Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Суммы характеров с весами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 2, 29–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/im283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:39:21

УДК 511

А. А. Карацуба

Суммы характеров с весами

Оцениваются со степенным понижением суммы характеров Дирихле с весами при малом, по сравнению с модулем характера, числе слагаемых в сумме.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Постановка задачи

В работах автора [1], [2] исследовались суммы S_1 , S_2 вида

$$S_1 = \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \chi(n+a), \quad S_2 = \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \chi((n+a)(n+b)).$$

Здесь χ – неглавный характер Дирихле по модулю q , q – простое число, $\tau_k(n)$ – число решений в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$ уравнения $x_1 \dots x_k = n$; a и b – целые числа, $(a, q) = 1$, $a \not\equiv b \pmod{q}$.

Основной проблемой при изучении S_1 и S_2 является проблема нетривиальной оценки сверху модулей S_1 и S_2 при возможно меньших значениях N (по отношению к q). В настоящей статье продолжены эти исследования. Получены со степенным понижением оценки указанных сумм и их обобщений (а также подобных сумм R_1 и R_2) при значительно меньших N , чем в [1], [2], и даны арифметические приложения этих оценок. Метод исследования продолжает и развивает метод работ автора [1]–[6]. Отмечу также, что направление аналитической теории чисел, связанное с изучением распределений значений характеров Дирихле на коротких, по сравнению с модулем, последовательностях натуральных чисел той или иной арифметической природы, создано И. М. Виноградовым (см. [7]–[13]).

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Везде ниже k – целое число, $k \geq 2$; δ – произвольное положительное число, не превосходящее 0,01; q – простое число, $q \geq q_1(\delta)$; χ , χ_1 , χ_2 – неглавные характеры Дирихле по модулю q ; a и b – целые числа, $(a, q) = 1$, $b \not\equiv a \pmod{q}$; символами S_1 , S_2 , R_1 , R_2 обозначаются суммы

$$S_1 = \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \chi(n+a), \quad S_2 = \sum_{n \leq N} \tau(n) \chi_1(n+a) \chi_2(n+b),$$

$$R_1 = \sum_{x^2+y^2 \leq N} \chi(x^2+y^2+a), \quad R_2 = \sum_{x^2+y^2 \leq N} \chi_1(x^2+y^2+a) \chi_2(x^2+y^2+b);$$

в R_1 и R_2 суммирование ведется по всем целым числам x и y с указанным условием $x^2 + y^2 \leq N$; при $(x, q) = 1$ символом x^* обозначается натуральное число такое, что $1 \leq x^* < q$, $x^* x \equiv 1 \pmod{q}$; γ – константа Эйлера; c_1 и постоянные в знаках O и $\ll$ – абсолютные.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 97-01-00580).

§ 2. Вспомогательные утверждения

Сформулируем необходимые для дальнейшего вспомогательные утверждения – леммы.

ЛЕММА 1. Пусть ψ – мультипликативный характер поля $\mathbb{F}_q$, имеющий порядок $m > 1$, и пусть $f \in \mathbb{F}_q[x]$ – нормированный многочлен положительной степени, не являющийся m -й степенью другого многочлена. Если d – число различных корней многочлена f в его поле разложения над $\mathbb{F}_q$, то для каждого $a \in \mathbb{F}_q$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{c \in \mathbb{F}_q} \psi(af(c)) \right| \leq (d-1)\sqrt{q}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq X < q$, r – натуральное число. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\sum_{\lambda=1}^q \left| \sum_{x=1}^X \chi(\lambda+x) \right|^{2r} \leq (4r)^{r+1} X^r q + 2r X^{2r} \sqrt{q}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leq X < q$, r – натуральное число. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\sum_{\lambda=1}^q \sum_{\mu=1}^q \left| \sum_{x=1}^X \chi_1(\lambda+\mu x+a) \chi_2(\lambda+\mu x+b) \right|^{2r} \leq r^{2r} X^r q^2 + 6r^2 X^{2r} q.$$

Лемма 1 – оценка Хассе–Вейля; ее доказательство см., например, в [14, с. 279]. Лемма 2 принадлежит Г. Дэвенпорту и П. Эрдешу [15]. Лемма 3 для $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, где χ – вещественный характер, доказана автором в [6, с. 316–317]; для произвольных χ_1, χ_2 доказательство такое же, следует только в соответствующем месте рассуждений воспользоваться леммой 1.

§ 3. Линейный случай

В этом параграфе оцениваются сверху $|S_1|$ и $|R_1|$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \geq q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)} + \delta}$, $\delta < \frac{2}{3(k+1)}$, $0 < |a| \leq \sqrt{q}$. Тогда для $|S_1|$ справедлива следующая оценка:

$$|S_1| \ll N q^{-0,02\delta^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $N \leq q^{0,5+0,25\delta}$, так как в противном случае утверждение теоремы доказывается так же, как соответствующее утверждение в [1]. Сумму S_1 запишем следующим образом:

$$S_1 = \sum_{x_1 \dots x_k \leq N} \chi(x_1 \dots x_k + a).$$

Промежутки изменения переменных суммирования $x_1, \dots, x_k$ имеют вид $[1, N]$. Разобьем каждый из них на $\ll \log N$ промежутков $[2^\nu, 2^{\nu+1})$, $\nu = 0, 1, \dots, \nu_1 = [\log_2 N]$. Сумма S_1 разобьется на $\ll \log^k N$ сумм вида W ,

$$W = \sum'_{x_1 \dots x_k \leq N} \chi(x_1 \dots x_k + a), \quad (1)$$

где штрих означает, что $X_1 \leq x_1 < Y_1, \dots, X_k \leq x_k < Y_k$, причем $Y_1 \leq 2X_1, \dots, Y_k \leq 2X_k$. Поэтому $|S_1|$ можно оценить так:

$$|S_1| \ll |W| \log^k N, \quad (2)$$

где W имеет вид (1), а величины $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k$ такие, при которых $|W|$ максимален. Из условий на $x_1, \dots, x_k$ следует, что $X_1 \dots X_k \leq N$. Если $X_1 \dots X_k \leq Nq^{-0,5\delta}$, то тривиально получаем

$$|W| \leq 2^k X_1 \dots X_k \leq 2^k Nq^{-0,5\delta}. \quad (3)$$

Пусть теперь $X_1 \dots X_k \geq Nq^{-0,5\delta}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $1 \leq X_1 \leq \dots \leq X_k$. Поэтому

$$X_k^k \geq Nq^{-0,5\delta}, \quad X_k \geq N^{\frac{1}{k}} q^{-\frac{\delta}{2k}}.$$

Запишем W следующим образом:

$$W = \sum_{xy \leq N} \tau'_{k-1}(x) \chi(xy + a),$$

где $\tau'_{k-1}(x)$ – количество решений уравнения $x_1 \dots x_{k-1} = x$, $X_1 \leq x_1 < Y_1, \dots, X_{k-1} \leq x_{k-1} < Y_{k-1}$, и $X_k \leq y < Y_k$.

Пользуясь известной оценкой функции $\tau_{k-1}(x)$, находим

$$\tau'_{k-1}(x) \leq \tau_{k-1}(x) \leq \max_{x \leq N} \tau_{k-1}(x) < \exp \left(\frac{2k \log q}{\log \log q} \right).$$

Поэтому для $|W|$ получаем неравенство

$$|W| \exp \left(\frac{-2k \log q}{\log \log q} \right) \leq \sum_{x \leq X} \left| \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(xy + a) \right|, \quad (4)$$

где $X = 2^{k-1} X_1 \dots X_{k-1}$, $X_{k+1} = X_k$, $Y_{k+1} = \min(Y_k, Nx^{-1})$.

Преобразуем правую часть (4), которую для краткости обозначим символом W_1 . Каждое x представим в виде $x = dx'$, где $d = (x, |a|)$. Тогда будем иметь

$$a = bd, \quad (|b|, x') = 1, \\ W_1 = \sum_{d| |a|} \sum'_{x' \leq Xd^{-1}} \left| \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(x'y + b) \right|,$$

знак штрих в сумме по x' означает, что $(x', |b|) = 1$, $X_{k+1} = X_k$, $Y_{k+1} = \min(Y_k, N(x'd)^{-1})$. Опять, переходя к неравенствам, найдем

$$W_1 \leq W_2 \tau(|a|), \quad (5)$$

где

$$W_2 = \sum'_{x' \leq X d^{-1}} \left| \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(x'y + b) \right| = \sum'_{x \leq X d^{-1}} \left| \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(xy + b) \right|.$$

Так как $X \leq N < q$, то $(x, q) = 1$; следовательно, вводя символ x^* , будем иметь равенство

$$W_2 = \sum'_{x \leq X d^{-1}} \left| \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(y + bx^*) \right|. \quad (6)$$

Возьмем $T = [q^{0,5\delta}]$, $Z = X_{k+1} T^{-1} q^{-0,25\delta}$. Из условий на $X_{k+1} = X_k$ и N легко следуют неравенства

$$Z \geq X_{k+1} q^{-0,75\delta} \geq N^{\frac{1}{k}} q^{-\frac{\delta}{2k} - \frac{3\delta}{4}} \geq q^{\frac{1}{2(k+1)} - \frac{3\delta}{4} + \frac{\delta}{2k}}.$$

По условию теоремы $\delta \leq \frac{2}{3(k+1)}$, т.е. $Z \geq q^{\frac{\delta}{2k}}$. Пусть $\pi_1(Z)$ – количество простых чисел z с условием $Z < z \leq 2Z$. Последовательно получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(y + bx^*) &= O(ZT) \\ &+ (\pi_1(Z))^{-1} T^{-1} \sum_{t=1}^T \sum'_{Z < z \leq 2Z} \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(y + zt + bx^*); \\ \left| \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \chi(y + bx^*) \right| &\ll X_k q^{-0,5\delta} \\ &+ (\pi_1(Z))^{-1} T^{-1} \sum'_{Z < z \leq 2Z} \sum_{X_{k+1} \leq y < Y_{k+1}} \left| \sum_{t=1}^T \chi(y + zt + bx^*) \right|. \end{aligned}$$

Подставляя это в (6), находим

$$W_2 \ll (\pi_1(Z))^{-1} T^{-1} W_3 + X_1 \dots X_k q^{-0,5\delta}, \quad (7)$$

где

$$W_3 = \sum'_{x \leq X} \sum'_{Z < z \leq 2Z} \sum_{X_k \leq y \leq Y_k} \left| \sum_{t=1}^T \chi(t + (y + bx^*)z^*) \right|.$$

В сумме W_3 штрих по x означает, что $(x, |b|) = 1$, штрих по z означает, что z – простые числа, $X = 2^{k-1} X_1 \dots X_{k-1}$, $Y_k = 2X_k$.

Пусть $J(\lambda)$ – количество решений в числах x, z, y , $X_k \leq y < Y_k$, сравнения

$$(y + bx^*)z^* \equiv \lambda \pmod{q}.$$

Тогда W_3 запишется так:

$$W_3 = \sum_{\lambda=1}^q J(\lambda) \left| \sum_{t=1}^T \chi(t + \lambda) \right|.$$

При любом натуральном числе r , пользуясь неравенствами Гёльдера и Коши, находим

$$W_3^r \leq \left(\sum_{\lambda=1}^q J(\lambda) \right)^{r-1} \sum_{\lambda=1}^q J(\lambda) \left| \sum_{t=1}^T \chi(t + \lambda) \right|^r \leq W_4^{r-1} \sqrt{W_5} \sqrt{W_6}, \quad (8)$$

где

$$W_4 = \sum_{\lambda=1}^q J(\lambda), \quad W_5 = \sum_{\lambda=1}^q J^2(\lambda),$$

$$W_6 = \sum_{\lambda=1}^q \left| \sum_{t=1}^T \chi(t + \lambda) \right|^{2r}.$$

Из определения $J(\lambda)$ следует, что

$$W_4 \ll 2^k X_1 \dots X_k \pi_1(Z) \ll 2^k N \pi_1(Z).$$

Сумма W_5 равняется количеству решений сравнения

$$(y + bx^*)z^* \equiv (y_1 + bx_1^*)z_1^* \pmod{q}, \quad (9)$$

где $X_k \leq y, y_1 < Y_k$, $1 \leq x, x_1 \leq X$, $(|b|, x) = (|b|, x_1) = 1$, $Z < z, z_1 \leq 2Z$, причем z, z_1 – простые числа. Сравнение (9) равносильно такому:

$$(b + xy)zx_1 \equiv (b + x_1y_1)z_1x \pmod{q}. \quad (10)$$

Из условий на $b, x, y, x_1, y_1, z, z_1$ находим, что левая и правая части (10) не превосходят по абсолютной величине числа B ,

$$B \ll \sqrt{q} XY_k q^{-0,75\delta} + (XY_k)^2 q^{-0,75\delta} \ll q^{0,5-0,75\delta} N + N^2 q^{-0,75\delta}$$

$$\ll q^{1-0,5\delta} + q^{1-0,25\delta} \ll q^{1-0,25\delta}.$$

Следовательно, при $q \geq q_1(\delta)$ для B будем иметь оценку: $B < 0,25$. Поэтому сравнение (10) равносильно уравнению

$$(b + xy)zx_1 = (b + x_1y_1)z_1x. \quad (11)$$

Из уравнения (11) получаем

$$bx_1 \equiv 0 \pmod{x}, \quad bz_1x \equiv 0 \pmod{x_1}.$$

Так как $(|b|, x) = (|b|, x_1) = 1$, то

$$zx_1 \equiv 0 \pmod{x}, \quad z_1x \equiv 0 \pmod{x_1}.$$

Отсюда следует, что $zx_1 = nx$, $z_1x = mx_1$, или $mzx_1 = mnx = zz_1x$, или $zz_1 = mn$. Так как z, z_1 – простые числа, то возможны такие четыре случая:

- а) $m = 1, n = zz_1$;
- б) $n = 1, m = zz_1$;
- в) $m = z_1, n = z$;
- г) $m = z, n = z_1$.

Оценим количество решений (11), отвечающее каждому из этих случаев, обозначая это количество одним и тем же символом J .

Случай а). $zx_1 = nx = zz_1x$; из (11) получаем

$$(b + xy)zz_1x = (b + x_1y_1)z_1x$$

или

$$(b + xy)z = b + x_1y_1. \quad (12)$$

Пусть I – количество решений уравнения

$$(b + xy)z = (b + x_1y_1)z_1$$

в числах x, x_1, y, y_1, z, z_1 , причем эти числа пробегает те же множества значений, что и соответствующие числа в (11), только z, z_1 могут принимать еще значения 1. Получаем, что в случае а) выполняется неравенство $J \leq I$.

Случай б). $zx_1 = x$; из (11) получаем

$$(b + xy)x = (b + x_1y_1)z_1x, \quad b + xy = (b + x_1y_1)z_1.$$

Следовательно, $J \leq I$.

Случай в). $zx_1 = zx, x_1 = x$; из (11) получаем

$$(b + xy)z = (b + x_1y_1)z_1.$$

Следовательно, $J \leq I$.

Случай г). $zx_1 = xz_1$; из (11) получаем

$$b + xy = b + x_1y_1, \quad xy = x_1y_1.$$

При фиксированных x_1, y_1, z_1 число решений (11) при условии, что $xy = x_1y_1$, не превосходит $\pi_1(Z)\tau(x_1y_1)$, т.е.

$$J \ll \sum_{x_1 \leq X} \sum_{y_1 \leq Y_k} \pi_1(Z)\tau(x_1y_1) \ll \pi_1(Z)N \exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right).$$

В свою очередь, I не превосходит количества I_1 решений уравнения

$$(b + u)z = (b + v)z_1, \quad 1 \leq u, v \leq N, \quad Z \leq z, z_1 < 2Z, \quad (13)$$

умноженного на $(\max_{w \leq N} \tau(w))^2$.

Если $u = -b$, то $v = -b$, и в этом случае $I_1 \leq \pi_1^2(Z)$; если $u \neq -b$, $v \neq -b$, то в этом случае число решений (13) не превосходит

$$N\pi_1(Z) \left(\max_{w \leq 2NZ} \tau(w) \right).$$

Собирая полученные оценки для J , I , I_1 , приходим к неравенству

$$W_5 \ll N\pi_1(Z) \exp \left(\frac{3 \log q}{\log \log q} \right). \quad (14)$$

Наконец, по лемме 2

$$W_6 \leq (4r)^{r+1} q T^r + 2r \sqrt{q} T^{2r}.$$

Возьмем $r = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 2$. Тогда последовательно находим

$$\begin{aligned} r &\geq \frac{1}{\delta} + 1, \\ r \log T &\geq \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) \log(q^{0,5\delta} - 1) \geq \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) (0,5\delta \log q - 2q^{-0,5\delta}) \\ &= 0,5 \log q + 0,5\delta \log q - \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) 2q^{-0,5\delta} > 0,5 \log q, \\ T^r &\geq q^{0,5}; \quad T^{-r} \leq q^{-0,5}, \quad W_6 \leq 2(4r)^{r+1} T^{2r} q^{0,5}. \end{aligned}$$

Подставим оценки величин W_4 , W_5 , W_6 в (8); получим

$$\begin{aligned} W_3^r &\ll (2^k N\pi_1(Z))^{r-1} \left(N\pi_1(Z) \exp \left(\frac{3 \log q}{\log \log q} \right) \right)^{0,5} ((4r)^{r+1} T^{2r} q^{0,5})^{0,5}, \\ W_3 &\ll r 2^k (N\pi_1(Z))^{1-\frac{1}{2r}} \exp \left(\frac{3 \log q}{2r \log \log q} \right) T q^{\frac{1}{4r}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7) следует

$$W_2 \ll r 2^k N (N\pi_1(Z) q^{-0,5})^{-\frac{1}{2r}} \exp \left(\frac{3 \log q}{2r \log \log q} \right) + N q^{-0,5\delta}.$$

Из определения величин Z , $\pi_1(Z)$ находим

$$\begin{aligned} \pi_1(Z) &\gg Z(\log Z)^{-1} \gg Z(\log q)^{-1}, \quad Z \gg Y_k q^{-0,75\delta} \gg N^{\frac{1}{k}} q^{-0,75\delta - \frac{\delta}{2k}}, \\ \Delta &= (N\pi_1(Z) q^{-0,5})^{-\frac{1}{2r}} \ll (N^{1+\frac{1}{k}} q^{-0,5-0,75\delta - \frac{\delta}{2k}} (\log q)^{-1})^{-\frac{1}{2r}}. \end{aligned}$$

По условию теоремы $N \geq q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)} + \delta}$, следовательно, при $q \geq q_1(\delta)$ имеем

$$\begin{aligned} N^{1+\frac{1}{k}} q^{-0,5-0,75\delta - \frac{\delta}{2k}} (\log q)^{-1} &\geq q^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} + \delta + \frac{\delta}{k} - \frac{1}{2} - \frac{3\delta}{4} - \frac{\delta}{2k}} (\log q)^{-1} \\ &= q^{\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2k}} (\log q)^{-1} \geq q^{\frac{\delta}{5}}, \\ \Delta &\leq q^{-\frac{\delta}{10r}}; \end{aligned}$$

$$W_2 \ll \frac{1}{\delta} 2^k N q^{-\frac{\delta}{10r}} \exp \left(\frac{3 \log q}{2r \log \log q} \right) \ll \frac{1}{\delta} 2^k N q^{-\frac{\delta^2}{12}},$$

$$|S_1| \ll \frac{1}{\delta} N q^{-\frac{\delta^2}{12}} \exp \left(\frac{4k \log q}{\log \log q} \right) (\log^k q) \ll N q^{-0,02\delta^2}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N \geq q^{\frac{1}{3}+\delta}$, $0 < |a| \leq \sqrt{q}$. Тогда для $|R_1|$ справедлива следующая оценка:

$$|R_1| \ll Nq^{-0,02\delta^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi_4(n)$ – неглавный характер Дирихле по модулю 4. Тогда количество решений уравнения $x^2 + y^2 = n$, $n \geq 1$, равняется $r(n)$,

$$r(n) = 4 \sum_{d|n} \chi_4(d).$$

Поэтому для R_1 получаем равенство

$$\begin{aligned} R_1 &= 4 \sum_{n \leq N} \chi(n+a) \sum_{d|n} \chi_4(d) + \chi(a) \\ &= 4 \sum_{d \leq N} \chi_4(d) \sum_{md \leq N} \chi(md+a) + \chi(a) = 4W_1 - 4W_2 + \chi(a), \end{aligned}$$

где

$$W_1 = \sum_{m(4k_1+1) \leq N} \chi(m(4k_1+1)+a), \quad W_2 = \sum_{m(4k_1-1) \leq N} \chi(m(4k_1-1)+a).$$

Повторяя рассуждения теоремы 1 при $k = 2$, для $|W_1|$ и $|W_2|$ получим нужные оценки и тем самым утверждение теоремы 2.

§ 4. Арифметические следствия

ТЕОРЕМА 3. Пусть $V_1(N)$ и $V_2(N)$ – суммы следующего вида:

$$V_1(N) = \sum'_{n \leq N} \tau_k(n), \quad V_2(N) = \sum''_{n \leq N} \tau_k(n),$$

где штрих и два штриха означают суммирование по таким натуральным числам n , для которых $n+a$ являются квадратичными вычетами и соответственно невычетами по модулю q . Тогда при выполнении условий теоремы 1 справедливы следующие асимптотические формулы:

$$V_1(N) = \frac{1}{2}T_k(N) + O(Nq^{-0,01\delta^2}), \quad V_2(N) = \frac{1}{2}T_k(N) + O(Nq^{-0,01\delta^2}),$$

где $T_k(N) = \sum_{n \leq N} \tau_k(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} V_1(N) &= \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n+a}{q} \right) + 1 \right) + O(Nq^{-0,02\delta^2}), \\ V_2(N) &= \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{n+a}{q} \right) + 1 \right) + O(Nq^{-0,02\delta^2}). \end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 1. Заметим, что в [16] доказана асимптотическая формула для $T_k(N)$, равномерная по N и k :

$$T_k(N) = NP_{k-1}(\log N) + O(N^{1-ck^{-2/3}}(c_1 \log N)^k),$$

где $P_{k-1}(x)$ – многочлен степени $k-1$, $c > 0$ – абсолютная постоянная.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G(N)$ – сумма следующего вида:

$$G(N) = \sum'_{n \leq N} \tau_k(n),$$

где штрих означает суммирование по таким $n \leq N$, для которых числа $n+a$ являются первообразными корнями по модулю q , $0 < a \leq \sqrt{q}$. Пусть, далее, $q-1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение $q-1$ на простые сомножители. Тогда, при выполнении условий теоремы 1, для $G(N)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$G(N) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) T_k(N) + O(Nq^{-0,01\delta^2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $q_1 = p_1 \dots p_s$. Для того чтобы число $n+a$ было первообразным корнем по модулю q , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $(\text{ind}(n+a), q_1) = 1$. Следовательно,

$$\sum_{d | (\text{ind}(n+a), q_1)} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n+a \text{ – первообразный корень по модулю } q, \\ 0, & \text{если } n+a \text{ – не первообразный корень по модулю } q. \end{cases}$$

Тем самым для $G(N)$ получаем формулу

$$G(N) = \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \sum_{d | (\text{ind}(n+a), q_1)} \mu(d).$$

Меняя порядки суммирования и вводя тригонометрические суммы, последовательно получаем

$$\begin{aligned} G(N) &= \sum_{d | q_1} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq N \\ \text{ind}(n+a) \equiv 0 \pmod{d}}} \tau_k(n) \\ &= \sum_{d | q_1} \mu(d) \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \frac{1}{d} \sum_{l=0}^{d-1} \exp\left(2\pi i \frac{l \text{ind}(n+a)}{d}\right) \\ &= \sum_{d | q_1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{n \leq N} \tau_k(n) + \sum_{d | q_1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{l=1}^{d-1} \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \exp\left(2\pi i \frac{l \text{ind}(n+a)}{d}\right) \\ &= T_k(N) \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \\ &\quad + O\left(2^s \max_{1 \leq l \leq d-1} \left| \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \exp\left(2\pi i \frac{l \text{ind}(n+a)}{d}\right) \right| \right). \end{aligned}$$

Но последняя сумма по n есть сумма теоремы 1; так как $2^s \leq q^{0,01\delta^2}$, то отсюда следует указанная в теореме асимптотическая формула для $G(N)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < a \leq \sqrt{q}$, $K(N)$ – количество целых точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 \leq N$ таких, что числа $x^2 + y^2 + a$ являются квадратичными вычетами (невычетами) по модулю q . Тогда при выполнении условий теоремы 2 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K(N) = \frac{\pi}{2}N + O(Nq^{-0,02\delta^2}).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $0 < a \leq \sqrt{q}$, $g(N)$ – количество целых точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 \leq N$ таких, что числа $x^2 + y^2 + a$ являются первообразными корнями по модулю q . Пусть, далее, $q - 1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение $q - 1$ на простые сомножители. Тогда при выполнении условий теоремы 2 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$g(N) = \pi \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) N + O(Nq^{-0,01\delta^2}).$$

Теоремы 5 и 6 доказываются подобно тому, как доказывались теоремы 3 и 4, только в нужном месте надо применить теорему 2.

§ 5. Нелинейный случай

Здесь будут оценены сверху $|S_2|$ и $|R_2|$ и даны арифметические следствия полученных оценок.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $N \geq q^{2/3+\delta}$. Тогда для $|S_2|$ справедлива следующая оценка:

$$|S_2| \ll Nq^{-0,02\delta^2}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $N < q$, так как в противном случае теорема доказывается так же, как теорема 1 из [4]. Имеем равенство

$$S_2 = \sum_{x_1 x_2 \leq N} \chi_1(x_1 x_2 + a) \chi_2(x_1 x_2 + b).$$

Повторяя рассуждения теоремы 1, получим

$$|S_2| \ll |W| \log^2 q,$$

где

$$W = \sum_{X_1 < x_1 \leq Y_1} \sum_{\substack{X_2 < x_2 \leq Y_2 \\ x_1 x_2 \leq N}} \chi_1(x_1 x_2 + a) \chi_2(x_1 x_2 + b).$$

Если $X_1 X_2 \leq Nq^{-0,5\delta}$, то тривиальная оценка $|W|$ дает (15). Пусть теперь $X_1 X_2 \geq Nq^{-0,5\delta}$, $X_2 \geq X_1 \geq 1$, т.е. $X_2 \geq N^{0,5} q^{-0,25\delta}$. Переходя к неравенствам, получаем

$$|W| \ll \sum_{X_1 < x_1 \leq Y_1} \left| \sum_{X_2 < x_2 \leq Y_3} \chi_1(x_2 + ax_1^*) \chi_2(x_2 + bx_1^*) \right|,$$

где $Y_3 = \min(Y_2, Nx_1^{-1})$.

Возьмем $T = [q^{0,5\delta}]$, $Z = [Y_2 T^{-1} q^{-0,25\delta}]$; находим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{X_2 < x_2 \leq Y_3} \chi_1(x_2 + ax_1^*) \chi_2(x_2 + bx_1^*) \right| \\ & \ll T^{-1} Z^{-1} \sum_{X_2 < x_2 \leq Y_2} \sum_{z=1}^Z \left| \sum_{t=1}^T \chi_1(x_2 + ax_1^* + zt) \chi_2(x_2 + bx_1^* + zt) \right| + Y_2 q^{-0,25\delta}, \\ & W \ll T^{-1} Z^{-1} W_1 + N q^{-0,25\delta}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$W_1 = \sum_{X_1 < x_1 \leq Y_1} \sum_{X_2 < x_2 \leq Y_2} \sum_{z=1}^Z \left| \sum_{t=1}^T \chi_1(t + x_2 z^* + ax_1^* z^*) \chi_2(t + x_2 z^* + bx_1^* z^*) \right|.$$

Пусть $J(\lambda, \mu)$ – количество решений следующей системы сравнений:

$$\begin{cases} x_2 z^* \equiv \lambda \\ x_1^* z^* \equiv \mu \end{cases} \pmod{q},$$

$$X_1 < x_1 \leq Y_1, \quad X_2 < x_2 \leq Y_2, \quad 1 \leq z \leq Z.$$

Тогда сумма W_1 переписется так:

$$W_1 = \sum_{\lambda=1}^q \sum_{\mu=1}^q J(\lambda, \mu) \left| \sum_{t=1}^T \chi_1(t + \lambda + a\mu) \chi_2(t + \lambda + b\mu) \right|.$$

При натуральном числе r , пользуясь неравенствами Гёльдера и Коши, для W_1^r получаем неравенство

$$W_1^r \leq W_2^{r-1} \sqrt{W_3} \sqrt{W_4}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} W_2 &= \sum_{\lambda=1}^q \sum_{\mu=1}^q J(\lambda, \mu), \quad W_3 = \sum_{\lambda=1}^q \sum_{\mu=1}^q J^2(\lambda, \mu), \\ W_4 &= \sum_{\lambda=1}^q \sum_{\mu=1}^q \left| \sum_{t=1}^T \chi_1(t + \lambda + a\mu) \chi_2(t + \lambda + b\mu) \right|^{2r}. \end{aligned}$$

Сумма W_2 есть $O(X_1 X_2 Z)$. Сумма W_3 равняется количеству решений такой системы сравнений:

$$\begin{cases} x_2 z^* \equiv y_2 z_1^* \\ x_1^* z^* \equiv y_1^* z_1^* \end{cases} \pmod{q},$$

$$X_1 < x_1, y_1 \leq Y_1, \quad X_2 < x_2, y_2 \leq Y_2, \quad 1 \leq z, z_1 \leq Z.$$

Эта система сравнений эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x_2 z_1 \equiv y_2 z & (\text{mod } q), \\ x_1 z \equiv y_1 z_1 & (\text{mod } q), \end{cases}$$

$$X_1 < x_1, y_1 \leq Y_1, \quad X_2 < x_2, y_2 \leq Y_2, \quad 1 \leq z, z_1 \leq Z,$$

которая, в свою очередь, эквивалентна системе уравнений:

$$\begin{cases} x_2 z_1 = y_2 z, \\ x_1 z = y_1 z_1, \end{cases} \quad (18)$$

$$X_1 < x_1, y_1 \leq Y_1, \quad X_2 < x_2, y_2 \leq Y_2, \quad 1 \leq z, z_1 \leq Z.$$

При фиксированных x_1, x_2, z_1 система (18) имеет не более чем $\exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right)$ решений. Таким образом,

$$W_3 \ll X_1 X_2 Z \exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right).$$

Наконец, для W_4 справедлива оценка леммы 3:

$$W_4 \leq q^2 T^{2r} (r^{2r} T^{-r} + 6r^2 q^{-1}).$$

Возьмем $r = \left[\frac{2}{\delta}\right] + 2 \geq \frac{2}{\delta} + 1$; так как $T = [q^{0,5\delta}]$, то $T^r \geq q$, и, следовательно,

$$W_4 \leq (2r)^{2r} q T^{2r}.$$

Из оценок W_2, W_3, W_4 и неравенства (17) получаем

$$\begin{aligned} W_1^r &\ll (c_1 X_1 X_2 Z)^{r-1} (X_1 X_2 Z)^{\frac{1}{2}} (2r)^r q^{\frac{1}{2}} T^r \exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right) \\ &\ll (2c_1 r)^r (X_1 X_2)^{r-\frac{1}{2}} Z^{r-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} T^r \exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right), \\ W_1 &\ll r (X_1 X_2)^{1-\frac{1}{2r}} Z^{1-\frac{1}{2r}} q^{\frac{1}{2r}} T \exp\left(\frac{\log q}{r \log \log q}\right) \\ &\ll r N^{1-\frac{1}{2r}} Z^{1-\frac{1}{2r}} q^{\frac{1}{2r}} T \exp\left(\frac{\log q}{r \log \log q}\right). \end{aligned}$$

Подставим эту оценку в (16); найдем

$$\begin{aligned} W &\ll r N^{1-\frac{1}{2r}} Z^{-\frac{1}{2r}} q^{\frac{1}{2r}} \exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right) + N q^{-0,25\delta} \\ &\ll N (r (N Z q^{-1})^{-\frac{1}{2r}} + q^{-0,25\delta}) \exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right). \end{aligned}$$

Так как $Z \gg X_2 q^{-0,75\delta} \gg N^{\frac{1}{2}} q^{-\delta}$, то

$$N Z q^{-1} \gg N^{\frac{3}{2}} q^{-1-\delta} \gg q^{1+\frac{3}{2}\delta-1-\delta} = q^{0,5\delta},$$

следовательно,

$$W \ll N q^{-0,05\delta^2}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $N \geq q^{2/3+\delta}$. Тогда для $|R_2|$ справедлива следующая оценка:

$$|R_2| \ll Nq^{-0,02\delta^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы повторяет доказательства теорем 2 и 7.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $ab(a-b) \not\equiv 0 \pmod{q}$, $|a| \leq \sqrt{q}$, $|b| \leq \sqrt{q}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$,

$$V(N) = \sum'_{n \leq N} \tau(n),$$

где штрих в сумме означает суммирование по таким натуральным числам n , для которых выполняются равенства

$$\left(\frac{n+a}{q}\right) = \varepsilon_1, \quad \left(\frac{n+b}{q}\right) = \varepsilon_2.$$

Тогда при выполнении условий теоремы 7 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$V(N) = \frac{1}{4}N(\log N + 2\gamma - 1) + O(Nq^{-0,01\delta^2}).$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть $ab(a-b) \not\equiv 0 \pmod{q}$, $0 < a \leq \sqrt{q}$, $0 < b \leq \sqrt{q}$,

$$G(N) = \sum'_{n \leq N} \tau(n),$$

где штрих в сумме означает суммирование по таким натуральным числам $n \leq N$, для которых числа $n+a$ и $n+b$ являются первообразными корнями по модулю q . Пусть, далее, $q-1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение $q-1$ на простые сомножители. Тогда при выполнении условий теоремы 7 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$G(N) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2 N(\log N + 2\gamma - 1) + O(Nq^{-0,01\delta^2}).$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть $ab(a-b) \not\equiv 0 \pmod{q}$, $0 < a, b \leq \sqrt{q}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $K(N)$ – количество целых точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 \leq N$ таких, что

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + a}{q}\right) = \varepsilon_1, \quad \left(\frac{x^2 + y^2 + b}{q}\right) = \varepsilon_2.$$

Тогда при выполнении условий теоремы 8 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K(N) = \frac{\pi}{4}N + O(Nq^{-0,01\delta^2}).$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть $ab(a-b) \not\equiv 0 \pmod{q}$, $0 < a, b \leq \sqrt{q}$, $g(N)$ – количество целых точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 \leq N$ таких, что числа $x^2 + y^2 + a$ и $x^2 + y^2 + b$ являются первообразными корнями по модулю q . Пусть, далее, $q-1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение $q-1$ на простые сомножители. Тогда при выполнении условий теоремы 8 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$g(N) = \pi \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2 N + O(Nq^{-0,01\delta^2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА теорем 9–12 получаются из теорем 7 и 8 подобно тому, как были получены доказательства теорем 3–6 из теорем 1 и 2.

Список литературы

1. Карацуба А. А. Об одной арифметической сумме // ДАН СССР. 1971. Т. 199. № 4. С. 770–772.
2. Карацуба А. А. Асимптотика одной арифметической суммы // Матем. заметки. 1978. Т. 24. № 6. С. 737–740.
3. Карацуба А. А. Распределение степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях // ДАН СССР. 1970. Т. 196. № 4. С. 759–760.
4. Карацуба А. А. Распределение значений характеров Дирихле на аддитивных последовательностях // ДАН СССР. 1991. Т. 319. № 3. С. 543–544.
5. Карацуба А. А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // ДАН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1287–1289.
6. Карацуба А. А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 315–324.
7. Виноградов И. М. Sur la distribution des residues et des nonresidues des puissances // Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те. 1918. Т. 1. С. 94–98.
8. Виноградов И. М. О распределении квадратичных вычетов и невычетов // Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те. 1919. Т. 2. С. 1–16.
9. Виноградов И. М. Новые теоремы о распределении квадратичных вычетов // ДАН СССР. 1934. Т. 1. С. 289–290.
10. Виноградов И. М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p + k$ по простому модулю // Матем. сб. 1938. Т. 3(45). С. 311–320.
11. Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p + k)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. № 1. С. 197–210.
12. Виноградов И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p + k)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. № 2. С. 285–290.
13. Виноградов И. М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 3. С. 481–496.
14. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т. 1. М.: Мир, 1988.
15. Davenport H., Erdős P. The distribution of quadratic and higher residues // Publ. Math. Debrecen. 1952. V. 2. P. 152–165.
16. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 3. С. 475–483.