Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Водопьянов, Пространства дифференциальных форм и отображения с контролируемым искажением, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 4, 5–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:07:04

УДК 515.164.13+517.548.2

С. К. Водопьянов

Пространства дифференциальных форм и отображения с контролируемым искажением

Исследуются необходимые и достаточные условия аппроксимативно дифференцируемых отображений $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ римановых многообразий, для которых оператор переноса дифференциальных форм с нормой в пространствах Лебега является ограниченным. В качестве следствия, в частности, получено, что гомеоморфизм $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ класса $ACL(\mathbb{M})$, для которого оператор переноса дифференциальных форм с нормой в $\mathcal{L}_p$ является изоморфизмом, неизбежно будет либо квазиконформным, либо квазиизометричным. Приводятся некоторые применения полученных результатов к исследованию функториальности когомологий в пространствах Лебега.

Библиография: 62 наименования.

Ключевые слова: лебегово пространство дифференциальных форм, искажение отображений, квазиконформное отображение, когомологии римановых пространств.

Введение

Мы исследуем свойства измеримых отображений $f: (\mathbb{M}, g) \rightarrow (\mathbb{M}', g')$ n -мерных римановых многообразий без края, индуцирующих ограниченный оператор переноса пространств дифференциальных форм с интегральными нормами. Как обычно, через $\mathcal{L}_{1,loc}(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ обозначено пространство всех дифференциальных форм степени k на $\mathbb{M}$ с локально интегрируемыми коэффициентами, в котором содержатся разные подпространства, определяемые по мере необходимости. Мы начнем с исследования банахова пространства $\mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ дифференциальных форм ω степени k с измеримыми коэффициентами, имеющих конечную норму

$$\|\omega\|_p = \left(\int_{\mathbb{M}} |\omega|^p d\mathcal{H}^n(x) \right)^{1/p}.$$

Основной вопрос, исследуемый в работе, состоит в нахождении минимальных аналитических и геометрических свойств отображения f , порождающего ограниченный оператор переноса

$$f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k), \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty, \quad (0.1)$$

дифференциальных форм степени k . Общепринятое определение оператора переноса формы $\omega \in \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)$ возможно в том случае, когда для $\mathcal{H}^n$ -почти всех точек многообразия $\mathbb{M}$ в некотором разумном смысле определен дифференциал $Df(x): T_x\mathbb{M} \rightarrow T_{f(x)}\mathbb{M}'$, который каноническим образом порождает

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457) и Программы Президента РФ "Поддержка ведущих научных школ" (проект НШ-6613.2008.1).

линейное отображение $\Lambda_k f(x): \Lambda_k T_x \mathbb{M} \rightarrow \Lambda_k T_{f(x)} \mathbb{M}'$ пространств k -векторов и операцию f^* переноса k -форм. Тогда каждой форме $\omega \in \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)$ можно поставить в соответствие форму $f^* \omega$. Если коэффициенты формы $f^* \omega$ измеримы, то можно исследовать вопрос об условиях принадлежности этой формы пространству $\mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$.

Подходящим понятием для поточечного определения операции f^* переноса является *аппроксимативная дифференцируемость* отображения f [1], [2]. В предварительных рассуждениях ограничимся случаем отображения $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow W$ евклидовых областей $U, W \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *аппроксимативно дифференцируемым* в точке $x \in U$ [1], [2], если существует линейное отображение $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(\{y \in B(x, r): |f(y) - f(x) - L(y - x)| > \varepsilon\})}{r^n} = 0 \quad (0.2)$$

для любого $\varepsilon > 0$ (здесь $\mathcal{H}^n(A)$ – n -мерная мера Хаусдорфа множества A). Известно, что аппроксимативный дифференциал единствен [1]. Далее он обозначается через $\text{ар } Df(x)$.

Любой k -форме $\omega = \sum \omega_\beta dy^\beta$ в W с непрерывными коэффициентами $\omega_\beta: W \rightarrow \mathbb{R}$, где суммирование идет по всем k -мерным упорядоченным мультииндексам $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$, $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_k \leq n$, а $dy^\beta = dy_{\beta_1} \wedge dy_{\beta_2} \wedge \dots \wedge dy_{\beta_k}$, соответствует k -форма

$$f^* \omega(x) = \sum_{\beta} \omega_{\beta}(f(x)) df_{\beta_1} \wedge df_{\beta_2} \wedge \dots \wedge df_{\beta_k} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \omega_{\beta}(f(x)) M_{\alpha}^{\beta}(x) dx_{\alpha}$$

с измеримыми коэффициентами, определенными для почти всех $x \in U$ (здесь $df_{\beta_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\beta_k}}{\partial x_i} dx_i$, где частные производные понимаются в аппроксимативном смысле, а $M_{\alpha}^{\beta}(x)$ – $(k \times k)$ -миноры матрицы $\text{ар } Df(x) = (\frac{\partial f_j}{\partial x_i})$, $i, j = 1, \dots, n$, с упорядоченными строками и столбцами).

В § 1 при исследовании вопроса об ограниченности оператора (0.1) мы неизбежно приходим к выводу, что все упомянутые $(k \times k)$ -миноры $M_{\alpha}^{\beta}(x)$ должны быть равны нулю почти всюду на множестве $Z = \{x \in U: \det Df(x) = 0\}$ нулей якобиана (для справедливости этого вывода в случае $p = \infty$ в § 1 формулируется дополнительная непрерывность).

Это наблюдение приводит к выделению естественного класса аппроксимативно дифференцируемых отображений f , для которых можно определить операцию переноса k -форм, даже если ее коэффициенты измеримы: мы говорим, что аппроксимативно дифференцируемое отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ имеет *k -конечное искажение* (коротко $f \in \mathcal{CD}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$), если $\mathcal{H}^n(Z) = 0$ при $k = 0$ и $\text{rank ar } Df(x) < k$ на Z при $1 \leq k \leq n$. Это определение обобщает известный при $k = 1$ класс отображений класса Соболева $W_{1, \text{loc}}^1(U)$ с конечным искажением [3]–[11], который характеризуется свойством: $Df(x) = 0$ почти всюду на множестве Z .

В § 1 получены необходимые и достаточные условия для измеримого отображения f такого, чтобы оператор (0.1) был ограничен. Кроме свойства k -конечного искажения, это отображение должно иметь также определенное поведение некоторой характеристики искажения, включающей в себя отношения $\frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|^q}$, где $J(x, f) = \det \text{ар } Df(x)$: оператор (0.1) ограничен тогда и только тогда, когда

отображение $f \in \mathcal{CD}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ и функция искажения

$$\mathbb{M}' \ni y \mapsto H_{k,q}(y) = \begin{cases} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} \right)^{1/q}, & \text{если } f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

принадлежит классу $L_{\varkappa}(\mathbb{M}')$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\varkappa = \infty$ ($\varkappa = q$), когда $q = p$ ($p = \infty$), при этом норма оператора f^* сравнима с величиной $\|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M}')\|$.

Утверждения, приведенные в § 1, можно рассматривать как обобщение результатов работ [12]–[19], в которых найдены необходимые и достаточные условия, налагаемые на измеримое отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$, для того, чтобы операторы переноса $f^*: L_p(\mathbb{M}') \rightarrow L_q(\mathbb{M})$ пространств суммируемых функций и $f^*: L_p^1(\mathbb{M}') \rightarrow L_q^1(\mathbb{M})$ однородных пространств Соболева, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, были ограниченными.

В § 2 доказано, что оператор переноса $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq k \leq n-1$, индуцированный некоторым отображением $f \in \text{ACL}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$, изоморфен тогда и только тогда, когда вне некоторого множества нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры отображение f совпадает почти всюду с некоторым квазиизометрическим при $pk \neq n$ (квазиконформным при $pk = n$) гомеоморфизмом.

В частности, если $f \in \text{ACL}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ – гомеоморфизм, то $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq k \leq n-1$, будет изоморфизмом векторных пространств тогда и только тогда, когда при $pk = n$ ($pk \neq n$) отображение f квазиконформно (квазиизометрично) (см. следствие 2.1).

В определенном смысле утверждения из § 2 обобщают результаты работ [13], [20]–[23].

Вышеупомянутые результаты применяются в § 3 для исследования функториальных свойств $L_{q,p}$ -когомологий, которые суть инвариант римановых пространств, определяемый как факторпространство p -интегрируемых замкнутых дифференциальных k -форм на многообразии $\mathbb{M}$ по модулю точных форм, являющихся внешними дифференциалами форм из $\mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$:

$$H_{q,p}^k(M) = \{\omega \mid \omega \in \mathcal{L}(\mathbb{M}, \Lambda^k), d\omega = 0\} / \{d\vartheta \mid \vartheta \in L_q(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})\}.$$

Заметим, что L_2 -когомологии римановых многообразий (случай $p = q = 2$) стали изучаться в 70-х годах прошлого века (см. [24], где приведено обозрение исследований в этой области). Факторпространство $H_{q,p}^k(M)$ введено в работе [25], где также доказано, что оно является инвариантом липшицевых структур многообразий. В работах [26]–[33] можно найти некоторые как аналитические, так и геометрические аспекты теории L_p -когомологий (случай $p = q$).

Связь между дифференциальными формами (интегральными когомологиями) и квазиконформными отображениями изучается в [34] (см. также [35], [36]).

§ 1. Дифференциальные формы и аппроксимативно дифференцируемые отображения

Приведем некоторые сведения из полилинейной алгебры евклидовых пространств. Недостающие детали можно найти в [1], [2]. Пусть V – евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, V^* – евклидово пространство, сопряженное к V , $\Lambda_k V$ – k -я внешняя степень пространства V , $\Lambda^k V$ – пространство k -линейных

кососимметрических $\mathbb{R}$ -значных функций на V^k . Элементы пространства $\Lambda_k V$ называются *k-векторами* над V , а элементы пространства $\Lambda^k V$ – *k-ковекторами* или *k-формами* над V . Определены операции умножения

$$\wedge: \Lambda_k V \times \Lambda_l V \rightarrow \Lambda_{k+l} V, \quad \wedge: \Lambda^k V \times \Lambda^l V \rightarrow \Lambda^{k+l} V;$$

k-вектор называется *простым*, если он представим в виде $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$, $a_i \in V = \Lambda_1 V$. Аналогично, *k*-форма называется *простой*, если она имеет вид $\omega = f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$, $f_i \in V^* = \Lambda^1 V$. Скалярное произведение, заданное в пространстве V , индуцирует каноническим образом скалярные произведения в $\Lambda_k V$ и $\Lambda^k V$. Для простых *k*-векторов $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$, $b = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$ имеем

$$(a, b)_{\Lambda_k V} = \det((a_i, b_j)_V),$$

для простых *k*-форм $f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$, $g = g_1 \wedge \cdots \wedge g_k$ выполнено

$$(f, g)_{\Lambda^k V} = \det((f_i, g_j)_{V^*}).$$

Обозначим через I_n^k множество всех упорядоченных мультииндексов вида $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\alpha_j \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_j < \alpha_l$ при $j < l$. Для произвольного набора векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in V$, и мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in I_n^k$ положим $a_\alpha = a_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge a_{\alpha_k}$. Если $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный базис пространства V , то $(e_\alpha: \alpha \in I_n^k)$ – ортонормированный базис пространства $\Lambda_k V$. Аналогично, если $(f_1, \dots, f_n)$ – ортонормированный базис пространства V^* , то $(f_\alpha: \alpha \in I_n^k)$ – ортонормированный базис пространства $\Lambda^k V$.

Для произвольного линейного функционала F на $\Lambda_k V$ функция ω_F на V^k , заданная формулой $\omega_F(a_1, \dots, a_k) = F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k)$, является *k*-формой над V . Соответствие $F \mapsto \omega_F$ задает изоморфизм $(\Lambda_k V)^* \cong \Lambda^k V$, посредством которого мы отождествляем пространства $(\Lambda_k V)^*$ и $\Lambda^k V$.

Для произвольных *k*-вектора a над V и *k*-формы ω над V определены их модули $|a| = (a, a)_{\Lambda_k V}^{1/2}$ и $|\omega| = (\omega, \omega)_{\Lambda^k V}^{1/2}$. Если $\omega \in \Lambda^k V$, $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный базис пространства V , то

$$|\omega|^2 = \sum_{\alpha \in I_n^k} (\omega(e_\alpha))^2.$$

Произвольное линейное отображение $L: V \rightarrow V'$ евклидовых пространств порождает линейные отображения $\Lambda_k L: \Lambda_k V \rightarrow \Lambda_k V'$ и $\Lambda^k f: \Lambda^k V' \rightarrow \Lambda^k V$. Обозначим через $|\Lambda_k L|$ норму оператора $\Lambda_k L$. Отметим, что $|\Lambda_k L|$ является и нормой оператора $\Lambda^k f$, поскольку оператор $\Lambda^k f$ сопряжен к $\Lambda_k f$.

Дифференциальной формой степени k на гладком многообразии $\mathbb{M}$ будем называть произвольное локально интегрируемое сечение над $\mathbb{M}$ расслоения $\Lambda^k T'\mathbb{M}$ внешней степени кокасательного расслоения $T'\mathbb{M}$. Будем считать две формы на $\mathbb{M}$ одинаковыми, если они совпадают на $\mathbb{M}$ почти всюду.

Предположим теперь, что на $\mathbb{M}$ задана гладкая риманова метрика. Эта метрика порождает в каждом слое расслоения $\Lambda^k T'\mathbb{M}$ скалярное произведение. Поэтому для каждой формы ω почти всюду на $\mathbb{M}$ определена функция $|\omega(x)|$. Положим

$$|\omega|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{M}} |\omega(x)|^p d\mathcal{H}^n(x) \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}\{|\omega(x)|: x \in \mathbb{M}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Здесь и далее через $\mathcal{H}^n(\cdot)$ обозначена n -мера Хаусдорфа на $\mathbb{M}$, порожденная римановой метрикой многообразия $\mathbb{M}$.

Дифференциальные формы ω степени k , для которых $|\omega|_p < \infty$, образуют банахово пространство $\mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ относительно нормы $|\cdot|_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $A \subset \mathbb{M}$ – измеримое множество. Отображение $f: A \rightarrow \mathbb{M}'$ называется *аппроксимативно дифференцируемым в точке* $x \in \mathbb{M}$, если для любых систем координат (U, φ) в точке $x \in A$ и (W, ψ) в точке $y = f(x) \in \mathbb{M}'$ отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(f^{-1}(W)) \rightarrow \psi(W)$ аппроксимативно дифференцируемо в точке $\varphi(x)$.

Ниже мы вводим используемые в работе два подкласса аппроксимативно дифференцируемых отображений, применяемых в смежных областях.

Всякое отображение $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ задается набором m координатных функций $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Говорят, что f принадлежит классу Соболева $W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{R}^m)$, если каждая компонента f_i принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{R})$.

В случае непрерывного отображения $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ римановых многообразий отображение $f \in W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ может быть определено с использованием набора систем координат в многообразии $\mathbb{M}'$.

Следующие классы отображений определены в [37].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. 1) Отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ принадлежит классу $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$, $1 \leq p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда функция $[f]_y: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная как $[f]_y(x) = \rho'(f(x), y)$, принадлежит $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M})$ для всех $y \in \mathbb{M}'$.

2) Отображение f принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ тогда и только тогда, когда $[f]_y \in W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M})$ и существует функция $g \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M})$ такая, что $|\nabla[f]_y|(x) \leq g(x)$ почти всюду в $\mathbb{M}$ для всех точек $y \in \mathbb{M}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Отображение $f: U \rightarrow \mathbb{M}'$, где $U \subset \mathbb{M}$ – открытое множество, принадлежит классу $\text{ACL}(U)$, если для любой системы координат (D, ψ) в $\mathbb{M}$ композиция $f \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap D) \rightarrow \mathbb{M}'$ абсолютно непрерывна на почти всех линиях, параллельных координатным осям.

Известно [1], что каждое отображение класса ACL аппроксимативно дифференцируемо.

Следующее утверждение доказано в [11], [38].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$;
- 2) отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ можно переопределить на множестве меры нуль так, чтобы $f \in \text{ACL}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ и функция $[f]_z: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что в точке $x \in \mathbb{M}$ она принимает значение $[f]_z(x) = \rho'(f(x), z)$, принадлежит $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$ и $|\text{ар } Df(\cdot)| \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M})$;
- 3) $f \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ и существует функция $g \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M})$ такая, что для любой липшицевой функции $\psi: \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$ функция $\varphi := \psi \circ f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ и $|\nabla \varphi(x)| \leq \text{Lip}(\psi)g(x)$ почти всюду в $\mathbb{M}$;
- 4) для любого изометрического вложения $i: \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}^N$ все координатные функции композиции $i \circ f$ принадлежат классу $W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{R})$.

Пусть отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ аппроксимативно дифференцируемо в $\mathcal{H}^n$ -почти каждой точке $x \in \mathbb{M}$. Тогда в $\mathcal{H}^n$ -почти каждой точке $x \in \mathbb{M}$ однозначно задан аппроксимативный дифференциал $\text{ар } Df(x): T_x \mathbb{M} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{M}'$ [1], [2].

Всюду в работе мы используем вводимые ниже обозначения. Существует множество $\Sigma \subset \mathbb{M}$, $\mathcal{H}^n(\Sigma) = 0$, вне которого отображение $f: \mathbb{M} \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{M}'$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина: $\mathcal{H}^n(A) = 0$ для любого множества $A \subset \mathbb{M} \setminus \Sigma$ нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры. Более того, дополнение $\mathbb{M} \setminus \Sigma$ можно разложить на счетную совокупность дизъюнктивных измеримых множеств F_s , $s \in \mathbb{N}$, таких, что $\bigcup_s F_s = \mathbb{M} \setminus \Sigma$ и отображение $f: F_s \rightarrow \mathbb{M}'$ липшицево для всех $s \in \mathbb{N}$ [1], [2].

Далее полагаем $Z = \{x \in \mathbb{M} \setminus \Sigma: \det \operatorname{ap} Df(x) = 0\}$. Каждое множество $F_s \setminus Z$ представимо в виде объединения счетной совокупности дизъюнктивных измеримых множеств F_{sm} , $m \in \mathbb{N}$, таких, что отображение $f: F_{sm} \rightarrow \mathbb{M}'$ билипшицево для всех $m \in \mathbb{N}$ [1]. Множества F_{sm} можно считать состоящими только из точек дифференцируемости отображения $f: F_{sm} \rightarrow \mathbb{M}'$ и точек плотности 1. Переобозначим теперь совокупность дизъюнктивных множеств $\{F_{sm}\}$ как $\{E_l\}$. Таким образом,

$$\mathbb{M} = \Sigma \cup Z \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l, \quad (1.1)$$

где совокупность множеств $\{\Sigma, Z, E_l, l \in \mathbb{N}\}$ дизъюнктивна, $\mathcal{H}^n(\Sigma) = 0$, в точках множества Z выполнено $\det \operatorname{ap} Df(x) = 0$, $\mathcal{H}^n(f(Z)) = 0$ и отображение $f: E_l \rightarrow \mathbb{M}'$ билипшицево для всех $l \in \mathbb{N}$. Заметим еще, что обратное отображение $f^{-1}: f(E_l) \rightarrow E_l$ является липшицевым на каждом из множеств $f(E_l)$, $l \in \mathbb{N}$. Поэтому отображение $f^{-1}: f(E_l) \rightarrow E_l$ дифференцируемо в каждой точке множества $f(E_l)$ и его дифференциал в точке $y \in f(E_l)$ будет обратным к дифференциалу $Df(x)$, $y = f(x)$.

В $\mathcal{H}^n$ -почти каждой точке $x \in \mathbb{M}$ аппроксимативный дифференциал $\operatorname{ap} Df(x): T_x \mathbb{M} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{M}'$ каноническим образом задает ассоциированное линейное отображение $\Lambda_k f(x): \Lambda_k T_x \mathbb{M} \rightarrow \Lambda_k T_{f(x)} \mathbb{M}'$ пространств k -векторов и операцию переноса дифференциальных форм: каждой форме $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{M}', \Lambda^k)$ с непрерывными коэффициентами соответствует k -форма $f^* \omega$, определенная для $\mathcal{H}^n$ -почти всех точек $\mathbb{M}$ (здесь и далее мы пишем для краткости $\Lambda_k f(x)$ вместо $\Lambda_k \operatorname{ap} Df(x)$). В ортогональном базисе элементами $(C_n^k \times C_n^k)$ -матрицы линейного отображения $\Lambda^k f(x): \Lambda^k T'_{f(x)} \mathbb{M}' \rightarrow \Lambda^k T'_x \mathbb{M}$, двойственного к $\Lambda_k f(x): \Lambda_k T_x \mathbb{M} \rightarrow \Lambda_k T_{f(x)} \mathbb{M}'$, будут $(k \times k)$ -миноры матрицы $\operatorname{ap} Df(x)$, $k = 1, \dots, n$. Полагаем $\Lambda^0 f(x) = 1$.

Поскольку при $p = \infty$ пространство $\mathcal{C}(\mathbb{M}', \Lambda^k)$ не будет всюду плотным в пространстве $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{M}', \Lambda^k)$, мы предполагаем здесь и всюду в статье, что оператор $f^*: \mathcal{L}_\infty(\mathbb{M}', \Lambda^k) \cap \mathcal{C}(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq q \leq \infty$, имеет дополнительную непрерывность: $f^* \omega_l$ сходится к нулю почти всюду для всякой ограниченной последовательности форм $\omega_l \in \mathcal{C}(\mathbb{M}', \Lambda^k)$, сходящейся к нулю почти всюду.

ЛЕММА 1.1. *Оператор $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \cap \mathcal{C}(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, ограничен тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^n(Z) = 0$ при $k = 0$ и $\operatorname{rank} \operatorname{ap} Df(x) < k$ на множестве Z при $k \geq 1$, и функция искажения*

$$H_{k,q}(y) = \begin{cases} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} \right)^{1/q}, & f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (1.2)$$

принадлежит классу $L_{\varkappa}(\mathbb{M}')$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\varkappa = \infty$ ($\varkappa = q$), когда $q = p$ ($p = \infty$). При этом норма оператора f^* сравнима с величиной $\|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M}')\|$.

Функция искажения (1.2) введена в [12] для $k = 1$ и в [13], [17] для $k = 0$ (см. также [18]). Заметим, что для почти всех $y \in \mathbb{M}'$ число слагаемых в (1.2) конечно. (Интерпретацию величины $\|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M}')\|$ при $q = p$ см. ниже в (1.7) и (1.8).)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Достаточность устанавливается с помощью известной формулы замены переменной [1], [39]: для любой неотрицательной измеримой функции $u: A \rightarrow \mathbb{R}$, где A – измеримое множество в $\mathbb{M}$, имеем

$$\int_A u(x) |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) = \int_{M'} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \cap (A \setminus \Sigma)} u(x) \right) d\mathcal{H}^n(y), \quad (1.3)$$

где f и Σ определены выше, а $J(x, f) = \det \operatorname{ap} Df(x)$; если f обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина, то $\Sigma = \emptyset$.

Заметим, что

$$|f^* \omega(x)| \leq |\Lambda^k f(x)| |\omega(f(x))|.$$

Тогда при $p < \infty$ с помощью формулы (1.3) выводим

$$\begin{aligned} \|f^* \omega \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\|^q &\leq \left(\int_{\mathbb{M} \setminus Z} |\omega(f(x))|^q \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\mathbb{M}'} |\omega(y)|^q \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap (\mathbb{M} \setminus (Z \cup \Sigma))} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} d\mathcal{H}^n(y) \right)^{1/q} \\ &\leq \|\omega \mid \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)\|^q \|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M}')\|^q, \end{aligned}$$

где при $q < p$ использовано неравенство Гёльдера. Отсюда $\|f^*\| \leq \|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M}')\|$. Для вывода оценок при $p = \infty$ следует воспользоваться неравенствами (1.7) и (1.8).

Необходимость при $q < p$ доказывается с помощью следующего утверждения. В его формулировке мы используем подпространство $\mathcal{C}_c(U', \Lambda^k) \subset \mathcal{C}(\mathbb{M}', \Lambda^k)$ непрерывных k -форм с компактными носителями в $U' \subset \mathbb{M}'$.

ЛЕММА 1.2. Пусть для измеримого отображения $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ оператор переноса $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \cap \mathcal{C}_c(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq q < p \leq \infty$, ограничен. Тогда функция множества

$$\Phi(U') = \sup_{\omega \in \mathcal{C}_c(U', \Lambda^k)} \left(\frac{\|f^* \omega \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\|}{\|\omega \mid \mathcal{L}_p(U', \Lambda^k)\|} \right)^{\varkappa}, \quad \text{где } \varkappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } p < \infty, \\ q & \text{при } p = \infty, \end{cases} \quad (1.4)$$

будет ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией множества, определенной на ограниченных открытых множествах $U' \subset \mathbb{M}'$.

Напомним, что функция множества Φ , определенная на открытых ограниченных множествах из $\mathbb{M}'$, называется монотонной, если $\Phi(V') \leq \Phi(U')$ для любых ограниченных открытых множеств $V' \subset U' \subset \mathbb{M}'$, и счетно-аддитивной, если $\Phi(U') = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U'_i)$ для любых дизъюнктивных открытых множеств $U'_i \subset \mathbb{M}'$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что объединение $U' = \bigcup_{i=1}^{\infty} U'_i$ ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2 аналогично рассуждениям из работ [13], [17]–[19]. Рассмотрим ограниченные открытые множества $V' \subset U' \subset \mathbb{M}'$. Продолжая форму $\omega \in \mathcal{C}_c(V', \Lambda^k)$ нулем на множество U' , можно считать, что $\mathcal{C}_c(V', \Lambda^k) \subset \mathcal{C}_c(U', \Lambda^k)$. Поэтому из соотношений

$$\begin{aligned} \Phi(V') &= \sup_{\omega \in \mathcal{C}_c(V', \Lambda^k)} \left(\frac{\|f^*\omega \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\|}{\|\omega \mid \mathcal{L}_p(V', \Lambda^k)\|} \right)^\varkappa = \sup_{\omega \in \mathcal{C}_c(V', \Lambda^k)} \left(\frac{\|f^*\omega \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\|}{\|\omega \mid \mathcal{L}_p(U', \Lambda^k)\|} \right)^\varkappa \\ &\leq \sup_{\omega \in \mathcal{C}_c(U', \Lambda^k)} \left(\frac{\|f^*\omega \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\|}{\|\omega \mid \mathcal{L}_p(U', \Lambda^k)\|} \right)^\varkappa = \Phi(U') \end{aligned}$$

получаем монотонность функции Φ .

Пусть U'_i , $i \in \mathbb{N}$, – попарно непересекающиеся ограниченные открытые множества в $\mathbb{M}'$ такие, что их объединение $U' = \bigcup_{i=1}^\infty U'_i$ также ограничено. Положим $A_i = f^{-1}(U'_i)$, $A = f^{-1}(U')$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0, 1)$ и рассмотрим такие k -формы $\omega_i \in \mathcal{C}_c(U'_i, \Lambda^k)$, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\begin{aligned} \|f^*\omega_i \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\| &\geq \left(\Phi(U'_i) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \right)^{1/\varkappa} \|\omega_i \mid \mathcal{L}_p(U'_i, \Lambda^k)\|, \\ \|\omega_i \mid \mathcal{L}_p(U'_i, \Lambda^k)\|^p &= \Phi(U'_i) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \quad \text{при } p < \infty \end{aligned}$$

($\|\omega_i \mid \mathcal{L}_p(U'_i, \Lambda^k)\| = 1$ при $p = \infty$). Полагая $\omega_N = \sum_{i=1}^N \omega_i$ и применяя неравенство Гёльдера при $p < \infty$ (когда выполнено равенство), получаем

$$\begin{aligned} \left\| f^*\omega_N \mid \mathcal{L}_q \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \right) \right\| &\geq \left(\sum_{i=1}^N \left(\Phi(U'_i) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \right)^{q/\varkappa} \|\omega_N \mid \mathcal{L}_p(U'_i, \Lambda^k)\|^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \Phi(U'_i) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \right)^{1/\varkappa} \left\| \omega_N \mid \mathcal{L}_p \left(\bigcup_{i=1}^N U'_i, \Lambda^k \right) \right\| \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^N \Phi(U'_i) - \varepsilon \Phi(U') \right)^{1/\varkappa} \left\| \omega_N \mid \mathcal{L}_p \left(\bigcup_{i=1}^N U'_i, \Lambda^k \right) \right\|. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(U')^{1/\varkappa} \geq \sup \frac{\|f^*\omega_N \mid \mathcal{L}_q(\bigcup_{i=1}^N A_i, \Lambda^k)\|}{\|\omega_N \mid \mathcal{L}_p(\bigcup_{i=1}^N U'_i, \Lambda^k)\|} \geq \left(\sum_{i=1}^N \Phi(U'_i) - \varepsilon \Phi(U') \right)^{1/\varkappa},$$

где точная верхняя грань берется по всем k -формам $\omega_N \in \mathcal{L}_p(\bigcup_{i=1}^N U'_i, \Lambda^k)$ указанного выше вида. Поскольку N и ε произвольны, то доказано неравенство

$$\Phi(U') \geq \sum_{i=1}^\infty \Phi(U'_i).$$

Справедливость обратного неравенства проверяется непосредственно. Произведем проверку для $p < \infty$ (для $p = \infty$ рассуждения упрощаются). Выберем произвольную k -форму $\omega \in \mathcal{C}_c(U')$ такую, чтобы $\|\omega \mid \mathcal{L}_p(U', \Lambda^k)\| = 1$. Полагая

$\omega_i = \omega|_{U'_i}$ и учитывая, что $\omega_i \in \mathcal{C}_c(U'_i)$ и совокупность множеств $A_i = f^{-1}(U'_i)$, $i \in \mathbb{N}$, дизъюнктна, с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} \|f^*\omega \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M})\| &= \left\| f^*\omega \mid \mathcal{L}_q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U'_i)^{q/\varkappa} \|\omega_i \mid \mathcal{L}_p(U'_i)\|^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U'_i) \right)^{1/\varkappa} \left\| \omega \mid \mathcal{L}_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U'_i, \Lambda^k\right) \right\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U'_i) \right)^{1/\varkappa} \|\omega \mid \mathcal{L}_p(U')\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U'_i) \right)^{1/\varkappa}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим $\Phi(U') \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U'_i)$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству необходимости. Случай $k = 0$, т.е. случай интегрируемых функций, рассмотрен в работах [13], [17].

В случае $k > 0$ рассмотрим произвольное компактное подмножество $K_s \subset E_s \cap Z$. В локальных координатах в окрестности точки $z = f(x)$, $x \in K_s$, рассмотрим k -формы вида $\omega_l = \varphi_l(y) dy^\alpha$, где $dy^\alpha = dy_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy_{\alpha_k}$ – базисные формы, $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n\}$, а φ_l – последовательность непрерывных функций на $\mathbb{M}'$ такая, что $\varphi_l|_{f(K_s) \cap B(z, r)} = 1$, $\varphi_l = 0$ вне $B(z, 2r)$, $0 \leq \varphi_l \leq 1$ и $\varphi_l \rightarrow 0$ $\mathcal{H}^n$ -почти всюду на $\mathbb{M}'$ при $l \rightarrow \infty$. Подставляя в неравенство $\|f^*\omega_l \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\| \leq \Phi(B(z, 2r))^{1/\varkappa} \|\omega_l \mid \mathcal{L}_p(B(z, 2r), \Lambda^k)\|$ формы ω_l , получаем, что $f^*\omega_l$ стремится к нулю $\mathcal{H}^n$ -почти всюду на $f^{-1}(B(z, r)) \cap K_s$ при $l \rightarrow \infty$ для различных α (в случае необходимости всегда можно перейти к некоторой подпоследовательности, для которой это свойство будет выполняться). Последнее, с учетом соглашения о непрерывности оператора f^* при $p = \infty$, и произвольного выбора K_s , $s \in \mathbb{N}$, возможно лишь в случае, когда $\Lambda^k f(x) = 0$ $\mathcal{H}^n$ -почти всюду на множестве Z .

Далее, рассмотрим точку $x \in \mathbb{M} \setminus (Z \cup \Sigma)$. В локальных координатах в окрестности точки $z = f(x)$ рассмотрим k -формы вида $\omega_\alpha = \varphi(y) dy^\alpha$, где $dy^\alpha = dy_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy_{\alpha_k}$ – базисные формы, $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n\}$, а φ – непрерывная функция на $\mathbb{M}'$, равная 1 (0) на $B(z, r)$ (вне $B(z, 2r)$), и $0 \leq \varphi \leq 1$. Подставляя в неравенство $\|f^*\omega \mid \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)\| \leq \Phi(B(z, 2r))^{1/\varkappa} \|\omega \mid \mathcal{L}_p(B(z, 2r), \Lambda^k)\|$ формы ω_α в лексикографическом порядке и применяя (1.4), при $p < \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \|\Lambda^k f \mid \mathcal{L}_q(f^{-1}(B(z, r)))\|^q &= \int_{f^{-1}(B(z, r)) \setminus Z} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{B(z, r)} \sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} d\mathcal{H}^n(y) \leq C^q \left(\frac{\Phi(B(z, 2r))}{\mathcal{H}^n(B(z, 2r))} \right)^{q/\varkappa} \mathcal{H}^n(B(z, 2r)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где C – постоянная. Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной аддитивной функции множества [17], [40], определенной на открытых множествах, вытекает

$$H_{k,q}^\varkappa(y) = \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} \right)^{p/(p-q)} \leq C^\varkappa \Phi'(y)$$

для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $y \in \mathbb{M}'$ таких, что $f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z) \neq \emptyset$. Отсюда, учитывая неравенство

$$\int_U \Phi'(y) d\mathcal{H}^n(y) \leq \Phi(U)$$

(см. [17], [40]), получаем оценку $\|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\mathcal{K}}(\mathbb{M}')\| \leq C\|f^*\|$.

При $q = p < \infty$ оценки лишь упрощаются. Действительно, в этом случае вместо (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \|\Lambda^k f \mid \mathcal{L}_p(f^{-1}(B(z, r)))\|^p &= \int_{f^{-1}(B(z, r)) \setminus Z} \frac{|\Lambda^k f(x)|^p}{|J(x, f)|} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{B(z, r)} \sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^p}{|J(x, f)|} d\mathcal{H}^n(y) \leq C^p \mathcal{H}^n(B(z, 2r)), \end{aligned}$$

где C – постоянная. Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла вытекает

$$H_{k,p}^\infty(y) = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{M}'} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^p}{|J(x, f)|} \right)^{1/p} \leq C'. \quad (1.7)$$

При $q = p = \infty$ приходим к следующей оценке:

$$H_{k,\infty}^\infty(y) = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{M}'} \left(\max_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} |\Lambda^k f(x)| \right) \leq C'. \quad (1.8)$$

Лемма доказана.

Из леммы 1.1 получаем, что распространение оператора f^* по непрерывности совпадает с оператором переноса форм, который можно определить корректно даже в случае измеримых коэффициентов формы ω .

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Продолжение $\tilde{f}^*$ оператора f^* по непрерывности совпадает $\mathcal{H}^n$ -почти всюду с “оператором переноса”:*

$$\mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \ni \omega \mapsto \tilde{f}^* \omega(x) = \begin{cases} f^* \omega(x), & \text{если } x \in \mathbb{M} \setminus (Z \cup \Sigma), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Лемма 1.1 мотивирует следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Будем говорить, что аппроксимативно дифференцируемое отображение f имеет k -конечное искажение (коротко $f \in \mathcal{CD}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$), если $\mathcal{H}^n(Z) = 0$ при $k = 0$ и $\operatorname{rank} \operatorname{ap} Df(x) < k$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $x \in Z$ при $1 \leq k \leq n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Справедливо включение $\mathcal{CD}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}') \subset \mathcal{CD}^{k+1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ при $1 \leq k \leq n - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Будем говорить, что аппроксимативно дифференцируемое отображение $f \in \mathcal{CD}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ имеет (q, p) -ограниченное искажение ($f \in \mathcal{CD}_{q,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$), если характеристика искажения (1.2) принадлежит классу $L_{\mathcal{K}}(\mathbb{M}')$, где $\frac{1}{\mathcal{K}} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\mathcal{K} = \infty$ ($\mathcal{K} = q$), когда $q = p$ ($p = \infty$):

$$\mathbb{M}' \ni y \mapsto H_{k,q}(y) = \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} \right)^{1/q} \in L_{\mathcal{K}}(\mathbb{M}'). \quad (1.10)$$

Здесь принято соглашение, что сумма равна нулю, если $f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z) = \emptyset$.

Заметим, что отображения с 1-конечным искажением называются *отображениями с конечным искажением*. При $k = n$ данное определение является тавтологией, так как условие $\text{rank} \, \text{ap} \, Df(x) < n$ на Z равносильно тому, что $Z = \{x \in \mathbb{M} : \det \text{ap} \, Df(x) = 0\}$. Для диффеоморфных отображений $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ аналогичные классы рассматриваются в работе [41] (в этом случае $Z = \emptyset$).

Из леммы 1.1 и следствия 1.1 вытекает

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ – аппроксимативно дифференцируемое отображение. Оператор $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, определенный формулой (1.9), ограничен тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{CD}_{q,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$. При этом норма оператора $\tilde{f}^*$ сравнима с величиной $\|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M}')\|$.

Отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ называется $\mathcal{H}^n$ -почти всюду инъективным (биективным), если существует множество $B \subset \mathbb{M}$ нулевой меры, вне которого f инъективно (и $\mathcal{H}^n(\mathbb{M}' \setminus f(\mathbb{M} \setminus B)) = 0$). Для почти всюду биективного отображения $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ существует обратное $f^{-1}: \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{M}$, определенное почти всюду на $\mathbb{M}'$ и которое также будет почти всюду биективным.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ – аппроксимативно дифференцируемое отображение, инъективное $\mathcal{H}^n$ -почти всюду. Оператор $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, ограничен тогда и только тогда, когда:

- 1) $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ имеет k -конечное искажение;
- 2) функция

$$K_{k,p}(x) = \begin{cases} \frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{1/p}}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

принадлежит $L_{\varkappa}(\mathbb{M})$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

При этом норма оператора $\tilde{f}^*$ сравнима с величиной $\|K_{k,p}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M})\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что множество B является частью множества Σ . Тогда по формуле (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \|H_{k,q}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M}')\|^{\varkappa} &= \int_{\mathbb{M}'} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \cap (\mathbb{M} \setminus (Z \cup \Sigma))} \frac{|\Lambda^k f(x)|^q}{|J(x, f)|} \right)^{\varkappa/q} d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{M} \setminus Z} \left(\frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{1/q}} \right)^{\varkappa} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{M} \setminus Z} \left(\frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{1/p}} \right)^{\varkappa} d\mathcal{H}^n(x) = \|K_{k,p}(\cdot) \mid L_{\varkappa}(\mathbb{M})\|^{\varkappa}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Согласно следствию 1.2 в случае инъективных $\mathcal{H}^n$ -почти всюду отображений $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ класс отображений $\mathcal{CD}_{q,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ можно описать в эквивалентной форме: $f \in \mathcal{CD}_{q,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}') \iff f \in \mathcal{CD}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ и $K_{k,p}(\cdot) \in L_{\varkappa}(\mathbb{M})$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. (Здесь $K_{k,p}(\cdot)$ – функция искажения из следствия 1.2.)

При $k = 1$ такая функция используется в работах [16], [19] для эквивалентного описания аналитических свойств гомеоморфизмов $f: U \rightarrow W$, индуцирующих ограниченные операторы $f^*: L_p^1(W) \rightarrow L_q^1(U)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, однородных пространств Соболева (см. работы [15], [42]–[48], в которых приведены более ранние результаты по этой проблематике). Более того, гомеоморфизмы $f \in \mathcal{CD}_{n,n}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}') \cap W_{1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ – это в точности квазиконформные отображения [49]–[53].

В рамках данной работы результат [16, теорема 3] имеет следующую интерпретацию.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть аппроксимативно дифференцируемое отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ почти всюду биективно и имеет k -конечное искажение, обратное отображение $f^{-1}: \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{M}$ аппроксимативно дифференцируемо почти всюду на множестве $f(\Sigma)$ и $\mathcal{H}^n(f(\Sigma)) = 0$ при $k = n$, $\text{rank ap } Df^{-1}(y) < n - k$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $y \in f(\Sigma)$ при $0 \leq k < n$. Оператор $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, ограничен тогда и только тогда, когда оператор $(\tilde{f}^{-1})^*: \mathcal{L}_{q'}(\mathbb{M}, \Lambda^{n-k}) \rightarrow \mathcal{L}_{p'}(\mathbb{M}', \Lambda^{n-k})$, где $q' = \frac{q}{q-1}$, $p' = \frac{p}{p-1}$, корректно определен и ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы вытекает, что обратное отображение f^{-1} аппроксимативно дифференцируемо почти всюду на $\mathbb{M}'$ и имеет $(n - k)$ -конечное искажение.

Для матрицы $\Lambda^k f(x)$ обозначим через $\text{adj } \Lambda^k f(x)$ присоединенную матрицу, определяемую из условия $\Lambda^k f(x) \text{adj } \Lambda^k f(x) = \det \text{ap } Df(x) \cdot I$, если определитель $(n \times n)$ -матрицы $\text{ap } Df(x)$ отличен от нуля, и по непрерывности в топологии $\mathbb{R}^{C_n^k \times C_n^k}$ в остальных случаях. (Здесь I – единичная $(C_n^k \times C_n^k)$ -матрица.) По теореме Лапласа известно, что элементы матрицы $\text{adj } \Lambda^k f(x)$ – это алгебраические дополнения к упорядоченным минорам порядка $k \times k$ матрицы $\text{ap } Df(x)$. Таким образом, элементы матриц $\text{adj } \Lambda^k f(x)$ и $\Lambda^{n-k} f(x)$ могут отличаться лишь знаком. Следовательно, их нормы эквивалентны независимо от точки x .

В точках невырожденности матрицы Якоби $\text{ap } Df(x)$ имеем

$$[\text{adj } \Lambda^k f(x)]^{-1} = J(x, f)^{-1} \Lambda^k f(x). \quad (1.11)$$

Отсюда с учетом равенств $\Lambda^k f^{-1}(y) = [\Lambda^k f(x)]^{-1}$, $\text{adj } \Lambda^k f^{-1}(y) = [\text{adj } \Lambda^k f(x)]^{-1}$, $J(y, f^{-1}) = J(x, f)^{-1}$, $y = f(x)$, и эквивалентности норм $|\Lambda^{n-k} f^{-1}(y)|$ и $|\text{adj } \Lambda^k f^{-1}(y)|$ при $1 \leq q < p < \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{M}' \setminus f(\Sigma)} \left(\frac{|\Lambda^{n-k} f^{-1}(y)|}{|J(y, f^{-1})|^{\frac{1}{q'}}} \right)^{\frac{p'q'}{q'-p'}} d\mathcal{H}^n(y) &\sim \int_{\mathbb{M}' \setminus f(\Sigma)} \left(\frac{|\text{adj } \Lambda^k f^{-1}(y)|}{|J(y, f^{-1})|^{\frac{1}{q'}}} \right)^{\frac{p'q'}{q'-p'}} d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{M}' \setminus f(\Sigma \cap Z)} \left(\frac{|J(f^{-1}(y), f)|^{-1} |\Lambda^k f(f^{-1}(y))|}{|J(y, f^{-1})|^{\frac{1}{q'}}} \right)^{\frac{p'q'}{q'-p'}} d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{M} \setminus (Z \cup \Sigma)} \left(\frac{|J(x, f)|^{-1} |\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{-\frac{1}{q'}}} \right)^{\frac{p'q'}{q'-p'}} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{M} \setminus Z} \left(\frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{pq}{p-q}} d\mathcal{H}^n(x). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь использовано легко проверяемое равенство $\frac{p'q'}{q'-p'} = \frac{pq}{p-q}$, а символ эквивалентности $\sim$ употребляется в статье в общепринятом смысле. Ограниченность оператора $(f^{-1})^*: \mathcal{L}_{q'}(\mathbb{M}, \Lambda^{n-k}) \rightarrow \mathcal{L}_{p'}(\mathbb{M}', \Lambda^{n-k})$ вытекает из следствия 1.2.

Случай крайних показателей: $q = 1$, $p = \infty$ или $q = p$ – рассматривается аналогично. Например, при $q = 1$ имеем $\frac{p'q'}{q'-p'} = p'$, и поэтому вместо соотношения (1.12) следует написать

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{M}'} |\Lambda^{n-k} f^{-1}(y)|^{p'} d\mathcal{H}^n(y) &\sim \int_{\mathbb{M}' \setminus f(\Sigma)} |\operatorname{adj} \Lambda^k f^{-1}(y)|^{p'} d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{M}' \setminus f(\Sigma \cap Z)} \left(\frac{|\Lambda^k f(f^{-1}(y))|}{|J(f^{-1}(y), f)|} \right)^{p'} d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{M} \setminus (Z \cup \Sigma)} \left(\frac{|\Lambda^k f(f^{-1}(y))|}{|J(f^{-1}(y), f)|} \right)^{p'} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \begin{cases} \int_{\mathbb{M} \setminus Z} \left(\frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{p}{p-1}} d\mathcal{H}^n(x) & \text{при } p < \infty, \\ \int_{\mathbb{M} \setminus Z} |\Lambda^k f(x)| d\mathcal{H}^n(x) & \text{при } p = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, приведенные соотношения обратимы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. В условиях теоремы 1.2 $\mathcal{H}^n$ -почти всюду биективное отображение f принадлежит $\mathcal{CD}_{q,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда $f^{-1} \in \mathcal{CD}_{p',q'}^{n-k}(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$, где $q' = \frac{q}{q-1}$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть аппроксимативно дифференцируемое отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ почти всюду биективно, $\mathcal{H}^n(Z) = 0$ и $\mathcal{H}^n(f(\Sigma)) = 0$. Оператор $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ ($f \in \mathcal{CD}_{q,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$), $1 \leq q \leq p \leq \infty$, ограничен тогда и только тогда, когда оператор $(\tilde{f}^{-1})^*: \mathcal{L}_{q'}(\mathbb{M}, \Lambda^{n-k}) \rightarrow \mathcal{L}_{p'}(\mathbb{M}', \Lambda^{n-k})$ ($f^{-1} \in \mathcal{CD}_{p',q'}^{n-k}(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$), где $q' = \frac{q}{q-1}$, $p' = \frac{p}{p-1}$, ограничен.

Отметим, что с учетом сказанного выше теоремы 1, 2 из работы [16] в контексте дифференциальных форм можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.3. Если гомеоморфизм $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ принадлежит пересечению $W_{n-1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}') \cap \mathcal{CD}_{q,p}^{n-1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ (гомеоморфизм $f \in W_{n-1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ индуцирует ограниченный оператор $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^{n-1}) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^{n-1})$), $1 \leq q \leq p \leq \infty$, то обратный гомеоморфизм принадлежит $W_{1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}'; \mathbb{M}) \cap \mathcal{CD}_{p',q'}^1(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$ (принадлежит $W_{1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$ и индуцирует ограниченный оператор $(\tilde{f}^{-1})^*: \mathcal{L}_{q'}(\mathbb{M}, \Lambda^1) \rightarrow \mathcal{L}_{p'}(\mathbb{M}', \Lambda^1)$), где $q' = \frac{q}{q-1}$, а $p' = \frac{p}{p-1}$.

Обратно, если $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ – такой гомеоморфизм, что $f^{-1} \in W_{1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}'; \mathbb{M}) \cap \mathcal{CD}_{p',q'}^1(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$, и при $n > 2$ отображение f аппроксимативно дифференцируемо на $f^{-1}(\Sigma')$, $1 \leq p' \leq q' \leq \infty$, то $f \in W_{n-1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}') \cap \mathcal{CD}_{q,p}^{n-1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если гомеоморфизм принадлежит $W_{n-1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ и $f \in \mathcal{CD}^{n-1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$, то в силу [16, теорема 2] имеем $f^{-1} \in W_{1,\text{loc}}^1(\mathbb{M}'; \mathbb{M}) \cap \mathcal{CD}^1(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$. Следовательно, первое (а также и второе) утверждение вытекает из следствия 1.3.

§ 2. Изоморфные операторы переноса и квазиконформные отображения

Предположение об изоморфности оператора $\tilde{f}^*$ приводит к более жестким условиям для отображения f .

Напомним, что отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина, если $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$, как только $\mathcal{H}^n(A) = 0$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Аппроксимативно дифференцируемое отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ индуцирует изоморфизм $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq p \leq \infty$, векторных пространств тогда и только тогда, когда:*

- 1) f обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина и $\mathcal{H}^n$ -почти всюду биективно;
- 2) f^{-1} обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина и аппроксимативно дифференцируемо;
- 3) изоморфизм $\tilde{f}^*$ ограничен;
- 4) функция $\mathbb{M} \ni x \mapsto K_{k,p}(x) = \frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x,f)|^{1/p}}$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{M})$;
- 5) $0 < \alpha \leq |J(x,f)| \leq \beta < \infty$ при $pk \neq n$, где числа α и β не зависят от $x \in \mathbb{M}$.

При этом норма оператора $\tilde{f}^*$ сравнима с величиной $\|K_{k,p}(\cdot) \| L_\infty(\mathbb{M})\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Доказательство необходимости разбивается на несколько этапов.

ШАГ 1. Заметим прежде всего, что изоморфность оператора $\tilde{f}^*$ исключает следующие возможности: $\mathcal{H}^n(f(\Sigma)) > 0$, $\mathcal{H}^n(Z) > 0$, $\mathcal{H}^n(f(E_l) \cap f(E_m)) > 0$ для $l \neq m$, $\mathcal{H}^n(\mathbb{M}' \setminus f(\mathbb{M})) > 0$, где множества E_l и E_m из разложения (1.1). Проверим, например, предпоследнее свойство, проверка остальных может быть произведена по той же схеме. Пусть, напротив, $\mathcal{H}^n(f(E_l) \cap f(E_m)) > 0$ для некоторых $l \neq m$. Рассмотрим компактное множество $K \subset f(E_l) \cap f(E_m)$ положительной меры, содержащееся в некоторой локальной системе координат в окрестности точки $z \in K$. Рассмотрим k -форму вида $\omega_\alpha = \varphi(y) dy^\alpha$, где $dy^\alpha = dy_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy_{\alpha_k}$ – некоторая базисная форма, $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n\}$, а φ – непрерывная функция на $\mathbb{M}'$ такая, что $\varphi|_{K \cap B(z,r)} = 1$, $\varphi = 0$ вне $B(z, 2r)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ на $\mathbb{M}'$. Тогда перенесенная форма $f^* \omega_\alpha$ отлична от нуля во всех точках множества $f^{-1}(K \cap B(z, r))$. Заметим, что $\mathcal{H}^n(f^{-1}(K \cap B(z, r)) \cap E_l) > 0$ и $\mathcal{H}^n(f^{-1}(K \cap B(z, r)) \cap E_m) > 0$. Тогда форма ϑ , равная $f^* \omega_\alpha$ в точках множества $\mathbb{M} \setminus (f^{-1}(K \cap B(z, r)) \cap E_l)$ и нулю на $f^{-1}(K \cap B(z, r)) \cap E_l$, не может быть образом никакой формы при отображении f^* .

Отсюда вытекают утверждения 1) и 2) теоремы: отображение f^{-1} аппроксимативно дифференцируемо, так как $f|_{E_l}$ билипшицево. Ограниченность оператора $\tilde{f}^*$, с учетом сказанного, является прямым следствием теоремы о замкнутом графике. Следовательно, обратный к оператору f^* ограничен по теореме Банаха, и он индуцируется отображением $f^{-1}: \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{M}$.

ШАГ 2. Далее мы будем использовать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Рассмотрим линейное отображение $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\det A > 0$. Тогда при $1 \leq k \leq n-1$ следующие свойства эквивалентны:*

- 1) $|\Lambda^k A|^{n/k} \leq K_1 \det A$;
- 2) $|\Lambda^k A^{-1}|^{n/k} \leq K_2 \det A^{-1}$;

- 3) $|A|^n \leq K_3 \det A$;
 4) $|A^{-1}|^n \leq K_4 \det A^{-1}$.

Постоянные K_1, K_2, K_3 и K_4 не зависят от матрицы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через λ_i собственные числа матрицы $\sqrt{A^*A}$ и упорядочим их в порядке возрастания: $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_n$. Тогда $|A| = \max_{|v|=1} |Av| = \lambda_n$, $|\Lambda^k A| = \lambda_{n-k+1} \dots \lambda_n$, $|A^{-1}| = \lambda_1^{-1}$, $|\Lambda^k A^{-1}| = \lambda_1^{-1} \dots \lambda_k^{-1}$, $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

Рассмотрим множество $\Omega(K_1) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} : \det A = 1, |\Lambda^k A| \leq K_1^{k/n}\}$. Очевидно, что

$$\sup_{A \in \Omega(K_1)} |\Lambda^k A| = \sup_{A \in \Omega(K_1)} \lambda_{n-k+1} \dots \lambda_n \leq \gamma = K_1^{k/n} < \infty.$$

Отсюда $\inf_{A \in \Omega(K_1)} \lambda_1 \dots \lambda_k \geq 1/\gamma^{n-1}$, так как $1 = J(x, f)^k = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^k = \lambda_1 \dots \lambda_k \Theta_1$, где Θ_1 – произведение $n-1$ сомножителей, в котором каждый сомножитель имеет вид $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ и оценивается сверху величиной γ (здесь $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ – некоторые индексы). Поэтому $\sup_{A \in \Omega(K_1)} |\Lambda^k A^{-1}| = \sup_{A \in \Omega(K_1)} \lambda_1^{-1} \dots \lambda_k^{-1} \leq \gamma^{n-1}$. Следовательно, $|\Lambda^k A^{-1}|^{n/k} \leq \gamma^{n(n-1)/k} = K_1^{n-1}$. Таким образом, свойство 2) выполняется с постоянной $K_2 = K_1^{n-1}$. Очевидно, эти рассуждения обратимы. Вышесказанное означает, что эквивалентности 1) $\iff$ 2) и 3) $\iff$ 4) доказаны.

Непосредственно проверяем, что $\lambda_n^k \leq \gamma^{(n-1)^2}$, так как $1 = J(x, f)^k = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^k = \lambda_n^k \Theta_2$, где Θ_2 – произведение $n-1$ сомножителей, в котором каждый сомножитель имеет вид $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ и оценивается снизу величиной $1/\gamma^{n-1}$ (здесь $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1$ – некоторые индексы). Поэтому $|A|^n = \lambda_n^n \leq \gamma^{n(n-1)^2/k} = K_1^{(n-1)^2}$. Следовательно, импликация 1) $\implies$ 3) доказана: условие 3) выполняется с постоянной $K_3 = K_1^{(n-1)^2}$. Обратная импликация 3) $\implies$ 1) очевидна, так как $|\Lambda^k A|^n \leq |A|^{nk}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Рассмотрим линейное отображение $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда при $1 \leq k \leq n-1$ справедливо неравенство Адамара

$$|\det A| \leq |\Lambda^k A|^{n/k}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу однородности можно предполагать, что $\det A = 1$, так как в случае $\det A = 0$ неравенство очевидно. Разобьем произведение $(\det A)^k = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^k$ на n групп сомножителей вида $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$, в которых $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Тогда очевидно, что $(\det A)^{k/n} \leq \lambda_{n-k+1} \dots \lambda_n = |\Lambda^k A|$, и предложение доказано.

ШАГ 3. В силу следствия 1.2 имеем $C\|\tilde{f}^*\| \geq K_{k,p}(x)$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $x \in \mathbb{M}$.

Пусть $pk > n$. С учетом соотношения (2.1) выводим

$$C\|\tilde{f}^*\| \geq \frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{1/p}} = \left(\frac{|\Lambda^k f(x)|^{n/k}}{|J(x, f)|} \right)^{k/n} \frac{1}{|J(x, f)|^{1/p-k/n}} \geq |J(x, f)|^{k/n-1/p}. \quad (2.2)$$

Отсюда вытекает оценка для якобиана сверху: $|J(x, f)| \leq \beta < \infty$. Аналогично оцениваем сверху якобиан обратного отображения: $|J(y, f^{-1})| \leq \alpha^{-1} < \infty$.

Пусть $pk < n$. В этом случае из (2.2) получаем оценку снизу для якобиана: $|J(x, f)| \geq \alpha > 0$. Аналогично оцениваем снизу якобиан обратного отображения: $|J(y, f^{-1})| \geq \beta^{-1} > 0$.

С учетом сказанного выше утверждение 5) теоремы в обоих случаях доказано, так как $|J(y, f^{-1})| = |J(x, f)|^{-1}$, $y = f(x)$.

Достаточность. Заметим, что согласно следствию 1.2 из условия 4) вытекает ограниченность оператора $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq p \leq \infty$. Остается проверить, что из условий 4) и 5) можно получить выполнение условия 4) для обратного отображения f^{-1} . При $pk = n$ условие 4) для обратного отображения f^{-1} вытекает только из условия 4) для отображения f в силу предложения 2.1.

Если $pk \neq n$, то из соотношений (2.1), (2.2) и свойств 4) и 5) получаем

$$\alpha \leq |J(x, f)| \leq |\Lambda^k f(x)|^{n/k} \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{M}} K_{k,p}(x) \cdot |J(x, f)|^{n/(kp)} \leq K \beta^{n/(kp)}$$

$\mathcal{H}^n$ -почти всюду на $\mathbb{M}$, где $K = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{M}} K_{k,p}(x)$. Отсюда имеем

$$|\Lambda^k f(x)|^{n/k} \leq K \alpha^{-1} \beta^{n/(kp)} |J(x, f)|$$

$\mathcal{H}^n$ -почти всюду на $\mathbb{M}$. Следовательно, с учетом уже рассмотренного случая получаем неравенство $|\Lambda^k f^{-1}(y)| \leq C |J(y, f^{-1})|^{k/n}$, из которого ввиду соотношений $\beta^{-1} \leq |J(y, f^{-1})| \leq \alpha^{-1}$ выводим, что отображение f^{-1} удовлетворяет свойству 4), и поэтому в силу следствия 1.2 индуцирует ограниченный оператор $(\tilde{f}^{-1})^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)$, $1 \leq p \leq \infty$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Гомеоморфное отображение $f: U \rightarrow \mathbb{M}'$, $U \subset \mathbb{M}$, квазиконформно (квазиизометрично), если $f \in \operatorname{ACL}(U)$ и

$$|Df(x)|^n \leq K |\det Df(x)| \quad (|Df(x)| \leq K \text{ и } 0 < \alpha \leq |\det Df(x)|)$$

для почти всех $x \in U$ с некоторыми постоянными α , K , не зависящими от x .

Известно, что гомеоморфизм f квазиконформен (квазиизометричен) тогда и только тогда, когда обратный к нему также квазиконформен (квазиизометричен), см. в [16] новое доказательство этих свойств.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $U \subset \mathbb{M}$ – открытое множество такое, что выполнено $\mathcal{H}^n(\mathbb{M} \setminus U) = 0$, а $f: U \rightarrow \mathbb{M}'$ – отображение класса $\operatorname{ACL}(U)$, $1 \leq k \leq n-1$ – целое число, $1 \leq p \leq \infty$ и при $pk = n$ отображение¹ f имеет свойства: $f \in L_{1,\operatorname{loc}}(U; \mathbb{M}')$ и $\det Df(\cdot) \in L_{1,\operatorname{loc}}(U)$. Отображение f индуцирует изоморфизм $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ векторных пространств тогда и только тогда, когда f можно переопределить на множестве нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры так, чтобы оно стало квазиизометрическим при $pk \neq n$ (квазиконформным при $pk = n$) вне некоторого замкнутого множества $T \subset \mathbb{M}$ нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры такого, что $\mathcal{H}^n(\mathbb{M}' \setminus f(\mathbb{M} \setminus T)) = 0$. При этом оператор $\tilde{f}^*$ ограничен и его норма эквивалентна $\|K_{k,p}(\cdot) \| L_\infty(\mathbb{M})\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Поскольку отображение класса ACL аппроксимативно дифференцируемо [1], то достаточность условий вытекает из предложения 2.1 и теоремы 2.1, так как в этом случае выполнены все достаточные условия этой теоремы.

¹Ограничения для отображения f при $pk = n$ будут сняты в последующих работах автора.

Необходимость. Пусть $pk \neq n$. Заметим, что выполнены условия теоремы 2.1. Следовательно, справедливо ее заключение, так что для отображения f верны утверждения 1)–5). Вложим изометрично риманово пространство $\mathbb{M}'$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ большой размерности. Отображение $f: U \rightarrow \mathbb{M}'$ в силу утверждений 4), 5) теоремы 2.1 и предложения 2.1 имеет ограниченный дифференциал: $|Df(x)| \leq L < \infty$, и $0 < \alpha \leq |\det Df(x)|$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $x \in U$, и принадлежит классу ACL. Поэтому его можно переопределить на множестве нулевой $\mathcal{H}^n$ -меры, чтобы получить липшицево отображение $F: U \rightarrow \mathbb{R}^N$. Заметим, что множество $T = \mathbb{M} \setminus F^{-1}(\mathbb{R}^N)$ замкнуто и имеет нулевую $\mathcal{H}^n$ -меру. Рассуждая далее аналогично [13, теорема 4], мы докажем, что отображение $F: \mathbb{M} \setminus T \rightarrow \mathbb{M}'$ квазиизометрично.

Разобьем доказательство на несколько шагов.

ШАГ 1. Отображение F топологически невырождено, т.е. если точка $F(z)$, $z \in \mathbb{M} \setminus T$, не принадлежит образу $F(S(z, r))$ сферы $S(z, r)$ достаточно малого радиуса такого, что $\overline{B(z, r)} \subset \mathbb{M}$, то топологическая степень $\mu(F(z), F, B(z, r))$ не равна нулю.

Чтобы доказать это свойство, мы покажем, что предположение $\mu(F(z), F, B(z, r)) = 0$ приводит к противоречию с условием биективности почти всюду. Действительно, подставляя в этом случае в формулу замены переменной с топологической степенью

$$\int_{B(z, r)} g(F(x)) J(x, F) d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{M}'} g(y) \mu(y, F, B(z, r)) d\mathcal{H}^n(y)$$

вместо функции g характеристическую функцию χ_V той компоненты связности V дополнения $\mathbb{M}' \setminus F(B(z, r))$, которой принадлежит точка $F(z)$, получаем

$$\int_{B(z, r) \cap F^{-1}(V)} J(x, F) d\mathcal{H}^n(x) = 0. \quad (2.3)$$

Поскольку в силу непрерывности F имеем $\mathcal{H}^n(B(z, r) \cap F^{-1}(V)) > 0$, то из формулы (2.3) выводим $\mathcal{H}^n(F(B(z, r)) \cap V) > 0$ (так как $J(x, F) \neq 0$ $\mathcal{H}^n$ -почти всюду). С другой стороны, множества $Z_+ = \{x \in B(z, r) \cap F^{-1}(V): J(x, F) > 0\}$ и $Z_- = \{x \in B(z, r) \cap F^{-1}(V): J(x, F) < 0\}$ не пересекаются, и каждое из них имеет положительную меру (если одно из них имеет нулевую меру, то неизбежно получаем $\mu(F(z), F, B(z, r)) \neq 0$). Отсюда каждый из образов $F(Z_+)$ и $F(Z_-)$ имеет положительную меру и они пересекаются по множеству положительной меры (так как для почти всех $y \in V$ имеем $0 = \mu(y, F, B(z, r)) = \sum_{x \in F^{-1}(y) \cap B(z, r)} \text{sgn } J(x, F)$; см., например, [1]).

ШАГ 2. Для любой точки $y \in \mathbb{M}'$ прообраз $F^{-1}(y)$ – разреженное множество, т.е. его одномерная мера Хаусдорфа равна нулю.

Действительно, так как $F \in \text{ACL}(U)$ и на основании сказанного выше справедливо поточечное неравенство $|DF(x)| \leq C|J(x, F)|^{1/q}$, где $q \in (n-1, n)$ – фиксированный показатель, то из почти всюду биективности отображения f и результатов, полученных в [13], оператор $F^*: W_q^1(\mathbb{M}') \rightarrow W_q^1(U)$ ограничен. Поэтому прообраз $F^{-1}(A)$ множества A нулевой q -емкости в $\mathbb{M}'$ есть множество нулевой q -емкости в $U \subset \mathbb{M}$ (см., например, [51]). В частности, прообраз точки имеет нулевую q -емкость и, следовательно, нулевую одномерную меру Хаусдорфа [51].

ШАГ 3. Отображение F гомеоморфно. Покажем сначала, что F – открытое отображение. Пусть $x \in U$. По свойству разреженности прообраза $F^{-1}(y)$ существует шар $B(x, r)$ достаточно малого радиуса такой, что $F(x) \notin F(S(x, r))$.

В силу шага 1 имеем $\mu(F(x), F, B(x, r)) \neq 0$. Следовательно, по свойству топологической степени точка $F(x)$ является внутренней для образа $F(B(x, r))$.

Очевидно, непрерывное открытое почти всюду инъективное отображение обязано быть инъективным. Следовательно, $F: \mathbb{M} \setminus T \rightarrow \mathbb{M}'$ – гомеоморфизм на образ $F(\mathbb{M} \setminus T)$.

ШАГ 4. Отображение F – квазиизометрический гомеоморфизм. Действительно, на предыдущем шаге доказано, что F – гомеоморфизм. По условию $F \in \text{ACL}(U)$, и в начале доказательства необходимости отмечено, что $|Df(x)| \leq L < \infty$ и $0 < \alpha \leq |\det Df(x)|$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $x \in U$. Таким образом, по определению 2.1 гомеоморфизм F квазиизометричен.

Пусть теперь $pk = n$. В этом случае отображение f удовлетворяет заключениям теоремы 2.1, так что:

- 1) f обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина и $\mathcal{H}^n$ -почти всюду биективно;
- 2) f^{-1} обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина и ашпроксимативно дифференцируемо;
- 3) изоморфизм $\tilde{f}^*$ ограничен;
- 4) функция $U \ni x \mapsto K_{k,p}(x) = \frac{|\Lambda^k f(x)|}{|J(x, f)|^{1/p}}$ принадлежит $L_\infty(U)$.

Из свойства 2) получаем, что $\mathcal{H}^n(Z) = 0$. Теперь из свойства 4) и предложения 2.1 выводим условие $|Df(x)|^n \leq K|J(x, f)|$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $x \in \mathbb{M}$. Отсюда имеем

$$\int_V |\nabla(\eta \circ f)|^n(x) d\mathcal{H}^n(x) \leq \text{Lip } \eta \int_V |Df(x)|^n d\mathcal{H}^n(x) \leq K \text{Lip } \eta \int_V |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \quad (2.4)$$

для любой липшицевой функции $\eta: \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$ и любой компактно вложенной области $V \Subset U$. Следовательно, $Df(\cdot) \in L_{n, \text{loc}}(U)$, и $f \in W_{n, \text{loc}}^1(U; \mathbb{M}')$.

Кроме того, f ограниченным образом изменяет интеграл Дирихле (см., например, [51]):

$$\int_U |\nabla(\zeta \circ f)|^n(x) d\mathcal{H}^n(x) \leq K \int_{\mathbb{M}'} |\nabla \zeta|^n(x) d\mathcal{H}^n(x) \quad (2.5)$$

для любой липшицевой функции $\zeta: \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$, при этом $\zeta \circ f \in \text{ACL}$.

Поскольку f биективно $\mathcal{H}^n$ -почти всюду, то с помощью методов работ [3], [4], [14], [20] можно доказать утверждение теоремы и в этом случае.

ШАГ 5. Вложим изометрично риманово пространство $\mathbb{M}'$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$. Тогда отображение $f: U \rightarrow \mathbb{M}' \subset \mathbb{R}^N$ задается набором N координатных функций $f_1, \dots, f_N$, каждая из которых принадлежит классу $W_{n, \text{loc}}^1(U)$.

Поскольку дальнейшие рассуждения локальные, можно предполагать, что координатные функции $f_1, \dots, f_N$ принадлежат классу $W_n^1(U)$, где открытое множество $U \subset \mathbb{M}$ таково, что его замыкание компактно. Известно [54]–[56], что каждый из классов $f_i \in W_{n, \text{loc}}^1(U)$, $i = 1, \dots, N$, содержит квазинепрерывный представитель, т.е. такую функцию $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ (обозначаем ее той же буквой), что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $W \subset U$ такое, что $\text{cap}_n(W) < \varepsilon$, а ограничение $f|_{U \setminus W}$ непрерывно. Заметим, что квазинепрерывное отображение $f: U \rightarrow \mathbb{M}'$ может быть и неопределенным на множестве нулевой n -емкости. Далее мы рассматриваем только отображение f , все координатные функции которого квазинепрерывны.

Из биективности почти всюду отображения $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ выводим, что отображение $f: U \cap f^{-1}(\mathbb{M}') \rightarrow \mathbb{M}'$ биективно почти всюду на свой образ, так как такое отображение может отличаться от исходного на некотором множестве нулевой меры. Одно из используемых ниже свойств отображения с квазинепрерывными координатными функциями (которое выводится с помощью (2.5) так же, как и в [14]) состоит в том, что *прообраз множества нулевой емкости есть множество нулевой емкости*.

Из сказанного выше мы сразу получаем, что для почти всех точек $x \in U$:

5) $f(x) \in \mathbb{M}'$;

6) ограничение $f|_{S(x,r)}$ непрерывно для почти всех $r \in (0, r_x)$, где r_x – некоторое достаточно малое положительное число [55];

7) $f(x) \notin f(S(x, r))$ для почти всех $r \in (0, r_x)$ [51];

8) для почти всех $x \in U$ существует такая последовательность радиусов $r_x(l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \text{diam}\{f(x), f(S(x, r_x(l)))\} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ (см. [57], [58]).

Выберем точку $x \in U$ и число l_0 такие, что множество $\{f(x), f(S(x, r_x(l_0)))\}$ содержится в координатной окрестности точки $f(x) \in \mathbb{M}'$. Тогда:

9) отображение f монотонно в точке x в следующем смысле: для всех $r \in (0, r_x(l_0))$, для которых ограничение $f|_{S(x,r)}$ непрерывно и $f(x) \notin f(S(x, r))$, совокупность точек $\{y \in B(x, r): \text{dist}(f(y), f(x)) \geq 2 \text{diam}\{f(x), f(S(x, r))\}\}$ имеет нулевую $\mathcal{H}^n$ -меру [3], [4], [20].

Это свойство доказано в [3], [4] для отображений со значениями в евклидовом пространстве. Приведем необходимые изменения применительно к рассматриваемой в настоящей работе ситуации. Можно предполагать, что точка y в локальных координатах (U, ψ) соответствует нулю: $\psi \circ f(x) = 0$. Обозначим композицию $\psi \circ f$ через $\bar{f}$. Число l_0 в силу свойства 8) выберем таким, чтобы

$$P = \max\{\|\bar{f}(z)\|_\infty: z \in S(x, r_x(l_0))\} \leq \frac{1}{2} \min\{\|u\|_\infty: u \in \partial\psi(U)\}. \quad (2.6)$$

(Здесь $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|: i = 1, \dots, n\}$ – норма элемента $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.)

Положим $r_0 = r_x(l_0)$. Предположим вопреки доказываемому, что отображение $f: B(x, r_0) \rightarrow \mathbb{M}'$ не обладает свойством монотонности. Тогда множество

$$W_1 = \{y \in B(x, r_0): \|\bar{f}(y)\|_\infty \geq 2P \text{ или } f(y) \notin U\}$$

имеет положительную $\mathcal{H}^n$ -меру. Заметим, что в этом случае множество

$$W = \{y \in B(x, r_0): P \leq \|\bar{f}(y)\|_\infty < 2P\}$$

также имеет положительную меру. Отображение $\bar{f}: B(x, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет координатные компоненты $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$. Рассмотрим теперь новое отображение $g = (g_1, \dots, g_n): B(x, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, координатными функциями которого будут

$$g_i(x) = \max\{\min\{\bar{f}_i(x), 2P\}, -2P\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что

$$W = \{y \in B(x, r_0): P \leq \|g(y)\|_\infty < 2P\}.$$

Кроме того, отображение $g \in W_n^1(B(x, r_0))$ квазинепрерывно и непрерывно на сфере $S(x, r_0)$. Следовательно, в силу результатов работ [3], [20] верна следующая формула замены переменных:

$$\int_{B(x, r_0)} h(g(y)) \det Dg(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus f(S(x, r_0))} h(z) \chi(z) dz. \quad (2.7)$$

Здесь $\chi(z)$ – индекс зацепления точки $z \notin g(S(x, r_0))$ относительно цикла $g(S(x, r_0))$, равный топологическому индексу $\mu(z, G, B(x, r_0))$ отображения $G: B(x, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое является некоторым непрерывным продолжением отображения $g: S(x, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, а h – произвольная борелевская функция, определенная на $\mathbb{R}^n$. Заметим, что индекс зацепления $\chi(z)$ не зависит от продолжения G . Подставим в (2.7) характеристическую функцию h компактного множества $K \subset g(W)$ положительной меры. Тогда правая часть (2.7) равна нулю. Поскольку $g^{-1}(K) \subset W$ имеет положительную меру, то оба множества $\{y \in g^{-1}(K): \det Dg(y) > 0\}$ и $\{y \in g^{-1}(K): \det Dg(y) < 0\}$ имеют положительную меру (в противном случае правая часть (2.7) не равна нулю, так как $\det Dg(y) \neq 0$ $\mathcal{H}^n$ -почти всюду). Последнее противоречит почти инъективности отображения $\bar{f}$, так как $g|_W = \bar{f}|_W$. Таким образом, доказано, что

$$\operatorname{ess\,osc}_{B(x, r_0)} \bar{f} = \operatorname{ess\,sup}_{B(x, r_0)} \bar{f} - \operatorname{ess\,inf}_{B(x, r_0)} \bar{f} \leq K \operatorname{osc}_{S(x, r_0)} \bar{f}, \quad (2.8)$$

где K – некоторая постоянная.

Возьмем теперь произвольный радиус $r \in (0, r_0)$, для которого ограничение $\bar{f}|_{S(x, r)}$ непрерывно. Рассуждая аналогично, получаем, что (2.8) справедливо для выбранного шара $B(x, r)$ с той же постоянной K .

Аналогично доказывается следующее свойство:

10) если $r \in (0, r_x(l_0))$ – такое число, что ограничение $\bar{f}|_{S(x, r)}$ непрерывно, то отображение $\bar{f}: B(y, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное на таком шаре, что $\overline{B(y, \tau)} \subset B(x, r)$ и ограничение $\bar{f}: S(y, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно, будет удовлетворять соотношению (2.8) на шаре $B(y, \tau)$ вместо $B(x, r_0)$ с той же постоянной K .

Для проверки свойства 10) требуется отметить, что не может быть, чтобы образ $\bar{f}(A)$ некоторого множества $A \in S(y, \tau)$ положительной поверхностной меры принадлежал внешней компоненте к циклу $\bar{f}(S(x, r_0))$. Если бы такое случилось, то, используя абсолютную непрерывность отображения $\bar{f}: B(x, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ на почти всех отрезках с концами в точке y и на сфере $S(x, r_0)$, которые пересекаются с множеством A , мы получили бы, что это отображение не будет монотонным в точке x .

Следовательно:

11) отображение $\bar{f}: B(x, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет монотонные координатные функции класса $W_n^1(B(x, r_0))$ и поэтому после изменения на множестве меры нуль непрерывно (см., например, [59]).

Обозначим измененное отображение через F . На основании сказанного в начале шага 5 отображение F непрерывно на некотором открытом множестве $U'' \subset U$, причем $\mathcal{H}^n(U \setminus U'') = 0$. Поскольку $U \Subset \mathbb{M}$ – произвольное компактно вложенное открытое множество, то отображение F будет непрерывным на некотором открытом множестве $V' \subset \mathbb{M}$, причем $\mathcal{H}^n(\mathbb{M} \setminus V') = 0$.

Введем обозначение $U_0 = U' \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{M}')$. Аналогично шагу 3 доказывается, что отображение $F: U_0 \rightarrow \mathbb{M}'$ – гомеоморфизм. Кроме того, $\mathcal{H}^n(\mathbb{M} \setminus U_0) = 0$. Так как $F \in \operatorname{ACL}(U_0)$ и $|DF(x)|^n \leq K|J(x, F)|$ для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $x \in U_0$, то отображение $F: U_0 \rightarrow \mathbb{M}'$ квазиконформно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Гомеоморфизм $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ класса $\operatorname{ACL}(\mathbb{M})$ индуцирует изоморфизм $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq k \leq n - 1$, векторных пространств тогда и только тогда, когда при $pk = n$ ($pk \neq n$) отображение f квазиконформно (квазиизометрично).*

§ 3. Функториальность интегральных когомологий

Изложенные выше результаты применимы при исследовании вопросов функториальности интегральных когомологий. Форма $\vartheta \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ называется *слабым внешним дифференциалом* формы $\omega \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$, если для любой гладкой формы $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{M}, \Lambda^{n-k})$ с компактным носителем выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{M}} \vartheta \wedge \varphi = (-1)^k \int_{\mathbb{M}} \omega \wedge d\varphi. \quad (3.1)$$

Через $\mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}')$ обозначено пространство слабо замкнутых форм в $\mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)$, т. е. выполнено $\mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}') = \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \cap \ker d$, а через $\mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}')$ – пространство $d(\mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1})) \cap \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)$ точных форм в $\mathcal{L}_p$ с первообразной в $\mathcal{L}_q$ и нормой, индуцированной из $\mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)$. Очевидно, $\mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \subset \mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}')$.

Следующее утверждение обобщает результаты работ [13], [18].

ТЕОРЕМА 3.1. *Аппроксимативно дифференцируемое отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ индуцирует ограниченные операторы $f^*: \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}) \rightarrow \mathcal{L}_s(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$, $1 \leq s \leq q \leq \infty$, и $f^*: \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \mathcal{L}_t(\mathbb{M}; \Lambda^k)$, $1 \leq t \leq p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда:*

а) $f \in \mathcal{CD}^0(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$, причем $f \in \mathcal{CD}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ при $k = 1$ и $f \in \mathcal{CD}^{k-1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ при $1 < k \leq n$;

б) $H_{k-1,s}(\cdot) \in L_{\mathcal{K}}(\mathbb{M}')$, где $\frac{1}{\mathcal{K}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{q}$, а $H_{k,t}(\cdot) \in L_{\sigma}(\mathbb{M}')$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{t} - \frac{1}{p}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

ЛЕММА 3.1. *Пусть для аппроксимативно дифференцируемого отображения $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ оператор переноса $f^*: \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \mathcal{L}_t(\mathbb{M}; \Lambda^k)$, $1 \leq t < p \leq \infty$, ограничен. Тогда функция множества*

$$\Psi(U') = \sup_{d\omega \in \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}', \Lambda^k)} \left(\frac{\|f^*d\omega \mid \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k)\|}{\|d\omega \mid \mathcal{L}_p(U', \Lambda^k)\|} \right)^{\sigma}, \quad \text{где } \sigma = \begin{cases} \frac{pt}{p-t} & \text{при } p < \infty, \\ t & \text{при } p = \infty, \end{cases} \quad (3.2)$$

будет ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией множества, определенной на ограниченных открытых множествах $U' \subset \mathbb{M}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Необходимость. Случай $k = 1$ фактически рассмотрен в [13]. Изучение остальных случаев существенно использует результаты настоящей работы, а также работ [13], [18], [54].

Если при $k > 1$ оператор $f^*: \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}) \rightarrow \mathcal{L}_s(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$, $1 \leq s \leq q \leq \infty$, ограничен, то из теоремы 1.1 получаем выполнение условий а) и $H_{k-1,s}(\cdot) \in L_{\mathcal{K}}(\mathbb{M}')$, где $\frac{1}{\mathcal{K}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{q}$.

Для получения второй части необходимых условий рассмотрим точку $x \in \mathbb{M} \setminus (Z \cup \Sigma)$. В локальных координатах в окрестности точки $z = f(x)$ рассмотрим k -формы вида $\omega_{m,\alpha} = y_m \varphi(y) dy_{\alpha}$, где $dy_{\alpha} = dy_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dy_{\alpha_{k-1}}$ – базисные формы, $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{k-1} \leq n\}$, $1 \leq m \leq n$, а φ – непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{M}'$, равная 1 (0) на $B(z, r)$ (вне $B(z, 2r)$), и $0 \leq \varphi \leq 1$. Подставляя при $t < p$ в неравенство $\|f^*d\omega \mid \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k)\| \leq$

$\Psi(B(z, 2r))^{1/\sigma} \|d\omega \mid \mathcal{L}_p(B(z, 2r), \Lambda^k)\|$ формы $\omega_{m,\alpha}$ в лексикографическом порядке и применяя (3.2), получаем

$$\begin{aligned} \|\Lambda^k f \mid \mathcal{L}_t(f^{-1}(B(z, r)))\|^t &\leq C_1 \int_{f^{-1}(B(z, r)) \setminus Z} \frac{|\Lambda^k f(x)|^t}{|J(x, f)|} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{B(z, r)} \sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^t}{|J(x, f)|} d\mathcal{H}^n(y) \leq C^t \left(\frac{\Psi(B(z, 2r))}{\mathcal{H}^n(B(z, 2r))} \right)^{t/\sigma} \mathcal{H}^n(B(z, 2r)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где C_1, C – постоянные. Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной аддитивной функции множества [17], [40] выводим

$$H_{k,t}^\sigma(y) = \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^t}{|J(x, f)|} \right)^{p/(p-t)} \leq C^\sigma \Psi'(y)$$

для $\mathcal{H}^n$ -почти всех $y \in \mathbb{M}'$ таких, что $f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z) \neq \emptyset$. Отсюда согласно неравенству

$$\int_U \Psi'(y) d\mathcal{H}^n(y) \leq \Psi(U)$$

(см. [17], [40]) вытекает оценка $\|H_{k,t}(\cdot) \mid L_\sigma(\mathbb{M}')\| \leq C \|f^*\|$.

При $t = p < \infty$ оценки лишь упрощаются. Действительно, в этом случае вместо (3.3) имеем

$$\begin{aligned} \|\Lambda^k f \mid \mathcal{L}_t(f^{-1}(B(z, r)))\|^t &\leq C_1 \int_{f^{-1}(B(z, r)) \setminus Z} \frac{|\Lambda^k f(x)|^t}{|J(x, f)|} |J(x, f)| d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{B(z, r)} \sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^t}{|J(x, f)|} d\mathcal{H}^n(y) \leq C^t \mathcal{H}^n(B(z, 2r)), \end{aligned}$$

где C_1, C – постоянные. Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла имеем

$$H_{k,t}^\infty(y) = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{M}'} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} \frac{|\Lambda^k f(x)|^t}{|J(x, f)|} \right)^{1/t} \leq C'.$$

При $t = p = \infty$ приходим к следующей оценке:

$$H_{k,\infty}^\infty(y) = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{M}'} \left(\max_{x \in f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma)} |\Lambda^k f(x)| \right) \leq C'.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Заметим, что условие а) обеспечивает по теореме 1.1 ограниченность оператора $f^*: \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}) \rightarrow \mathcal{L}_s(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$, $1 \leq s \leq q \leq \infty$, а условие б) – ограниченность оператора $f^*: \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq t \leq p \leq \infty$. Теорема доказана.

Поскольку из условия $\operatorname{rank} \operatorname{ap} Df(x) < k-1$ на Z при $k > 1$ вытекает условие $\operatorname{rank} \operatorname{ap} Df(x) < k$ на Z , из теорем 1.1 и 3.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, то оно индуцирует ограниченный оператор $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k)$.*

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Если отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, то $f \in \mathcal{CD}_{s,q}^{k-1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ и $f \in \mathcal{CD}_{t,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$.*

Дальнейшие результаты формулируются для отображений $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ таких, что справедливо свойство перестановочности операции переноса и внешнего дифференцирования, т. е. равенство

$$df^*\omega = f^*d\omega \quad (3.4)$$

для любой $(k-1)$ -формы ω с непрерывными коэффициентами, понимаемое в смысле распределений.

Известно, что для отображения f со значениями в $\mathbb{R}^n$ доказательство этого факта для формы ω с непрерывными коэффициентами, основанное на аппроксимации (и не использующее аппроксимацию в случае $\deg \omega = n-1$) отображения f гладкими отображениями, приведено в [51] ([54]) в предположении, что $f \in W_k^1(\mathbb{M}; \mathbb{R}^n)$.

Поскольку формула (3.4) имеет локальный характер, то, предполагая отображение $f \in W_k^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ непрерывным, можно доказать ее справедливость свести к случаю $\mathbb{M}' = \mathbb{R}^n$, перейдя в образе к локальным координатам.

Рассуждения, основанные на аппроксимации, применимы также и в общей ситуации отображения $f \in W_p^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ всякий раз, когда его можно аппроксимировать гладкими. В работе [60] (см. также [61]) доказано, что при $p \geq n$ можно аппроксимировать гладкими любое отображение $f \in W_p^1(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ (при $p < n$ в образе возникают топологические препятствия к аппроксимации; см. обсуждение этой проблемы в [61]).

Обозначим через $\mathcal{W}_{q,p}^{k-1}(\mathbb{M}')$ пространство форм $\{\omega \in \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}): d\omega \in \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)\}$ с нормой $\|\omega\|_{\mathcal{W}_{q,p}^{k-1}(\mathbb{M}')} = \|\omega\|_q + \|d\omega\|_p$, $1 \leq q, p \leq \infty$.

ЛЕММА 3.2. Пусть для фиксированного отображения $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ справедлива формула (3.4) для любой непрерывной $(k-1)$ -формы ω . Тогда при условии $f \in \mathcal{CD}_{s,q}^{k-1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}') \cap \mathcal{CD}_{t,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ равенство (3.4) справедливо также и для любой формы $\omega \in \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$ такой, что $d\omega \in \mathcal{L}_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [24, лемма 1.3]), что гладкие формы плотны в $\mathcal{W}_{q,p}^{k-1}(\mathbb{M}')$ в следующем смысле: при $1 \leq q, p < \infty$ гладкие формы образуют плотное в $W_{q,p}^{k-1}(\mathbb{M}')$ множество. В $W_{\infty,\infty}^{k-1}(\mathbb{M}')$ гладкие формы плотны в следующем слабом смысле: для каждой формы $\omega \in W_{\infty,\infty}^{k-1}(\mathbb{M}')$ существует такая последовательность гладких форм ω_s , что коэффициенты форм ω_s и $d\omega_s$ на каждом компакте $K \subset \mathbb{M}'$ ограничены равномерно по s и сходятся почти всюду к соответствующим коэффициентам форм ω и $d\omega$. В частности, $\langle \omega_l, \alpha \rangle \rightarrow \langle \omega, \alpha \rangle$ и $\langle d\omega_l, \beta \rangle \rightarrow \langle d\omega, \beta \rangle$ при $l \rightarrow \infty$ для любых форм $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{M}', \Lambda^{n-(k-1)})$ и $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{M}', \Lambda^{n-k})$. Аналогично понимается и плотность гладких форм в пространствах $W_{q,\infty}^{k-1}(\mathbb{M}')$ и $W_{\infty,p}^{k-1}(\mathbb{M}')$.

Рассмотрим произвольную форму $\omega \in \mathcal{W}_{q,p}^{k-1}(\mathbb{M}')$ и аппроксимируем ее гладкими ω_l в указанном выше смысле. Тогда, с одной стороны, в силу теоремы 1.1 имеем $f^*\omega_l \rightarrow f^*\omega$ при $l \rightarrow \infty$ в $\mathcal{L}_s(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$ и $f^*d\omega_l \rightarrow f^*d\omega$ в $\mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$ при $l \rightarrow \infty$, а с другой – ввиду $df^*\omega_l = f^*d\omega_l$ с учетом (3.1) имеем

$$\int_{\mathbb{M}} f^*d\omega_l \wedge \varphi = (-1)^k \int_{\mathbb{M}} f^*\omega_l \wedge d\varphi \quad (3.5)$$

для любой формы $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{M}, \Lambda^{n-(k-1)})$. Переходя в (3.5) к пределу при $l \rightarrow \infty$, получаем равенство (3.4) для рассматриваемой формы ω . Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если аппроксимативно дифференцируемое отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 и для него выполняется

равенство (3.4), то оно индуцирует корректно определенный ограниченный оператор

$$f^*: \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \mathcal{B}_{s,t}^k(\mathbb{M}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку операторы $f^*: \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}) \rightarrow \mathcal{L}_s(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$ и $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ (см. следствие 2.1) ограничены и в силу леммы 3.2 равенство $df^*\omega = f^*d\omega$ выполняется для любой $(k-1)$ -формы $\omega \in \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1})$, то мы имеем

$$\begin{aligned} f^*(\mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}')) &= f^*(d(\mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1})) \cap \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)) \\ &= f^*(d(\mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}))) \cap f^*(\mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k)) = df^*(\mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1})) \cap \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k) \\ &\subset d(\mathcal{L}_s(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})) \cap \mathcal{L}_t^k(\mathbb{M}, \Lambda^k) = \mathcal{B}_{s,t}^k(\mathbb{M}). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Факторпространство

$$H_{q,p}^k(\mathbb{M}) = \mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}) / \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M})$$

($\overline{H}_{q,p}^k(\mathbb{M}) = \mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}) / \overline{\mathcal{B}}_{q,p}^k(\mathbb{M})$), где $\overline{\mathcal{B}}_{q,p}^k(\mathbb{M})$ – замыкание пространства $\mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M})$ называется (редуцированными) $\mathcal{L}_{q,p}$ -когомологиями риманова пространства $(\mathbb{M}, g)$ [25].

Стандартным образом доказываются следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ удовлетворяет равенству (3.4) и принадлежит $\mathcal{CD}_{s,q}^{k-1}(\mathbb{M}; \mathbb{M}') \cap \mathcal{CD}_{t,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$ для $1 \leq k \leq n$, то оно индуцирует корректно определенные:

- 1) линейный оператор $f^*: H_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow H_{s,t}^k(\mathbb{M})$;
- 2) ограниченный оператор $f^*: \overline{H}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \overline{H}_{s,t}^k(\mathbb{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий предложения по теореме 3.1 имеем ограниченность оператора $f^*: \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}) \rightarrow \mathcal{L}_s(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$, $1 \leq s \leq q \leq \infty$, а по следствию 3.1 – ограниченность оператора $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq t \leq p \leq \infty$.

Включение $f^*(\mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}')) \subset \mathcal{Z}_t^k(\mathbb{M}')$ вытекает из ограниченности оператора $f^*: \mathcal{L}_p^k(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_t^k(\mathbb{M}, \Lambda^k)$ и условия $df^*\omega = f^*d\omega = 0$, справедливого в силу леммы 3.2 для любой k -формы $\omega \in \mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}')$. По предложению 3.1 оператор $f^*: \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \mathcal{B}_{s,t}^k(\mathbb{M})$ ограничен. Из этих двух свойств получаем, что линейный оператор $f^*: H_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow H_{s,t}^k(\mathbb{M})$ корректно определен.

Из ограниченности оператора $f^*: \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \mathcal{B}_{s,t}^k(\mathbb{M})$ выводим включения

$$f^*(\overline{\mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}')}) \subset \overline{f^*(\mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}'))} \subset \overline{\mathcal{B}_{s,t}^k(\mathbb{M})}.$$

Отсюда и из включения $f^*(\mathcal{Z}_p^k(\mathbb{M}')) \subset \mathcal{Z}_t^k(\mathbb{M}')$ выводим корректность определения оператора $f^*: \overline{H}_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow \overline{H}_{s,t}^k(\mathbb{M})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если для $1 \leq k \leq n$ и $q \in [1, \infty]$ гомеоморфизм $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ квазиконформен (квазиизометричен) при $q(k-1) = n$ ($q(k-1) \neq n$) и $f \in \mathcal{CD}_{t,p}^k(\mathbb{M}; \mathbb{M}')$, то он индуцирует корректно определенный инъективный оператор

$$f^*: H_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow H_{q,t}^k(\mathbb{M}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2.1 (теореме 2.1) гомеоморфизм $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ индуцирует ограниченный изоморфизм $\tilde{f}^*: \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$,

$1 \leq q \leq \infty$, $2 \leq k \leq n-1$ ($k=1$). Согласно теореме 1.1 гомеоморфизм $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ индуцирует ограниченный оператор $f^*: \mathcal{L}_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \rightarrow \mathcal{L}_t(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, $1 \leq t \leq p \leq \infty$.

В силу предложения 3.2 гомеоморфизм $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ корректно индуцирует линейный оператор $f^*: H_{q,p}^k(\mathbb{M}') \rightarrow H_{q,t}^k(\mathbb{M})$. Остается доказать, что этот оператор инъективен.

Предположим, что $[f^*\omega] = 0$ в $H_{q,t}^k(\mathbb{M})$. Тогда $f^*\omega \in \mathcal{B}_{q,t}^k(\mathbb{M})$ и, следовательно, существует $(k-1)$ -форма $\vartheta \in \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$ такая, что $d\vartheta = f^*\omega$. Поскольку $f^*: \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1}) \rightarrow \mathcal{L}_q(\mathbb{M}, \Lambda^{k-1})$ – ограниченный изоморфизм, то $(f^*)^{-1}\vartheta \in \mathcal{L}_q(\mathbb{M}', \Lambda^{k-1})$. Следовательно, справедливы равенства

$$\omega = (f^*)^{-1}f^*\omega = (f^*)^{-1}d\vartheta = d((f^*)^{-1}\vartheta) \in \mathcal{B}_{q,p}^k(\mathbb{M}').$$

Таким образом, $[\omega] = 0$ в $H_{q,p}^k(\mathbb{M}')$. Предложение доказано.

Основные положения настоящей статьи сформулированы в работе [62].

В заключение я выражаю искреннюю признательность Г. Химшиашвили и Т. Иванцу, обратившим мое внимание в 2006 г. (конференция “Анализ и уравнения с частными производными” в Математическом центре в г. Бедлево, Польша) на возможность изучения задач из работы [13] в случае пространств дифференциальных форм вместо пространств Соболева функций с первыми обобщенными производными.

Список литературы

1. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.
2. M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, *Cartesian currents in the calculus of variations*, v. I, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **37**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
3. С.К. Водопьянов, *Функционально-теоретический подход к некоторым задачам теории пространственных квазиконформных отображений*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Сиб. отделение АН СССР, Ин-т математики, Новосибирск, 1975.
4. С.К. Водопьянов, В.М. Гольдштейн, “Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными”, *Сиб. матем. журн.*, **17:3** (1976), 515–531; англ. пер.: S.K. Vodop'yanov, V.M. Gol'dshtein, “Quasiconformal mappings and spaces of functions with generalized first derivatives”, *Siberian Math. J.*, **17:3** (1976), 399–411.
5. J. M. Ball, “Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **88:3–4** (1981), 315–328.
6. T. Iwaniec, V. Šverák, “On mappings with integrable dilatation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118:1** (1993), 181–188.
7. J. Heinonen, P. Koskela, “Sobolev mappings with integrable dilatations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **125:1** (1993), 81–97.
8. S. Müller, Q. Tang, B. S. Yan, “On a new class of elastic deformations not allowing for cavitation”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **11:2** (1994), 217–243.
9. J. J. Manfredi, E. Villamor, “Mappings with integrable dilatation in higher dimensions”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **32:2** (1995), 235–240.
10. J. Kauhanen, P. Koskela, J. Malý, “Mappings of finite distortion: condition N”, *Michigan Math. J.*, **49:1** (2001), 169–181.
11. M. Troyanov, S. Vodop'yanov, “Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **52:6** (2002), 1753–1784.

12. С. К. Водопьянов, “Операторы подстановки пространств Соболева”, *Современные проблемы теории функций и их приложения* (Саратов, 2002), Саратов, 2002, 42–43.
13. S. K. Vodop'yanov, “Composition operators on Sobolev spaces”, *Complex analysis and dynamical systems II* (Nahariya, Israel, 2003), *Contemp. Math.*, **382**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 401–415.
14. С. К. Водопьянов, “ L_p -теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах”, *Современные проблемы геометрии и анализа*, Наука, Новосибирск, 1989, 45–89.
15. С. К. Водопьянов, *Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Ин-т математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 1992.
16. С. К. Водопьянов, “О регулярности отображений, обратных к соболевским”, *Докл. РАН*, **423**:5 (2008), 592–596; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, “On regularity of mappings inverse to Sobolev mappings”, *Dokl. Math.*, **78**:3 (2008), 891–895.
17. С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I”, *Матем. тр.*, **6**:2 (2003), 14–65; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, S. K. Ukhlov, “Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I”, *Siberian Adv. Math.*, **14**:4 (2004), 78–125.
18. С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Операторы суперпозиции в пространствах Соболева”, *Изв. вузов. Матем.*, 2002, № 10, 11–33; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, “Superposition operators in Sobolev spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **46**:10 (2002), 9–31.
19. С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Пространства Соболева и (P, Q) -квазиконформные отображения групп Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:4 (1998), 776–795; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, “Sobolev spaces and (P, Q) -quasiconformal mappings of Carnot groups”, *Siberian Math. J.*, **39**:4 (1998), 665–682.
20. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, “Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:2 (1975), 224–246; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein, “Lattice isomorphisms of the spaces W_n^1 and quasiconformal mappings”, *Siberian Math. J.*, **16**:2 (1975), 174–189.
21. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, “Функциональные характеристики квазиизометрических отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:4 (1976), 768–773; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein, “Functional characteristics of quasiisometric mappings”, *Siberian Math. J.*, **17**:4 (1976), 580–584.
22. А. С. Романов, “О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса”, *Функциональный анализ и математическая физика*, Сиб. отделение АН СССР, Ин-т математики, Новосибирск, 1985, 117–133.
23. F. W. Gehring, “Lipschitz mappings and the p -capacity of rings in n -space”, *Advances in the theory of Riemann surfaces* (Stony Brook, NY, 1969), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, 175–193.
24. W. Lück, *L^2 -invariants: theory and applications to geometry and K -theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, **44**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
25. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, “Дифференциальные формы на липшицевом многообразии”, *Сиб. матем. журн.*, **23**:2 (1982), 16–30; англ. пер.: V. M. Gol'dshtein, V. I. Kuz'minov, I. A. Shvedov, “Differential forms on Lipschitz manifolds”, *Siberian Math. J.*, **23**:2 (1982), 151–161.
26. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, “Об интегрировании дифференциальных форм классов $W_{p,q}^*$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **23**:5 (1982), 63–79; англ. пер.: V. M. Gol'dshtein, V. I. Kuz'minov, I. A. Shvedov, “Integration of differential forms of the classes $W_{p,q}^*$ ”, *Siberian Math. J.*, **23**:5 (1982), 640–653.
27. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, “О нормальной и компактной разрешимости линейных операторов”, *Сиб. матем. журн.*, **30**:5 (1989), 49–59;

- англ. пер.: V. M. Gol'dshtein, V. I. Kuz'minov, I. A. Shvedov, "Normal and compact solvability of linear operators", *Siberian Math. J.*, **30**:5 (1989), 704–712.
28. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, "О формуле Кюннета для L_p -когомологий искривленных произведений", *Сиб. матем. журн.*, **32**:5 (1991), 29–42; англ. пер.: V. M. Gol'dshtein, V. I. Kuz'minov, I. A. Shvedov, "The Künneth formula for L_p -cohomologies of warped products", *Siberian Math. J.*, **32**:5 (1991), 749–760.
 29. В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, "О компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования", *Сиб. матем. журн.*, **38**:3 (1997), 573–590; англ. пер.: V. I. Kuz'minov, I. A. Shvedov, "On compact solvability of the operator of exterior derivation", *Siberian Math. J.*, **38**:3 (1997), 492–506.
 30. M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, v. 2, Geometric group theory (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
 31. P. Pansu, *Cohomologie L^p , espaces homogènes et pincement*, www.math.u-psud.fr/~pansu/liste-prepub.html.
 32. P. Pansu, " L^p -cohomology and pinching", *Rigidity in dynamics and geometry* (Cambridge, UK, 2000), Springer-Verlag, Berlin, 2002, 379–389.
 33. P. Pansu, "Cohomologie L^p en degré 1 des espaces homogènes", *Potential Anal.*, **27**:2 (2007), 151–165.
 34. T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric function theory and nonlinear analysis*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
 35. M. Bonk, Ju. Heinonen, "Quasiregular mapping and cohomology", *Acta Math.*, **186**:2 (2001), 219–238.
 36. V. Gol'dshtein, M. Troyanov, *A conformal de Rham complex*, [arXiv: abs/0711.1286](https://arxiv.org/abs/0711.1286).
 37. Ю. Г. Решетняк, "Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве", *Сиб. матем. журн.*, **38**:3 (1997), 657–675; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, "Sobolev-type classes of functions with values in a metric space", *Siberian Math. J.*, **38**:3 (1997), 567–583.
 38. S. K. Vodop'yanov, " $\mathcal{P}$ -differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics", *Proceedings on analysis and geometry* (Novosibirsk, 1999), Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000, 603–670.
 39. P. Hajlasz, "Change of variables formula under minimal assumptions", *Colloq. Math.*, **64**:1 (1993), 93–101.
 40. T. Rado, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis with an introduction to algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955.
 41. V. Gol'dshtein, M. Troyanov, "Distortion of mappings and $L_{q,p}$ -cohomology", *Math. Z.*, **264**:2 (2010), 279–293.
 42. С. Л. Соболев, "О некоторых группах преобразований n -мерного пространства", *Докл. АН СССР*, **32**:6 (1941), 380–382.
 43. В. Г. Мазья, *Классы множеств и теоремы вложения функциональных классов. Некоторые проблемы теории эллиптических операторов*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ЛГУ, Л., 1961.
 44. В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1986; англ. пер.: V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*, Monogr. Stud. Math., **23**, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.
 45. H. M. Reimann, "Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen im Raum", *Comment. Math. Helv.*, **44** (1969), 284–307.
 46. J. Lelong-Ferrand, "Étude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions, et généralisant les quasi conformes", *Duke Math. J.*, **40**:1 (1973), 163–186.

47. С. К. Водопьянов, *Формула Тейлора и функциональные пространства*, НГУ, Новосибирск, 1988.
48. С. К. Водопьянов, “Весовые пространства Соболева и теория отображений”, *Тез. докладов Всесоюзной математической школы “Теория потенциала”* (Кацивели, 1991), Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1991, 7.
49. G. D. Mostow, “Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **34**:1 (1968), 53–104.
50. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
51. Yu. G. Reshetnyak, *Space mappings with bounded distortion*, Transl. Math. Monogr., **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
52. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
53. J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1993.
54. S. K. Vodopyanov, “Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups”, *The interaction of analysis and geometry* (Novosibirsk, 2004), Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 303–344.
55. Ю. Г. Решетняк, “О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными”, *Сиб. матем. журн.*, **10**:6 (1969), 1109–1138; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, “The concept of capacity in the theory of functions with generalized derivatives”, *Siberian Math. J.*, **10**:5 (1969), 818–842.
56. С. К. Водопьянов, В. М. Черников, “Пространства Соболева и гипоеллиптические уравнения”, *Тр. сем. им. С. Л. Соболева*, **29** (1995), 7–62; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Chernikov, “Sobolev spaces and hypoelliptic equations. I”, *Siberian Adv. Math.*, **6**:3 (1996), 27–67; “Sobolev spaces and hypoelliptic equations. II”, **6**:4 (1996), 64–96.
57. Ю. Г. Решетняк, “Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду”, *Матем. сб.*, **75**(117):3 (1968), 323–334; англ. пер.: J. G. Rešetnjak, “Generalized derivatives and differentiability almost everywhere”, *Math. USSR-Sb.*, **4**:3 (1968), 293–302.
58. С. К. Водопьянов, “О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно”, *Матем. сб.*, **194**:6 (2003), 67–86; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, “Differentiability of maps of Carnot groups of Sobolev classes”, *Sb. Math.*, **194**:6 (2003), 857–877.
59. J. J. Manfredi, “Weakly monotone functions”, *J. Geom. Anal.*, **4**:3 (1994), 393–402.
60. F. Hang, F. Lin, “Topology of Sobolev mappings”, *Math. Res. Lett.*, **8**:3 (2001), 321–330; “II”, *Acta Math.*, **191**:1 (2003), 55–107; “III”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **56**:10 (2003), 1383–1415.
61. P. Hajlasz, “Sobolev mappings between manifolds and metric spaces”, *Sobolev spaces in mathematics*, v. I, Int. Math. Ser. (N. Y.), **8**, Springer-Verlag, New York, 2009, 185–222; www.pitt.edu/~hajlasz/OriginalPublications/Publications3.html.
62. С. К. Водопьянов, “Пространства дифференциальных форм и отображения с контролируемым искажением”, *Докл. РАН*, **424**:6 (2009), 727–731; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, “Spaces of differential forms and mappings with controlled distortion”, *Dokl. Math.*, **79**:1 (2009), 105–109.

С. К. Водопьянов (S. K. Vodop'yanov)
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 г. Новосибирск
E-mail: vodopis@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
 27.06.2008