \right| du \\ &= -l(|z|)(s(|z|) - \varepsilon(|z|))(1 + o(1)) \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{2e^{2i\varphi}}{u^2 - e^{2i\varphi}} \ln u du \\ &= -\frac{\pi^2}{2} l(|x|)(s(|x|) - \varepsilon(|x|))(1 + o(1)), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z = x + i, \quad \varphi = \arg z. \end{aligned}$$

6) Теперь, складывая оценки для $I_1(z)$, $I_2(z)$, $I_3(z)$ отдельно в случаях $\alpha = 0$, $0 < \alpha < 1$ и $\alpha = 1$, получаем

$$\ln |F_\Lambda(z)| \doteq \pi |\operatorname{Im} z| + K_\alpha(z), \quad |\operatorname{Im} z| \geq 1, \quad (22)$$

при $K_\alpha(z)$ соответственно из (6), (7) или (8). Остается показать, что эти оценки верны и на более широком множестве $\Omega_\delta(\Lambda)$. Рассмотрим функцию $F(z) = F_\Lambda(z)/F_\Lambda(z + 4i)$. В полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 2$ она аналитична и ограничена, поскольку

$$\left| \frac{1 - \frac{z}{\lambda_n}}{1 - \frac{z+4i}{\lambda_n}} \right|^2 = \frac{(\lambda_n - x)^2 + y^2}{(\lambda_n - x)^2 + (y+4)^2} = 1 - \frac{8(2+y)}{(\lambda_n - x)^2 + (y+4)^2} \leq 1, \quad |y| \leq 2.$$

Кроме того, все нули функции $F(z)$ действительные, и, как следует из оценки (22), на прямой $\operatorname{Im} z = 1$ модуль $F(z)$ отделен от нуля. Таким образом, выполнены все условия теоремы D, и, значит, в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ и вне кружков радиуса δ с центрами в точках последовательности Λ

$$1 \geq \left| \frac{F_\Lambda(z)}{F_\Lambda(z + 4i)} \right| \geq c(\delta) > 0.$$

Следовательно, оценка (22) верна всюду в $\Omega_\delta(\Lambda)$. Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Если в качестве $l(t)$ взять $t(\ln t)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, то $-\varepsilon(t) = \alpha/\ln t \in L$. Поэтому выполнены условия теоремы 1 и верна асимптотика

$$\ln |F_\Lambda(x)| = -\frac{\pi^2}{2} \frac{|x|}{\ln^\alpha |x|} \left(\frac{1}{\ln^\alpha |x|} + \frac{\alpha}{\ln |x|} \right) (1 + o(1)), \quad |x - \lambda_n| \geq \delta > 0.$$

Теорема 1 в случае, когда $|l(t)|$ – возрастающая функция, дает только главный член асимптотики $\ln |F_\Lambda(z)|$, но в частном случае $l(t) = \Delta t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\Delta \in \mathbb{R}$, можно получить гораздо более точные оценки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l(t) = \Delta t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\Delta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\ln |F_\Lambda(z)| \doteq -\Delta \sum_{k=0}^n S_k(z), \quad n = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \right],$$

где

$$S_k(z) = \begin{cases} (-\alpha\Delta)^k \cdot 2 \ln |z|, & \alpha = \frac{k}{k+1}, \\ (-\alpha\Delta)^k \cdot \pi \frac{\cos((\frac{\pi}{2} - |\varphi|)(\alpha + k(\alpha - 1)))}{\sin(\frac{\pi}{2}(\alpha + k(\alpha - 1)))} |z|^{\alpha+k(\alpha-1)}, & \alpha \neq \frac{k}{k+1}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (13) следует, что $\lambda^{-1}(t) = t - \Delta t^\alpha + O(t^{2\alpha-1})$. Подставим это выражение для $\lambda^{-1}(t)$ в правую часть тождества

$$\lambda^{-1}(t) = t - \Delta t^\alpha + (l(t) - l(\lambda^{-1}(t))),$$

получим

$$\lambda(t) = t - \Delta t^\alpha + \Delta t^\alpha (1 - (1 - \Delta t^{\alpha-1} + O(t^{2\alpha-2}))^\alpha) = t - \Delta t^\alpha + \alpha \Delta^2 t^{2\alpha-1} + O(t^{3\alpha-2}).$$

Повторение этой процедуры еще $n - 1$ раз даст нам следующую формулу:

$$\lambda^{-1}(t) = t - \Delta \sum_{k=0}^n (-\alpha\Delta)^k t^{\alpha+k(\alpha-1)} + O(t^{\alpha+(n+1)(\alpha-1)}).$$

Число n из формулировки теоремы является минимальным из целых неотрицательных чисел k таких, что $\alpha + (k+1)(\alpha-1) < 0$. Подставляя найденное значение для $\lambda^{-1}(t)$ в (17) и пользуясь формулой

$$\operatorname{Re} \int_c^\infty \frac{2z^2}{t(t^2 - z^2)} t^\beta dt \doteq \begin{cases} -\pi \frac{\cos(\beta(\frac{\pi}{2} - |\varphi|))}{\sin(\frac{\pi}{2}\beta)} |z|^\beta, & 0 < \beta < 1, \\ -2 \ln |z|, & \beta = 0, \end{cases} \quad |z| \rightarrow \infty,$$

получаем оценку из формулировки теоремы.

§ 4. Комплексные возмущения

Рассмотрим теперь более общий случай комплексных возмущений целочисленной последовательности. Пусть $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – некоторая дифференцируемая вогнутая функция и $h(t) = O(t^\beta)$, $\beta < 1$, а $l(t)$ – функция из теоремы 1. Составим последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_0 = 0, \lambda_n = n + l(|n|) \operatorname{sign} n + i h(|n|) \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Мы будем искать асимптотику функции $F_\Lambda(z)$ на действительной оси. Способ нахождения этой асимптотики в значительной степени зависит от параметра β . При $\beta < 1/2$ никакие дополнительные условия для функций $h(t)$ и $l(t)$ не налагаются, но при более сильном росте $h(t)$ для оценок требуются значительные ограничения, налагаемые на характер этого роста.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – дифференцируемая вогнутая функция и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $h(t) = O(t^\beta)$, $\beta < 1/2$ и $l(t)$ – функция из теоремы 1;
- 2) $h(t) \in R_\beta$, $1/2 \leq \beta < 1$, $l(t)$ – вогнутая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1, и вогнутой является положительная функция $f(t)$, заданная уравнением

$$(t + l(t))^2 + h^2(t) = (t + l(t) + f(t))^2. \quad (23)$$

Тогда

$$\ln |F_\Lambda(x)| \doteq \pi h(|x|) \left(1 + O\left(\frac{h(|x|)}{|x|} \ln |x| \right) \right) + K_\alpha(x), \quad |x| > 1, \quad (24)$$

где $K_\alpha(x)$ в зависимости от α задано выражением (6), (7) или (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Поскольку по условию $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $h(t)$ – вогнутая функция, то $\inf_{t \in (1, \infty)} h(t) = c > 0$. Для удобства положим $c > 1$. В силу специфики метода непрерывная на $(1/2, \infty)$ подынтегральная функция в следующем ниже выражении (26) представляется в виде разности функций, каждая из которых имеет особенность на $(1/2, \infty)$. Поэтому мы будем искать асимптотику функции $F_\Lambda(z)$ не на действительной оси, а на прямой $\operatorname{Im} z = -1$. Мы докажем, что

$$\ln |F_\Lambda(z)| \doteq \pi h(|z|) \left(1 + O\left(\frac{h(|z|)}{|z|} \ln |z| \right) \right) + K_\alpha(z), \quad \operatorname{Im} z = -1. \quad (25)$$

Однако очевидно, такая же оценка верна (в силу вогнутости $h(t)$) и для функции $F_{\Lambda-i}(z)$, поэтому

$$|F_\Lambda(x - i)| \asymp |F_{\Lambda-i}(x - i)|.$$

Вместе с тем имеем

$$\frac{|F_{\Lambda-i}(x - i)|}{|F_\Lambda(x)|} = \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| 1 + \frac{i}{\lambda_n - i} \right| < \infty.$$

Таким образом, $|F_\Lambda(x - i)| \asymp |F_\Lambda(x)|$, значит, из оценки (25) следует (24).

2. Обозначим для удобства

$$n(t) = \begin{cases} [t], & \text{если } t \geq 0, \\ -[|t|], & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $\ln |F_\Lambda(z)|$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \ln |F_\Lambda(z)| &= \ln |z| + \operatorname{Re} \operatorname{v. p.} \int_{\mathbb{R} \setminus (-1/2, 1/2)} \ln \left(1 - \frac{z}{t + l(|t|) \operatorname{sign} t + ih(|t|)} \right) dn(t) \\ &= \ln |z| + \operatorname{Re} \int_{1/2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t + l(t))^2 + h^2(t)} - \frac{z^2}{(t + l(t))^2 + h^2(t)} \right) dn(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом: $\ln |F_\Lambda(z)| = I(z) + J(z)$, где

$$\begin{aligned} I(z) &= \operatorname{Re} \int_{1/2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t + l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right) dn(t), \\ J(z) &= \ln |z| + \operatorname{Re} \int_{1/2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{(t + l(t))^2 + h^2(t)} \right) dn(t). \end{aligned}$$

Найдем оценку сверху для функции $f(t)$ из формулировки теоремы. Извлекая корень из обеих частей равенства (23) и применяя к функции $h(t)$ лемму А, получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= (t + l(t)) \left(\left(1 + \frac{h^2(t)}{(t + l(t))^2} \right)^{1/2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{h^2(t)}{t + l(t)} (1 + o(1)) = O(t^{2\beta-1}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Если выполнено условие 1) из формулировки теоремы, то, пользуясь (27) и условием $\beta < 1/2$, а также теоремой А и теоремой 1, находим, что на прямой $\operatorname{Im} z = -1$ выполнено

$$\begin{aligned} J(z) &= \ln \left| z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n + l(n) + O(n^{2\beta-2})} \right)^2 \right) \right| \\ &\doteq \ln \left| z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n + l(n)} \right)^2 \right) \right| \doteq K_\alpha(z). \end{aligned}$$

Если выполнено условие 2) из формулировки теоремы, то функция $l(t) + f(t)$ является вогнутой и правильно меняющейся, а значит, к ней применима теорема 1:

$$J(z) = \ln \left| z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n + l(n) + f(n)} \right)^2 \right) \right| \doteq O \left(\frac{h^2(|z|)}{|z|} \right) + K_\alpha(z), \quad \operatorname{Im} z = -1.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\ln |F_\Lambda(z)| \doteq K_\alpha(z) + I(z) + O \left(\frac{h^2(|z|)}{|z|} \right), \quad \operatorname{Im} z = -1. \quad (28)$$

3. Из выражений (6)–(8) видно, что значение $K_\alpha(z)$, $0 \leq \alpha < 1$, определено с точностью до $o(l(|z|))$, а $K_1(z)$ – до $o(l(|z|)(s(|z|) - \varepsilon(|z|)))$, где $\varepsilon(t) \in L$. Поэтому с такой же точностью нам можно искать значение $I(z)$. Мы докажем, что

$$I(z) \doteq \pi h(|z|) \left(1 + O\left(\frac{h(|z|)}{|z|} \ln |z| \right) \right) + O\left(\frac{l(|z|)h(|z|)}{|z|} \right), \quad \operatorname{Im} z = -1. \quad (29)$$

Однако $h(|z|)/|z| = O(|z|^{\beta-1})$, $\beta < 1$, значит,

$$\frac{l(|z|)h(|z|)}{|z|} = o(l(|z|)(s(|z|) - \varepsilon(|z|)))$$

при любом $\varepsilon \in L$. Это вместе с соотношениями (29) и (28) даст (25).

Перейдем к доказательству (29). Интегрируя $I(z)$ по частям, получим

$$\begin{aligned} I(z) &= \operatorname{Re} \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right) n(t) \Big|_{1/2}^\infty \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{1/2}^\infty \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)' n(t) dt \\ &= -\operatorname{Re} \int_{1/2}^\infty \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)' \left(n(t) - \left(t - \frac{1}{2} \right) \right) dt \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{1/2}^\infty \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)' \left(t - \frac{1}{2} \right) dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь ограниченностью первообразной $\Psi(t)$ функции $\psi(t) = n(t) - (t - 1/2)$, покажем, что

$$\int_{1/2}^\infty \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)' \psi(t) dt = O(1), \quad \operatorname{Im} z = -1. \quad (31)$$

Снова интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{1/2}^\infty \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)' \psi(t) dt \right| \\ &\leq \left| \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)' \Psi(t) \right|_{1/2}^\infty \\ &\quad + \int_{1/2}^\infty \left| \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t+l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)'' \right| dt \\ &\leq \int_{1/2}^\infty \left| \ln \left(1 - \frac{z}{-t-l(t)+ih(t)} \right)'' \right| dt + \int_{1/2}^\infty \left| \ln \left(1 - \frac{z}{t+l(t)+ih(t)} \right)'' \right| dt \\ &\quad + \int_{1/2}^\infty \left| \ln \left(1 - \frac{z^2}{(t+l(t))^2 + h^2(t)} \right)'' \right| dt. \end{aligned}$$

Покажем, что первый из полученных интегралов есть $O(1)$ (доказательство для остальных проводится аналогично):

$$\begin{aligned}
 & \int_{1/2}^{\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{z}{t + l(t) + ih(t)} \right) \right|'' dt \\
 & \leq \int_{1/2}^{\infty} \left| \frac{l''(t) + ih''(t)}{t + l(t) + ih(t) - z} - \frac{l''(t) + ih''(t)}{t + l(t) + ih(t)} \right| dt \\
 & \quad + \int_{1/2}^{\infty} \left| (1 + l'(t) + ih'(t))^2 \left(\frac{1}{(t + l(t) + ih(t))^2} - \frac{1}{(t + l(t) + ih(t) - z)^2} \right) \right| dt \\
 & \leq 2 \int_{1/2}^{\infty} |l''(t)| dt + 2 \int_{1/2}^{\infty} |h''(t)| dt + C \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t + l(t) - x)^2 + 1} \\
 & \quad + C \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t + l(t))^2 + 1} = O(1).
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $h'(t)$, $|l'(t)| \downarrow 0$. Таким образом, доказано соотношение (31). Поэтому, пользуясь (30), заключаем, что

$$\begin{aligned}
 I(z) & \doteq -\operatorname{Re} \int_{1/2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t + l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right)' \left(t - \frac{1}{2} \right) dt \\
 & \doteq \operatorname{Re} \int_{1/2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2izh(t)}{(t + l(t))^2 + h^2(t) - z^2} \right) dt, \quad \operatorname{Im} z = -1. \quad (32)
 \end{aligned}$$

4. Введем новую функцию

$$\lambda(t) = \sqrt{(t + l(t))^2 + h^2(t)} = t + o(t), \quad t > 0.$$

Оценим ее производную:

$$\begin{aligned}
 \lambda'(t) & = \frac{(t + l(t))(1 + l'(t)) + h(t)h'(t)}{\sqrt{(t + l(t))^2 + h^2(t)}} \\
 & = \frac{1 + l'(t)}{\sqrt{1 + \frac{h^2(t)}{(t + l(t))^2}}} + \frac{h(t)h'(t)}{\sqrt{(t + l(t))^2 + h^2(t)}} = 1 + l'(t) + O\left(\frac{h^2(t)}{t^2}\right), \quad t > 0.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь мы воспользовались леммой A, согласно которой $h'(t) = O(h(t)/t)$. Обозначим $\tilde{h}(t) := h(\lambda^{-1}(t)) = h(t + o(t)) = O(t^\beta)$. Деля в (32) замену переменной $u = \lambda(t)$, получим

$$\begin{aligned}
 I(z) & \doteq \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2iz\tilde{h}(u)}{u^2 - z^2} \right) d\lambda^{-1}(u) \doteq \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2iz\tilde{h}(u)}{u^2 - z^2} \right) (\lambda^{-1}(u))' du, \\
 & \quad \operatorname{Im} z = -1.
 \end{aligned}$$

5. Найдём оценку действительной части подынтегральной функции в последнем интеграле. Пусть $z = \tilde{x} - i$; тогда

$$\begin{aligned}
 \ln \left| 1 + \frac{2iz\tilde{h}(u)}{u^2 - z^2} \right| & = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(u^2 - \tilde{x}^2 + 1 + 2\tilde{h}(u))^2 + (2\tilde{h}(u)\tilde{x} + 2\tilde{x})^2}{(u^2 - \tilde{x}^2 + 1)^2 + (2\tilde{x})^2} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}(u)(u^2 + \tilde{x}^2) + \tilde{h}^2(u)\tilde{x}^2 + \tilde{h}(u) + \tilde{h}^2(u)}{\tilde{x}^2 + \frac{1}{4}(u^2 - \tilde{x}^2 + 1)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Видно, что полученное выражение четно относительно $\tilde{x}$, поэтому можно считать, что $\tilde{x} > 0$. Для удобства положим $\tilde{x} = \sqrt{x^2 + 1}$, $x > 0$; тогда

$$\ln \left| 1 + \frac{2iz\tilde{h}(u)}{u^2 - z^2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}(u)(u^2 + x^2) + \tilde{h}^2(u)x^2}{x^2 + 1 + \frac{1}{4}(u^2 - x^2)^2} \right) + O\left(\frac{\tilde{h}(u)}{u^2 + 1}\right).$$

Пользуясь тем, что $\tilde{h}(u) = O(u^\beta)$, $\beta < 1$, заключаем, что интеграл от последнего слагаемого ограничен константой, не зависящей от x . Поэтому

$$I(z) \doteq \frac{1}{2} \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}(u)(u^2 + x^2) + \tilde{h}^2(u)x^2}{x^2 + 1 + \frac{1}{4}(u^2 - x^2)^2} \right) (\lambda^{-1}(u))' du, \quad \text{Im } z = -1.$$

Сделаем замену переменной $t = u - x$. Получим

$$I(z) \doteq \frac{1}{2} \int_{-x}^\infty \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}(t+x)\left(\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{t}{x} + 2\right) + \tilde{h}^2(t+x)}{1 + \frac{1}{x^2} + (t(1 + \frac{t}{2x}))^2} \right) (\lambda^{-1}(u))'|_{t+x} dt, \\ \text{Im } z = -1.$$

Покажем теперь, что существенный вклад в асимптотику интеграла $I(z)$ вносит лишь та часть подынтегральной функции, которая расположена на интервале $(-x/2, x/2)$. Разобьем весь луч, по которому ведется интегрирование, на три множества: $(-x, -x/2) \cup (x/2, x)$, $(-x/2, x/2)$, (x, ∞) . Заметим, что при $t \in (-x, -x/2) \cup (x/2, x)$ знаменатель под знаком логарифма имеет порядок x^2 , а числитель не превышает $\tilde{h}^2(2x)$ и длина пути интегрирования – порядка x , поэтому интеграл по этому множеству равен $O(\tilde{h}^2(x)/x)$. Теперь рассмотрим интеграл по лучу (x, ∞) , он мажорируется величиной

$$\int_x^\infty \ln \left(1 + \frac{20t^2\tilde{h}(2t) + 4x^2\tilde{h}^2(2t)}{t^4} \right) dt \leq 20 \int_x^\infty \frac{\tilde{h}(2t)}{t^2} dt + \frac{4}{x} \int_1^\infty \frac{\tilde{h}^2(ux)}{u^4} du.$$

Первый из полученных интегралов есть $o(1)$ (поскольку $\tilde{h}(t) = O(t^\beta)$, $\beta < 1$). Второй интеграл в случае, когда выполнено условие 1) теоремы, есть $O(1)$, а когда выполнено условие 2) – $O(h^2(x)/x)$ (по лемме B). Итак, мы показали, что

$$I(z) \doteq O\left(\frac{h^2(x)}{x}\right) + \frac{1}{2} \int_{-x/2}^{x/2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}(t+x)\left(\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{t}{x} + 2\right) + \tilde{h}^2(t+x)}{1 + \frac{1}{x^2} + (t(1 + \frac{t}{2x}))^2} \right) (\lambda^{-1}(u))'|_{t+x} dt.$$

6. Пользуясь оценкой (33), находим

$$(\lambda^{-1}(u))' = \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(u))} = 1 - l'(\lambda^{-1}(u)) + O\left(\frac{h^2(u)}{u^2}\right), \quad u > 0.$$

Поэтому при $t \in (-x/2, x/2)$ и достаточно больших x имеем

$$\begin{aligned} (\lambda^{-1}(u))'|_{t+x} &= 1 - l'(\lambda^{-1}(t+x)) + O\left(\frac{h^2(t+x)}{(t+x)^2}\right) \\ &= 1 + O\left(l'\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + x\right)\right)\right) + O\left(\frac{h^2(x)}{x^2}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{l(x)}{x}\right) + O\left(\frac{h^2(x)}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} I(z) &\doteq O\left(\frac{h^2(x)}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + O\left(\frac{l(x)}{x}\right) + O\left(\frac{h^2(x)}{x^2}\right)\right)H(x), \quad \text{Im } z = -1, \\ H(x) &= \int_{-x/2}^{x/2} \ln\left(1 + \frac{\tilde{h}(t+x)\left(\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{t}{x} + 2\right) + \tilde{h}^2(t+x)}{1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2}\right) dt. \end{aligned} \quad (34)$$

В последующих выкладках мы будем пользоваться неравенством $|\ln(1+t)| \leq 2|t|$, $t > -1/2$, и оценками

$$\begin{aligned} |\tilde{h}^2(t+x) - \tilde{h}^2(x)| &\leq 2h(2x)|h(\lambda^{-1}(t+x)) - h(\lambda^{-1}(x))| \\ &\leq 2h(2x)h'\left(\frac{x}{2}\right)|\lambda^{-1}(t+x) - \lambda^{-1}(x)| \leq 2h(2x)h'\left(\frac{x}{2}\right)|t| \\ &= |t|O\left(\frac{h^2(x)}{x}\right), \quad |t| \leq \frac{x}{2}, \\ \tilde{h}(t+x)\left(\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{t}{x} + 2\right) &= O(\tilde{h}(x)), \quad t \in \left(-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \ln\left(1 + \frac{\tilde{h}(t+x)\left(\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{t}{x} + 2\right) + \tilde{h}^2(t+x)}{1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2}\right) \right| \\ &= \left| \ln\left(1 + \frac{(\tilde{h}^2(t+x) - \tilde{h}^2(x)) + \tilde{h}(t+x)\left(\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{t}{x} + 2\right)}{1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2 + \tilde{h}^2(x)}\right) \right| \\ &\leq C \frac{\frac{h^2(x)}{x}|t| + \tilde{h}(x)}{1 + \frac{t^2}{4} + \tilde{h}^2(x)}. \end{aligned}$$

Значит, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| H(x) - \int_{-x/2}^{x/2} \ln\left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2}\right) dt \right| &\leq C \int_{-x/2}^{x/2} \frac{\frac{h^2(x)}{x}|t| + \tilde{h}(x)}{1 + \frac{t^2}{4} + \tilde{h}^2(x)} dt \\ &\doteq O\left(\frac{h^2(x)}{x} \ln x\right), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Поэтому получаем

$$H(x) \doteq O\left(\frac{h^2(x)}{x} \ln x\right) + \int_{-x/2}^{x/2} \ln\left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2}\right) dt.$$

При $t \in (-x/2, x/2)$ имеем

$$\begin{aligned} &\left| \ln\left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + t^2}\right) \right| \\ &= \left| \ln\left(1 - \frac{\tilde{h}^2(x)\left(\frac{t^3}{x} + \frac{t^4}{4x^2}\right)}{(1 + t^2 + \tilde{h}^2(x))(1 + \left(t\left(1 + \frac{t}{2x}\right)\right)^2)}\right) \right| \leq C \frac{\tilde{h}^2(x)}{x} \frac{|t|^3}{1 + \frac{t^4}{4}}. \end{aligned}$$

Поэтому выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{-x/2}^{x/2} \left| \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + (t(1 + \frac{t}{2x}))^2} \right) - \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + t^2} \right) \right| dt \\ & \leq C \int_{-x/2}^{x/2} \frac{\tilde{h}^2(x)}{x} \frac{|t|^3}{1 + \frac{t^4}{4}} dt = O\left(\frac{h^2(x)}{x} \ln x\right), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$H(x) \doteq O\left(\frac{h^2(x)}{x} \ln x\right) + \frac{1}{2} \int_{-x/2}^{x/2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + t^2} \right) dt. \quad (35)$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-x/2}^{x/2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + t^2} \right) dt \\ & = \frac{t}{2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{h}^2(x)}{1 + t^2} \right) \Big|_{-x/2}^{x/2} + \int_{-x/2}^{x/2} \frac{\tilde{h}^2(t) t^2 dt}{(1 + t^2)(1 + t^2 + \tilde{h}^2(x))} \\ & \doteq \tilde{h}^2(x) \int_0^{x/2} \frac{2t^2 dt}{(1 + t^2)(1 + t^2 + \tilde{h}^2(x))} \\ & \doteq 2\tilde{h}^2(x) \int_0^{x/2} \left(\frac{1}{1 + t^2 + \tilde{h}^2(x)} - \frac{1}{(1 + t^2)(1 + t^2 + \tilde{h}^2(x))} \right) dt \\ & \doteq \int_0^{x/2} \frac{2\tilde{h}^2(x) dt}{1 + t^2 + \tilde{h}^2(x)} \doteq 2\tilde{h}(x) \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\tilde{h}(x)} \right) \\ & \doteq \left(h(x) + O\left(h'\left(\frac{x}{2}\right)l(x)\right) \right) \left(\pi + O\left(\frac{\tilde{h}(x)}{x}\right) \right) \\ & \doteq \pi h(x) + O\left(\frac{h(x)l(x)}{x}\right) + O\left(\frac{h^2(x)}{x}\right), \quad x > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Из оценок (34)–(36) следует, что

$$\begin{aligned} I(z) & \doteq O\left(\frac{h^2(x)}{x}\right) + \left(1 + O\left(\frac{l(x)}{x}\right) + O\left(\frac{h^2(x)}{x^2}\right)\right) \\ & \quad \times \left(O\left(\frac{h^2(x)}{x} \ln x\right) + \pi h(x) + O\left(\frac{h(x)l(x)}{x}\right)\right) \\ & \doteq \pi h(x) \left(1 + O\left(\frac{h(x)}{x} \ln x\right)\right) + O\left(\frac{h(x)l(x)}{x}\right), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Теперь для того, чтобы получить (29), достаточно заметить, что $l(|z|) \doteq l(x)$ и $h(|z|) \doteq h(x)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Оценка (24) справедлива и для канонического произведения с нулями более общего вида:

$$M = \{\mu_0 = 0, \mu_n = n + l(n) + i h_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

где $|h_n| = h(|n|)$, $h(t)$ – функция из теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия вытекает из того, что

$$\left| 1 - \frac{x}{n + l(|n|) \operatorname{sign} n + i h_n} \right| = \left| 1 - \frac{x}{n + l(|n|) \operatorname{sign} n + i h(|n|)} \right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 согласуется с оценкой (3').

§ 5. Избытки систем экспонент в $L^2(-\pi, \pi)$

Пусть последовательность $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ такова, что $|h_n| = h(|n|)$, где $h(t)$ – функция из п. 1) теоремы 3. Другими словами, $h_n \in \{h(|n|), -h(|n|)\}$. Пусть

$$\Lambda = \{\lambda_0 = 0, \lambda_n = n + i h_n \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

т.е. рассматриваются чисто мнимые возмущения целочисленной последовательности. Пусть $E_2(\Lambda)$ – избыток системы экспонент $e(\Lambda) := \{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в $L^2(-\pi, \pi)$. В [4] приведена следующая

ТЕОРЕМА Е. Верны следующие утверждения:

- 1) если $h_n \leq \alpha \ln n$, $n \geq n_0$, для некоторого $\alpha \geq 0$, то $E_2(\Lambda) \leq [\alpha\pi] + 1$; если к тому же $\{\alpha\pi\} < 1/2$, то $E_2(\Lambda) \leq [\alpha\pi]$;
- 2) если $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{h_n^2}{n^2} < \infty$ и $h_n \geq \alpha \ln n$, $n \geq n_0$, $\alpha \geq 0$, то $E_2(\Lambda) \geq [\alpha\pi]$; если к тому же $\{\alpha\pi\} \geq 1/2$, то $E_2(\Lambda) \geq [\alpha\pi] + 1$.

Теорема Е дает некую логарифмическую шкалу для нахождения избытка системы экспонент, но эта шкала несовершенна, так как не всегда позволяет вычислить точное значение избытка. Рассмотрим следующий

ПРИМЕР 2. Пусть $h(t) = \alpha \ln t - \ln \ln t$, $\alpha = 1/(2\pi)$; тогда $\{\alpha\pi\} = 1/2$ и по теореме Е имеем $0 = [\alpha\pi] \leq E_2(\Lambda) \leq [\alpha\pi] + 1 = 1$. Чему именно равно $E_2(\Lambda)$, нулю или единице, помогает определить

ТЕОРЕМА 4. Пусть $h(t)$ – функция из п. 1) теоремы 3. Тогда

$$E_2(\Lambda) = \max \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : \int^\infty \left(\frac{e^{\pi h(x)}}{x^n} \right)^2 dx = \infty \right\}. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Обозначим через E максимум из формулировки теоремы. Покажем, что $E_2(\Lambda) \leq E$. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Согласно теореме 3 и следствию 1 для функции

$$G_n(z) = \frac{F_\Lambda(z)}{(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)}$$

верна оценка

$$|G_n(x)| \asymp \frac{e^{\pi h(|x|)}}{|x|^n + 1}.$$

Поэтому $G_{E+1}(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Поскольку экспоненциальный тип $G_{E+1}(z)$ не превосходит π [4, с. 132], по теореме Пэли–Винера система экспонент $e(\Lambda \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_{E+1}\})$ неполна в $L^2(-\pi, \pi)$, а это означает, что $E_2(\Lambda) \leq E$.

2. Теперь покажем, что $E_2(\Lambda) \geq E$. По определению величины E имеем $G_E(x) \notin L^2(\mathbb{R})$. В силу того, что $h(|x|) \geq 0$, получаем

$$|G_E(x)| \geq \delta |x|^{-E}, \quad \delta > 0.$$

Кроме того, как показано в [4, с. 132], индикатор $h_{G_E}(\theta)$ функции $G_E(x)$ равен $\pi |\sin \theta|$. Поэтому выполнены все условия теоремы C, а значит, система $e(\Lambda \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_E\})$ полна в $L^2(-\pi, \pi)$. Таким образом, доказано, что $E_2(\Lambda) \geq E$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\lambda'_n = n + ih_n$, $\lambda^j_n = n + ih_j(|n|)$, $j = 1, 2$, и

$$h_1(|n|) \leq |h_n| \leq h_2(|n|), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

где $h_j(t)$, $j = 1, 2$, — функции из п. 1) теоремы 3. Тогда $E_2(\Lambda_1) \leq E_2(\Lambda') \leq E_2(\Lambda_2)$, где $E_2(\Lambda_1)$ и $E_2(\Lambda_2)$ заданы равенством (37) с функциями $h_1(t)$ и $h_2(t)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $E_2(\Lambda') \leq E_2(\Lambda_2)$, второе неравенство доказывается аналогично. Заметим, что при $|h_n| \leq h_2(|n|)$ имеет место неравенство

$$|x - (n + ih_n)| \leq |x - (n + ih_2(|n|))|,$$

а значит,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_{\Lambda'}(x)}{F_{\Lambda}(x)} \right| &= \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{x - (n + ih_n)}{x - (n + ih_2(|n|))} \right| \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{n + ih_2(|n|)}{n + ih_n} \right| \\ &\leq \prod_{n \in \mathbb{N}} \left| 1 + \frac{h_2^2(|n|) - h_n^2}{n^2 + h_n^2} \right| \leq A. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались условием $\beta < 1/2$.

Далее, повторяя рассуждения из п. 1 доказательства теоремы 4, получаем, что $E_2(\Lambda') \leq E_2(\Lambda)$. Следствие доказано.

Список литературы

1. А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
2. R. M. Redheffer, R. M. Young, “Completeness and basis properties of complex exponentials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**:1 (1983), 93–111.
3. А. А. Юхименко, “Полнота и базисные свойства систем экспонент в весовых пространствах $L^p(-\pi, \pi)$ ”, *Матем. заметки*, **81**:5 (2007), 776–788; англ. пер.: А. А. Yukhimenko, “Completeness and basis properties of systems of exponentials in weighted spaces $L^p(-\pi, \pi)$ ”, *Math. Notes*, **81**:5–6 (2007), 695–707.
4. А. М. Sedleckii, “On completeness of the systems $\{\exp(ix(n + ih_n))\}$ ”, *Anal. Math.*, **4**:2 (1978), 125–143.
5. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: Eu. Seneta, *Regularly varying functions*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

6. А. А. Юхименко, “Об одном классе функций типа синуса”, *Матем. заметки*, **83**:6 (2008), 941–954; англ. пер.: А. А. Yukhimenko, “On a class of sine-type functions”, *Math. Notes*, **83**:5–6 (2008), 858–870.

А. А. ЮХИМЕНКО (А. А. YUKHIMENKO)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: yukhimenko@gmail.com

Поступило в редакцию
20.06.2008
28.07.2009