Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Кузьмин, Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. IV, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 2, 43–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/im284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:01:41

УДК 519.4

Л. В. Кузьмин

Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. IV

Продолжено исследование билинейной формы $U(K_n) \times U(K_n) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, $(x, y) \rightarrow \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \cdot \log y)$, где K_n пробегает все промежуточные подполя кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K , K – произвольное конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$ и $\log$ – ℓ -адический логарифм. Даны приложения к слабой гипотезе о ℓ -адическом регуляторе. В частности, эта гипотеза доказана для ℓ -расширений абелевых числовых полей.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Пусть K – поле алгебраических чисел и ℓ – фиксированное простое число. Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ – фундаментальная система единиц поля K . Определим для K ℓ -адический регулятор формулой

$$R_\ell(K) = \det(\text{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \cdot \log \varepsilon_j)) \in \mathbb{Q}_\ell, \quad 1 \leq i, j \leq t,$$

где $\log \varepsilon_i$ – элемент алгебры Галуа $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell = \prod_{v|\ell} K_v$, совпадающий с образом ε_i относительно композиции вложения групп единиц $U(K) \hookrightarrow \prod_{v|\ell} U(K_v)$ и отображения

$$\log : \prod_{v|\ell} U(K_v) \longrightarrow \prod_{v|\ell} K_v,$$

где K_v пробегает пополнения поля K относительно всех точек v , лежащих над ℓ , а $\log$ на каждой v -компоненте совпадает с отображением ℓ -адического логарифма. При этом $\text{Sp}_{K/\mathbb{Q}}$ означает след из алгебры $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ в $\mathbb{Q}_\ell$.

Если поле алгебраических чисел K содержит подполе k , то можно определить относительный ℓ -адический регулятор $R_\ell(K/k) \in \mathbb{Q}_\ell$. Именно, если $U(K/k)$ – группа относительных единиц расширения K/k и $u_1, \dots, u_r$ – некоторый базис этой группы, то положим

$$R_\ell(K/k) = \det(\text{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log u_i \cdot \log u_j)), \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

В [3] была высказана следующая гипотеза, являющаяся усилением гипотезы Леопольдта.

ГИПОТЕЗА (о ℓ -адическом регуляторе). *Для любого поля алгебраических чисел K и любого простого ℓ*

$$R_\ell(K) \neq 0.$$

Следующая гипотеза представляет аналогичное усиление слабой гипотезы Леопольдта.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 97-01-00516).

СЛАБАЯ ГИПОТЕЗА О ℓ -АДИЧЕСКОМ РЕГУЛЯТОРЕ. Пусть K – поле алгебраических чисел, ℓ – простое число, K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K и K_n – единственное промежуточное подполе расширения K_∞/K степени ℓ^n над K . Тогда существует индекс n_0 , зависящий только от K и ℓ , такой, что

$$R_\ell(K_n/K_{n_0}) \neq 0 \quad \text{для всех } n > n_0.$$

Первые нетривиальные результаты, относящиеся к этим гипотезам, были получены в [4]. Эти результаты были затем несколько усилены и обобщены в [5] и [6]. Во всех этих случаях фундаментальную роль играло описание билинейной формы

$$U(K_n) \times U(K_n) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell, \quad (x, y) \longrightarrow \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \cdot \log y), \quad (0.1)$$

где K – конечное круговое расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ и поля K_n пробегает все промежуточные подполя кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K .

Если K – круговое локальное поле, содержащее первообразный корень из единицы степени ℓ (степени 4 при $\ell = 2$), то $K_\infty = \bigcup_n H(\zeta_n)$, где H – некоторое конечное неразветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ и ζ_n – первообразный корень из единицы степени ℓ^{n+1} (степени 2^{n+2} при $\ell = 2$). Здесь и далее мы будем нумеровать промежуточные подполя расширения K_∞/K , полагая $K_n = H(\zeta_n)$. Пусть $V(K_n)$ – $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль мультипликативного модуля $U^{(1)}(K_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, порожденный группой главных единиц $U^{(1)}(K_n)$ и элементом $\ell^m \sqrt[m]{u_n}$ таким, что $u_n \in U(K_n)$ и $K_n(\ell^m \sqrt[m]{u_n})/K_n$ – неразветвленное расширение степени ℓ^m , где $m = n + 1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n + 2$ при $\ell = 2$. Очевидно, что произведение из формулы (0.1) по линейности продолжается на $V(K_n)$. Основным результатом об этой форме, доказанный в [8], формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 0.1. Для любого $n \geq 1$ справедливо равенство

$$(\gamma - 1)\Phi_n(\log V(K_n)) = \text{Ker } \text{Sp}_{K_n/K_0}(V(K_n)^\perp), \quad (0.2)$$

где Sp_{K_n/K_0} – след из поля K_n в K_0 ,

$$V(K_n)^\perp = \{x \in K_n \mid \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(x \cdot \log y) \in \mathbb{Z}_\ell \quad \text{для всех } y \in V(K_n)\},$$

γ – некоторая образующая группы Галуа $G(K_n/K_0)$ и

$$\Phi_n = \ell^{-m-1} \left[\delta' \text{Sp}_{K_n/H} + \ell \text{Sp}_{K_n/K_0} + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_n^{(i)} \right] \in \mathbb{Q}_\ell[G(K_n/H)].$$

Здесь $\mathcal{F}_n^{(i)} = \ell \text{Sp}_{K_n/K_{n-i}} - \text{Sp}_{K_n/K_{n-i-1}}$ и $\delta' = -1$ при $\ell \neq 2$, $\delta' = 0$ при $\ell = 2$.

Разумеется, эта теорема не может непосредственно обобщаться на случай, когда K – произвольное (неабелево) конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$. Это видно уже из того, что элемент Φ_n может не быть корректно определен в этом случае. Например, при малых значениях i поля K_i и K_{i+1} могут совпадать.

Тем не менее, всегда можно определить “усеченный” элемент

$$\Phi_n(q) \in \mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_q)]$$

(см. (1.5)), где q – некоторый индекс, зависящий только от поля K . При этом для любого $p \geq q$

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(q) = (\gamma_p - 1)\Phi_n,$$

где γ_p – некоторая образующая группы $G(K_n/K_p)$, и равенство выполняется во всех тех случаях, когда элемент Φ_n корректно определен.

Из теоремы 0.1 следует (теорема 1.2), что для кругового локального поля K и любого $p \geq q$

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(\log V(K_n)) = \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V(K_n)^\perp). \quad (0.3)$$

Это равенство имеет смысл (при подходящем p) уже для любого локального поля K , и можно поставить вопрос о его справедливости в общем случае. Однако, как мы увидим ниже, ответ на этот вопрос отрицателен.

Отметим, что при доказательстве теоремы 0.1 основная трудность связана с доказательством того, что левая часть (0.2) содержится в правой. В [7] эта часть доказательства теоремы 0.1 была обобщена (в более слабой форме) на случай произвольного локального числового поля K и была доказана

ТЕОРЕМА 0.2 (основная теорема из [7]). *Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Тогда существуют индекс p и неотрицательная константа C , зависящие только от K , такие, что для любого $n > p$ в $\mathbb{Z}_\ell$ -модуле $\log U(K_n)$ существует $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль M_n такой, что группа $\log U(K_n)/M_n$ конечна и может быть порождена не более чем Cn образующими, причем*

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(M_n) \subseteq U(K_n)^\perp.$$

Для дальнейшего использования удобно дать другую формулировку теоремы 0.2, которая, очевидно, эквивалентна первоначальной.

ТЕОРЕМА 0.3. *В условиях теоремы 0.2 существуют индекс p и неотрицательная константа c , зависящие только от K , такие, что*

$$d\left((\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) / ((\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) \cap \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp))\right) < cn,$$

где $V_n = V(K_n)$ и $d(A)$ – минимальное число образующих абелевой ℓ -группы A .

Цель данной работы – использовать теорему 0.3 для исследования билинейной формы (0.1) в случае неабелева локального поля K и, опираясь на эти результаты, доказать слабую гипотезу о ℓ -адическом регуляторе для некоторых типов полей алгебраических чисел.

В § 1 доказывается

ТЕОРЕМА 0.4 (теорема 1.1). *В обозначениях теоремы 0.2 имеет место равенство*

$$[(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V(K_n)) : \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V(K_n)^\perp)] = 1. \quad (0.4)$$

Аналогичное равенство в случае кругового локального поля K было доказано ранее в [8].

В §2 для характеристики меры несовпадения двух групп, входящих в (0.4), мы определяем две конечные группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ (см. (2.1) и (2.2)). Теорема 0.4 показывает, что эти группы имеют одинаковые порядки для всех $n > p$, а теорема 0.3 утверждает, что $d(\mathcal{A}_n^{(p)}) < cn$, т.е. минимальное число образующих этой группы растет не быстрее, чем логарифм степени поля K_n . Мы покажем, что, исходя из этих результатов, можно установить много других свойств групп $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$. Наиболее важные из этих результатов формулируются следующим образом.

ТЕОРЕМА 0.5 (теорема 2.1). *Для всех достаточно больших n выполняются равенства*

$$d(\mathcal{A}_n^{(p)}) = d(\mathcal{B}_n^{(p)}), \quad \mathcal{A}_n^{(p)} = \ell \mathcal{A}_{n+1}^{(p)}, \quad \mathcal{B}_n^{(p)} = \ell \mathcal{B}_{n+1}^{(p)}.$$

В §3 строятся примеры полей K , для которых группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ нетривиальны (при всех $p > q$ и всех достаточно больших n). Построение этих примеров основано на следующем соображении. Предположим, что при некотором p для данного поля K все группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ тривиальны. Это означает, что для любого K_n выполняется равенство (0.3). Мы доказываем (теорема 3.1), что тогда должно существовать невырожденное полуторалинейное произведение

$$V(K_\infty) \times V(K_\infty) \longrightarrow R_\infty, \quad (0.5)$$

где $V(K_\infty) = \varprojlim V(K_n)$ (предел относительно норменных отображений) и $R_\infty = \mathbb{Z}_\ell[[G(K_\infty/K_p)]] = \varprojlim \mathbb{Z}_\ell[G(K_n/K_p)]$. Заметим, что в [4] существование произведения (0.5) для круговых локальных полей было доказано другим способом. Произведение (0.5) является внутренним, т.е. индуцирует изоморфизм

$$\psi: V(K_\infty) \cong \text{Hom}_{R_\infty}(V(K_\infty), R_\infty), \quad \psi(y)(x) = (x, y) \in R_\infty.$$

Кроме того, для любого автоморфизма σ поля K_∞ над $\mathbb{Q}_\ell$ выполняется соотношение $(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y))$. Тогда согласно общей теореме двойственности для когомологий свободных R_∞ -модулей [5, теорема 4.2] получаем, что для любого конечного расширения Галуа L_∞/K_∞ с группой Галуа G должен существовать естественный изоморфизм

$$H^0(G, V(L_\infty)) \cong H^1(G, V(L_\infty)). \quad (0.6)$$

Условие (0.6) уже нетрудно привести к противоречию. Соответствующие примеры строятся в предложениях 3.2 и 3.3. Отметим, что в случае, когда поле L_∞ содержит все корни из единицы ℓ -примарной степени, группы когомологий, входящие в (0.6), всегда изоморфны как абелевы группы. Это связано с тем, что на модуле $V(L_\infty)$ существует другое произведение вида (0.5) [6, теорема 3.1], определяемое в терминах символа норменного вычета. Именно по этой причине противоречие, полученное в доказательстве предложения 3.3, состоит в том, что группы, входящие в (0.6), неизоморфны как модули Галуа.

Итак, в общем случае билинейные формы (0.1) нельзя объединить в одну конструкцию и получить произведение вида (0.5). Что же можно сделать?

В § 4 мы пытаемся ответить на этот вопрос. Пусть K – произвольное конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$. Для всех достаточно больших n в группе $V(K_n)$ определяется подмодуль Галуа $V'(K_n)$, удовлетворяющий для всех n условию $d(V(K_n)/V'(K_n)) < cn$, где c – некоторая константа, не зависящая от n . Для произвольного фиксированного натурального числа s мы строим (предложения 4.1 и 4.2) семейство произведений

$$\langle, \rangle_n^s : V(K_n)/\ell^s V(K_n) \times V'(K_n)/\ell^s V'(K_n) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^s \mathbb{Z} \quad (0.7)$$

по одному для каждого значения n , обладающих тем свойством, что для каждого произведения (0.7) порядки его ядер слева и справа ограничены величиной ℓ^{cns} , где c – константа, не зависящая от n .

В § 5 мы работаем с произвольным полем алгебраических чисел (конечным расширением $\mathbb{Q}$) и его круговым $\mathbb{Z}_\ell$ -расширением K_∞ . Для каждого промежуточного поля K_n рассматриваются его пополнения $K_{n,v}$ по всем $v \mid \ell$. Используя произведения (0.7), определенные для полей $K_{n,v}$, строим полулокальное произведение

$$\prod_{v \mid \ell} (V(K_{n,v})/\ell^s V(K_{n,v})) \times \prod_{v \mid \ell} (V'(K_{n,v})/\ell^s V'(K_{n,v})) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^s \mathbb{Z} \quad (0.8)$$

и выясняем связь произведения (0.8) с исходной формой (0.1). Мы описываем свойства произведения (0.8), приводим некоторые определения и результаты теории Ивасава, необходимые для дальнейшего, и даем (предложение 5.6) переформулировку слабой гипотезы о ℓ -адическом регуляторе, которая более удобна в техническом отношении.

В § 6, используя произведение (0.8) и предложение 5.6, мы доказываем наш основной результат, относящийся к слабой гипотезе о ℓ -адическом регуляторе (теорема 6.1). Эта теорема является обобщением [4, теорема 6.1] и доказывается примерно таким же способом. Основное отличие состоит в том, что вместо одного произведения вида (0.5) приходится рассматривать бесконечное семейство произведений (0.8).

Обе эти теоремы утверждают, что если для поля алгебраических чисел K , удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе для нечетного простого ℓ , то она справедлива и для любого конечного ℓ -расширения L поля K . В [4] мы были вынуждены предполагать, что поле L имеет абелевы пополнения относительно всех точек v , лежащих над ℓ . В данной работе это предположение не используется. Теорема 6.1 формулируется довольно громоздко, поэтому мы укажем здесь только два наиболее важных следствия из нее.

ТЕОРЕМА 0.6 (теорема 6.3). *Пусть ℓ – нечетное простое число и K – поле CM-типа, содержащее первообразный корень из единицы степени ℓ . Пусть K имеет тривиальный μ -инвариант Ивасава $\mu_\ell(K)$ и L – некоторое конечное ℓ -расширение поля K . Тогда для поля L справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе.*

ТЕОРЕМА 0.7 (ТЕОРЕМА 6.4). *Пусть $\ell \neq 2$, K – абелево поле алгебраических чисел и L – конечное ℓ -расширение поля K . Тогда для поля L справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе.*

В § 7 дается некоторый комментарий к полученным результатам и формулируется ряд открытых вопросов. Большая часть этих вопросов относится к строению

групп $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$. Отметим, что эти группы не вычислены полностью ни в одном нетривиальном случае.

Наши обозначения в основном стандартные и совпадают с обозначениями [4] и [7]. Иногда, когда это не может привести к недоразумениям, используются аддитивные обозначения для таких групп, как группа единиц и т.п. Если это не может привести к недоразумениям, то мы часто обозначаем различные константы одной и той же буквой c , поскольку в данной работе для нас важно само существование этих констант, а не их значение. Через ν_ℓ обозначается ℓ -адический показатель, нормированный условием $\nu_\ell(\ell) = 1$.

§ 1. Вычисление одного индекса

Используем следующие обозначения. Через ℓ обозначается произвольное, но фиксированное на протяжении всей работы простое число. Пусть K – произвольное конечное расширение поля рациональных ℓ -адических чисел $\mathbb{Q}_\ell$. Для целого неотрицательного n пусть ζ_n – первообразный корень из единицы степени ℓ^m , где

$$m = m(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ n + 2 & \text{при } \ell = 2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Предположим, что корни ζ_n согласованы для различных n условием $\zeta_{n+1}^\ell = \zeta_n$ для всех $n \geq 0$.

Положим $K_n = K(\zeta_n)$ и $K_\infty = \bigcup_{n \geq 0} K_n$. Пусть H – максимальное неразветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, содержащееся в K_∞ и $f = [H : \mathbb{Q}_\ell]$. Положим $k_n = H(\zeta_n)$ и $k_\infty = \bigcup_{n \geq 0} k_n$. Тогда k_∞ – максимальное круговое подполе поля K_∞ и $k_n \subseteq K_n$ для всех n . Пусть $\pi_n = 1 - \zeta_n$ – локальный параметр поля k_n и λ_n – некоторый локальный параметр поля K_n . Тогда существует индекс q , зависящий только от поля K , такой, что K_n/k_n является чисто разветвленным расширением конечной степени $e := [K_\infty : k_\infty]$ для всех $n \geq q$, и существует не зависящее от n целое неотрицательное число δ такое, что относительная дифферента $\mathcal{D}(K_n/k_n)$ для всех $n \geq q$ определяется равенством

$$\mathcal{D}(K_n/k_n) = (\lambda_n^\delta) \quad (1.2)$$

(см. [9] или [7, предложение 1.2]).

Пусть $U(K_n)$ – группа единиц поля K_n и $u_n \in U(K_n)$ – такой элемент, что поле $K_n(\sqrt[\ell^m]{u_n})$ является неразветвленным расширением степени ℓ^m поля K_n . Обозначим через $V(K_n)$ мультипликативную подгруппу в $U^{(1)}(K_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, порожденную группой главных единиц $U^{(1)}(K_n)$ и элементом $\sqrt[\ell^m]{u_n}$. Таким образом, группа $V(K_n)$ содержится в точной последовательности

$$1 \longrightarrow \mu(K_n) \longrightarrow U(K_n) \longrightarrow V(K_n) \longrightarrow V(K_n)/U(K_n) \longrightarrow 1, \quad (1.3)$$

где $\mu(K_n)$ – группа всех корней из единицы в поле K_n , а $V(K_n)/U(K_n)$ – циклическая группа порядка ℓ^m , изоморфная как модуль Галуа (неканонически) ℓ -компоненте $\mu_\ell(K_n) = \langle \zeta_n \rangle$ группы $\mu(K_n)$.

Отображение ℓ -адического логарифма $\log: U(K_n) \rightarrow K_n$ однозначно продолжается по линейности до инъективного отображения

$$\log: V(K_n) \hookrightarrow K_n. \quad (1.4)$$

Образы этих отображений являются полными решетками в K_n , т.е. свободно-конечно порожденными $\mathbb{Z}_\ell$ -модулями максимального ранга. Обозначим эти модули через $\log U(K_n)$ и $\log V(K_n)$ соответственно. Если поле K фиксировано, то вместо $U(K_n)$, $V(K_n)$ и т.д. мы будем просто писать U_n , V_n и т.д.

Пусть A_n – некоторая полная решетка в K_n . Положим

$$A_n^\perp = \{x \in K_n \mid \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(xy) \in \mathbb{Z}_\ell \text{ для всех } y \in A_n\},$$

где Sp – отображение следа. Очевидно, что $A_n^\perp$ снова является полной решеткой в K_n , причем $A_n^\perp \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A_n, \mathbb{Z}_\ell)$. Если A_n является модулем Галуа, то $A_n^\perp$ – также модуль Галуа, и последний изоморфизм является изоморфизмом модулей Галуа (с тривиальным действием группы Галуа на $\mathbb{Z}_\ell$). В частности, определены решетки $(\log U_n)^\perp$ и $(\log V_n)^\perp$, которые мы будем обозначать через $U_n^\perp$ и $V_n^\perp$.

Для $0 \leq i \leq n - q - 1$ положим

$$\mathcal{F}_n^{(i)} = \ell \text{Sp}_{K_n/K_{n-i}} - \text{Sp}_{K_n/K_{n-i-1}}.$$

Элемент $\mathcal{F}_n^{(i)}$ можно рассматривать как оператор, действующий на K_n , а также на различные подрешетки в K_n , например, на $\log V_n$ и $V_n^\perp$. Кроме того, $\mathcal{F}_n^{(i)}$ можно естественным образом рассматривать как элемент групповой алгебры $\mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_q)]$. Положим

$$\Phi_n(q) = \ell^{-m-1} \sum_{i=0}^{n-q-1} \mathcal{F}_n^{(i)} \in \mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_q)]. \quad (1.5)$$

Если A , B – некоторые абелевы группы такие, что $A \cap B$ имеет конечный индекс и в A , и в B , то мы полагаем $[A : B] := [A : A \cap B][B : A \cap B]^{-1}$. Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, поля K_n и решетки $\log V_n$ и $V_n^\perp$ определены, как выше. Пусть $\Phi_n(q)$ – элемент, определенный в (1.5). Тогда для любого p ($q \leq p < n$) справедливо равенство*

$$[(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) : \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp)] = 1,$$

где γ_p – некоторая фиксированная образующая группы Галуа $G(K_n/K_p)$ и $\text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp)$ – ядро отображения следа $\text{Sp}_{K_n/K_p} : V_n^\perp \rightarrow K_p$.

Доказательство этой теоремы будет дано в виде ряда лемм.

ЛЕММА 1.1. *Пусть $\mathcal{O}_n$ – кольцо целых поля K_n . Тогда*

$$[\mathcal{O}_n : \log U_n] = |\overline{K}_n| \cdot |\mu_\ell(K_n)| = \ell^{f+m},$$

где $\overline{K}_n$ – поле вычетов поля K_n и $|A|$ означает мощность конечного множества A .

Эта лемма может быть доказана с помощью тех же рассуждений, что и лемма 1.6 в [4].

ЛЕММА 1.2. Пусть $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}(K_n/\mathbb{Q}_\ell)$ – абсолютная дифферента поля K_n . Тогда

$$[\mathcal{D}_n^{-1} : \mathcal{O}_n] = \ell^{t(n)}, \quad (1.6)$$

где $t(n) = f[\delta + e\ell^{m-1}(m(\ell-1)-1)]$, m определено в (1.1), δ определено в (1.2) и $e = [K_n : k_n] = [K_\infty : k_\infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что дифферента $\mathcal{D}(k_n)$ кругового поля k_n определяется формулой

$$\mathcal{D}(k_n) = \begin{cases} (\pi_0^{-1}\ell^m) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (\ell^{m-1}) & \text{при } \ell = 2, \end{cases}$$

где $\pi_0 = 1 - \zeta_0$. Поскольку $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}(K_n/k_n)\mathcal{D}(k_n)$, мы получаем из (1.2)

$$\mathcal{D}_n = \begin{cases} (\lambda_n^\delta \pi_0^{-1}\ell^m) & \text{при } \ell \neq 2, \\ (\lambda_n^\delta \ell^{m-1}) & \text{при } \ell = 2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Учитывая, что $[\mathcal{D}_n^{-1} : \mathcal{O}_n] = N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\mathcal{D}_n)$, $N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\lambda_n) = \ell^f$, $N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\pi_0) = \ell^{ef\ell^{m-1}}$ и $N_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\ell) = \ell^{ef(\ell-1)\ell^{m-1}}$, мы получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 1.3. Для любого $n \geq q$ справедливо равенство

$$[V_n^\perp : \log V_n] = \ell^{t(n)+2f}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место равенство

$$[V_n^\perp : \log V_n] = [V_n^\perp : \mathcal{O}_n^\perp][\mathcal{O}_n^\perp : \mathcal{O}_n][\mathcal{O}_n : \log V_n].$$

Из (1.3) следует, что $[\log V_n : \log U_n] = \ell^m$, что вместе с леммой 1.1 дает $[\mathcal{O}_n : \log V_n] = \ell^f$. Учитывая, что $\mathcal{O}_n^\perp = \mathcal{D}_n^{-1}$, $[V_n^\perp : \mathcal{O}_n^\perp] = [\mathcal{O}_n : \log V_n]$, и применяя лемму 1.2, мы получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 1.4. Для любых $n > p \geq q$ справедливо равенство

$$[\text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) : (\gamma_p - 1)(\log V_n)] = \ell^{t(n)-t(p)}, \quad (1.8)$$

где $t(n)$ и $t(p)$ определяются формулой (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что след Sp_{K_n/K_p} индуцирует отображение $\beta: \log V_n \rightarrow \log V_p$, а вложение $K_p \hookrightarrow K_n$ индуцирует естественное вложение $\log V_p \hookrightarrow \log V_n$. Если $x \in V_n^\perp$, то $\text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(xy) \in \mathbb{Z}_\ell$ для всякого $y \in \log V_n$. Следовательно, для любого $y \in \log V_p$ мы имеем $\text{Sp}_{K_p/\mathbb{Q}_\ell}(\text{Sp}_{K_n/K_p}(x) \cdot y) = \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(xy) \in \mathbb{Z}_\ell$, т.е. отображение Sp_{K_n/K_p} индуцирует отображение

$$\alpha: V_n^\perp \longrightarrow V_p^\perp. \quad (1.9)$$

Отметим, что $\text{Ker } \alpha = \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp)$, а $\text{Ker } \beta = \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(\log V_n)$.

Рассмотрим пару точных последовательностей

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) \longrightarrow V_n^\perp \xrightarrow{\alpha} V_p^\perp, \\ 0 &\longrightarrow \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(\log V_n) \longrightarrow \log V_n \xrightarrow{\beta} \log V_p. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Используя точную последовательность (1.3) и учитывая, что группы $\mu(K_n)$ и $\mu_\ell(K_n)$ – когомологически тривиальные G -модули, где $G = G(K_n/K_p)$, мы получаем, что для всех i

$$H^i(G, \log V_n) \cong \mathbb{Z}/\ell^{n-p}\mathbb{Z}. \quad (1.11)$$

В силу двойственности из (1.11) следует, что для всех i

$$H^i(G, V_n^\perp) \cong \mathbb{Z}/\ell^{n-p}\mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Из (1.3) и когомологической тривиальности G -модуля $\mu(K_n)$ следует, что эпиморфизм $U_n \rightarrow \log U_n$ индуцирует эпиморфизм $U_p = U_n^G \rightarrow (\log U_n)^G$. Следовательно, отображение следа

$$\mathrm{Sp}_{K_n/K_p} : \log U_n \longrightarrow \log U_p$$

имеет коядро порядка ℓ^{n-p} . Снова используя (1.3) и когомологическую тривиальность G -модуля $\mu_\ell(K_n)$, мы получаем, что

$$|\mathrm{Coker} \beta| = \ell^{n-p}. \quad (1.13)$$

Отображение β по двойственности индуцирует вложение, согласованное с вложением $K_p \hookrightarrow K_n$,

$$\widehat{\beta} : V_p^\perp \longrightarrow V_n^\perp,$$

причем (1.13) означает, что $[(V_n^\perp)^G : \widehat{\beta}(V_p^\perp)] = \ell^{n-p}$. Поскольку из (1.12) следует, что

$$[(V_n^\perp)^G : \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(V_n)^\perp] = \ell^{n-p},$$

мы получаем, что α является эпиморфизмом. Аналогичное рассуждение показывает, что для любой пары индексов t, s ($t > s \geq p$) естественное отображение

$$\mathrm{Sp}_{K_t/K_s} : V_t^\perp \longrightarrow V_s^\perp \quad (1.14)$$

является эпиморфизмом. Тогда из (1.10) следует, что

$$\begin{aligned} & [\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) : \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(\log V_n)] \\ &= [V_n^\perp : \log V_n] [\mathrm{Im} \alpha : \mathrm{Im} \beta]^{-1} = [V_n^\perp : \log V_n] [V_p^\perp : \log V_p]^{-1} \ell^{p-n}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.3, мы получаем

$$[\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) : \mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(\log V_n)] = \ell^{t(n)-t(p)+p-n}. \quad (1.15)$$

Учитывая, что

$$[\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(\log V_n) : (\gamma_p - 1)(\log V_n)] = |H^{-1}(G, \log V_n)| = \ell^{n-p},$$

из (1.15) следует равенство (1.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. *Для любых $n > p \geq q$ справедливо равенство*

$$[(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) : (\gamma_p - 1)(\log V_n)] = \ell^{t(n)-t(p)}, \quad (1.16)$$

где $t(n)$ и $t(p)$ определены, как в (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном n положим

$$A = \{x \in K_n \mid \mathrm{Sp}_{K_n/K_p}(x) = 0\}$$

и для $i = n-1, n-2, \dots, p$ положим

$$A^{(i)} = \{x \in K_{i+1} \mid \mathrm{Sp}_{K_{i+1}/K_i}(x) = 0\}.$$

Тогда $A = (\gamma_p - 1)K_n$, и для любого $i = n-1, n-2, \dots, p$ вложение $K_{i+1} \hookrightarrow K_n$ индуцирует вложение $\mathbb{Q}_\ell$ -пространств $A^{(i)} \hookrightarrow A$. Легко видеть, что

$$A = \bigoplus_{i=p}^{n-1} A^{(i)}. \quad (1.17)$$

Учитывая, что $\dim A^{(i)} = [K_{i+1} : \mathbb{Q}_\ell] - [K_i : \mathbb{Q}_\ell]$, мы получаем, что

$$\dim A^{(i)} = ef(\ell - 1)^2 \ell^{m(i)-1}. \quad (1.18)$$

Из явного вида элемента $\Phi_n(q)$ в (1.5) следует, что этот элемент действует на каждое из пространств $A^{(i)}$ для $i = n-1, n-2, \dots, p$ умножением на некоторое λ_i , где

$$\lambda_i = \ell^{-m(i)-1}. \quad (1.19)$$

Таким образом, элемент $\Phi_n(q)$ обратим на пространстве A , и индекс в (1.16) равен $(\det \Phi_n(q))^{-1}$, где $\det \Phi_n(q)$ – определитель оператора $\Phi_n(q)$ на пространстве A . Из (1.17) и (1.19) следует, что

$$\det \Phi_n(q) = \prod_{i=p}^{n-1} \lambda_i^{\dim A^{(i)}}. \quad (1.20)$$

Подставляя в (1.20) значения для $\dim A^{(i)}$ из (1.18), мы получаем, что

$$\det \Phi_n(q) = \ell^{w_n},$$

где

$$w_n = ef(\ell - 1)^2 \sum_{i=p}^{n-1} (-m(i) - 1) \ell^{m(i)-1}. \quad (1.21)$$

Если $\ell \neq 2$, то $m(i) = i + 1$ и

$$w_n = ef(\ell - 1)^2 \sum_{i=p}^{n-1} (-i - 2) \ell^i.$$

Положим $s(n) = (\ell - 1)^2 \sum_{i=1}^n i \ell^i$. Тогда при $\ell \neq 2$

$$w_n = ef \left[-s(n-1) + s(p-1) - 2(\ell - 1)^2 \sum_{i=p}^{n-1} \ell^i \right].$$

Легко видеть, что

$$(\ell - 1) \sum_{i=p}^{n-1} \ell^i = \ell^n - \ell^p.$$

Далее,

$$\begin{aligned} s(n) &= (\ell - 1)^2 [\ell + 2\ell^2 + \dots + n\ell^n] \\ &= (\ell - 1)^2 \left[\ell \frac{\ell^n - 1}{\ell - 1} + \ell^2 \frac{\ell^{n-1} - 1}{\ell - 1} + \dots + \ell^{n-1} \frac{\ell - 1}{\ell - 1} \right] \\ &= (\ell - 1) [n\ell^{n+1} - (\ell + \ell^2 + \dots + \ell^n)] = (\ell - 1)n\ell^{n+1} - \ell^{n+1} + \ell. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\ell \neq 2$

$$\begin{aligned} w_n &= ef [-2(\ell - 1)(\ell^n - \ell^p) - (\ell - 1)(n - 1)\ell^n + \ell^n + (\ell - 1)(p - 1)\ell^p - \ell^p] \\ &= ef [-((\ell - 1)(n + 1) - 1)\ell^n + ((\ell - 1)(p + 1) - 1)\ell^p]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $m(n) = n + 1$ при $\ell \neq 2$, мы получаем из (1.6)

$$-w_n = t(n) - t(p),$$

что доказывает лемму в случае $\ell \neq 2$.

Если $\ell = 2$, то, учитывая, что $m(i) = i + 2$ и $(\ell - 1) = 1$, мы получаем из (1.21)

$$w_n = ef \sum_{i=p}^{n-1} (-i - 3)\ell^{i+1}.$$

Следовательно, при $\ell = 2$

$$\begin{aligned} w_n &= ef \left[-s(n) + s(p) - 2 \sum_{i=p}^{n-1} \ell^{i+1} \right] \\ &= -(n + 1)\ell^{n+1} + (p + 1)\ell^{p+1} = -(t(n) - t(p)). \end{aligned}$$

Лемма доказана полностью.

Теперь наша теорема непосредственно следует из лемм 1.4 и 1.5.

В качестве простого следствия из теоремы 1.1 мы докажем следующее обобщение теоремы 0.1 из введения.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть K – круговое поле. Тогда для любого $p \geq 0$ и любого $n > p$ выполняется равенство

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(\log V_n) = \text{Ker } \text{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и в теореме 0.1, γ – некоторая образующая группы Галуа $G(K_n/K_0)$, так что выполняется равенство $\gamma_p = \gamma^{\ell^p}$. Пусть $x \in (\gamma_p - 1) \times \Phi_n(\log V_n)$. Учитывая, что $(\gamma_p - 1) = (\gamma - 1) \cdot \nu$, где $\nu = 1 + \gamma + \dots + \gamma^{\ell^p - 1}$, мы получаем, что $x = \nu(y)$ для некоторого $y \in (\gamma - 1)\Phi_n(\log V_n)$. Тогда по теореме 0.1 $y \in \text{Ker } \text{Sp}_{K_n/K_0}(V_n^\perp)$. Так как $\text{Sp}_{K_n/K_0} = \nu \cdot \text{Sp}_{K_n/K_p} = \text{Sp}_{K_n/K_p} \cdot \nu$, мы получаем, что $\text{Sp}_{K_n/K_p}(x) = \text{Sp}_{K_n/K_p} \cdot \nu(y) = \text{Sp}_{K_n/K_0}(y) = 0$. Следовательно,

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(\log V_n) \subseteq \text{Ker } \text{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp).$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 1.1.

§ 2. Группы $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{B}_n$

Доказанная в § 1 теорема 1.1 показывает, что при фиксированном $p \geq q$ и $n > p$ любое из включений

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) \subseteq \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp)$$

или

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) \supseteq \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp)$$

влечет совпадение этих двух групп. В дальнейшем мы встретим случаи, когда эти группы не совпадают, и для обсуждения этой ситуации мы введем группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$, характеризующие меру этого несовпадения. Положим

$$\mathcal{A}_n^{(p)} = (\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) / \mathcal{M}_n^{(p)}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{B}_n^{(p)} = \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) / \mathcal{M}_n^{(p)}, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{M}_n^{(p)} = (\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) \cap \text{Ker Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp)$. Теорема 1.1 показывает, что для любых $n \geq p \geq q$ справедливо равенство

$$|\mathcal{A}_n^{(p)}| = |\mathcal{B}_n^{(p)}|. \quad (2.3)$$

Если нам нужно будет явно указать зависимость от расширения K_∞/K , то мы будем вместо $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ писать $\mathcal{A}^{(p)}(K_n)$ и $\mathcal{B}^{(p)}(K_n)$ соответственно.

Непосредственно из определения этих групп следует, что они могут быть отличны от нуля только при $n > p$. Очевидно также, что группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ являются модулями Галуа.

Пусть заданы два индекса t, s ($t > s \geq p$). Тогда естественное вложение $K_s \hookrightarrow K_t$ индуцирует вложения $V_s \hookrightarrow V_t$ и $V_s^\perp \hookrightarrow V_t^\perp$, а следовательно, и вложение

$$\text{Ker Sp}_{K_s/K_p}(V_s^\perp) \hookrightarrow \text{Ker Sp}_{K_t/K_p}(V_t^\perp). \quad (2.4)$$

Учитывая, что $\Phi_s(q)(x) = \Phi_t(q)(x)$ для любого $x \in K_s$, мы получаем естественное вложение

$$(\gamma_p - 1)\Phi_s(q)(\log V_s) \hookrightarrow (\gamma_p - 1)\Phi_t(q)(\log V_t). \quad (2.5)$$

Вложения (2.4) и (2.5) индуцируют естественные отображения

$$i_{s,t}: \mathcal{A}_s^{(p)} \longrightarrow \mathcal{A}_t^{(p)}, \quad (2.6)$$

$$i'_{s,t}: \mathcal{B}_s^{(p)} \longrightarrow \mathcal{B}_t^{(p)}. \quad (2.7)$$

Отображение следа из K_t в K_s индуцирует естественные отображения $V_t \rightarrow V_s$ и $V_t^\perp \rightarrow V_s^\perp$. Поскольку $\text{Sp}_{K_t/K_s}(\Phi_t(q)(x)) = \Phi_s(q)(\text{Sp}_{K_t/K_s}(x))$ для любого $x \in K_t$, мы получаем, что след Sp_{K_t/K_s} индуцирует естественные отображения

$$(\gamma_p - 1)\Phi_t(q)(\log V_t) \longrightarrow (\gamma_p - 1)\Phi_s(q)(\log V_s), \quad (2.8)$$

$$\text{Ker Sp}_{K_t/K_p}(V_t^\perp) \longrightarrow \text{Ker Sp}_{K_s/K_p}(V_s^\perp), \quad (2.9)$$

которые, в свою очередь, индуцируют естественные отображения

$$N_{t,s}: \mathcal{A}_t^{(p)} \longrightarrow \mathcal{A}_s^{(p)}, \quad (2.10)$$

$$N'_{t,s}: \mathcal{B}_t^{(p)} \longrightarrow \mathcal{B}_s^{(p)}. \quad (2.11)$$

Очевидно, что отображения $i_{s,t} \cdot N_{t,s}: \mathcal{A}_t^{(p)} \longrightarrow \mathcal{A}_t^{(p)}$ и $i'_{s,t} \cdot N'_{t,s}: \mathcal{B}_t^{(p)} \longrightarrow \mathcal{B}_t^{(p)}$ совпадают с отображением следа относительно действия группы Галуа $G(K_t/K_s)$.

Предложение 2.1. *Для любых $t > s \geq p$ отображения (2.10) и (2.11) эпиморфны.*

Доказательство. Учитывая, что при любом $n > p$ группы $\mu(K_n)$ и $\mu_\ell(K_n)$ кохомологически тривиальны как $G(K_n/K_p)$ -модули, мы получаем из точной последовательности (1.3), что $G(K_n/K_p)$ -модули $U(K_n)$ и $V(K_n)$ имеют изоморфные группы кохомологий. Тогда, применяя локальную теорию полей классов и учитывая, что расширение K_∞/K_p чисто разветвлено, мы получаем для любого $n > p$ канонический эпиморфизм $\varphi_n: V_n \longrightarrow G(K_\infty/K_n) \cong \mathbb{Z}_\ell$, ядро которого $V_n^{(0)}$ определяется формулой

$$V_n^{(0)} := \text{Ker } \varphi_n = \bigcap_{t>n} N_{K_t/K_n}(V_t), \quad (2.12)$$

где N_{K_t/K_n} — норма из $K_t^\times$ в $K_n^\times$.

Из локальной теории полей классов следует, что для любых $t > s \geq p$ отображение N_{K_t/K_s} индуцирует эпиморфизм

$$N_{K_t/K_s}: V_t^{(0)} \longrightarrow V_s^{(0)}, \quad (2.13)$$

а естественное вложение $i_{s,t}: V_s \rightarrow V_t$ индуцирует изоморфизм между $\text{Im } \varphi_s$ и $\text{Im } \varphi_t$. В частности, если мы зафиксируем некоторое разложение в прямую сумму $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $V_p \cong V_p^{(0)} \oplus X$, где $X \cong \mathbb{Z}_\ell$ и φ_p изоморфно отображает X на $G(K_\infty/K_p)$, то, полагая $X_t = i_{p,t}(X)$, мы получаем для любого $t \geq p$ разложение в прямую сумму $G(K_t/K_p)$ -модулей

$$V_t \cong V_t^{(0)} \oplus X_t. \quad (2.14)$$

Если $x \in \mathcal{A}_s^{(p)}$, то согласно (2.1) $x = (\gamma_p - 1)\Phi_s(q)(y) \bmod \mathcal{M}_s$ для некоторого $y \in \log V_s$. Из существования разложения (2.14) следует, что найдется $y_1 \in \log V_s^{(0)}$ такой, что $(\gamma_p - 1)(y_1) = (\gamma_p - 1)(y)$. В силу эпиморфности отображения (2.13) существует элемент $z \in \log V_t^{(0)}$ такой, что $\text{Sp}_{K_t/K_s}(z) = y_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{K_t/K_s}((\gamma_p - 1)\Phi_t(q)(z)) &= \Phi_s(q) \text{Sp}_{K_t/K_s}((\gamma_p - 1)(z)) \\ &= \Phi_s(q)(\gamma_p - 1)(y_1) = (\gamma_p - 1)\Phi_s(q)(y), \end{aligned}$$

что доказывает эпиморфность отображения (2.10).

Для проверки эпиморфности отображения (2.11) мы заметим, что отображение $\alpha': V_t^\perp \rightarrow V_s^\perp$, определенное, как в (1.9), является эпиморфизмом (это было показано в доказательстве леммы 1.4) и индуцирует эпиморфизм

$$\text{Sp}_{K_t/K_s}: \text{Ker } \text{Sp}_{K_t/K_p}(V_t^\perp) \longrightarrow \text{Ker } \text{Sp}_{K_s/K_p}(V_s^\perp),$$

откуда следует эпиморфность (2.11). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для любых $t > s \geq p$ отображения (2.6) и (2.7) мономорфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathcal{A}_s^{(p)}$, $x \neq 0$ и $\bar{x}$ — некоторый представитель x в группе $(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_s)$. Условие $x \neq 0$ означает, что $\bar{x} \notin \text{Ker } \text{Sp}_{K_s/K_p}(V_s^\perp)$, но тогда $\bar{x} \notin V_s^\perp$. Следовательно, существует элемент $y \in \log V_s$ такой, что $\text{Sp}_{K_s/\mathbb{Q}_\ell}(\bar{x} \cdot y) \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}$. Учитывая, что $\bar{x} \in (\gamma_p - 1)K_s$, и принимая во внимание существование разложения (2.14), мы получаем, что существует $y_1 \in \log V_s^{(0)}$ такой, что $\text{Sp}_{K_s/\mathbb{Q}_\ell}(\bar{x} \cdot y_1) \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}$. В силу эпиморфности отображения (2.13) существует элемент $z \in \log V_t^{(0)}$ такой, что $\text{Sp}_{K_t/K_s}(z) = y_1$. Тогда

$$\text{Sp}_{K_t/\mathbb{Q}_\ell}(\bar{x} \cdot z) = \text{Sp}_{K_s/\mathbb{Q}_\ell}(\bar{x} \cdot y_1) \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell},$$

т.е. $\bar{x} \notin V_t^\perp$ и $i_{s,t}(x) \neq 0$, что доказывает мономорфность отображения (2.6).

Для доказательства мономорфности отображения (2.7) заметим, что условие $x \in \mathcal{B}_s^{(p)}$, $x \neq 0$, означает, что существует представитель $\bar{x} \in \text{Ker } \text{Sp}_{K_s/K_p}(V_s^\perp)$ элемента x такой, что

$$\bar{x} \notin (\gamma_p - 1)\Phi_s(q)(\log V_s). \quad (2.15)$$

Выполнение равенства $i_{s,t}(x) = 0$ означало бы, что существует элемент $y \in \log V_t$ такой, что

$$\bar{x} = (\gamma_p - 1)\Phi_t(q)(y). \quad (2.16)$$

Как было показано в доказательстве леммы 1.5, имеется разложение в прямую сумму $\mathbb{Q}_\ell$ -пространств $K_t = K_s \oplus (\gamma_s - 1)K_t$, причем оператор $(\gamma_p - 1)\Phi_t(q)$ обратим на пространстве $(\gamma_s - 1)K_t$. Если $y = y_1 \oplus y_2$, где $y_1 \in K_s$ и $y_2 \in (\gamma_s - 1)K_t$, то равенство (2.16) вместе с условием $\bar{x} \in K_s$ означает, что $(\gamma_p - 1)\Phi_t(q)(y_2) = 0$, откуда следует, что $y_2 = 0$, т.е. $y \in K_s$. Тогда $y \in (\log V_t)^{G(K_t/K_s)} = \log V_s$, что противоречит (2.15). Предложение доказано.

Доказанные теорема 1.1 и предложения 2.1 и 2.2 показывают корректность следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы будем говорить, что поле K имеет p -тип A , если выполнено любое из следующих двух эквивалентных условий:

- (i) $\mathcal{A}_n^{(p)} = 0$ для всех $n > p$;
- (ii) $\mathcal{B}_n^{(p)} = 0$ для всех $n > p$.

Мы будем говорить, что поле K имеет p -тип B , если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- (iii) существует индекс $n > p$ такой, что $\mathcal{A}_n^{(p)} \neq 0$;
- (iv) $\mathcal{A}_n^{(p)} \neq 0$ для всех достаточно больших n ;
- (v) существует индекс $n > p$ такой, что $\mathcal{B}_n^{(p)} \neq 0$;
- (vi) $\mathcal{B}_n^{(p)} \neq 0$ для всех достаточно больших n .

Действительно, согласно теореме 1.1 $|\mathcal{A}_n^{(p)}| = |\mathcal{B}_n^{(p)}|$ для любого $n > p$, что доказывает эквивалентность условий в каждой из пар (i) и (ii); (iii) и (v); (iv) и (vi). Эквивалентность условий (iii) и (iv) (а также условий (v) и (vi)) следует как из предложения 2.1, так и из предложения 2.2.

Теорема 1.2 означает, что любое круговое локальное поле K имеет p -тип A для любого $p \geq 0$. В § 3 будут построены примеры полей K , имеющих p -тип B для любого p . Пока же мы исследуем поведение групп $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ при фиксированном p и растущем n .

Предложение 2.3. *Для поля K и $n > p$ рассмотрим отображения*

$$N_{n,n-1}: \mathcal{A}_n^{(p)} \longrightarrow \mathcal{A}_{n-1}^{(p)}, \quad (2.17)$$

$$i_{n-1,n}: \mathcal{A}_{n-1}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{A}_n^{(p)}, \quad (2.18)$$

которые определены, как в (2.10) и (2.6) соответственно.

Тогда найдется индекс n_0 , зависящий только от поля K , такой, что для всех $n > n_0$ справедливы равенства

$$\text{Ker } N_{n,n-1} = \ell \mathcal{A}_n^{(p)}, \quad (2.19)$$

$$\text{Im } i_{n-1,n} = \ell \mathcal{A}_n^{(p)}, \quad (2.20)$$

где для абелевой группы A через ℓA обозначается подгруппа всех элементов, аннулируемых умножением на ℓ .

Доказательство. Определение групп $\mathcal{A}_n^{(p)}$, данное в (2.1), показывает, что теорема 0.3 из введения эквивалентна существованию индекса p и константы c , зависящих только от поля K , таких, что при всех $n > p$ минимальное число образующих $d(\mathcal{A}_n^{(p)})$ группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ удовлетворяет неравенству

$$d(\mathcal{A}_n^{(p)}) < cn. \quad (2.21)$$

Следующая лемма показывает, что неравенство (2.21) накладывает определенные ограничения на строение $\mathcal{A}_n^{(p)}$ как $G(K_n/K_p)$ -модуля при всех достаточно больших n .

Лемма 2.1. *Пусть $G = \langle \gamma \rangle$ – конечная циклическая ℓ -группа, действующая на конечную абелеву ℓ -группу A периода ℓ и порядка ℓ^n . Пусть r – натуральное число, удовлетворяющее условию $\ell^r > n$, или, что эквивалентно, $r > \log_\ell n$, где $\log_\ell$ – вещественный логарифм по основанию ℓ .*

Тогда элемент γ^{ℓ^r} действует на группу A тождественно.

Доказательство. Рассмотрим нижний центральный ряд G -модуля A

$$A \supseteq (\gamma - 1)A \supseteq (\gamma - 1)^2 A \supseteq \dots \supseteq (\gamma - 1)^{k-1} A \supseteq (\gamma - 1)^k A = 0.$$

В силу леммы Накаямы равенство $(\gamma - 1)^i A = (\gamma - 1)^{i+1} A$ означает, что $(\gamma - 1)^i A = 0$. Следовательно, мы можем предполагать, что $(\gamma - 1)^i A / (\gamma - 1)^{i+1} A \neq 0$ для $i = 0, 1, \dots, k-1$. Поскольку $|A| = \ell^n$, получаем, что $k \leq n$, т.е. $(\gamma - 1)^n A = 0$. Если $\ell^r > n$, то и $(\gamma - 1)^{\ell^r} A = 0$. С другой стороны, в групповом кольце $\mathbb{Z}[G]$ справедливо сравнение $(\gamma - 1)^{\ell^r} \equiv \gamma^{\ell^r} - 1 \pmod{\ell}$, поэтому из условия $\ell A = 0$ следует, что $(\gamma^{\ell^r} - 1)A = (\gamma - 1)^{\ell^r} A = 0$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения. Пусть $d_n := d(\mathcal{A}_n^{(p)})$ – минимальное число образующих абелевой ℓ -группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$. Согласно (2.21) $d_n < cn$ для всех $n > p$. Выберем индекс n_0 , удовлетворяющий неравенству

$$n_0 - p > \begin{cases} \log_\ell(cn_0) + 1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ \log_\ell(cn_0) + 2 & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

Тогда для любого $n \geq n_0$ справедливо неравенство

$$n - p > \begin{cases} \log_\ell(cn) + 1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ \log_\ell(cn) + 2 & \text{при } \ell = 2. \end{cases} \quad (2.22)$$

Для целого неотрицательного i положим ${}_{\ell^i}\mathcal{A}_n^{(p)} = \{x \in \mathcal{A}_n^{(p)} \mid \ell^i x = 0\}$. Из (2.21) следует, что $\log_\ell(|{}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}|) = d_n \leq cn$ при всех $n > p$. Группа ${}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$ является $G(K_n/K_p)$ -модулем, и лемма 2.1 вместе с (2.22) показывают, что группа Галуа $G = G(K_n/K_{n-1})$ действует тождественно на ${}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Эти же аргументы показывают, что G действует тождественно и на группу ${}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}/{}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Это означает, что для произвольной фиксированной образующей σ группы G и любого $x \in {}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}$ мы имеем

$$\sigma(x) = x + a, \quad \sigma^r(x) = x + ra \quad \text{для некоторого } a \in {}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}. \quad (2.23)$$

Если $\ell \neq 2$, то из (2.23) следует, что для любого $x \in {}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}$

$$\text{Sp}_G(x) = \ell x + a \sum_{i=1}^{\ell-1} i = \ell x + a \frac{\ell(\ell-1)}{2} = \ell x.$$

Следовательно, отображение Sp_G совпадает на ${}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}$ с умножением на ℓ и имеет в качестве ядра группу ${}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Тогда и ядро отображения $\text{Sp}_G: \mathcal{A}_n^{(p)} \rightarrow \mathcal{A}_n^{(p)}$ совпадает с ${}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Поскольку $\text{Sp}_G = i_{n-1,n} \cdot N_{n,n-1}$ и $i_{n-1,n}$ является мономорфизмом согласно предложению 2.2, мы получаем, что $\text{Ker } N_{n,n-1} = \text{Ker } \text{Sp}_G = {}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Это доказывает формулу (2.19) при $\ell \neq 2$.

Если $\ell = 2$, то в силу (2.22) группа $G(K_n/K_{n-2})$ действует тождественно на группу ${}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Пусть $G(K_n/K_{n-2}) = \langle \sigma \rangle$. Тогда для любого $x \in {}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}$ мы имеем $\sigma(x) = x + a$ для некоторого $a \in {}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Следовательно, $\sigma^2(x) = x$, т.е. группа $G = G(K_n/K_{n-1})$ действует тождественно на ${}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}$. Тогда Sp_G совпадает на ${}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}$ с умножением на ℓ , откуда, как и в случае $\ell \neq 2$, следует формула (2.19).

Для доказательства формулы (2.20) мы применим аналогичные рассуждения к группе $B := \mathcal{A}_n^{(p)}/{}_{\ell^2}\mathcal{A}_n^{(p)}$ и получим, что Sp_G на B совпадает с умножением на ℓ при $n > n_0$. Заметим, что $\text{Sp}_G: B \rightarrow B$ разлагается в композицию отображений $B \xrightarrow{N} B \xrightarrow{i} B$, где N индуцировано отображением $N_{n,n-1}$ и, следовательно, эпиморфно согласно предложению 2.1, а i индуцировано отображением $i_{n-1,n}$. Тогда $\text{Im } \text{Sp}_G = \ell B = \text{Im } i$, откуда следует, что $\text{Im } i_{n-1,n} = {}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$, что доказывает (2.20). Предложение доказано.

Мы не можем непосредственно применить этот же подход для изучения групп $\mathcal{B}_n^{(p)}$, поскольку в настоящий момент не имеем оценки вида (2.21) для минимального числа образующих $d(\mathcal{B}_n^{(p)})$, поэтому мы пойдем окольным путем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть n_0 имеет тот же смысл, что и в предложении 2.3. Тогда для всех $n > n_0$ справедливо неравенство

$$\nu_\ell(|\mathcal{A}_n^{(p)}|) \leq c_1 + \frac{cn(n+1)}{2},$$

где c имеет тот же смысл, что и в (2.21), а c_1 – некоторая константа, зависящая только от поля K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.3 и формуле (2.21) для любого $i > n_0$ справедливо неравенство

$$\nu_\ell(|\mathcal{A}_i^{(p)}|/|\mathcal{A}_{i-1}^{(p)}|) = d(\mathcal{A}_i^{(p)}) \leq ci.$$

Поэтому для любого $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \nu_\ell(|\mathcal{A}_n^{(p)}|) &= \nu_\ell(|\mathcal{A}_{n_0}^{(p)}|) + \sum_{i=n_0+1}^n \nu_\ell(|\mathcal{A}_i^{(p)}|/|\mathcal{A}_{i-1}^{(p)}|) \\ &\leq \nu_\ell(|\mathcal{A}_{n_0}^{(p)}|) + c \sum_{i=n_0+1}^n i \leq c_1 + c \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

где $c_1 = \nu_\ell(|\mathcal{A}_{n_0}^{(p)}|) - c \frac{n_0(n_0+1)}{2}$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для поля K и $n > p$ рассмотрим отображения

$$N'_{n,n-1}: \mathcal{B}_n^{(p)} \longrightarrow \mathcal{B}_{n-1}^{(p)}, \quad (2.24)$$

$$i'_{n-1,n}: \mathcal{B}_{n-1}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{B}_n^{(p)}. \quad (2.25)$$

Тогда существует индекс n_1 , зависящий только от поля K , такой, что для любого $n > n_1$ справедливы равенства

$$\text{Ker } N'_{n,n-1} = {}_\ell \mathcal{B}_n^{(p)}, \quad (2.26)$$

$$\text{Im } i'_{n-1,n} = {}_\ell \mathcal{B}_n^{(p)}. \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.3) и предложению 2.4 для любого $n > n_0$ справедливо неравенство

$$d(\mathcal{B}_n^{(p)}) \leq \nu_\ell(|\mathcal{B}_n^{(p)}|) = \nu_\ell(|\mathcal{A}_n^{(p)}|) \leq c_1 + c \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.28)$$

Выберем индекс n'_0 так, чтобы для всех $n > n'_0$ выполнялось неравенство

$$cn^2 > c_1 + c \frac{n(n+1)}{2}.$$

Тогда из (2.28) следует, что для всех $n > n'_0$ справедливо неравенство $d(\mathcal{B}_n^{(p)}) < cn^2$. Выберем теперь индекс $n_1 \geq n'_0$ так, чтобы для любого $n \geq n_1$ выполнялось неравенство

$$(n_1 - p) > \begin{cases} \log_\ell(cn^2) + 1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ \log_\ell(cn^2) + 2 & \text{при } \ell = 2. \end{cases}$$

Тогда те же аргументы, что и в доказательстве предложения 2.3, показывают, что при $n > n_1$ и $\ell \neq 2$ группа $G(K_n/K_{n-1})$ действует тождественно на ${}_{\ell}\mathcal{B}_n^{(p)}$ (при $\ell = 2$ группа $G(K_n/K_{n-2})$ действует тождественно на ${}_{\ell}\mathcal{B}_n^{(p)}$). Теперь справедливость формул (2.26) и (2.27) проверяется так же, как и в доказательстве предложения 2.3. Предложение доказано.

Предложения 2.3 и 2.5 позволяют описать стабильное строение групп $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $r = n_1 + 1$, где n_1 – индекс из предложения 2.5. Тогда для всех $n \geq r$

$$d(\mathcal{A}_n^{(p)}) = d(\mathcal{B}_n^{(p)}). \quad (2.29)$$

Пусть

$$\mathcal{A}_r^{(p)} = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}/\ell^{a_i} \mathbb{Z}, \quad \mathcal{B}_r^{(p)} = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}/\ell^{b_i} \mathbb{Z}$$

– представления групп $\mathcal{A}_r^{(p)}$ и $\mathcal{B}_r^{(p)}$ в виде прямых сумм циклических групп. Тогда существует последовательность целых неотрицательных чисел $\nu_r, \nu_{r+1}, \dots, \nu_n, \dots$, удовлетворяющая при любом $n > r$ условию

$$\nu_r + \nu_{r+1} + \dots + \nu_n \leq cn, \quad (2.30)$$

где c – константа из (2.21) такая, что группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ для всех $n > r$ могут быть определены следующей индуктивной процедурой. Пусть для некоторого $n \geq r$

$$\mathcal{A}_n^{(p)} = \bigoplus_{i=1}^{d_n} \mathbb{Z}/\ell^{c_i} \mathbb{Z}, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{B}_n^{(p)} = \bigoplus_{i=1}^{d_n} \mathbb{Z}/\ell^{e_i} \mathbb{Z}. \quad (2.32)$$

Тогда

$$\mathcal{A}_{n+1}^{(p)} = \left(\bigoplus_{i=1}^{d_n} \mathbb{Z}/\ell^{c_i+1} \mathbb{Z} \right) \oplus (\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})^{\nu_n}, \quad (2.33)$$

$$\mathcal{B}_{n+1}^{(p)} = \left(\bigoplus_{i=1}^{d_n} \mathbb{Z}/\ell^{e_i+1} \mathbb{Z} \right) \oplus (\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})^{\nu_n}. \quad (2.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем (2.29). В силу предложений 2.3 и 2.5 при $n > r$ ядра отображений (2.17) и (2.24) совпадают с ${}_{\ell}\mathcal{A}_n^{(p)}$ и ${}_{\ell}\mathcal{B}_n^{(p)}$ соответственно. Следовательно,

$$d(\mathcal{A}_n^{(p)}) = \nu_{\ell}(|\mathcal{A}_n^{(p)}|/|\mathcal{A}_{n-1}^{(p)}|) \quad \text{и} \quad d(\mathcal{B}_{n+1}^{(p)}) = \nu_{\ell}(|\mathcal{B}_n^{(p)}|/|\mathcal{B}_{n-1}^{(p)}|).$$

Теперь (2.29) следует непосредственно из (2.3).

Для доказательства оставшейся части теоремы мы проведем индукцию по n , начиная со случая $n = r$. Предположим, что последовательность $\nu_r, \nu_{r-1}, \dots, \nu_{n-1}$ уже построена (при $n = r$ мы предполагаем эту последовательность пустой), причем для всех $r \leq i \leq n-1$ инварианты абелевых групп $\mathcal{A}_i^{(p)}, \mathcal{A}_{i+1}^{(p)}$ и $\mathcal{B}_i^{(p)}, \mathcal{B}_{i+1}^{(p)}$ связаны так, как это описывают формулы (2.31), (2.33) и (2.32), (2.34) соответственно.

Рассмотрим разложения в прямую сумму циклических групп

$$\mathcal{A}_{n+1}^{(p)} = \left(\bigoplus_{i=1}^{d'} \mathbb{Z}/\ell^{c'_i} \mathbb{Z} \right) \oplus (\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})^\alpha, \quad \mathcal{B}_{n+1}^{(p)} = \left(\bigoplus_{i=1}^{d''} \mathbb{Z}/\ell^{e'_i} \mathbb{Z} \right) \oplus (\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})^\beta,$$

где все c'_i, e'_i больше 1. Из (2.29) следует, что $d' + \alpha = d'' + \beta$. Поскольку $\text{Ker } N_{n,n-1} = \ell \mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\text{Ker } N'_{n,n-1} = \ell \mathcal{B}_n^{(p)}$, мы получаем, что

$$\mathcal{A}_n^{(p)} \cong \bigoplus_{i=1}^{d'} \mathbb{Z}/\ell^{c'_i-1} \mathbb{Z}, \quad \mathcal{B}_n^{(p)} \cong \bigoplus_{i=1}^{d''} \mathbb{Z}/\ell^{e'_i-1} \mathbb{Z},$$

откуда следует, что $d_n := d(\mathcal{A}_n^{(p)}) = d' = d(\mathcal{B}_n^{(p)}) = d''$. Тогда $\alpha = \beta$ и $c'_i = c_i + 1$, $e'_i = e_i + 1$ для всех $i = 1, \dots, d_n$. Положив $\nu_n = \alpha = \beta$, мы получаем, что все утверждения теоремы справедливы и для $n+1$. Теорема доказана.

§ 3. Примеры нетривиальных групп $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$

Чтобы построить примеры полей K , имеющих нетривиальные группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ для некоторого p и всех достаточно больших n , т.е. полей, имеющих p -тип В в смысле определения из § 2, мы начнем с того, что изучим более подробно поля p -типа А.

Итак, пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Как обычно, мы предполагаем, что $\zeta_0 \in K$ ($\sqrt{-1} \in K$ при $\ell = 2$). Пусть $K_\infty = \bigcup_n K_n$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K и $V_n = V(K_n)$. Положим $V_\infty = \varprojlim V_n$, где предел берется относительно норменных отображений. Если необходимо указать явно зависимость от поля K , то вместо V_∞ мы будем писать $V(K_\infty)$.

Рассмотрим пополненное групповое кольцо $R_\infty := \mathbb{Z}_\ell[[G(K_\infty/K_p)]] = \varprojlim R_n$, где $n > p$ и $R_n = \mathbb{Z}_\ell[G(K_n/K_p)]$. Пусть γ_p – некоторая фиксированная топологическая образующая группы $G(K_\infty/K_p)$. В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, мы будем обозначать ограничение γ_p на любое подполе $K_n \subset K_\infty$ снова через γ_p . Как хорошо известно, сопоставление $\gamma_p \leftrightarrow 1 + T$ индуцирует топологический изоморфизм $R_\infty \cong \mathbb{Z}_\ell[[T]]$ кольца R_∞ на кольцо формальных степенных рядов от T .

Абелева про- ℓ -группа V_∞ имеет естественную структуру R_∞ -модуля. Более того, в [6, предложение 3.1] было доказано, что V_∞ является свободным R_∞ -модулем ранга $r_p := [K_p : \mathbb{Q}_\ell]$.

Для произвольного элемента $\mu \in R_\infty$ пусть $\bar{\mu}$ – результат действия на μ инволюции кольца R_∞ , индуцированной отображением $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$ для всех $\sigma \in G(K_\infty/K_p)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть поле K имеет p -тип A для некоторого p , т.е. для любого $n > p$

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n) = \text{Ker } \text{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp). \quad (3.1)$$

Тогда существует естественное внутреннее полуторалинейное произведение

$$T_p: V_\infty \times V_\infty \longrightarrow R_\infty, \quad (3.2)$$

т.е. произведение, удовлетворяющее условию $T_p(\lambda x, \mu y) = \lambda T_p(x, y)\bar{\mu}$ для любых $\lambda, \mu \in R_\infty$, $x, y \in V_\infty$ и индуцирующее изоморфизм модулей Галуа $V_\infty \cong \text{Hom}_{R_\infty}(V_\infty, R_\infty)$, сопоставляющий элементу $y \in V_\infty$ гомоморфизм

$$\varphi_y: V_\infty \longrightarrow R_\infty, \quad \varphi_y(x) = T_p(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I_n = (\gamma_p - 1)R_n$ – идеал аугментации в кольце R_n . Положим $J_n = R_n/R_n^{G_n}$, где $G_n = G(K_n/K_p)$ и G_n действует на R_n обычным умножением. Тогда J_n является факторкольцом кольца R_n и умножение на $(\gamma_p - 1)$ индуцирует изоморфизм R_n -модулей $J_n \cong I_n$.

Прежде всего мы покажем, что $(\gamma_p - 1)V_n$ изоморфен $I_n^{r_p}$ как R_n -модуль. Для этого заметим, что $(\gamma_p - 1)V_n = (\gamma_p - 1)V_n^{(0)}$, где модуль $V_n^{(0)}$ был определен в (2.12). Из этого определения следует, что $V_n^{(0)}$ – свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль ранга $r_n - 1$, где $r_n = [K_n : \mathbb{Q}_\ell]$. Поскольку норма N_{K_n/K_p} отображает $V_n^{(0)}$ на $V_p^{(0)}$, мы получаем, что $\text{rk}(\gamma_p - 1)V_n^{(0)} = r_p(\ell^{n-p} - 1)$, где rk означает $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг. Очевидно, что $(\gamma_p - 1)V_n^{(0)}$ является J_n -модулем, поэтому для того, чтобы показать, что

$$(\gamma_p - 1)V_n \cong I_n^{r_p}, \quad (3.3)$$

достаточно проверить, что $(\gamma_p - 1)V_n$ имеет не более r_p образующих как J_n -модуль.

Рассмотрим индуцированную норменным отображением N_{K_n/K_p} точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^{-1}(G_n, V_n^{(0)}) \longrightarrow V_n(0)/(\gamma_p - 1)V_n^{(0)} \longrightarrow V_p^{(0)} \longrightarrow 0.$$

Учитывая, что в силу (1.1)

$$H^{-1}(G_n, V_n^{(0)}) \cong H^{-1}(G_n, V_n) \cong \mathbb{Z}/\ell^{n-p}\mathbb{Z},$$

и обозначая через $d(A)$ минимальное число образующих $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля A , мы получаем, что

$$d(V_n^{(0)}/(\gamma - 1)V_n^{(0)}) \leq d(H^{-1}(G_n, V_n^{(0)})) + d(V_p^{(0)}) = r_p.$$

Это доказывает (3.3).

В дальнейшем мы будем предполагать, что изоморфизмы (3.3) выбраны согласованными для различных n , т.е. для любой пары индексов s, t , где $t > s > p$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\gamma_p - 1)V_t \cong I_t^{r_p} & & \\ \downarrow N & & \downarrow \pi \\ (\gamma_p - 1)V_s \cong I_s^{r_p} & & \end{array} \quad (3.4)$$

где N индуцировано норменным отображением N_{K_t/K_s} , а π индуцировано естественной проекцией $R_t \rightarrow R_s$. Очевидно, что выбор изоморфизмов (3.3), согласованных таким образом, равносильно выбору некоторой свободной системы образующих R_∞ -модуля V_∞ .

Пусть A – произвольный конечно порожденный R_n -модуль, который свободен как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, и $A^\perp = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A, \mathbb{Z}_\ell)$, причем $A^\perp$ превращен стандартным способом в R_n -модуль. Тогда

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A/A^G, \mathbb{Z}_\ell) = \text{Ker Sp}_{G_n}(A^\perp).$$

Следовательно, (3.1) вместе с естественным изоморфизмом $(\gamma_p - 1)V_n \cong (\gamma - 1) \times \Phi_n(q)(\log V_n)$ индуцируют внутреннее произведение

$$S_n: V_n^{(0)}/(V_n^{(0)})^{G_n} \times (\gamma_p - 1)V_n^{(0)} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell. \quad (3.5)$$

Здесь для $x \in V_n^{(0)}/(V_n^{(0)})^{G_n}$ и $y \in (\gamma_p - 1)V_n^{(0)}$

$$S_n(x, y) = \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log \bar{x} \cdot (\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log y)),$$

где $\bar{x}$ – некоторый представитель x в $V_n^{(0)}$.

Рассмотрим полуторалинейное произведение

$$\{, \}_n: R_n \times R_n \longrightarrow R_n, \quad \{x, y\} \rightarrow x\bar{y} \text{ для } x, y \in R_n. \quad (3.6)$$

Пусть $\psi_n: R_n \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$ – проекция, определенная на произвольном элементе $x = \sum_{\sigma \in G(K_n/K_p)} a_\sigma \sigma$ формулой

$$\psi_n(x) = a_1. \quad (3.7)$$

Если задан некоторый гомоморфизм R_n -модулей $\chi: R_n \rightarrow R_n$, то $\hat{\chi} = \psi_n \chi$ является $\mathbb{Z}_\ell$ -гомоморфизмом R_n в $\mathbb{Z}_\ell$. Наоборот, если задан $\mathbb{Z}_\ell$ -гомоморфизм $\hat{\chi}: R_n \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$, то, полагая

$$\chi(x) = \sum \hat{\chi}(\sigma^{-1}x)\sigma \in R_n, \quad (3.8)$$

мы получаем R_n -гомоморфизм из R_n в R_n . Очевидно, что соответствие $\chi \leftrightarrow \hat{\chi}$ является взаимно обратным и, следовательно, (3.6)–(3.8) индуцируют при любом n изоморфизмы

$$R_n \cong \text{Hom}_{R_n}(R_n, R_n) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(R_n, \mathbb{Z}_\ell). \quad (3.9)$$

Легко видеть, что изоморфизмы (3.9) индуцируют изоморфизмы

$$I_n \cong \text{Hom}_{R_n}(J_n, I_n) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(J_n, \mathbb{Z}_\ell). \quad (3.10)$$

Используя изоморфизмы (3.3) и (3.10), мы получаем, что $V_n^{(0)}/(V_n^{(0)})^{G_n} \cong J_n^{r_p}$ и (3.5) индуцирует изоморфизм

$$(\gamma_p - 1)V_n^{(0)} \cong \text{Hom}_{R_n}(V_n^{(0)}/(V_n^{(0)})^{G_n}, I_n), \quad (3.11)$$

определенный с помощью конструкции (3.8).

Для любых $t > s$ естественная проекция $R_t \rightarrow R_s$ индуцирует проекции $\alpha: I_t \rightarrow I_s$ и $\beta: J_t \rightarrow J_s$. Таким образом, для любого $f \in \text{Hom}_{R_t}(J_t, I_t)$ определен гомоморфизм $\alpha \cdot f: J_t \rightarrow I_s$. Очевидно, что отображение $\alpha \cdot f$ пропускается через β и,

следовательно, f определяет R_s -гомоморфизм $J_s \rightarrow I_s$, т.е. существует естественное отображение

$$\mathrm{Hom}_{R_t}(J_t, I_t) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_s}(J_s, I_s).$$

Это отображение индуцирует отображение

$$\nu_{t,s}: \mathrm{Hom}_{R_t}(V_t^{(0)}/(V_t^{(0)})^{G_t}, I_t) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_s}(V_s^{(0)}/(V_s^{(0)})^{G_s}, I_s),$$

которое согласовано с отображением N в (3.4) (см. [3, предложение 4.1]).

Переходя в (3.11) к проективному пределу относительно норменных отображений слева и отображений $\nu_{t,s}$ справа и учитывая, что

$$\begin{aligned} \varprojlim (\gamma_p - 1)V_n^{(0)} &= (\gamma_p - 1)V_\infty, & \varprojlim (V_n^{(0)}/(V_n^{(0)})^{G_n}) &= V_\infty, \\ \varprojlim I_n &= (\gamma_p - 1)R_\infty, \end{aligned}$$

мы получаем изоморфизм

$$(\gamma_p - 1)V_\infty \cong \mathrm{Hom}_{R_\infty}(V_\infty, (\gamma_p - 1)R_\infty),$$

который после деления на $(\gamma_p - 1)$ приводит к изоморфизму

$$V_\infty \cong \mathrm{Hom}_{R_\infty}(V_\infty, R_\infty). \quad (3.12)$$

Легко видеть, что изоморфизм (3.12) является изоморфизмом модулей Галуа. Действительно, если σ – автоморфизм поля K_∞ над $\mathbb{Q}_\ell$, коммутирующий с γ_p , то непосредственная проверка показывает, что все отображения, использовавшиеся при построении изоморфизма (3.12), согласованы с действием σ . Из построения изоморфизма (3.12) следует, что он не зависит от выбора p , поэтому для произвольного σ мы всегда можем выбрать p настолько большим, чтобы σ коммутировал с γ_p . Это показывает, что σ коммутирует с изоморфизмом (3.12). Теорема доказана.

Итак, согласно теореме 3.1 для поля K , имеющего p -тип А для некоторого p , модули Галуа V_∞ и $\mathrm{Hom}_{R_\infty}(V_\infty, R_\infty)$ должны быть изоморфны. Мы построим примеры, когда это не так и тем самым докажем существование полей, имеющих p -тип В для любого p . Начнем с простого замечания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть L – конечное расширение локального поля K . Предположим, что K имеет p -тип В для некоторого p , причем это p таково, что определены группы $\mathcal{A}^{(p)}(L_n)$ и $\mathcal{B}^{(p)}(L_n)$ для всех $n > p$. Тогда и поле L имеет p -тип В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r имеет тот же смысл, что и в теореме 2.1. Согласно этой теореме, если $\mathcal{A}^{(p)}(K_n) \neq 0$ для некоторого $n > r$, то при $t > n$ группа $\mathcal{A}^{(p)}(K_t)$ имеет период не ниже, чем ℓ^{t-n} . Естественное сквозное отображение

$$\mathcal{A}^{(p)}(K_t) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{(p)}(L_t) \xrightarrow{s} \mathcal{A}^{(p)}(K_t),$$

где i и s индуцированы вложением $K_t \hookrightarrow L_t$ и отображением следа $\mathrm{Sp}: L_t \rightarrow K_t$ соответственно, совпадает с умножением на степень $[L_t : K_t]$, которая стабилизируется при больших t . Поэтому мы получаем, что $\mathcal{A}^{(p)}(L_t) \neq 0$ для всех достаточно больших t , и, следовательно, поле L имеет p -тип В. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\ell \neq 2$ и L – конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, содержащее первообразный корень из единицы ζ_0 степени ℓ . Пусть существует цепочка полей $\mathbb{Q}_\ell \subseteq F \subset E \subset L$ такая, что $\zeta_0 \notin E$ и E/F является чисто разветвленным абелевым расширением с группой Галуа $G \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, причем расширение E_∞/F_∞ также чисто разветвлено и имеет группу Галуа G . Тогда поле L имеет p -тип В для всех достаточно больших p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K = E(\zeta_0)$. Тогда $E \subset K \subseteq L$. Положим $q = \max\{q(K), q(L)\}$, где числа $q(K)$ и $q(L)$ определены, как в (1.2). Тогда для любого $p \geq q$ и $n > p$ определены группы $\mathcal{A}^{(p)}(K_n)$, $\mathcal{A}^{(p)}(L_n)$, $\mathcal{B}^{(p)}(K_n)$ и $\mathcal{B}^{(p)}(L_n)$. В частности, можно говорить о p -типе полей K и L . Если поле L имеет p -тип А, то согласно предложению 3.1 и поле K должно иметь p -тип А. Тогда в силу теоремы 3.1 должен существовать изоморфизм модулей Галуа

$$V(K_\infty) \cong \text{Hom}_{R_\infty}(V(K_\infty), R_\infty). \quad (3.13)$$

Мы покажем, что существование изоморфизма (3.13) ведет к противоречию. Положим $\Delta = G(K/E)$. Тогда Δ – циклическая группа порядка, взаимно простого с ℓ . Положим $V(E_\infty) = V(K_\infty)^\Delta$. Поскольку Δ действует тождественно на R_∞ , изоморфизм (3.13) индуцирует изоморфизм

$$V(E_\infty) \cong \text{Hom}_{R_\infty}(V(E_\infty), R_\infty). \quad (3.14)$$

Заметим, что $V(E_\infty)$ является свободным R_∞ -модулем, на который действует группа $G = G(E/F) = G(E_\infty/F_\infty)$. При этом действие G перестановочно с действием R_∞ , и (3.14) является изоморфизмом G -модулей. Тогда для всех целых i определены группы когомологий Тэйта $H^i(G, V(E_\infty))$. Условие $\zeta_0 \notin E$ означает, что $V(E_\infty) = \varprojlim (U(E_n)/\mu(E_n))$, где предел берется относительно норменных отображений, $U(E_n)$ – группа единиц поля E_n и $\mu(E_n)$ – группа всех корней из единицы в поле E_n , причем порядок группы $\mu(E_n)$ взаимно прост с ℓ при любом n . Тогда

$$H^i(G, V(E_\infty)) = \varprojlim H^i(G, U(E_n)) \quad (3.15)$$

и из локальной теории полей классов следует, что группы $H^i(G, V(E_\infty))$ конечны при любом i . Тогда согласно теореме двойственности для когомологий свободных R_∞ -модулей [5, теорема 4.2] при любом i группа $H^i(G, V(E_\infty))$ двойственна группе $H^{1-i}(G, V(E_\infty))$. В частности, группа $H^0(G, V(E_\infty))$ двойственна группе $H^1(G, V(E_\infty))$. Это означает, что существует (неканонический) изоморфизм абелевых групп

$$H^0(G, V(E_\infty)) \cong H^1(G, V(E_\infty)). \quad (3.16)$$

Поскольку расширение E_n/F_n чисто разветвлено при любом n , локальная теория полей классов дает для любого n канонический изоморфизм

$$G \cong G(E_n/F_n) \cong H^0(G, U(E_n)). \quad (3.17)$$

Изоморфизмы (3.17) согласованы относительно норменных отображений и после перехода к проективному пределу дают изоморфизм

$$H^0(G, V(E_\infty)) \cong G. \quad (3.18)$$

Для вычисления группы $H^1(G, V(E_\infty))$ заметим, что при любом n для чисто разветвленного расширения E_n/F_n имеет место изоморфизм

$$H^1(G, U(E_n)) \cong \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z},$$

причем эта группа порождается коциклом $\eta_n: \sigma \rightarrow \sigma(\pi_n)/\pi_n$, где $\sigma \in G$ и π_n – некоторый локальный параметр поля E_n . Для всех достаточно больших s и всех $t > s$ расширение E_t/E_s чисто разветвлено, поэтому для локального параметра π_t поля E_t элемент $N_{K_t/K_s}(\pi_t)$ является локальным параметром поля E_s , т.е. N_{K_t/K_s} переводит коцикл η_t в η_s . Тогда (3.15) показывает, что

$$H^1(G, V(E_\infty)) \cong \mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

Сравнивая (3.16), (3.18) и (3.19), мы получаем противоречие. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть K – конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$, содержащее ζ_0 (содержащее $\sqrt{-1}$ при $\ell = 2$). Пусть K не содержит первообразного корня из единицы ζ_1 степени ℓ^2 (степени ℓ^3 при $\ell = 2$). Пусть L – чисто разветвленное абелево ℓ -расширение K с группой Галуа $G \cong (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^3$ ($G \cong (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^4$ при $\ell = 2$). Пусть расширения L/K и K_∞/K линейно разделены, расширение L_∞/K_∞ чисто разветвлено и $\mu(K_n) \subset N_{L/K}(L^\times)$. Отметим, что в этом случае и для всех n выполняется условие

$$\mu(K_n) \subset N_{L_n/K_n}(L_n^\times). \quad (3.20)$$

Тогда поле L имеет p -тип В для всех достаточно больших p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу наших предположений L_∞/K является абелевым расширением с группой Галуа $G(L_\infty/K) \cong G \times \Gamma$, где $G \cong G(L/K) \cong G(L_\infty/K_\infty)$ и $\Gamma \cong G(K_\infty/K) \cong G(L_\infty/L) \cong \mathbb{Z}_\ell$. Пусть γ – некоторая фиксированная топологическая образующая группы Γ . Тогда существует однозначно определенное число $\varkappa \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ такое, что $\gamma(\zeta) = \zeta^\varkappa$ для любого корня из единицы ℓ -примарной степени ζ . Из условий, наложенных на поле K , следует, что $\varkappa \equiv 1 \pmod{\ell}$ и $\varkappa \not\equiv 1 \pmod{\ell^2}$ при $\ell \neq 2$, и $\varkappa \equiv 1 \pmod{\ell^2}$ и $\varkappa \not\equiv 1 \pmod{\ell^3}$ при $\ell = 2$.

Как и в доказательстве предложения 3.2, предположение о том, что поле L имеет p -тип А для некоторого p , приводит к существованию невырожденного спаривания конечных абелевых групп

$$H^0(G, V(L_\infty)) \times H^1(G, V(L_\infty)) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell. \quad (3.21)$$

При этом γ естественным образом действует на обе группы когомологий, входящие в (3.21), и выполняется соотношение

$$(x, y) = (\gamma(x), \gamma(y)) \quad (3.22)$$

для любых $x \in H^0(G, V(L_\infty))$, $y \in H^1(G, V(L_\infty))$. Мы покажем, что существование невырожденного произведения (3.21), удовлетворяющего условию (3.22), ведет к противоречию.

Обозначим через $\mathbb{Z}_\ell^{(1)}$ модуль Галуа $\varprojlim \mu_\ell(L_n)$, где предел берется относительно норменных отображений. Таким образом, $\mathbb{Z}_\ell^{(1)} \cong \mathbb{Z}_\ell$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, а Γ действует на $\mathbb{Z}_\ell^{(1)}$ при помощи кругового характера, т.е. $\gamma(a) = \varkappa a$ для любого $a \in \mathbb{Z}_\ell^{(1)}$. Положим $U(L_\infty) = \varprojlim U^{(1)}(L_n)$ и $\bar{U}(L_\infty) = \varprojlim (U(L_n)/\mu(L_n))$, где $U^{(1)}(L_n)$ – группа главных единиц поля L_n и все пределы берутся относительно норменных отображений. Мы имеем точные последовательности модулей Галуа

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^{(1)} \longrightarrow U(L_\infty) \longrightarrow \bar{U}(L_\infty) \longrightarrow 0, \quad (3.23)$$

$$0 \longrightarrow \bar{U}(L_\infty) \longrightarrow V(L_\infty) \longrightarrow W(L_\infty) \longrightarrow 0, \quad (3.24)$$

где $W(L_\infty)$ определяется как $V(L_\infty)/\bar{U}(L_\infty)$. Из (1.3) следует, что $W(L_\infty)$ и $\mathbb{Z}_\ell^{(1)}$ изоморфны (неканонически) как модули Галуа.

Для упрощения обозначений мы будем писать $H^i(A)$ вместо $H^i(G, A)$. Тогда точная последовательность G -модулей (3.23) приводит к точной последовательности когомологий

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{Z}_\ell^{(1)}) &\xrightarrow{\alpha} H^0(U(L_\infty)) \longrightarrow H^0(\bar{U}(L_\infty)) \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}_\ell^{(1)}) \\ &\longrightarrow H^1(U(L_\infty)) \longrightarrow H^1(\bar{U}(L_\infty)) \longrightarrow H^2(\mathbb{Z}_\ell^{(1)}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Поскольку расширение L_∞/K_∞ чисто разветвлено, как и в доказательстве предложения 3.2, получаем, что $H^0(U(L_\infty)) \cong G$. Из выполнения условия (3.20) следует, что $\alpha = 0$. Поскольку и $H^1(\mathbb{Z}_\ell^{(1)}) = H^1(\mathbb{Z}_\ell) = 0$, имеем

$$H^0(\bar{U}(L_\infty)) \cong G. \quad (3.26)$$

Те же аргументы, что и в доказательстве предложения 3.2, показывают, что

$$H^1(U(L_\infty)) \cong \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}.$$

Поскольку $H^2(\mathbb{Z}_\ell^{(1)}) = H^2(\mathbb{Z}_\ell) = \text{Char}(G)$, мы получаем из (3.25) точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} \longrightarrow H^1(\bar{U}(L_\infty)) \longrightarrow \text{Char}(G). \quad (3.27)$$

Из точной последовательности (3.24) мы получаем точную последовательность когомологий

$$\begin{aligned} 0 = H^{-1}(W(L_\infty)) &\longrightarrow H^0(\bar{U}(L_\infty)) \longrightarrow H^0(V(L_\infty)) \xrightarrow{\beta} H^0(W(L_\infty)) \\ &\longrightarrow H^1(\bar{U}(L_\infty)) \longrightarrow H^1(V(L_\infty)) \longrightarrow H^1(W(L_\infty)) = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Докажем, что β – эпиморфизм. Действительно, пусть для некоторого n элемент $u_n \in U(K_n)$ таков, что $K_n(\sqrt[m]{u_n})/K_n$ – неразветвленное расширение степени ℓ^m , где $m = n + 1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n + 2$ при $\ell = 2$. Поскольку расширение L_n/K_n чисто разветвлено, поле $L_n(\sqrt[m]{u_n})$ также будет неразветвленным расширением L_n степени ℓ^m . Это означает, что вложение $K_n \hookrightarrow L_n$ индуцирует изоморфизм

$$V(K_n)/\bar{U}(K_n) \cong V(L_n)/\bar{U}(L_n). \quad (3.29)$$

Переходя в (3.29) к проективному пределу, мы получаем, что естественное отображение $W(K_\infty) \rightarrow W(L_\infty)$ является изоморфизмом. Тогда сквозное отображение $V(K_\infty) \rightarrow W(K_\infty) \rightarrow W(L_\infty)$ является эпиморфизмом, что доказывает и эпиморфность β .

Таким образом, (3.28) индуцирует изоморфизм

$$H^1(V(L_\infty)) \cong H^1(\bar{U}(L_\infty)) \quad (3.30)$$

и точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^0(\bar{U}(L_\infty)) \longrightarrow H^0(V(L_\infty)) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^{(1)}/|G|\mathbb{Z}_\ell^{(1)} \longrightarrow 0. \quad (3.31)$$

Заметим, что для конечной абелевой группы A выполняется соотношение

$$\ell \operatorname{Char}(A) = \operatorname{Char}(A/\ell A).$$

Полагая здесь $A = H^0(V(L_\infty))$, мы получаем из (3.26) и (3.31), что

$$A/\ell A = H^0(V(L_\infty))/\ell(H^0(V(L_\infty))) \cong \ell^\nu \mathbb{Z}_\ell^{(1)}/|G|\mathbb{Z}_\ell^{(1)}, \quad (3.32)$$

где $\nu = 0$ или 1 . В частности, γ действует на группу $A/\ell A$ в (3.32) нетривиально.

Из (3.27) и (3.30) следует, что группа

$$\ell \operatorname{Char}(A) = \ell H^1(V(L_\infty)) \quad (3.33)$$

содержится в группе $\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$, на которую γ действует тривиально. Следовательно, между группами (3.32) и (3.33) не может существовать двойственности, удовлетворяющей условию (3.22). Предложение доказано.

§ 4. Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и его свойства

Пусть снова K – конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$, содержащее первообразный корень ζ_0 степени ℓ из единицы (содержащее $\sqrt{-1}$ при $\ell = 2$), K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . Как и в предыдущих параграфах, мы полагаем $K_n = K(\zeta_n)$.

Пусть $\mathcal{M}_n^{(p)} = \mathbb{Z}_\ell$ -модуль, определенный в (2.2). Если будет необходимо явно указать зависимость от поля K_n , то вместо $\mathcal{M}_n^{(p)}$ мы будем писать $\mathcal{M}^{(p)}(K_n)$ и т.п.

Непосредственно из определения группы $\mathcal{M}_n^{(p)}$ следует, что след $\operatorname{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}$ индуцирует скалярное произведение

$$(\cdot, \cdot)_n : V_n \times \mathcal{M}_n^{(p)} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad (4.1)$$

где для $x \in V_n$, $y \in \mathcal{M}_n^{(p)}$

$$(x, y)_n = \operatorname{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \cdot y).$$

Композиция ℓ -адического логарифма с умножением на $(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)$ определяет эпиморфизм

$$\varphi_n : V_n \longrightarrow (\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V_n). \quad (4.2)$$

Обозначим подгруппу $\varphi_n^{-1}(\mathcal{M}_n^{(p)})$ группы V_n через V'_n . Тогда эпиморфизм φ_n вместе с произведением (4.1) определяют произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n : V_n \times V'_n \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad (4.3)$$

которое в явном виде задается на элементах $x \in V_n$, $y \in V'_n$ формулой

$$\langle x, y \rangle_n = \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \cdot (\gamma - 1)\Phi_n(q)(\log y)). \quad (4.4)$$

Зафиксируем некоторое натуральное s . Для произвольной абелевой группы A обозначим группу $A/\ell^s A$ через $A(s)$. Тогда произведение (4.3) индуцирует произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n^s : V_n(s) \times V'_n(s) \longrightarrow \mathbb{Z}(s). \quad (4.5)$$

Конечно, произведение (4.5) зависит еще от выбора p . Мы предполагаем, что этот выбор сделан, и не указываем его явно, чтобы не усложнять обозначений.

Пусть σ – некоторый автоморфизм расширения $K_\infty/\mathbb{Q}_\ell$, коммутирующий с элементом γ_p . Тогда непосредственно из определения произведения (4.5) следует, что

$$\langle x, y \rangle_n^s = \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle_n^s \quad \text{для любых } x \in V_n(s), \quad y \in V'_n(s). \quad (4.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\text{Ker}_{n,s}$ и $\text{Ker}'_{n,s}$ – ядра произведения (4.5) слева и справа соответственно. Тогда существует константа c_1 , зависящая только от поля K и индекса p , такая, что для любого $n > p$ справедливы неравенства

$$\nu_\ell(|\text{Ker}_{n,s}|) < c_1 sn, \quad \nu_\ell(|\text{Ker}'_{n,s}|) < c_1 sn,$$

где ν_ℓ – ℓ -адический показатель, нормированный условием $\nu_\ell(\ell) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку V_n и V'_n – свободные $\mathbb{Z}_\ell$ -модули ранга $[K_n : \mathbb{Q}_\ell]$, мы имеем $|V_n(s)| = |V'_n(s)|$, откуда следует, что $|\text{Ker}_{n,s}| = |\text{Ker}'_{n,s}|$, поэтому нам достаточно доказать только одно из неравенств.

Для любого заданного n имеется внутреннее произведение

$$V_n \times V_n^\perp \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad (x, y)_n \longrightarrow \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \cdot y),$$

которое после факторизации по ℓ^s -м степеням индуцирует невырожденное произведение

$$V_n(s) \times V_n^\perp(s) \longrightarrow \mathbb{Z}(s), \quad (x, y)_n^s \longrightarrow \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \cdot y) \pmod{\ell^s}. \quad (4.7)$$

Произведения (4.5) и (4.7) можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V_n(s) \times V'_n(s) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(s) \\ \parallel & \downarrow f_n & \parallel \\ V_n(s) \times V_n^\perp(s) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(s), \end{array}$$

где f_n индуцировано отображением φ_n и каноническим вложением $\mathcal{M}_n^{(p)} \hookrightarrow V_n^\perp$. Другими словами, для любых $x \in V_n(s)$, $y \in V'_n(s)$ выполняется соотношение $\langle x, y \rangle_n^s = \langle x, f_n(y) \rangle_n^s$. Из невырожденности произведения (4.7) следует, что

$$\text{Ker}'_{n,s} = \text{Ker } f_n, \quad \text{Ker}_{n,s} \cong \text{Char}(\text{Coker } f_n). \quad (4.8)$$

В частности,

$$|\operatorname{Ker}'_{n,s}| = |\operatorname{Ker} f_n| = |\operatorname{Ker}_{n,s}| = |\operatorname{Coker} f_n|. \quad (4.9)$$

Пусть $\alpha: V_n^\perp \rightarrow V_p^\perp$ – отображение, индуцированное отображением следа $\operatorname{Sp}_{K_n/K_p}$. В доказательстве леммы 1.4 было показано, что α – эпиморфизм. Следовательно, существует естественная точная последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \operatorname{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) \xrightarrow{i_n} V_n^\perp \xrightarrow{\alpha} V_p^\perp \longrightarrow 0. \quad (4.10)$$

С другой стороны, из определения группы $\mathcal{B}_n^{(p)}$ следует существование естественной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_n^{(p)} \xrightarrow{g_n} \operatorname{Ker} \operatorname{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp) \longrightarrow \mathcal{B}_n^{(p)} \longrightarrow 0. \quad (4.11)$$

Последовательность (4.10) расщепляется как точная последовательность $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей и, следовательно, индуцирует для любого s точную последовательность

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ker} \operatorname{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp))(s) \xrightarrow{i'_n} V_n^\perp(s) \longrightarrow V_p^\perp(s) \longrightarrow 0. \quad (4.12)$$

Следовательно, i'_n является мономорфизмом и

$$\nu_\ell(|\operatorname{Coker} i'_n|) = s[K_p : \mathbb{Q}_\ell]. \quad (4.13)$$

В частности, $|\operatorname{Coker} i'_n|$ не зависит от n при $n > p$.

Согласно “лемме о змее” точная последовательность (4.11) индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow {}_{\ell s} \mathcal{B}_n^{(p)} \longrightarrow \mathcal{M}_n^{(p)}(s) \xrightarrow{g'_n} (\operatorname{Ker} \operatorname{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp))(s) \longrightarrow \mathcal{B}_n^{(p)}(s) \longrightarrow 0. \quad (4.14)$$

Из (2.21) и (2.29) следует, что существует константа c , зависящая только от K и p , такая, что для всех $n > p$ выполняется неравенство

$$\nu_\ell(|\mathcal{B}_n^{(p)}(s)|) < cns. \quad (4.15)$$

Отображение f_n можно представить в виде композиции отображений

$$V'_n(s) \xrightarrow{\varphi'_n} \mathcal{M}_n^{(p)}(s) \xrightarrow{g'_n} \operatorname{Ker} \operatorname{Sp}_{K_n/K_p}(V_n^\perp)(s) \xrightarrow{i'_n} V_n^\perp(s), \quad (4.16)$$

где отображение φ'_n индуцировано гомоморфизмом φ_n , а g'_n и i'_n – отображения, входящие в (4.14) и (4.12) соответственно.

Поскольку φ_n – эпиморфизм, φ'_n также является эпиморфизмом. Следовательно, $|\operatorname{Coker} f_n| \leq |\operatorname{Coker} g'_n| \cdot |\operatorname{Coker} i'_n|$. Тогда из (4.13) и (4.15) следует, что $\nu_\ell(|\operatorname{Coker} f_n|) < cns + [K_p : \mathbb{Q}_\ell]s \leq c_1ns$, где можно положить $c_1 = c + [K_p : \mathbb{Q}]$. Теперь остается применить (4.9). Предложение доказано.

До сих пор мы предполагали, что основное поле K содержит первообразный корень из единицы ζ_0 степени ℓ (степени 4 при $\ell = 2$). Мы покажем, что предложение 4.1 обобщается и на случай произвольного поля K .

Итак, пусть K – конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, не содержащее ζ_0 (не содержащее $\sqrt{-1}$ при $\ell = 2$). Пусть K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K и $K_\infty = \bigcup_n K_n$,

где $K_n = K \cdot \mathbb{Q}_{\ell,n}$, $\mathbb{Q}_{\ell,n} \subset \mathbb{Q}_{\ell,\infty}$ и $[\mathbb{Q}_{\ell,n} : \mathbb{Q}_{\ell}] = \ell^n$. Таким образом, нумерация промежуточных подполей в расширении K_{∞}/K согласована с той, которая была определена в § 1.

Положим $V_n = V(K_n) = U(K_n)/\mu(K_n)$ и

$$V_n^{\perp} = \{x \in K_n \mid \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_{\ell}}(x \cdot \log y) \in \mathbb{Z}_{\ell} \text{ для всех } y \in V_n\}.$$

Предположим, что индекс p выбран настолько большим, что $K_p \neq K_{p+1}$, K_{∞}/K_p — чисто разветвленное расширение, и для поля $L := K(\zeta_0)$ ($L := K(\sqrt{-1})$ при $\ell = 2$) выполняется утверждение предложения 4.1. Тогда элемент γ_p является корректно определенной топологической образующей группы Галуа $G(K_{\infty}/K_p)$, и для любого $n > p$ определен элемент $(\gamma_p - 1)\Phi_n(q) \in \mathbb{Q}_{\ell}[G(K_n/K_p)]$. Мы снова определим группу $\mathcal{M}^{(p)}(K_n)$ формулой (2.2), после чего положим $V'_n = V'(K_n) := \varphi_n^{-1}(\mathcal{M}^{(p)}(K_n))$, где отображение φ_n определено формулой (4.2).

Очевидно, что мы снова получаем для поля K_n произведение, аналогичное (4.5)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n : V_n(s) \times V'_n(s) \longrightarrow \mathbb{Z}(s). \quad (4.17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_{\ell}$, не содержащее ζ_0 (не содержащее $\sqrt{-1}$ при $\ell = 2$). Рассмотрим произведение (4.17) для поля K_n и некоторого фиксированного p , удовлетворяющего сформулированным выше условиям. Пусть $\mathrm{Ker}_{n,s}$ и $\mathrm{Ker}'_{n,s}$ — ядра произведения (4.17) слева и справа соответственно. Тогда существует константа c_2 , зависящая только от поля K и индекса p , такая, что для всех $n > p$ справедливы неравенства

$$\nu_{\ell}(|\mathrm{Ker}_{n,s}|) < c_2 sn, \quad \nu_{\ell}(|\mathrm{Ker}'_{n,s}|) < c_2 sn.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве предложения 4.1, достаточно доказать только одно из этих неравенств. Предположим сначала, что $\ell \neq 2$. Тогда для любого n поле $L_n = K_n(\zeta_0)$ является циклическим расширением K_n с группой Галуа $\Delta = G(L_n/K_n)$, порядок которой делит $\ell - 1$. В этом случае $V(K_n) = V(L_n)^{\Delta}$, $V(K_n)^{\perp} = (V(L_n)^{\perp})^{\Delta}$, откуда следует, что и $\mathcal{M}^{(p)}(K_n) = \mathcal{M}^{(p)}(L_n)^{\Delta}$, $V'(K_n) = V'(L_n)^{\Delta}$. Таким образом, мы получим произведение (4.17) для поля K_n , если ограничим произведение (4.5) для поля L_n на Δ -инвариантные элементы, поэтому при $\ell \neq 2$ утверждение предложения непосредственно следует из предложения 4.1, причем можно положить $c_2 = c_1$.

Случай $\ell = 2$ существенно сложнее. Положим $L_n = K_n(\sqrt{-1})$ и $\Delta = G(L_n/K_n)$, так что $|\Delta| = 2$. Тогда норма N из поля L_n в K_n индуцирует отображение

$$N : V(L_n) \rightarrow V(K_n). \quad (4.18)$$

Действительно, из определения группы $V(K_n)$ следует существование норменного отображения $U(L_n)/\mu(L_n) \rightarrow V(K_n)$. Учитывая, что $V(L_n)/(U(L_n)/\mu(L_n)) \cong \mu_{\ell}(L_n)$ и единственный нетривиальный автоморфизм $\tau \in \Delta$ действует на $\mu_{\ell}(L_n)$ обращением, мы получаем, что $N(V(L_n)) = N(U(L_n)/\mu(L_n)) \subset V(K_n)$.

Пусть $\mathrm{Coker} N$ — коядро отображения $N : V(L_n) \rightarrow V(K_n)$. Тогда из локальной теории полей классов и из предыдущего замечания следует, что

$$|\mathrm{Coker} N| \leq |U(K_n)/N(U(L_n))| \leq |K_n^{\times}/N(L_n^{\times})| = 2. \quad (4.19)$$

Оценим теперь порядок ядра естественного отображения

$$i: V'(K_n)(s) \longrightarrow V'(L_n)(s), \quad (4.20)$$

индуцированного вложением $K_n \hookrightarrow L_n$. Из точной последовательности (1.3) следует, что $V(L_n)^{G(L_n/L_p)} = V(L_p)$. Следовательно, отображение φ_n , определенное в (4.2), включается в точную последовательность

$$0 \longrightarrow V(L_p) \longrightarrow V(L_n) \xrightarrow{\varphi_n} (\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V(L_n)) \longrightarrow 0. \quad (4.21)$$

Точная последовательность когомологий для (4.21) дает точную последовательность

$$V(L_n)^\Delta \xrightarrow{\psi_n} ((\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log V(L_n)))^\Delta \longrightarrow H^1(\Delta, V(L_p)).$$

Из точной последовательности (1.3) и локальной теории полей классов следует, что $|H^0(\Delta, V(L_p))| = |H^1(\Delta, V(L_p))| \leq 8$, откуда получаем, что $|\text{Coker } \psi_n| \leq 8$.

С другой стороны,

$$[(V(L_n)^\perp)^\Delta : V(K_n)^\perp] \leq |H^0(\Delta, V(L_n)^\perp)| = |H^0(\Delta, V(L_n))| \leq 8.$$

Следовательно, $[\mathcal{M}^{(p)}(L_n)^\Delta : \mathcal{M}^{(p)}(K_n)] \leq 64$. Положим

$$V''(K_n) = \psi_n^{-1}(\mathcal{M}^{(p)}(L_n)^\Delta).$$

Тогда $V'(K_n) = \psi_n^{-1}(\mathcal{M}^{(p)}(K_n))$ и, следовательно,

$$[V''(K_n) : V'(K_n)] \leq 64.$$

Подгруппа $\mathcal{M}^{(p)}(L_n)^\Delta$ выделяется в $\mathcal{M}^{(p)}(L_n)$ прямым слагаемым как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль. Следовательно, $\varphi_n^{-1}(\mathcal{M}^{(p)}(L_n)^\Delta)$ выделяется прямым слагаемым в $V'(L_n) = \varphi_n^{-1}(\mathcal{M}^{(p)}(L_n))$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль. Тогда группа

$$V''(K_n) = V(L_n)^\Delta \cap \varphi_n^{-1}(\mathcal{M}^{(p)}(L_n)^\Delta)$$

выделяется прямым слагаемым в $V'(L_n)$. Следовательно, факторгруппа $V'(L_n)/V'(K_n)$ имеет кручение порядка ≤ 64 , а значит, ядро отображения (4.20) также имеет порядок ≤ 64 .

Рассмотрим теперь для некоторого $n > p$ коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V(K_n)(s) \times V'(K_n)(s) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(s) \\ N \uparrow & & \downarrow i \\ V(L_n)(s) \times V'(L_n)(s) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(s), \end{array}$$

где отображения N и i определены в (4.18) и (4.20) соответственно. Коммутативность диаграммы означает, что для любых $x \in V(L_n)(s)$, $y \in V'(K_n)(s)$ выполняется соотношение

$$\langle x, i(y) \rangle_n^s = \langle N(x), i \rangle_n^s, \quad (4.22)$$

где произведение в левой части (4.22) определено для поля L_n , а в правой части — для K_n .

Чтобы различать ядра произведений в верхней и нижней строчках нашей диаграммы, мы будем обозначать их $\text{Ker}_s(K_n)$, $\text{Ker}'_s(K_n)$ и т.д. Если $y \in V'(K_n)$ и $y \in \text{Ker}'_s(K_n)$, то в силу (4.22) мы имеем $i(y) \in \text{Ker}'_s(L_n)$, т.е. $y \in i^{-1}(\text{Ker}'_s(L_n))$. Тогда, применяя к полю L предложение 4.1, мы получаем, что

$$\nu_\ell(|\text{Ker}'_s(K_n)|) \leq \nu_\ell(|i^{-1}(\text{Ker}'_s(L_n))|) \leq \nu_\ell(|\text{Ker } i| \cdot |\text{Ker}'_s(L_n)|) < 6 + c_1 n s.$$

Теперь достаточно выбрать c_2 из условия $c_2 n \geq 6 + c_1 n s$ для всех $n > p$. Предложение доказано.

В заключение сделаем одно простое замечание, которое будет использовано в следующем параграфе.

Группа V'_n была определена нами как подгруппа группы V_n , поэтому имеется вложение $\alpha_n: V'_n \hookrightarrow V_n$, которое для любого s индуцирует естественное отображение

$$\alpha_{n,s}: V'_n(s) \longrightarrow V_n(s). \quad (4.23)$$

Из (2.1) и определения группы V'_n следует существование точной последовательности $V'_n \xrightarrow{\alpha_n} V_n \longrightarrow \mathcal{A}_n^{(p)} \longrightarrow 0$, которая индуцирует точную последовательность $V'_n(s) \xrightarrow{\alpha_{n,s}} V_n(s) \longrightarrow \mathcal{A}_n^{(p)}(s) \longrightarrow 0$. Применяя (2.21), мы получаем, что

$$\nu_\ell(|\text{Ker } \alpha_{n,s}|) = \nu_\ell(|\text{Coker } \alpha_{n,s}|) < c n s, \quad (4.24)$$

где c – константа из (2.21).

§ 5. Приложения к глобальным полям

В этом параграфе K обозначает произвольное поле алгебраических чисел, т.е. произвольное конечное расширение $\mathbb{Q}$. Пусть $\mathbb{Q}_\infty$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля $\mathbb{Q}$. Обозначим через Q_n единственное подполе поля $\mathbb{Q}_\infty$, имеющее степень ℓ^n над $\mathbb{Q}$. Положим $K_n = K \cdot Q_n$ и $K_\infty = K \cdot \mathbb{Q}_\infty = \bigcup_n K_n$. Тогда K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . В случае, когда $\zeta_0 \in K$ ($\sqrt{-1} \in K$ при $\ell = 2$), мы имеем $K_n = K(\zeta_n)$ для всех $n \geq 0$.

Заменяя в случае необходимости поле K полем K_p для достаточно большого p , мы можем считать, что в расширении K_∞/K все точки $v \mid \ell$ чисто разветвлены. В частности, для любого $n > p$ точки поля K_n , лежащие над ℓ , находятся во взаимно однозначном соответствии с точками поля K , лежащими над ℓ . Поэтому мы будем обозначать одной и той же буквой v точку поля K , лежащую над ℓ , и ее продолжение в любом поле K_n . Для поля K_n имеется набор его пополнений $K_{n,v}$ по всем точкам $v \mid \ell$, и поле $K_{\infty,v} = \bigcup_n K_{n,v}$ является круговым $\mathbb{Z}_\ell$ -расширением локального поля K_v . Для дальнейшего существенно то, что нумерация локальных полей $K_{n,v}$ совпадает с определенной в § 1 нумерацией промежуточных подполей $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения $K_{\infty,v}/K_v$, что символически можно выразить формулой $K_{n,v} = K_{v,n}$ для всех $n \geq 0$.

Для любого достаточно большого индекса p имеется канонический изоморфизм групп Галуа

$$G(K_\infty/K_p) \cong G(K_{\infty,v}/K_{p,v}) \quad \text{для всех } v \mid \ell, \quad (5.1)$$

поэтому, выбирая некоторую топологическую образующую γ_p группы $G(K_\infty/K_p)$, мы, тем самым, одновременно выбираем топологические образующие в группах

Галуа $G(K_{\infty,v}/K_{p,v})$ для всех $v \mid \ell$. Везде ниже мы предполагаем, что образующие в группах $G(K_{\infty,v}/K_{p,v})$ выбраны именно таким образом. Изоморфизм (5.1) позволяет рассматривать элемент $(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)$, где $\Phi_n(q)$ был определен в (1.5) как элемент групповой алгебры $\mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_p)]$.

Увеличивая в случае необходимости индекс p , мы можем считать, что при всех $v \mid \ell$ для локальных полей $K_{p,v}$ выполняется утверждение предложения 4.1 или предложения 4.2, т.е. что для заданной точки $v \mid \ell$, любого $n > p$ и любого натурального s существует произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,v}^s: V(K_{n,v})(s) \times V'(K_{n,v})(s) \longrightarrow \mathbb{Z}(s), \quad (5.2)$$

определенное, как в (4.5), и обладающее тем свойством, что порядки его ядер $\text{Ker}_{n,v,s}$ и $\text{Ker}'_{n,v,s}$ слева и справа соответственно удовлетворяют неравенству

$$\nu_\ell(|\text{Ker}_{n,v,s}|) = \nu_\ell(|\text{Ker}'_{n,v,s}|) < c_v n s, \quad (5.3)$$

где c_v – некоторая константа, зависящая только от поля K , точки v и индекса p .

Для любого $n > p$ мы полагаем

$$V_n = V(K_n) = \prod_{v \mid \ell} V(K_{n,v}), \quad V'_n = V'(K_n) = \prod_{v \mid \ell} V'(K_{n,v}),$$

где произведение берется по всем точкам поля K_n , лежащим над ℓ .

Имеется естественный мономорфизм

$$\log: V(K_n) \hookrightarrow \prod_{v \mid \ell} K_{n,v} = K_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell, \quad (5.4)$$

который для любой точки $v \mid \ell$ на v -компоненте $V(K_{n,v})$ совпадает с ℓ -адическим логарифмом (1.4). При ограничении на подгруппу $V'(K_n)$ отображение (5.4) дает вложение

$$\log: V'(K_n) \hookrightarrow \prod_{v \mid \ell} K_{n,v} = K_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell. \quad (5.5)$$

Мы также будем называть отображения (5.4) и (5.5) отображениями ℓ -адического логарифма.

Для заданного натурального s положим

$$V_n(s) = V(K_n)(s) = \prod_{v \mid \ell} V(K_{n,v}(s)),$$

$$V'_n(s) = V'(K_n)(s) = \prod_{v \mid \ell} V'(K_{n,v}(s)).$$

Если G – некоторая группа автоморфизмов поля K_n , коммутирующих с γ_p , то $V_n(s)$ и $V'_n(s)$ являются G -модулями.

Набор произведений (5.2) по всем точкам $v \mid \ell$ определяет произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n^s: V(K_n)(s) \times V'(K_n)(s) \longrightarrow \mathbb{Z}(s), \quad (5.6)$$

где для $x \in V(K_n)(s)$, $x = \prod_{v|\ell} x_v$, $x_v \in V(K_{n,v})(s)$ и $y \in V'(K_n)(s)$, $y = \prod_{v|\ell} y_v$, $y_v \in V'(K_{n,v})(s)$ мы полагаем

$$\langle x, y \rangle_n^s = \sum_{v|\ell} \langle x_v, y_v \rangle_{n,v}^s. \quad (5.7)$$

Отметим основные свойства произведения (5.6), которые будут использоваться в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $x \in V(K_n)$, $y \in V'(K_n)$ и $\bar{x}, \bar{y}$ — образы элементов x, y в $V(K_n)(s)$ и $V'(K_n)(s)$ соответственно. Тогда произведение (5.6) задается в явном виде формулой

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_n^s = \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}(\log x \cdot (\gamma_p - 1)\Phi_n(q) \log y) \pmod{\ell^s}, \quad (5.8)$$

где $\log x, \log y \in K_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{\ell}$ — образы элементов x и y относительно отображений (5.4) и (5.5) соответственно, а $\text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}$ — отображение следа из $K_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{\ell}$ в $\mathbb{Q}_{\ell}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \prod_{v|\ell} x_v$, $y = \prod_{v|\ell} y_v$, где $x_v \in V(K_{n,v})$, $y_v \in V'(K_{n,v})$. Тогда из (5.7) следует, что

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_n^s = \sum_{v|\ell} \langle x_v, y_v \rangle_n \pmod{\ell^s}, \quad (5.9)$$

где в правой части (5.9) стоит значение произведения (4.3). Отметим, что для любой точки $v \mid \ell$ элемент γ_p в (4.4) согласован с элементом γ_p , входящим в (5.8), относительно действия изоморфизма (5.1). Формула (5.8) следует теперь непосредственно из (4.4) и того обстоятельства, что глобальный след равен сумме локальных следов. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть для некоторого n заданы группы $A_n \subseteq V_n$ и $B_n \subseteq V'_n$ ортогональные друг другу относительно произведения

$$(x, y) \longrightarrow \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}(\log x \cdot \log y).$$

Предположим, что B_n является $G(K_n/K_p)$ -модулем. Для заданного натурального s пусть $\bar{A}_n$ и $\bar{B}_n$ — образы A_n и B_n в $V_n(s)$ и $V'_n(s)$ соответственно. Тогда $\bar{A}_n$ и $\bar{B}_n$ ортогональны друг другу относительно произведения (5.6), т.е. $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_n^s = 0$ для любых $\bar{a} \in \bar{A}_n$, $\bar{b} \in \bar{B}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a} \in \bar{A}_n$, $\bar{b} \in \bar{B}_n$ и a, b — некоторые их прообразы в A_n и B_n соответственно. Согласно (1.5) $\ell^{m+1}(\gamma_p - 1)\Phi_n(q) \in \mathbb{Z}_{\ell}[G(K_n/K_p)]$, поэтому $\ell^{m+1}(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(b) \in B_n$ и, следовательно,

$$\text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}(\log a \cdot \ell^{m+1}(\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log b)) = 0.$$

Тогда и

$$\text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}(\log a \cdot (\gamma_p - 1)\Phi_n(q)(\log b)) = 0,$$

откуда в силу (5.8) мы получаем, что $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_n^s = 0$. Предложение доказано.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из формулы (5.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть σ – некоторый автоморфизм поля K_n , коммутирующий с γ_p . Тогда σ действует на $V(K_n)$ и $V'(K_n)$, и для любых $x \in V(K_n)(s)$, $y \in V'(K_n)(s)$ выполняется соотношение

$$\langle x, y \rangle_n^s = \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle_n^s.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть $\text{Ker}_{n,s}$ и $\text{Ker}'_{n,s}$ – ядра произведения (5.6) слева и справа соответственно. Тогда существует константа c , зависящая только от поля K и индекса p , такая, что для любого натурального s и любого $n > p$ справедливо неравенство

$$\nu_\ell(|\text{Ker}_{n,s}|) = \nu_\ell(|\text{Ker}'_{n,s}|) < cns.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.7) $\text{Ker}_{n,s} = \prod_{v|\ell} \text{Ker}_{n,v,s}$, $\text{Ker}'_{n,s} = \prod_{v|\ell} \text{Ker}'_{n,v,s}$, поэтому утверждение предложения следует непосредственно из (5.3), причем можно положить $c = \sum_{v|\ell} c_v$, где c_v – константа из (5.3). Предложение доказано.

Для любого натурального s определен канонический гомоморфизм

$$\alpha_{n,s} = \prod_{v|\ell} \alpha_{n,v,s} : V'(K_n)(s) \longrightarrow V(K_n)(s), \quad (5.10)$$

где $\alpha_{n,v,s}$ – локальные гомоморфизмы из (4.23). Применяя к гомоморфизмам (4.23) формулу (4.24), мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Существует константа c , зависящая только от поля K и индекса p , такая, что для любого $n > p$ и любого s

$$\nu_\ell(|\text{Ker } \alpha_{n,s}|) = \nu_\ell(|\text{Coker } \alpha_{n,s}|) < cns.$$

Здесь можно положить $c = \sum_{v|\ell} c_v$, где c_v обозначает локальную константу, входящую в (4.24).

Чтобы сформулировать и доказать основной результат этой работы, нам необходимо напомнить некоторые определения и результаты теории Ивасава.

Пусть K – поле алгебраических чисел и K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение K . Пусть $\text{Cl}_{n,\ell}$ – ℓ -компонента группы классов идеалов поля K_n . Тогда модуль Тэйта расширения K_∞/K , называемый также модулем Ивасава, определяется формулой $T_\ell(K_\infty) = \varprojlim \text{Cl}_{n,\ell}$, где предел берется относительно норменных отображений. Известно, что $T_\ell(K_\infty)$ конечно порожден как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль тогда и только тогда, когда существует константа r , не зависящая от n , такая, что при любом n минимальное число образующих группы $\text{Cl}_{n,\ell}$ не превосходит r . В этом случае говорят, что для данного ℓ поле K имеет тривиальный μ -инвариант Ивасава, и пишут $\mu_\ell(K) = 0$ или $\mu_\ell(T_\ell(K_\infty)) = 0$. Предполагается, что $\mu_\ell(K) = 0$ для любого ℓ и любого поля алгебраических чисел K , но в настоящее время эта гипотеза доказана только для абелевых полей и еще в некоторых специальных случаях. В частности, известная теорема Ивасава [1] утверждает, что для конечного ℓ -расширения полей алгебраических чисел L/K условия $\mu_\ell(K) = 0$ и $\mu_\ell(L) = 0$ равносильны. В частности, если L является ℓ -расширением абелева поля K , то $\mu_\ell(L) = 0$.

Другой важный объект, связанный с расширением K_∞/K , – это группа Галуа $X(K_\infty) = G(M/K_\infty)$, где M – максимальное абелево ℓ -расширение поля K_∞ , не разветвленное вне ℓ . Абелева про- ℓ -группа $X(K_\infty)$ является конечно порожденным модулем над пополненным групповым кольцом $R_\infty = \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]] = \varprojlim \mathbb{Z}_\ell[G(K_n/K)]$. В частности, определен подмодуль R_∞ -кручения $\text{Tors}(X(K_\infty)) \subseteq X(K_\infty)$. Модуль $X(K_\infty)$ не содержит конечных нетривиальных R_∞ -подмодулей, поэтому условие $\mu_\ell(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0$ равносильно тому, что $\text{Tors}(X(K_\infty)) = 0$, а следовательно, и $X(K_\infty)$ являются $\mathbb{Z}_\ell$ -модулями без кручения. Последнее условие равносильно тому, что для любого конечного множества точек S поля K , содержащего все точки, лежащие над ℓ , группа Галуа $G(N_S/K_\infty)$ является свободной про- ℓ -группой, где N_S – максимальное ℓ -расширение поля K , не разветвленное вне S (при $\ell = 2$ нужно еще потребовать, чтобы S не содержало архимедовых точек). Отсюда следует, что для любого конечного ℓ -расширения L/K (не разветвленного в архимедовых точках при $\ell = 2$) условия $\mu_\ell(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0$ и $\mu_\ell(\text{Tors}(X(L_\infty))) = 0$ равносильны.

В случае, когда K содержит первообразный корень из единицы ζ_0 степени ℓ ($\sqrt{-1} \in K$ при $\ell = 2$) условия $\mu_\ell(K) = 0$ и $\mu_\ell(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0$ равносильны [2].

Напомним, что для любого поля K_n имеются естественные отображения

$$U(K_n) \xrightarrow{i_n} \prod_{v|\ell} U(K_{n,v}) \xrightarrow{j_n} V(K_n), \quad (5.11)$$

где i_n – диагональное вложение группы единиц поля K_n в прямое произведение групп локальных единиц, а j_n на каждой v -компоненте совпадает с отображением из (1.3). В частности, $\text{Ker } j_n \cong \prod_{v|\ell} \mu(K_{n,v})$ и $\text{Coker } j_n \cong \prod_{v|\ell} \mu_\ell(K_{n,v})$, причем последний изоморфизм определен неканонически.

Вложение i_n и гомоморфизм j_n индуцируют гомоморфизм

$$f_n: U(K_n)[\ell] \longrightarrow V(K_n), \quad (5.12)$$

где $U(K_n)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы $U(K_n)$. Положим

$$V^+(K_n) = \{x \in V(K_n) \mid x^{\ell^a} \in \text{Im } f_n \text{ для некоторого } a\}.$$

Другими словами, $V^+(K_n)$ – это минимальный $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль модуля $V(K_n)$, содержащий образ отображения (5.12), и такой, что $V(K_n)/V^+(K_n)$ не имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -кручения. Положим

$$V^-(K_n) = \{x \in V(K_n) \mid \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}(\log x \cdot \log y) = 0 \text{ для всех } y \in V^+(K_n)\},$$

где $\log$ – это отображение (5.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе тогда и только тогда, когда ранги $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей $C_n = C(K_n) := V^+(K_n) \cap V^-(K_n)$ остаются ограниченными в совокупности при росте n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = G(K_n/K_p)$. Тогда группы $V^+(K_n)$, $V^-(K_n)$, $C(K_n)$ и др. являются $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -модулями. Для любого конечно порожденного $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -модуля A и заданного d , $p \leq d \leq n$, мы положим $A^{[d]} = A^{G(K_n/K_d)}$ и $A_{[d]} = \{x \in A \mid \text{Sp}_{K_n/K_d}(x) = 0\}$. Очевидно, что $A^{[d]} \cap A_{[d]}$ и $A/(A^{[d]} + A_{[d]})$ – конечные модули. Если A – подмодуль в $K_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$, то

$$\text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}(x \cdot y) = 0 \quad \text{для любых } x \in A^{[d]}, \quad y \in A_{[d]}.$$

Кроме того, если B – бесконечный подмодуль в $A_{[d]}$ и $d > p$, то $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг B не меньше, чем $(\ell - 1)\ell^{d-p-1}$, что следует из описания неприводимых представлений G над $\mathbb{Q}_\ell$.

Итак, предположим, что $\mathbb{Z}_\ell$ -ранги всех модулей C_n ограничены некоторой константой s . Это означает, что найдется индекс d_1 такой, что $(C_n)_{[d]} = 0$ для любого $d > d_1$, т.е.

$$V^+(K_n)_{[d]} \cap V^-(K_n)_{[d]} = 0. \quad (5.13)$$

Заметим, что произведение

$$(x, y) \longrightarrow \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}}(\log x \cdot \log y) \quad (5.14)$$

невырождено на $V(K_n)$, откуда следует, что $\text{rk } V(K_n) = \text{rk } V^+(K_n) + \text{rk } V^-(K_n)$, где rk означает ранг над $\mathbb{Z}_\ell$. Аналогичное равенство выполняется и для поля K_d , откуда следует, что

$$\text{rk } V(K_n)_{[d]} = \text{rk } V^+(K_n)_{[d]} + \text{rk } V^-(K_n)_{[d]}. \quad (5.15)$$

Поскольку произведение (5.14) остается невырожденным при ограничении на $V(K_n)_{[d]}$, равенства (5.13) и (5.15) показывают, что произведение (5.14) остается невырожденным и при ограничении на $V^+(K_n)_{[d]}$.

С другой стороны, хорошо известно, что для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения произвольного поля алгебраических чисел K справедлива так называемая слабая гипотеза Леопольдта, т.е. ранги групп $\text{Ker } f_n$ в (5.12) остаются ограниченными в совокупности для всех n . Это означает, что существует индекс d_2 , не зависящий от n , такой, что для любого $d > d_2$ отображение f_n индуцирует вложение (с точностью до подгруппы корней из единицы)

$$f'_n: U(K_n)[\ell]_{[d]} \longrightarrow V(K_n)_{[d]}.$$

Полагая $d = \max\{d_1, d_2\}$ и учитывая, что $U(K_n)[\ell]_{[d]} = U(K_n/K_d)[\ell]$, мы получаем, что при любом $n > d$ отображение f'_n и произведение (5.14) индуцируют невырожденное произведение на про- ℓ -пополнении группы относительных единиц $U(K_n/K_d)[\ell]$, т.е. $R_\ell(K_n/K_d) \neq 0$ для всех $n > d$, и для расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе.

Наоборот, пусть для K_∞/K справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе, т.е. существует d такое, что $R_\ell(K_n/K_d) \neq 0$ для всех $n > d$. Тогда для этих n отображение f'_n является вложением, и произведение (5.14) остается невырожденным при ограничении на $V^+(K_n)_{[d]}$, т.е. $V^+(K_n)_{[d]} \cap V^-(K_n)_{[d]} = 0$. Тогда $C(K_n)_{[d]} = 0$, т.е. $C(K_n) = C(K_n)^{[d]}$ для всех $n > d$. Это означает, что $C(K_n) \subset V(K_d)$, т.е. ранг группы $C(K_n)$ ограничен величиной $\text{rk } V(K_d)$ при всех $n > d$. Предложение доказано.

§ 6. Приложение к гипотезе о ℓ -адическом регуляторе

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать основной результат этого параграфа и всей работы. Напомним, что через $d(A)$ мы обозначаем минимальное число образующих $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля A .

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть ℓ – нечетное простое число и K – поле алгебраических чисел, удовлетворяющее следующим условиям:*

- (i) $\mu_\ell(K) = 0$;
- (ii) $\mu_\ell(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0$;
- (iii) для поля K и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе;
- (iv) существует не зависящая от n константа c такая, что для всех $n > 0$

$$d(V(K_n)/(V^+(K_n) + V^-(K_n))) < cn.$$

Тогда для любого поля L , являющегося конечным ℓ -расширением поля K , выполняются условия:

- (i') $\mu_\ell(L) = 0$;
- (ii') $\mu_\ell(\text{Tors}(X(L_\infty))) = 0$;
- (iii') для поля L и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения L_∞/L справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе;
- (iv') существует не зависящая от n константа c' такая, что для всех $n > 0$

$$d(V(L_n)/(V^+(L_n) + V^-(L_n))) < c'n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что теорему достаточно доказать для случая, когда L – циклическое расширение K степени ℓ , так как общий случай следует отсюда индукцией по степени расширения $[L : K]$. Согласно сделанным выше замечаниям, если для поля K выполняются условия (i) и (ii), то для поля L выполняются условия (i') и (ii'). Кроме того, мы всегда можем заменить основное поле K некоторым большим полем K_p . В частности, мы можем предполагать, что поля K_∞ и L линейно разделены над K .

Итак, мы предполагаем, что L – циклическое расширение K степени ℓ с группой Галуа $G = G(L/K) = G(L_n/K_n) = G(L_\infty/K_\infty)$, и для L выполнены условия (i') и (ii').

Для доказательства теоремы введем следующую терминологию. Пусть каждому полю K_n (или L_n) поставлена в соответствие конечная абелева ℓ -группа A_n . Мы будем говорить, что последовательность групп $\{A_n\}$ *ограничена*, если существует константа c , не зависящая от n , такая, что $\nu_\ell(|A_n|) < cn$ для всех $n > 0$. Если каждому полю L_n поставлен в соответствие некоторый G -модуль B_n , то мы говорим, что последовательность $\{B_n\}$ имеет *ограниченные когомологии*, если при любом i последовательность групп $H^i(G, B_n)$ ограничена в указанном выше смысле. Очевидно, что это условие достаточно проверить для любых двух соседних значений i .

Непосредственно из нашего определения вытекает

ЛЕММА 6.1. Пусть заданы три последовательности абелевых групп $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ и $\{C_n\}$ такие, что при любом n имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0. \quad (6.1)$$

Тогда из ограниченности любых двух из этих последовательностей следует, что и третья последовательность ограничена.

Пусть $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ и $\{C_n\}$ – три последовательности G -модулей, связанных для любого n точной последовательностью (6.1). Тогда из того, что любые две из этих последовательностей имеют ограниченные когомологии, следует, что и третья имеет ограниченные когомологии.

Пусть $\{A_n\}$ – последовательность G -модулей, которые свободны как $\mathbb{Z}_\ell$ -модули. В этом случае последовательность $\{A_n\}$ имеет ограниченные когомологии тогда и только тогда, когда последовательность $\{A_n/\ell A_n\}$ имеет ограниченные когомологии.

Если $\{A_n\}$ – последовательность G -модулей, которая ограничена как последовательность абелевых групп, то она имеет ограниченные когомологии.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из локальной теории полей классов.

ЛЕММА 6.2. Последовательность G -модулей $\{V(L_n)\}$ имеет ограниченные когомологии.

ЛЕММА 6.3. При $\ell \neq 2$ последовательность G -модулей $\{U(L_n)\}$ имеет ограниченные когомологии. При $\ell = 2$ это утверждение справедливо, если в L/K нет разветвленных архимедовых точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартное вычисление группы $H^1(G, U(L_n))$ с помощью точной последовательности $1 \longrightarrow U(L_n) \longrightarrow L_n^\times \longrightarrow L_n^\times/U(L_n) \longrightarrow 1$ показывает, что $d(H^1(G, U(L_n))) < c_1(n) + c_2(n)$, где $c_1(n)$ – минимальное число образующих ℓ -компоненты $\text{Cl}_\ell(L_n)$ группы классов поля L_n и $c_2(n)$ – число простых точек поля K_n , разветвленных в расширении L_n/K_n .

Ввиду условия (i) все числа $c_1(n)$ ограничены некоторой константой c_1 , не зависящей от n . Все числа $c_2(n)$ также ограничены некоторой константой c_2 , не зависящей от n , поскольку в расширении L/K разветвлены лишь конечное число точек, и каждая из этих точек имеет лишь конечное число продолжений в поле K_∞ . Таким образом, $d(H^1(G, U(L_n))) < c_1 + c_2$, где $c_1 + c_2$ не зависит от n .

Вычисляя с помощью теоремы Дирихле ранги групп $U(K_n)$ и $U(L_n)$, мы получаем, что $|H^1(G, U(L_n))|/|H^0(G, U(L_n))| = \ell$, откуда следует, что при любом n

$$d(H^0(G, U(L_n))) < c_1 + c_2 - 1.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.4. Последовательность G -модулей $V^+(L_n)$ имеет ограниченные когомологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y_n – группа Галуа максимального абелева ℓ -расширения поля L_n , не разветвленного вне ℓ . Тогда Y_n содержится в точной последовательности

$$0 \longrightarrow X(L_\infty)/(\gamma_n - 1)X(L_\infty) \longrightarrow Y_n \longrightarrow \Gamma_n \longrightarrow 0,$$

где $\Gamma_n = G(L_\infty/L_n)$ и γ_n – некоторая топологическая образующая группы Γ_n . Поэтому из условия (ii') следует, что минимальное число образующих подмодуля $\mathbb{Z}_\ell$ -крючения в Y_n ограничено некоторой константой c , не зависящей от n .

Рассмотрим естественное диагональное отображение

$$f'_n : U(L_n)[\ell] \longrightarrow \prod_{v|\ell} U^{(1)}(L_{n,v}),$$

индуцированное отображением (5.11) для поля L_n , где $U(L_n)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы единиц $U(L_n)$ и $U^{(1)}(L_{n,v})$ – группа главных единиц локального поля $L_{n,v}$. Согласно теории полей классов группа $A_n := \text{Coker } f'_n$ естественно изоморфна некоторой подгруппе группы Y_n , именно, подгруппе, порожденной подгруппами инерции всех точек v , лежащих над ℓ . Следовательно, минимальное число образующих подмодуля $\mathbb{Z}_\ell$ -крючения $T(A_n)$ в группе A_n не превосходит некоторой константы c , не зависящей от n . Учитывая, что

$$V(L_n)/\left(\prod_{v|\ell} U^{(1)}(L_{n,v})\right) \cong \prod_{v|\ell} \mu_\ell(L_{n,v}),$$

мы получаем, что имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f_n \longrightarrow U(L_n)[\ell] \xrightarrow{f_n} V^+(L_n) \longrightarrow B_n \longrightarrow 0, \quad (6.2)$$

где f_n определено, как в (5.12), а B_n определяется как коядро f_n . Группа B_n содержится в точной последовательности $T(A_n) \longrightarrow B_n \longrightarrow \prod_{v|\ell} \mu_\ell(L_{n,v})$ и, следовательно, $d(B_n) < c$, где c – некоторая константа, не зависящая от n . Тогда согласно лемме 6.1 последовательность G -модулей $\{B_n\}$ имеет ограниченные кохомологии. С другой стороны, для $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения L_∞/L справедлива слабая гипотеза Леопольдта, т.е. последовательность $\{\text{Ker } f'_n\}$ стабилизируется, начиная с некоторого n , и, следовательно, имеет ограниченные кохомологии. Тогда из лемм 6.1 и 6.3 следует, что и последовательность G -модулей $\{V^+(L_n)\}$ имеет ограниченные кохомологии. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.5. *Последовательность G -модулей $V^-(L_n)$ имеет ограниченные кохомологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатами предложений 5.1 – 5.5 для случая $s = 1$. Соответственно, для абелевой группы A через $A(1)$ мы будем обозначать группу $A/\ell A$. Согласно определению модулей $V^+(L_n)$ группа $V(L_n)/V^+(L_n)$ не имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -крючения, т.е. вложение $V^+(L_n) \hookrightarrow V(L_n)$ индуцирует вложение

$$V^+(L_n)(1) \hookrightarrow V(L_n)(1). \quad (6.3)$$

Согласно леммам 6.1, 6.3 и 6.4 обе последовательности групп, входящие в (6.3), имеют ограниченные когомологии. Для упрощения обозначений мы будем в доказательстве этой леммы обозначать $V^+(L_n)(1)$ через A_n , а $V(L_n)(1)$ через B_n . Вложение (6.3) индуцирует точную последовательность двойственных групп

$$0 \longrightarrow A_n^\perp \longrightarrow \text{Char}(B_n) \longrightarrow \text{Char}(A_n) \longrightarrow 0. \quad (6.4)$$

Из леммы 6.1 следует, что и последовательность $\{A_n^\perp\}$ имеет ограниченные когомологии.

Из существования произведения (5.6) (при $s = 1$) для поля L_n следует существование естественного гомоморфизма

$$\varphi_n: V'(L_n)(1) \longrightarrow \text{Char}(B_n). \quad (6.5)$$

Поскольку $\text{Ker } \varphi_n$ совпадает с правым ядром $\text{Ker}'_{n,1}$ произведения (5.6), из предложения 5.4 следует, что

$$\nu_\ell(|\text{Ker } \varphi_n|) < cn. \quad (6.6)$$

Положим $V'(L_n)^- = V^-(L_n) \cap V'(L_n)$. Заменяя в случае необходимости основное поле K некоторым большим полем K_p , мы можем считать, что $V'(L_n)$ является $G(L_n/K)$ -модулем. Тогда и $V'(L_n)^-$ будет $G(L_n/K)$ -модулем. Так как модуль $V(L_n)/V^-(L_n)$ не имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -кручения, модуль $V'(L_n)/V'(L_n)^-$ также не имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -кручения. Поэтому естественное вложение $V'(L_n)^- \hookrightarrow V'(L_n)$ индуцирует вложение $V'(L_n)^-(1) \hookrightarrow V'(L_n)(1)$.

Из определения модуля $V'(L_n)^-$ следует, что $\text{Sp}_{L_n/\mathbb{Q}}(\log x \cdot \log y) = 0$ для любых $x \in V^+(L_n)$ и $y \in V'(L_n)^-$. Согласно предложению 5.2 тогда $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_n^1 = 0$, где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ образы x и y в $V(L_n)(1)$ и $V'(L_n)(1)$ соответственно. Другими словами, мы получаем, что (6.5) индуцирует отображение $\varphi'_n: V'(L_n)^-(1) \longrightarrow A_n^\perp$, причем из (6.6) следует, что выполняется оценка

$$\nu_\ell(|\text{Ker } \varphi'_n|) \leq \nu_\ell(|\text{Ker } \varphi_n|) < cn, \quad (6.7)$$

т.е. последовательность групп $\text{Ker } \varphi'_n$ ограничена.

Для того, чтобы оценить порядки групп $\text{Coker } \varphi'_n$ заметим, что согласно (6.4)

$$\nu_\ell(|A_n^\perp|) = \nu_\ell(|B_n|) - \nu_\ell(|A_n|) = \text{rk } V(L_n) - \text{rk } V^+(L_n).$$

Так как произведение вида (5.14) невырожденно, мы получаем, что

$$\text{rk } V^-(L_n) = \text{rk } V(L_n) - \text{rk } V^+(L_n). \quad (6.8)$$

Поскольку $V'(L_n)^-$ имеет конечный индекс в $V^-(L_n)$, мы получаем, что

$$\nu_\ell(|V'(L_n)^-(1)|) = \text{rk } V'(L_n)^- = \text{rk } V^-(L_n) = \text{rk } V(L_n) - \text{rk } V^+(L_n).$$

Таким образом, $|V'(L_n)^-(1)| = |A_n^\perp|$, откуда следует, что $|\text{Ker } \varphi'_n| = |\text{Coker } \varphi'_n|$. Неравенство (6.7) показывает, что обе эти последовательности групп ограничены. Тогда из леммы 6.1 следует, что последовательность G -модулей $\{V'(L_n)^-(1)\}$ имеет ограниченные когомологии.

Отображение $\alpha_{n,1}$ из (5.10), рассматриваемое для поля L_n , индуцирует отображение $\alpha'_{n,1}: V'(L_n)^-(1) \longrightarrow V^-(L_n)(1)$. Тогда согласно предложению 5.5

$\nu_\ell(|\text{Ker } \alpha'_{n,1}|) \leq \nu_\ell(|\text{Ker } \alpha_{n,1}|) < cn$, где c – некоторая константа, не зависящая от n .

Поскольку $V'(L_n)^-$ имеет конечный индекс в $V^-(L_n)$, группы $V'(L_n)^-(1)$ и $V^-(L_n)(1)$ имеют одинаковые порядки, поэтому

$$\nu_\ell(|\text{Coker } \alpha'_{n,1}|) = \nu_\ell(|\text{Ker } \alpha'_{n,1}|) < cn$$

и, следовательно, в силу леммы 6.1 последовательность G -модулей $\{V^-(L_n)(1)\}$ имеет ограниченные когомологии. Снова применяя лемму 6.1, мы получаем, что и последовательность $\{V^-(L_n)\}$ имеет ограниченные когомологии. Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы. Соотношение (6.8), которое справедливо и для поля K_n , показывает, что

$$|V(K_n)(1)| = |V^+(K_n)(1)| \cdot |V^-(K_n)(1)|. \quad (6.9)$$

Существует естественная точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V^+(K_n)(1) \cap V^-(K_n)(1) &\longrightarrow V^+(K_n)(1) \oplus V^-(K_n)(1) \xrightarrow{\beta} V(K_n)(1) \\ &\longrightarrow V(K_n)(1)/(V^+(K_n)(1) + V^-(K_n)(1)) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\beta(x \oplus y) = x + y$. Из этой точной последовательности и (6.9) следует, что

$$|V^+(K_n)(1) \cap V^-(K_n)(1)| = |V(K_n)/(V^+(K_n)(1) + V^-(K_n)(1))|. \quad (6.10)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \nu_\ell(|V(K_n)(1)/(V^+(K_n)(1) + V^-(K_n)(1))|) \\ = d(V(K_n)/(V^+(K_n) + V^-(K_n))), \end{aligned} \quad (6.11)$$

поэтому условие (iv) нашей теоремы и равенство (6.10) показывают, что

$$\nu_\ell(|V^+(K_n)(1) \cap V^-(K_n)(1)|) < c_1 n, \quad (6.12)$$

где c_1 – некоторая константа, не зависящая от n , т.е. $\{V^+(K_n)(1) \cap V^-(K_n)(1)\}$ является ограниченной последовательностью групп. Мы покажем, что последовательность групп $\{V^+(L_n)(1) \cap V^-(L_n)(1)\}$ также ограничена.

Действительно, для данного n мы имеем

$$(V^+(L_n)(1) \cap V^-(L_n)(1))^G = V^+(L_n)(1)^G \cap V^-(L_n)(1)^G.$$

Согласно леммам 6.4 и 6.5 существуют константы c_2 и c_3 , не зависящие от n , такие, что для всех n

$$\nu_\ell(|H^0(G, V^+(L_n)(1))|) < c_2 n, \quad \nu_\ell(|H^0(G, V^-(L_n)(1))|) < c_3 n.$$

Следовательно,

$$\nu_\ell(|(V^+(L_n)(1) \cap V^-(L_n)(1))^G|) < \nu_\ell(|E_n|) + (c_2 + c_3)n, \quad (6.13)$$

где $E_n := N_G(V^+(L_n)(1)) \cap N_G(V^-(L_n)(1))$ и N_G – норма относительно G .

Поскольку отображение $N_G: V(L_n)(1) \rightarrow V(L_n)(1)$ пропускается через естественное отображение $i_n: V(K_n)(1) \rightarrow V(L_n)(1)$, мы получаем, что $E_n \subseteq i_n(V^+(K_n)(1) \cap V^-(K_n)(1))$. Тогда из (6.12) и (6.13) следует, что

$$\nu_\ell(|(V^+(L_n)(1) \cap V^-(L_n)(1))^G|) < cn, \quad (6.14)$$

где $c = c_1 + c_2 + c_3$.

Очевидно, что для любой конечной абелевой группы A периода ℓ , являющейся G -модулем, справедливо неравенство $|A| \leq |A^G|^{|G|} = |A^G|^\ell$. Поэтому из (6.14) следует, что

$$\nu_\ell(|V^+(L_n)(1) \cap V^-(L_n)(1)|) < c\ell n, \quad (6.15)$$

что вместе с равенствами (6.10) и (6.11), написанными для поля L_n , доказывает выполнение условия (iv').

Чтобы доказать выполнение условия (iii'), мы заметим, что имеется включение $(V^+(L_n) \cap V^-(L_n))(1) \subseteq V^+(L_n)(1) \cap V^-(L_n)(1)$, поэтому из (6.15) следует, что для всех n

$$\lambda_n := \text{rk}(V^+(L_n) \cap V^-(L_n)) < c'n, \quad (6.16)$$

где $c' = c\ell$ – константа, не зависящая от n .

Согласно предложению 5.6 для расширения L_∞/L слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе справедлива тогда и только тогда, когда все числа λ_n ограничены некоторой константой C , не зависящей от n . Предположим, что это не так, т.е. числа λ_n неограниченно возрастают. Если $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, то группа Галуа $G(L_n/L_{n-1})$ действует нетривиально на свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $F := V^+(L_n) \cap V^-(L_n)$. Так как F является также $G(L_n/L)$ -модулем, мы получаем, что F содержит подмодуль ранга $(\ell - 1)[L_{n-1} : L]$, т.е.

$$\lambda_n \geq (\ell - 1)[L_{n-1} : L]. \quad (6.17)$$

Очевидно, что при всех достаточно больших n неравенство (6.17) противоречит неравенству (6.16). Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наше доказательство не проходит в случае $\ell = 2$, так как в этом случае условие (iii) никогда не выполняется за исключением тривиального случая, когда K вполне вещественное поле.

Укажем теперь некоторые следствия из теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть ℓ – нечетное простое число и K – поле CM -типа, т.е. чисто мнимое квадратичное расширение некоторого вполне вещественного поля k , удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) $\mu_\ell(K) = 0$;
- (ii) $\mu_\ell(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0$.

Пусть L – произвольное конечное расширение поля K . Тогда для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения L_∞/L справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. Кроме того, для всех $n > 0$ выполняется неравенство

$$d(V(L_n)/(V^+(L_n) + V^-(L_n))) < cn,$$

где c – некоторая константа, не зависящая от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно проверить только, что для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K выполняются условия (iii) и (iv) теоремы 6.1. Пусть k_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k и $k_n = k_\infty \cap K_n$. Тогда для любого n поле K_n чисто мнимо и является квадратичным расширением вполне вещественного поля k_n . В этом случае группа единиц $U(k_n)$ является подгруппой конечного индекса в $U(K_n)$, и справедливость условия (iii) следует из того, что для вполне вещественного поля k и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения k_∞ слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе эквивалентна слабой гипотезе Леопольдта, которая верна для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения любого поля алгебраических чисел.

Для проверки условия (iv) заметим, что на модуль Галуа $V(K_n)$ действует группа Галуа $\Delta = \{1, j\} = G(K_n/k_n)$. При $\ell \neq 2$ имеется разложение в прямую сумму

$$V(K_n) = V^\oplus(K_n) \oplus V^\ominus(K_n), \quad (6.18)$$

где $V^\oplus(K_n) = \frac{1}{2}(1+j)V(K_n)$ и $V^\ominus(K_n) = \frac{1}{2}(1-j)V(K_n)$.

Очевидно, что $f_n(U(K_n)[\ell]) \subseteq V^\oplus(K_n)$, где f_n – отображение (5.12). Следовательно, для любого n имеется включение

$$V^+(K_n) \subseteq V^\oplus(K_n). \quad (6.19)$$

Как мы уже упоминали выше, ядра отображений f_n стабилизируются для всех достаточно больших n , откуда следует, что

$$d(V^\oplus(K_n)/V^+(K_n)) < c, \quad (6.20)$$

где c – некоторая константа, не зависящая от n .

Очевидно, что из включения (6.19) следует включение $V^\ominus(K_n) \subseteq V^-(K_n)$, причем снова

$$d(V^-(K_n)/V^\ominus(K_n)) < c. \quad (6.21)$$

Тогда условие (iv) следует из существования разложения (6.18) и из неравенств (6.20) и (6.21).

Таким образом, для расширения K_∞/K выполняются условия (iii) и (iv) теоремы 6.1. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть ℓ – нечетное простое число и K – поле CM-типа, содержащее первообразный корень из единицы ζ_ℓ степени ℓ . Пусть $\mu_\ell(K) = 0$ и L – некоторое конечное ℓ -расширение K . Тогда для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения L_∞/L справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе, и для всех $n > 0$

$$d(V(L_n)/(V^+(L_n) + V^-(L_n))) < cn$$

для некоторой константы c , не зависящей от n .

Действительно, в этом случае из условия $\mu_\ell(K) = 0$ следует, что

$$\mu_\ell(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0,$$

и наша теорема следует непосредственно из теоремы 6.2.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть ℓ – нечетное простое число, K – абелево поле алгебраических чисел и L – конечное ℓ -расширение K . Тогда для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения L_∞/L справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе, и для всех $n > 0$

$$d(V(L_n)/(V^+(L_n) + V^-(L_n))) < cn,$$

где c – некоторая константа, не зависящая от n .

Действительно, присоединяя в случае необходимости к K корень из единицы ζ_0 и учитывая, что согласно теореме Ферреро–Вашингтона $\mu_\ell(K(\zeta_0)) = 0$, мы получаем отсюда, что $\mu_\ell(K) = 0$ и $\mu_\ell(\text{Tors}(X(K_\infty))) = 0$. Таким образом, наша теорема следует из теоремы 6.3.

§ 7. Заключительные замечания

В этом параграфе мы обсудим полученные результаты, обращая особое внимание на те вопросы, которые пока остаются открытыми.

В § 2 мы связали с локальным числовым полем K две бесконечные последовательности абелевых групп $\{\mathcal{A}_n^{(p)}\}$ и $\{\mathcal{B}_n^{(p)}\}$, определенных в (2.1) и (2.2) соответственно.

ВОПРОС 1. Существует ли неабелево локальное поле K , имеющее p -тип A для некоторого p , т.е. неабелево поле K , для которого указанные группы тривиальны хотя бы для одного значения p ?

От ответа на этот вопрос зависит статус теоремы 3.1. В случае положительного ответа мы получаем, что для некоторых неабелевых локальных полей K существует произведение T_p . Тем самым мы получаем новый класс полей алгебраических чисел: полей, пополнения которых относительно всех точек $v \mid \ell$ имеют p -тип A, причем этот класс оказывается шире класса полей с абелевыми пополнениями относительно всех точек $v \mid \ell$, который рассматривался в работах [4] и [5]. Тогда для этого, более широкого класса полей, должны быть верны основные результаты указанных работ, включая аналог формулы Римана–Гурвица из [5].

Отрицательный ответ на вопрос 1 означал бы, что теорема 3.1 дает новый способ построения произведения T_p и незаменима только при построении контрпримеров из § 3.

Что касается полей p -типа B, то здесь возникает

ВОПРОС 2. Пусть K – поле p -типа B, т.е. группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ нетривиальны для всех достаточно больших n . Может ли минимальное число образующих $d_n = d(\mathcal{A}_n^{(p)}) = d(\mathcal{B}_n^{(p)})$ неограниченно возрастать с ростом n ?

Для обсуждения возникающей здесь ситуации удобно дать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть K – поле p -типа B. Мы будем говорить, что K имеет p -тип B_1 , если существует натуральное не зависящее от n число λ такое, что

$$d_n = d(\mathcal{A}_n^{(p)}) = d(\mathcal{B}_n^{(p)}) = \lambda \quad (7.1)$$

для всех достаточно больших n .

Если числа d_n неограниченно возрастают с ростом n , то мы будем говорить, что K имеет p -тип B_2

Напомним, что согласно предложению 2.1 числа d_n образуют неубывающую последовательность, поэтому любое поле p -типа B имеет либо p -тип B_1 , либо p -тип B_2 .

На языке данного определения в вопросе 2 спрашивается о том, существуют ли поля p -типа B_2 . Заметим, что свойство поля K иметь p -тип B_2 не зависит от p .

ВОПРОС 3. Существуют ли поля K p -типа B_1 ?

Если поле K имеет p -тип B_1 , то с его круговым $\mathbb{Z}_\ell$ -расширением K_∞/K связаны два модуля Галуа $\mathcal{A}_\infty^{(p)} = \varprojlim \mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_\infty^{(p)} = \varprojlim \mathcal{B}_n^{(p)}$, где пределы берутся относительно отображений $N_{n,n-1}$ и $N'_{n,n-1}$ соответственно, определенных в (2.17) и (2.24). Каждый из этих модулей изоморфен $\mathbb{Z}_\ell^\lambda$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, где λ – константа из (7.1). Кроме того, на $\mathcal{A}_\infty^{(p)}$ и $\mathcal{B}_\infty^{(p)}$ действует автоморфизм $\gamma_p \in G(K_\infty/K_p)$. Это действие индуцирует действие γ_p на $\mathbb{Q}_\ell$ пространствах $V_1 = \mathcal{A}_\infty^{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ и $V_2 = \mathcal{B}_\infty^{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. В частности, определены два набора собственных значений $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ и $\beta_1, \dots, \beta_\lambda$ оператора γ_p , действующего на пространствах V_1 и V_2 соответственно.

ВОПРОС 4. Как вычислить инвариант λ в терминах других, более привычных инвариантов поля K ? Как вычислить числа $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ и $\beta_1, \dots, \beta_\lambda$? Существует ли какая-нибудь естественная связь между модулями Галуа $\mathcal{A}_\infty^{(p)}$ и $\mathcal{B}_\infty^{(p)}$?

Разумеется, все эти вопросы имеют смысл только в предположении, что ответ на вопрос 3 положителен.

Если K – поле p -типа B_1 , то конструкция теоремы 3.1 позволяет построить невырожденное полуторалинейное произведение, аналогичное произведению (3.2),

$$V_\infty \times V'_\infty \longrightarrow R_\infty, \quad (7.2)$$

где $V'_\infty = \varprojlim V'_n$, V'_n – группы, определенные в § 4, и предел берется относительно норменных отображений. Однако это произведение не будет внутренним. Оно индуцирует вложение $i: V'_\infty \hookrightarrow \text{Hom}_{R_\infty}(V_\infty, R_\infty)$, коядро которого изоморфно $\mathbb{Z}_\ell^\lambda$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль.

Предположим, что K – поле алгебраических чисел такое, что его пополнения K_v относительно всех точек $v \mid \ell$ имеют p -тип B_1 для некоторого, а следовательно, и для всех достаточно больших p . Тогда произведения (7.2), рассматриваемые для всех точек $v \mid \ell$, индуцируют полулокальное произведение

$$V(K_\infty) \times V'(K_\infty) \longrightarrow R_\infty, \quad (7.3)$$

где

$$V(K_\infty) = \prod_{v \mid \ell} V(K_{v,\infty}), \quad V'(K_\infty) = \prod_{v \mid \ell} V'(K_{v,\infty}).$$

Использование произведения (7.3) позволяет существенно упростить доказательство теоремы 6.1 (в предположении, что пополнения L_v поля L имеют тип B_1 для всех $v \mid \ell$). В этом случае можно, как и в [4], определить в $V(L_\infty)$ подмодули Галуа $V^+(L_\infty)$ и $V^-(L_\infty)$ как такие наименьшие подмодули в $V(L_\infty)$, что $V^+(L_\infty) \supseteq \varprojlim V^+(L_n)$, $V^-(L_\infty) \supseteq \varprojlim V^-(L_n)$ и R_∞ -модули $V(L_\infty)/V^+(L_\infty)$

и $V(L_\infty)/V^-(L_\infty)$ не имеют R_∞ -кручения. Тогда справедливость слабой гипотезы о ℓ -адическом регуляторе эквивалентна условию $V^+(L_\infty) \cap V^-(L_\infty) = 0$. В ситуации теоремы 6.2 можно тогда доказать, что $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $V(L_\infty)/(V^+(L_\infty) + V^-(L_\infty))$ конечно порожден (при $\ell \neq 2$).

Локальное поле K p -типа B_2 имеет тип B_2 для любого p , поэтому можно просто говорить о поле K типа B_2 . Для такого поля прежде всего возникают вопросы, связанные с числами ν_i из теоремы 2.1.

ВОПРОС 5. Каков истинный порядок роста функции $f(n) = d_n = d(\mathcal{A}_n^{(p)})$?

ВОПРОС 6. Верно ли, что последовательность $\{\nu_i\}$ периодична, начиная с некоторого места? Как связаны числа ν_i с другими инвариантами поля K ?

ВОПРОС 7. Верно ли, что для всех достаточно больших n абелевы группы $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$ изоморфны? Как связаны модули Галуа $\mathcal{A}_n^{(p)}$ и $\mathcal{B}_n^{(p)}$?

Пусть K – поле алгебраических чисел такое, что его пополнение K_v имеет тип B_2 хотя бы для одной точки $v \mid \ell$. В этом случае снова можно способом, указанным выше, определить подмодули $V^+(K_\infty)$ и $V^-(K_\infty)$ модуля $V(K_\infty)$, но совсем не очевидно, что для них будет выполняться равенство

$$\mathrm{rk} V(K_\infty) = \mathrm{rk} V^+(K_\infty) + \mathrm{rk} V^-(K_\infty), \quad (7.4)$$

где rk означает ранг над R_∞ . Именно поэтому данное нами доказательство теоремы 6.1 и получилось таким длинным.

В следующей работе из этой серии мы дадим критерий выполнения равенства (7.4), формулируемый в терминах порядка роста ℓ -адического регулятора на семействе всех промежуточных подполей K_n кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения данного поля алгебраических чисел K .

Список литературы

1. Iwasawa K. On the μ -invariants of $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions // Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honour Akizuki. Tokyo. 1973. P. 1–11.
2. Кузьмин Л. В. Когомологическая размерность некоторых групп Галуа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 487–495.
3. Кузьмин Л. В. Некоторые замечания о ℓ -адической теореме Дирихле и ℓ -адическом регуляторе // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 6. С. 1203–1240.
4. Кузьмин Л. В. Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 782–813.
5. Кузьмин Л. В. Аналог формулы Римана–Гурвица для одного типа ℓ -расширений полей алгебраических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 316–338.
6. Кузьмин Л. В. Новые явные формулы для символа норменного вычета и их приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 6. С. 1196–1228.
7. Кузьмин Л. В. Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. III // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 6. С. 29–82.
8. Кузьмин Л. В. Новое доказательство одной теоремы двойственности о ℓ -адических логарифмах локальных единиц // Итоги науки и техники. Совр. мат. и ее приложения. 1997. Т. 45. С. 72–81.
9. Wintenberger J.-P. Le corps des norms de certaines extensions infinies de corps locaux; application // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. IV. Ser 16. 1983. P. 59–89.

Российский научный центр “Курчатовский институт”,
Институт информационных технологий,
Москва 123182, Россия
E-mail: kuzmin@pnp.kiae.su

Поступило в редакцию
23.II.1999