Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, О числе целых точек в трехмерных телах вращения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 2, 121–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:55:20

УДК 511

Д. А. Попов

О числе целых точек в трехмерных телах вращения

Для класса трехмерных тел вращения с гладкой границей получена (при некоторых дополнительных условиях) точная по порядку величины оценка остаточного члена в задаче о числе целых точек в семействах гомотетичных областей. Эта оценка реализуется в случае тела, ограниченного стандартно вложенным тором, для которого явно выписан второй член разложения, дающего зависимость числа целых точек от параметра растяжения.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Введение

В работе рассматривается частный случай известной задачи о числе целых точек в семействах гомотетичных областей в $\mathbb{R}^d$. Эта задача формулируется следующим образом. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ – компактная область с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$ и $t\mathcal{D}$ – ее образ при растяжении в t раз относительно начала координат $0 \in \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$. Через $\mathcal{N}(t, \mathcal{D})$ обозначим число целых точек $n \in \mathbb{Z}^d$ в области $t\mathcal{D}$. Задача состоит в том, чтобы оценить остаточный член $R(t, \mathcal{D})$ в формуле

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{D}) = t^d \text{Vol}(\mathcal{D}) + R(t, \mathcal{D}), \quad (1.1)$$

где $\text{Vol}(\mathcal{D})$ – объем области $\mathcal{D}$ и $t \rightarrow \infty$. Величина $R(t, \mathcal{D})$ оценивается степенью параметра растяжения t , и необходимо найти β такое, что $\forall \varepsilon > 0$

$$R(t, \mathcal{D}) = O(t^{\beta+\varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Если рассматривается некоторый класс $\{\mathcal{D}\}$ областей, то под точным значением $\beta_0 \equiv \beta_0(\{\mathcal{D}\})$ понимается нижняя грань значений β , для которых верна оценка (1.2), т.е. $\forall \mathcal{D} \in \{\mathcal{D}\}, \forall \varepsilon > 0$

$$R(t, \mathcal{D}) = O(t^{\beta_0+\varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Задача определения β_0 для различных классов областей является одной из типичных задач теории чисел и имеет длинную историю [1]–[5]. Тем не менее, значение β_0 известно только в небольшом числе примеров. В частности, на классе рациональных эллипсоидов $\beta_0 = d - 2$, $d \geq 4$, но для шаров в $\mathbb{R}^3$ известно только, что $\beta = \frac{4}{3}$ (см. [1]). Вторым и по-видимому последним примером, когда известно значение β_0 , является некоторый класс двумерных областей $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, для которых

граница $\partial\mathcal{D}$ имеет точки уплощения. В двумерном случае построены области, для которых $\beta_0 = \frac{2}{3}$ (см. [3]), и в работах [6]–[8] доказан следующий результат: если $d = 2$ и p – максимальный порядок нулей кривизны границы $\partial\mathcal{D}$, то

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{3} && \text{при } p = 0, 1, \\ \beta_0 &= 1 - \frac{1}{p+2} && \text{при } p \geq 2, \quad \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для строго выпуклых двумерных областей, кривизна границы которых $k(s) \geq k_0 > 0$, наилучший известный результат $\beta = \frac{46}{73}$ (см. [9]). Случай выпуклых d -мерных областей был рассмотрен в [10] (см. также [11]). Здесь

$$\beta = d - 2 + \frac{2}{d+1}, \quad \varepsilon = 0. \quad (1.5)$$

Этот результат был улучшен в [12], где показано, что для выпуклых областей с гладкой границей

$$\beta = \begin{cases} d - 2 + \frac{8}{5d+2} & \text{при } 3 \leq d \leq 6, \\ d - 2 + \frac{3}{2d} & \text{при } d \geq 7. \end{cases}$$

Общий случай невыпуклых областей рассмотрен в [8], где показано, что при $d \leq 7$ результат (1.5) верен для гладких областей с границей общего положения. Этот результат получен с использованием методов теории особенностей. В рамках этой теории задача о числе целых точек в областях с достаточно общей границей рассматривалась в [13] и [14]. При этом в [13] исследовалось поведение остаточного члена $R(t, \mathcal{D})$ в среднем – при усреднении по всем поворотам (и трансляциям) области $\mathcal{D}$. В [15] исследованы статистические свойства функции $R(t, \mathcal{D})$ для достаточно общих двумерных областей. Там же содержится и сводка результатов по оценкам остаточного члена $R(t, \mathcal{D})$ в (1.1).

Сформулируем основные результаты. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ – тело вращения с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$, образованной вращением плоской кривой Γ , которая называется *меридианом*, вокруг оси, задаваемой вектором $\vec{\mathcal{A}}$. Ограничения на геометрию границы $\partial\mathcal{D}$ сформулируем в терминах геометрии кривой Γ . Рассмотрим плоскость, содержащую Γ и $\vec{\mathcal{A}}$. Точки меридиана, не являющиеся точками перегиба, в которых касательная к Γ перпендикулярна к $\vec{\mathcal{A}}$, назовем *экстремумами*. Экстремумы будем называть *простыми*, если в них кривизна k_Γ кривой Γ отлична от нуля.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ – тело вращения с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$ и меридиан Γ удовлетворяет условиям:

- 1) все экстремумы простые;
- 2) максимальный порядок нулей кривизны k_Γ меридиана Γ равен p ;
- 3) касательные к кривой Γ в точках ее уплощения не перпендикулярны к оси вращения $\vec{\mathcal{A}}$.

Тогда не зависимо от ориентации оси $\vec{\mathcal{A}}$ относительно решетки $\mathbb{Z}^3$ в оценке (1.2) можно взять $\varepsilon = 0$ и

$$\beta = \frac{3}{2} \quad \text{при} \quad p = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (1.6)$$

$$\beta = \frac{7}{4} - \frac{3}{2(p+2)} \quad \text{при} \quad p \geq 4. \quad (1.7)$$

Заметим, что условия 1)–3) означают, что на поверхности $\partial\mathcal{D}$ нет точек уплощения. Заметим также, что (1.6) совпадает с (1.5) при $d = 3$. Точное значение β_0 в общем случае зависит от ориентации оси $\vec{\mathcal{A}}$ относительно решетки $\mathbb{Z}^3$ и, в частности, от того, имеет ли прямая, содержащая $\vec{\mathcal{A}}$, целые точки. Для оценки точности формулы (1.6) рассмотрим стандартно вложенный в $\mathbb{R}^3$ тор $\mathbb{T}^2$, т.е. рассмотрим задачу о числе целых точек в теле вращения $\mathcal{D} = T \equiv T(a, b)$, граница которого $\partial T = \mathbb{T}^2$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= (b + a \cos \alpha') \cos \alpha, & y &= (b + a \cos \alpha') \sin \alpha, \\ z &= a \sin \alpha', & b &> a \end{aligned} \quad (1.8)$$

(ось $\vec{\mathcal{A}}$ совпадает с осью координат z).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{D} = T(a, b)$ – область, ограниченная тором $\mathbb{T}^2$, заданным уравнениями (1.8). Тогда

$$R(t, T(a, b)) = -t^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{2} b \sqrt{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k a t)}{k^{\frac{3}{2}}} + o\left(t^{\frac{3}{2} - \frac{1}{287}}\right), \quad (1.9)$$

и, таким образом, $\beta_0 = \frac{3}{2}$, $\varepsilon = 0$ на классе тел вращения, удовлетворяющих условиям теоремы 1 при $p \leq 4$.

Заметим, что теорема 2 дает асимптотически точную (при $x \geq x_0(a, b)$) оценку числа $\mathcal{N}(x, a, b)$ решений в целых числах l, m, n неравенства

$$[l^2 + m^2 + n^2 - x(a^2 + b^2)]^2 \leq 4xb^2(xa^2 - n^2),$$

так как $\mathcal{N}(x, a, b) = \mathcal{N}(\sqrt{x}, T(a, b))$.

В приведенных ниже рассуждениях мы будем придерживаться следующего “соглашения о константах”.

Все константы, значения которых не указываются, обозначаются буквой C , причем одной буквой могут обозначаться различные константы. Всегда указывается, от каких параметров зависят эти константы, и если параметры не указаны, то константа абсолютная. Все константы могут быть выписаны явно и метод их вычисления содержится в доказательстве. Запись $C = C(\partial\mathcal{D})$ означает, что константа C зависит от главных кривизн гиперповерхности $\partial\mathcal{D}$ и их производных, а запись $C = C(\Gamma)$ означает, что величина C зависит от кривизны k_Γ меридиана Γ и ее производных.

В частности, для трехмерных тел вращения константы в $O(t^{\beta+\varepsilon})$ в формуле (1.2) и в $o(t^{\frac{3}{2}-\frac{1}{287}})$ в формуле (1.9) имеют вид $C(\Gamma)$ и при $t \geq C(\Gamma)$ могут быть указаны явно.

Автор благодарен Г. И. Архипову, указавшему на метод оценки тригонометрических сумм, используемый при доказательстве теоремы 2, С. Тарасову и профессору Е. Кратцелю за полезные замечания и указание на работы [10], [12].

§ 2. Описание метода и подготовительные оценки

2.1. Редукция задачи к оценке осциллирующих интегралов. Для доказательства теорем 1 и 2 применяется (с некоторыми уточнениями) метод, использованный в работах [8], [13]. Приведем его краткое изложение, попутно вводя нужные обозначения. Через $\chi_{\mathcal{D}}$ ниже обозначается индикатор (характеристическая функция) области $\mathcal{D}$. Задача состоит в исследовании величины

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{D}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \chi_{\mathcal{D}}\left(\frac{n}{t}\right).$$

Наряду с $\mathcal{D}$ вводятся области $\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$ такие, что $\mathcal{D}(-\varepsilon) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\varepsilon)$. При определении этих областей мы несколько отступим от изложения в [8], [13] и зададим области $\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$, явно указав их границы:

$$x_{\pm\varepsilon} \in \partial\mathcal{D}(\pm\varepsilon) \Leftrightarrow x_{\pm\varepsilon} = x \pm \varepsilon\nu(x), \quad 0 < \varepsilon < C(\partial\mathcal{D}), \quad (2.1)$$

где $\nu(x)$ – внешняя нормаль к $\partial\mathcal{D}$ в точке $x \in \partial\mathcal{D}$. Введем функции ρ и ρ_{ε} . Пусть $\rho \in C_0^{\infty}$ – гладкая функция с носителем в единичном шаре ($\text{supp } \rho = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq 1\}$) такая, что $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$, $0 \leq \rho(x) \leq 1$. Соответственно $\rho_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-d} \rho(x\varepsilon^{-1})$. Функции $\chi_{\varepsilon, \mathcal{D}}$ определим равенством

$$\chi_{\varepsilon, \mathcal{D}}(x) = (\chi_{\mathcal{D}} \otimes \rho_{\varepsilon})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) \chi_{\mathcal{D}}(x - \varepsilon y) dy.$$

В силу сделанных предположений $\chi_{\varepsilon, \mathcal{D}(-\varepsilon)}(x) \leq \chi_{\mathcal{D}}(x) \leq \chi_{\varepsilon, \mathcal{D}(\varepsilon)}(x)$ и, следовательно,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \chi_{\varepsilon, \mathcal{D}(-\varepsilon)}\left(\frac{n}{t}\right) \leq \mathcal{N}(t, \mathcal{D}) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \chi_{\varepsilon, \mathcal{D}(\varepsilon)}\left(\frac{n}{t}\right). \quad (2.2)$$

Так как функции $\chi_{\varepsilon, \mathcal{D}(\pm\varepsilon)} \in C_0^{\infty}$, то к обеим суммам в (2.2) применима формула Пуассона $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(2\pi n)$. Здесь и ниже через $\hat{f}$ обозначается преобразование Фурье функции f :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \omega \rangle} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}^d,$$

и используются стандартные обозначения: $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$ и $|x|$ – норма элемента $x \in \mathbb{R}^d$. Возможность применения формулы Пуассона гарантируется оценкой

$$|\hat{\rho}(\omega)| \leq C_{md} (1 + |\omega|^m)^{-1} \quad \forall m \geq 0, \quad (2.3)$$

и, кроме того, предположим, что

$$\hat{\rho}(\omega) = \hat{\rho}(|\omega|) \in \mathbb{R}, \quad \hat{\rho}(0) = 1. \quad (2.4)$$

Так как (см. [16]) при $\varepsilon \leq C(\partial\mathcal{D})$

$$\text{Vol}(\mathcal{D}(\pm\varepsilon)) = \text{Vol}(\mathcal{D}) + \sum_{k=1}^d (\pm\varepsilon)^k C_{k,d}(\partial\mathcal{D}),$$

то из (2.2), применяя формулу Пуассона, получим нужную двустороннюю оценку величины $R(t, \mathcal{D})$ из (1.1):

$$\Delta_{-\varepsilon,t}(\mathcal{D}(-\varepsilon)) + O(\varepsilon t^d) \leq R(t, \mathcal{D}) \leq \Delta_{+\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon)) + O(\varepsilon t^d), \quad (2.5)$$

в которой величины $\Delta_{\pm\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\pm\varepsilon))$ определяются равенствами

$$\Delta_{\pm\varepsilon}(\mathcal{D}(\pm\varepsilon)) = t^d \sum'_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{\chi}_{\mathcal{D}(\pm\varepsilon)}(2\pi n t) \hat{\rho}(2\pi |n| \varepsilon t), \quad (2.6)$$

штрих в знаке суммы означает, что суммирование ведется по всем $n \in \mathbb{Z}^d$, $n \neq 0$. Ряд в правой части (2.6) сходится абсолютно и равномерно в силу (2.3). Формула Стокса позволяет записать преобразование Фурье $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\omega)$ в виде осциллирующего интеграла (о.и.) по границе $\partial\mathcal{D}$:

$$\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\omega) = (i\lambda)^{-1} \int_{\partial\mathcal{D}} e^{i\lambda \langle \eta, x \rangle} \langle \nu, \eta \rangle dS. \quad (2.7)$$

В этой формуле и ниже $\omega = \lambda\eta$, $\lambda = |\omega|$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ ($|\eta| = 1$), а dS – индуцированная вложением мера на $\partial\mathcal{D}$. Задача, таким образом, сводится к оценке о.и. $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\omega)$ из (2.7) при $\lambda \rightarrow \infty$. Приведенные во введении результаты (1.4), (1.5) получаются с помощью (2.5) и соответствующих оценок о.и. (2.7). В частности, равенство (1.5) для строго выпуклых областей сразу следует из оценки $|\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\omega)| = O(\lambda^{-(d-1)/2})$, получаемой из (2.7) методом стационарной фазы (см. [11]).

2.2. Оценка преобразования Фурье индикаторов трехмерных тел вращения. Везде ниже рассматривается трехмерный случай и для точек $\mathbb{R}^3$ используются векторные обозначения: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ и т.д. Через $\Delta_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon))$ обозначается любая из величин $\Delta_{\pm\varepsilon}(\mathcal{D}(\pm\varepsilon))$ (см. (2.6)). Соответственно $\mathcal{D}(\varepsilon)$ – любая из областей $\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$, а $\partial\mathcal{D}(\varepsilon)$ – любая из границ $\partial\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$. В этом пункте доказывается основная лемма 1, дающая асимптотически точную (при $\lambda \rightarrow \infty$) оценку величины $|\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda\vec{\eta})|$ для тела вращения $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$. Прежде чем сформулировать лемму 1, напомним некоторые факты из дифференциальной геометрии поверхностей вращения $\partial\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$ (см. [17]) и при этом введем некоторые обозначения.

Пусть гладкая поверхность $\partial\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$ образована вращением меридиана Γ вокруг оси z ($\vec{\mathcal{A}} = (0, 0, 1)$) и в полуплоскости $x = 0$, $y \geq 0$ кривая Γ задается уравнениями

$$y = f(s), \quad z = g(s). \quad (2.8)$$

В качестве координат $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ на поверхности $\partial\mathcal{D}$ выберем $\xi = (s, \alpha)$, где α – угол поворота плоскости меридиана относительно оси x . Тогда для точек $\vec{r} \in \partial\mathcal{D}$ и внешней нормали $\vec{\nu}$ имеем

$$\begin{aligned} \vec{r} &\equiv \vec{r}(s, \alpha) = (f(s) \cos \alpha, f(s) \sin \alpha, g(s)), \\ \vec{\nu} &\equiv \vec{\nu}(s, \alpha) = \frac{1}{(f^{(1)}(s))^2 + (g^{(1)}(s))^2} (g^{(1)}(s) \cos \alpha, g^{(1)}(s) \sin \alpha, -f^{(1)}(s)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты E, F, G первой и L, M, N второй квадратичных форм поверхности $\partial\mathcal{D}$ зависят только от s и

$$\begin{aligned} E &= (f^{(1)})^2 + (g^{(1)})^2, & F &= 0, & G &= f^2, \\ L &= f^{(2)}g^{(1)} - f^{(1)}g^{(2)}, & M &= 0, & N &= -fg^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, (s, α) являются координатами кривизны [17], и главные кривизны k_1, k_2 поверхности вращения определяются из соотношений

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{f^{(2)}g^{(1)} - f^{(1)}g^{(2)}}{(f^{(1)})^2 + (g^{(1)})^2}, \quad k_2 = \frac{N}{G} = -\frac{g^{(1)}}{f}. \quad (2.11)$$

Поверхности $\partial\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$ также являются поверхностями вращения, и для них (см. (2.1), (2.9))

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\pm\varepsilon}(s, \alpha) &= \vec{r}(s, \alpha) \pm \varepsilon \vec{\nu}(s, \alpha) = (f_{\pm\varepsilon}(s) \cos \alpha, f_{\pm\varepsilon}(s) \sin \alpha, g_{\pm\varepsilon}(s)), \\ f_{\pm\varepsilon}(s) &= f(s) \pm \varepsilon g^{(1)}(s), \quad g_{\pm\varepsilon}(s) = g(s) \mp \varepsilon f^{(1)}(s). \end{aligned} \quad (2.12)$$

На поверхностях $\partial\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$ также будут использоваться координаты (s, α) . Кроме того, ниже предполагается, что s – натуральный параметр (длина дуги) на Γ и, следовательно, $E = 1$, $k_1 = k_\Gamma$. Так как (s, α) – координаты кривизны, то имеет место формула Родрига

$$\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial s} = k_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, \quad \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial \alpha} = k_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}. \quad (2.13)$$

Как уже указывалось, задача состоит в оценке о.и.

$$\widehat{\chi}_{\mathcal{D}(\varepsilon)}(\lambda \vec{\eta}) = (i\lambda)^{-1} \int_{\partial\mathcal{D}(\varepsilon)} e^{i\lambda \langle \vec{r}_\varepsilon, \vec{\eta} \rangle} \langle \vec{\nu}_\varepsilon, \vec{\eta} \rangle dS_\varepsilon, \quad dS_\varepsilon = |f_\varepsilon| d\alpha ds. \quad (2.14)$$

Здесь и ниже $\vec{r}_\varepsilon$ – любой из векторов $\vec{r}_{\pm\varepsilon}$ из (2.12), $\vec{\nu}_\varepsilon$ – соответствующая внешняя нормаль к поверхности $\partial\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$ и

$$\vec{\eta} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (2.15)$$

Как будет ясно из дальнейшего, достаточно рассмотреть критические точки $\xi^c = (s_c, \alpha_c)$ фазы

$$\phi(s, \alpha) = \langle \vec{r}(s, \alpha), \vec{\eta} \rangle, \quad (2.16)$$

отвечающей случаю $\varepsilon = 0$. Эти точки определяются из условия

$$\vec{\nu}_c \equiv \vec{\nu}(s_c, \alpha_c) = \pm \vec{\eta}. \quad (2.17)$$

Матрица вторых производных $\phi''_c = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi^c) \right)$ (гессиан) легко вычисляется и с точностью до знака совпадает с матрицей второй основной формы поверхности $\partial \mathcal{D}$:

$$\phi''_c = \pm \begin{pmatrix} L(\xi^c) & , & M(\xi^c) \\ M(\xi^c) & , & N(\xi^c) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Так как $M(\xi^c) = 0$, то условия вырождения критических точек ($\det \phi''_c = 0$) имеют вид $L(\xi^c) = 0$ или $N(\xi^c) = 0$. Условие $L(\xi^c) = 0$ отвечает равенству $k_\Gamma(s_c) = k_1(s_c) = 0$, где k_Γ – кривизна меридиана Γ и k_1 – первая из главных кривизн (2.11). Пусть $k_1(s) = 0$ вдоль параллелей, на которых $s = s_{1i}$. При нормальном отображении $\partial \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{S}^2_\nu$, сопоставляющем точке $\vec{r} \in \partial \mathcal{D}$ конец нормали к $\partial \mathcal{D}$ в этой точке, параллели $s = s_{1i}$ отображаются в параллели $\theta = \theta_i$, так как условие (2.17) позволяет отождествить сферу $\mathbb{S}^2_\nu$ со сферой $\mathbb{S}^2$, пробегаемой вектором $\vec{\eta}$ из (2.15). В силу условий теоремы 1 при $s = s_{1i}$

$$k_1(s_{1i}) = 0, \quad \dots, \quad k^{(p_i-1)}(s_{1i}) = 0, \quad k^{(p_i)}(s_{1i}) \neq 0, \quad p_i \leq p. \quad (2.19)$$

При этом $N(s_{1i}) \neq 0$, так как $g^{(1)}(s_{1i}) \neq 0$ и $f(s_{1i}) \neq 0$. Действительно, если $f(s_{0i}) = 0$, то точка $\vec{r}(s_{0i})$ лежит на пересечении оси z с $\partial \mathcal{D}$ и это омбилическая точка, где $k_1(s_{0i}) = k_2(s_{0i}) \neq 0$. С другой стороны, $g^{(1)}(s_{1i}) \neq 0$, так как $\vec{r}(s_{1i})$ – точка перегиба меридиана Γ , а в таких точках касательная к Γ не ортогональна оси вращения. Отсюда и из (2.19) следует, что при $\theta = \theta_i$ фаза ϕ из (2.16) имеет особенности типа A_{p_i+1} . Чтобы в этом убедиться, достаточно проделать те же вычисления, что проделаны в работе [18] при оценке преобразования Фурье $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda \vec{\eta})$ в двумерном случае.

Рассмотрим теперь вырожденные критические точки, в которых $N(\xi^c) = 0$. Эти точки лежат на параллелях $s = s_{2i}$, где $\vec{r}(s_{2i})$ – экстремумы меридиана Γ . Случай $f(s_{2i}) \neq 0$, т.е. $k_2(s_{2i}) = 0$ отвечает бесконечно кратному вырождению. Действительно, вдоль параллели $s = s_{2i}$ нормаль постоянна и параллельна оси z . Это ясно из геометрической картины и прямо следует из формул Родрига (2.13). Таким образом, критические точки лежат на параллелях $s = s_{2i}$ при $\theta = 0, \pi$. Непосредственно из определений фазы ϕ (см. (2.16)) и вектора $\vec{\eta}$ (см. (2.15)) следует, что

$$\phi(s, \alpha) = f(s) \sin \theta \cos(\alpha - \varphi) + g(s) \cos \theta, \quad (2.20)$$

и при $\theta = 0, \pi$ фаза ϕ не зависит от α . Вырождение в точках s_{0i} , где $f(s_{0i}) = 0$, является случайным и связано с особенностью системы координат (s, α) . Чтобы в

этом убедиться, достаточно рассмотреть случай $\partial\mathcal{D} = \mathbb{S}^2$. Указанная особенность разрешается введением в окрестности точки $\vec{r}(s_{0i})$ координат

$$x = f(s) \cos \alpha, \quad y = g(s) \sin \alpha. \quad (2.21)$$

Критическая точка $x = y = 0$ фазы $\phi(x, y)$ невырожденна (см. ниже). Таким образом, критические точки фазы ϕ (см. (2.16)) полностью описаны и каустика $\mathcal{K}$ фазы ϕ состоит из параллелей $\theta = \theta_i$ и точек $\theta = 0, \pi$.

Переходим к анализу критических точек фазы $\phi_\varepsilon(s, \alpha) = \langle \vec{r}_\varepsilon, \vec{\eta} \rangle$. Основное замечание состоит в том, что у фаз ϕ_ε и ϕ совпадают критические точки ($\xi_\varepsilon^c = \xi^c$), их типы и каустики ($\mathcal{K} = \mathcal{K}_\varepsilon$). Покажем это. Так как нормаль к поверхности вращения лежит в плоскости меридиана и перпендикулярна к нему, то $\vec{\nu} = \vec{\nu}_\varepsilon$ и $\xi^c = \xi_\varepsilon^c$. Если $k_1^\varepsilon(s)$ – первая из главных кривизн поверхности $\partial\mathcal{D}(\varepsilon)$ с меридианом $\Gamma(\varepsilon)$, то $k_1^\varepsilon(s) = k_{\Gamma(\varepsilon)}(s)$, и для вырождений типа $L_\varepsilon(\xi_\varepsilon^c) = 0$ нужное утверждение следует из формул Серре–Френе. В случае вырождений типа $N_\varepsilon(\xi_\varepsilon^c) = 0$ нужное утверждение следует из того, что $g^{(1)}(s_{2i}) = 0 \Rightarrow g_\varepsilon(s_{2i}) = 0$, так как $f^{(2)}(s_{2i}) = 0$. Наконец, $f(s_{0i}) = 0 \Rightarrow f_\varepsilon(s_{0i}) = 0$, так как $g^{(1)}(s_{0i}) = 0$ в силу гладкости $\partial\mathcal{D}$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия:

а) $\partial\mathcal{D}$ – гладкая поверхность вращения, удовлетворяющая условиям теоремы 1;

б) для определенных выше величин $\lambda, \varepsilon, \theta_i$ выполняются оценки $\lambda \geq C(\Gamma)$, $\varepsilon \leq C(\Gamma)$, $\theta_i \geq C(\Gamma)$, $\pi - \theta_i \geq C(\Gamma)$, $|\theta_i - \theta_j| \geq C(\Gamma)$.

Тогда справедливы утверждения:

1) если $|\theta - \theta_i| \geq C_i(\Gamma) \lambda^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}} \quad (\forall \theta_i)$ и $\theta \geq C_0(\Gamma) \lambda^{-1}$, $\pi - \theta \geq C_0(\Gamma) \lambda^{-1}$, то

$$|\widehat{\chi}_{\mathcal{D}(\varepsilon)}(\lambda \vec{\eta})| \leq \frac{C(\Gamma)}{\lambda^2 |\sin \theta|^{\frac{1}{2}}} \sum_i |\theta - \theta_i|^{-\frac{p_i}{2(p_i+1)}} \equiv f_1(\lambda, \theta); \quad (2.22)$$

2) если $|\theta - \theta_i| \leq C_i(\Gamma) \lambda^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}}$ для некоторого θ_i , то

$$|\widehat{\chi}_{\mathcal{D}(\varepsilon)}(\lambda \vec{\eta})| \leq C(\Gamma) \lambda^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{p_i+2}} \equiv f_2(\lambda, \theta); \quad (2.23)$$

3) если $\theta \leq C_0(\Gamma) \lambda^{-1}$ или $\pi - \theta \leq C_0(\Gamma) \lambda^{-1}$, то

$$|\widehat{\chi}_{\mathcal{D}(\varepsilon)}(\lambda \vec{\eta})| \leq C(\Gamma) \lambda^{-\frac{3}{2}} \equiv f_3(\lambda, \theta), \quad (2.24)$$

и все эти оценки асимптотически точны при $\lambda \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будет проведено для случая $\varepsilon = 0$, т.е. для области $\mathcal{D}$. Из хода доказательства и предыдущих замечаний будет следовать, что результат верен и для областей $\mathcal{D}(\pm\varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < C(\Gamma)$.

Запишем величину $\widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda\vec{\eta})$ (см. (2.7)) в виде $\widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda\vec{\eta}) = (i\lambda)^{-1}J_2[u]$, где двумерный о.и. $J_2[u]$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} J_2[u] &= \int e^{i\lambda\phi(s,\alpha)} u(s,\alpha) ds d\alpha, \\ \phi(s,\alpha) &= \langle \vec{r}(s,\alpha), \vec{\eta} \rangle, \quad u(s,\alpha) = |f(s)| \langle \vec{v}(s,\alpha), \vec{\eta} \rangle. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пусть $f(s_{0i}) = 0$. Введем разбиение единицы по переменной s :

$$1 = \tilde{\rho}(s) + \sum_{0i} \rho_{0i}(s).$$

В этой формуле $\rho_{0i} \in C_0^\infty$ и предполагается, что

$$\rho_{0i}(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } |s - s_{0i}| \leq \delta_0, \\ 0, & \text{если } |s - s_{0i}| \geq 2\delta_0, \end{cases} \quad |\rho_{0i}^{(k)}(s)| \leq C_k \delta_0^{-k}.$$

Носители функций ρ_{0i} не пересекаются при $\delta_0 \leq C(\Gamma)$, что предполагается и ниже. Если точек s_{0i} нет, то по определению считается, что $\rho_{0i}(s) \equiv 0$, $\tilde{\rho}(s) = 1$.

Запишем интеграл $J_2[u]$ в виде

$$J_2[u] = J_2[\tilde{\rho}u] + \sum_{0i} J_2[\rho_{0i}u]. \quad (2.26)$$

Начнем с оценки о.и. $J_2[\tilde{\rho}u]$. Предположим, что $\theta \neq 0, \pi$. Используя представление (2.25), имеем

$$J_2[\tilde{\rho}u] = \int \tilde{\rho}(s) e^{i\lambda g(s) \cos \theta} J_1[u] ds. \quad (2.27)$$

В этой формуле

$$\begin{aligned} J_1[u] &= \int e^{i\Omega\phi_1(\alpha)} u d\alpha, \\ \phi_1(\alpha) &= \cos(\alpha - \varphi), \quad \Omega = \lambda f(s) \sin \theta, \end{aligned}$$

и амплитуда u определена в (2.25). Критические точки α_k ($k = 1, 2$), $\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = \varphi + \pi$, фазы ϕ_1 невырождены, и, используя следствие 2.1 из [18], получим, что $\forall Q \geq 0$ при условии

$$|f(s) \sin \theta| \geq C_0(\Gamma) \lambda^{-1} \quad (2.28)$$

имеет место равенство

$$J_1[u] = \sum_{k=1}^2 J_{1k}^Q + \Delta J_{1Q}, \quad (2.29)$$

в котором

$$J_{1k}^Q = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} (-1)^{k+1} + i\Omega \phi_1(\alpha_k) \right\} \sum_{q=0}^Q \frac{D_{1q}^k(s)}{\Omega^q},$$

$$|\Delta J_{1Q}| \leq C_Q \Omega^{-Q-\frac{3}{2}}$$

и величины $D_{1q}^k(s)$ задаются равенствами

$$D_{1q}^k(s) = \sum_{\mu=0}^{2q} \frac{i^{2\mu+q}}{\mu! (\mu+q)! (2\phi_1^{(2)}(\alpha_k))^{\mu+q}} \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[\left(\phi_1(\alpha) - \phi_1(\alpha_k) - \frac{1}{2} \phi_1^{(2)}(\alpha_k) (\alpha - \alpha_k)^2 \right)^\mu u \right] \right) (\alpha_k).$$

В дальнейшем важно только то, что в рассматриваемом случае $|D_{1q}^k(s)| \leq C_q$. Подставляя разложение (2.29) в (2.27), получим

$$J_2[\tilde{\rho}u] = \sum_{k=1}^2 \sum_{q=0}^Q \frac{\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{i\pi}{4} (-1)^{k+1}\right)}{(\lambda |\sin \theta|)^{q+\frac{1}{2}}} I_{1q}^k + \Delta J_{2Q}.$$

В этой формуле I_{1q}^k — одномерный о.и. вида

$$I_{1q}^k = \int e^{i\lambda S_k(s)} u_{1q}^k(s) \tilde{\rho}(s) ds, \quad (2.30)$$

в котором

$$S_k(s) = f(s) \sin \theta (-1)^{k+1} + g(s) \cos \theta, \quad (2.31)$$

$$u_{1q}^k(s) = D_{1q}^k(s) |f(s)|^{-q-\frac{1}{2}} \tilde{\rho}(s)$$

и $\forall Q \geq 0$ справедлива оценка

$$|\Delta J_{2Q}| \leq C_Q(\Gamma) (\lambda |\sin \theta|)^{-Q-\frac{3}{2}}.$$

Выберем $\delta_0 = C(\Gamma)$ таким образом, чтобы $|f(s)| \geq C(\Gamma)$ при $s \in \text{supp } \tilde{\rho}$. Чтобы оценить одномерный о.и. I_{1q}^k (см. (2.30)), рассмотрим величину $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda \vec{\eta})$ (см. (2.7)) при $d = 2$ и $\vec{\eta} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Тогда одномерный о.и. по кривой $\partial \mathcal{D}$, входящий в выражение $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda \vec{\eta})$, по существу совпадает с интегралом I_{1q}^k и можно воспользоваться результатами работ [18], [19] по оценке преобразования Фурье $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda \vec{\eta})$ в двумерном случае. Используя эти результаты, получим, что при подходящем выборе констант $C_0(\Gamma)$, $C_i(\Gamma)$ в условиях (2.28) и $|\theta - \theta_i| \geq C_i(\Gamma) \lambda^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}}$ справедлива оценка

$$|J_2[\tilde{\rho}u]| \leq \frac{C(\Gamma)}{\lambda |\sin \theta|^{\frac{1}{2}}} \sum_i |\theta - \theta_i|^{-\frac{p_i}{2(p_i+1)}}, \quad (2.32)$$

а если выполняются условия $|\sin \theta| \geq C_0(\Gamma)\lambda^{-1}$ и $|\theta - \theta_i| \leq C_i(\Gamma)\lambda^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}}$, то

$$|J_2[\tilde{\rho}u]| \leq C(\Gamma)\lambda^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p_i+2}}. \quad (2.33)$$

Чтобы оценить интегралы $J_2[\rho_{0i}u]$, входящие в разложение (2.26), достаточно рассмотреть один из них, отвечающий $s_{0i} \equiv s_0$. Этот интеграл обозначим через $J_2[\rho_0u]$ и для его оценки надо перейти к координатам (x, y) (см. (2.21)) на поверхности $\partial\mathcal{D}$. Всегда можно считать, что $\vec{r}(s_0) = (0, 0, a)$, $a > 0$. Внутри носителя функции $\rho_0 \equiv \rho_{0i}$ справедливо $x^2 + y^2 \leq C\delta_0^2$ и локально поверхность $\partial\mathcal{D}$ задается уравнением $\vec{r} = (x, y, \Psi(x^2 + y^2))$, где Ψ – гладкая функция. Коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $\partial\mathcal{D}$ в точке $\vec{r}(s_0)$ имеют вид $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = N = 2\Psi^{(1)}(0)$, $M = 0$. Таким образом, $2\Psi^{(1)}(0) = k_1(s_0) = k_2(s_0)$ и, следовательно, $|\Psi^{(1)}(0)| \geq C(\Gamma)$. Учитывая равенство (2.18) и то, что $\delta_0 \leq C(\Gamma)$, заключаем, что все критические точки фазы $\phi(x, y)$, попадающие в носитель функции ρ_0 , невырождены и $B_0 \geq C(\Gamma)$, где B_0 – минимальное собственное значение матрицы ϕ_c'' (см. (2.18)). Применяя следствие 2.1 из работы [18], мы получим оценку

$$\sum_{0i} |J_2[\rho_{0i}u]| \leq C(\Gamma)\lambda^{-1}, \quad (2.34)$$

в силу которой оценки (2.32), (2.33) верны и для интеграла $J_2[u]$. Осталось рассмотреть случай “малых” θ , $\pi - \theta$. Для этого снова запишем двумерный интеграл $J_2[u]$ (см. (2.25)) в виде повторного, но теперь сначала проинтегрируем по переменной s :

$$J_2[u] = \int J_1[u] d\alpha, \quad J_1[u] = \int e^{i\lambda\phi} u ds;$$

в интеграле $J_1[u]$ фаза $\phi(s) = \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle$ считается зависящей от трех параметров: α , θ , φ . Дифференцируя равенство (2.20), получим

$$\phi^{(1)}(s) = f^{(1)}(s) \sin \theta \cos(\alpha - \varphi) + g^{(1)}(s) \cos \theta.$$

Критические точки фазы $\phi(s)$ (решения уравнения $\phi^{(1)}(s) = 0$) обозначим $s_{1c} \equiv s_{1c}(\alpha, \theta, \varphi)$. При $\theta = 0, \pi$ имеем $s_{1c} = s_{2i}$, где $\vec{r}(s_{2i})$ – экстремальные точки, в которых по условиям леммы 1 $g^{(1)}(s_{2i}) = 0$ и $|g^{(2)}(s_{2i})| \geq C(\Gamma)$. Таким образом, при $\theta = 0, \pi$ справедлива оценка $|\phi^{(2)}(s_{1c})| \geq C(\Gamma)$. Отсюда следует, что s_{1c} – гладкая функция параметров α , θ , φ , и тогда $|\phi^{(2)}(s_{1c})| \geq C(\Gamma)$ равномерно по α , θ , φ при $\theta \leq C(\Gamma)$ или $\pi - \theta \leq C(\Gamma)$. Используя лемму 4.2 из [18], получим, что $|J_1[u]| \leq C(\Gamma)\lambda^{-1}$ при условии, что $\theta \leq C(\Gamma)$ или $|\pi - \theta| \leq C(\Gamma)$. Следовательно, при этих условиях

$$|J_2[u]| \leq C(\Gamma)\lambda^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.35)$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ оценки (2.22)–(2.24) доказаны. Они будут верны и при $0 < \varepsilon < C(\Gamma)$. Это следует из доказанного выше совпадения типов критических

точек у фаз ϕ и ϕ_ε и того обстоятельства, что все предыдущие рассуждения проходят для $0 < \varepsilon < C(\Gamma)$ при замене ϕ на ϕ_ε , так как $L_\varepsilon = L + O(\varepsilon)$ и $M_\varepsilon = M + O(\varepsilon)$. Асимптотическая точность полученных оценок при $\lambda \rightarrow \infty$ следует из приведенного выше анализа критических точек и того факта, что оценки (2.22)–(2.24) согласованы, т.е. при $|\theta - \theta_i| = C_i(\Gamma)\lambda^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}}$ оценка (2.22) совпадает с оценкой (2.23), а при $\theta = C_0(\Gamma)\lambda^{-1}$ – с оценкой (2.24).

§ 3. Доказательство теоремы 1

Напомним, что $\Delta_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon))$ обозначает любую из величин $\Delta_{\pm\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\pm\varepsilon))$. Из двусторонней оценки (2.5) следует, что при $d = 3$

$$|R(t, \mathcal{D})| \leq |\Delta_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon))| + C(\Gamma)\varepsilon t^3. \quad (3.1)$$

Используя вытекающую из леммы 1 грубую равномерную оценку

$$|\widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda\vec{\eta})| \leq C(\Gamma)\lambda^{-\frac{3}{2}}, \quad \lambda \geq C(\Gamma), \quad (3.2)$$

вместе с определением величин $\Delta_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon))$ (см. (2.6)) и оценкой (2.3) получим, что $\forall m \geq 2$ при $t \geq C(\Gamma)$

$$\begin{aligned} |\Delta_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon))| &\leq C(\Gamma)t^{\frac{3}{2}} + \Delta'_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon)), \\ \Delta'_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon)) &= C_m t^3 \sum_{|\vec{n}| \geq C} \frac{|\widehat{\chi}_{\mathcal{D}(\varepsilon)}(2\pi\vec{n}t)|}{1 + (\varepsilon t|\vec{n}|)^m}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Так как поведение величины $|\widehat{\chi}_{\mathcal{D}(\varepsilon)}(\lambda\vec{\eta})|$ при $\lambda \rightarrow \infty$ существенно зависит от угла θ , то для оценки величины $\Delta'_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon))$ нельзя воспользоваться заменой в ней суммы интегралом. Покажем, что это можно сделать ценой некоторого ухудшения исходных оценок величины $\widehat{\chi}_{\mathcal{D}(\varepsilon)}(\lambda\vec{\eta})$. Для этого рассмотрим общую задачу оценки суммы $S = \sum_{n \in W} |f(n)|$, $W \in \mathbb{R}^d$. Обозначим через $\square_n$ куб с центром в точке $n \in \mathbb{Z}^d$ и стороной, равной единице. Введем множества $W_\square = \bigcup_{n \in W} \square_n$ и $\widetilde{W} = \{\omega \in \mathbb{R}^d \mid d(\omega, W) \leq 1\}$, где $d(\omega, W)$ – евклидово расстояние от точки ω до множества W . Тогда $W_\square \subset \widetilde{W}$, и если $|f(n)| \leq \tilde{f}(\omega)$ ($\forall \omega \in \square_n, n \in W$), то

$$S = \sum_{n \in W} |f(n)| = \sum_{n \in W} \int_{\square_n} |f(n)| d\omega \leq \int_{\widetilde{W}} \tilde{f}(\omega) d\omega.$$

Это неравенство вместе с оценками леммы 1 позволяет заключить, что

$$\Delta'_{\varepsilon,t}(\mathcal{D}(\varepsilon)) \leq C_m t^3 \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} \frac{\lambda^2 d\lambda d\varphi d\theta}{1 + (\varepsilon t\lambda)^m} f_i(\lambda, \theta), \quad (3.4)$$

где функции $f_i(\lambda, \theta)$ определены в (2.22)–(2.24) и области A_i задаются условиями

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ \vec{\omega} = \lambda \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 \mid |\theta - \theta_i| \geq C_i(\Gamma) \left(\lambda^{-1} + (\lambda t)^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}} \right); \right. \\ &\quad \left. \theta \geq C(\Gamma) \lambda^{-1}, \quad \pi - \theta \geq C(\Gamma) \lambda^{-1} \right\}, \\ A_2 &= \left\{ \vec{\omega} = \lambda \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 \mid |\theta - \theta_i| \leq C_i(\Gamma) \left(\lambda^{-1} + (\lambda t)^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}} \right) \right\}, \\ A_3 &= \left\{ \vec{\omega} = \lambda \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \leq C(\Gamma) \lambda^{-1} \text{ или } \pi - \theta \leq C(\Gamma) \lambda^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, ухудшение оценок, дающее возможность заменить сумму $\Delta'_{\varepsilon, t}(\mathcal{D}(\varepsilon))$ интегралом, сводится к расширению на величину $C(\Gamma) \lambda^{-1}$ областей, где вместо (2.22) используются оценки (2.23), (2.24). Достаточность такого расширения следует из того, что если единичный куб находится на расстоянии λ от начала координат, то он виден из этой точки под углом $\sim \lambda^{-1}$. Интегралы в правой части (3.4) легко оцениваются, и при этом можно выбрать любое $m \geq 2$. В результате при $p_i \leq p$ получаем, что (см. (3.3))

$$|\Delta_{\varepsilon, t}(\mathcal{D}(\varepsilon))| \leq C(\Gamma) \left(t^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^{-1} + t \varepsilon^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p+2}} \right). \quad (3.5)$$

Выбирая $\varepsilon = t^{-\frac{3}{2}}$, из (3.1), (3.5) выводим нужные оценки:

$$\begin{aligned} |R(t, \mathcal{D})| &\leq C(\Gamma) t^{\frac{3}{2}}, & p = 0, 1, 2, 3, 4, \\ |R(t, \mathcal{D})| &\leq C(\Gamma) t^{\frac{7}{4} - \frac{3}{2(p+2)}}, & p \geq 4, \end{aligned} \quad (3.6)$$

из которых сразу следует утверждение теоремы 1.

§ 4. Доказательство теоремы 2

4.1. Выделение главного члена. Отсюда и до конца работы рассматривается случай $\mathcal{D} = T \equiv T(a, b)$, т.е. область, границей которой служит тор $\mathbb{T}^2$ из (1.8). Для тора справедливо $T(\pm \varepsilon) = T(a \pm \varepsilon, b)$, и для оценки величины $R(t, \mathcal{D})$ достаточно рассмотреть сумму

$$\Delta_{\varepsilon, t}(T) = t^3 \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \hat{\chi}_T(2\pi \vec{n} t) \hat{\rho}(2\pi |\vec{n}| \varepsilon t). \quad (4.1)$$

Напомним, что суммирование здесь ведется по области $|\vec{n}| \geq 1$. Выделим в правой части (4.1) члены с $n_1 = n_2 = 0$ и их сумму обозначим $\Delta_{\varepsilon, t}^0(T)$:

$$\Delta_{\varepsilon, t}^0(T) = t^3 \sum_{n_3 \neq 0} \hat{\chi}_T(2\pi n_3 t) \hat{\rho}(2\pi |n_3| \varepsilon t). \quad (4.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_{\varepsilon,t}(T) &= \Delta_{\varepsilon,t}^0(T) + \Delta_{\varepsilon,t}^1(T), \\ \Delta_{\varepsilon,t}^1(T) &= t^3 \sum''_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \hat{\chi}_T(2\pi \vec{n} t) \hat{\rho}(2\pi |\vec{n}| \varepsilon t),\end{aligned}\quad (4.3)$$

где два штриха у знака $\sum$ означают, что суммирование ведется по области, где $n_1^2 + n_2^2 \geq 1$. Рассмотрим величину $\Delta_{\varepsilon,t}^0(T)$. В нее входят значения $\hat{\chi}_T(\lambda \vec{\eta})$ при $\theta = 0, \pi$ ($\vec{\eta} = (0, 0, \pm 1)$). В случае $\theta = 0, \pi$ фаза ϕ из (2.20) зависит только от s ($\phi(s, \alpha) = \pm g(s)$) и

$$\hat{\chi}_T(\lambda \mid \theta = 0, \pi) = \mp \frac{2\pi}{i\lambda} \int f^{(1)} |f| e^{\pm i\lambda g} ds.$$

Для тора меридиан Γ – это окружность радиуса a и параметр α' из (1.8) прямо пропорционален параметру s ($\alpha' = s/a$). Пусть s_c – критические точки фазы g . Тогда $s_c = s_{2i}$ ($k_2(s_{2i}) = 0$) и $|g^{(2)}(s_c)| = |k_\Gamma(s_c)| \geq k_0$. Применяя следствие 2.1 из [18], получим

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_T(\lambda \mid \theta = 0, \pi) &= \mp \frac{2\pi}{i\lambda} \sum_{s_c} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|f(s_c)| f^{(1)}(s_c)}{|g^{(2)}(s_c)|^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \exp \left\{ \pm \left(\frac{i\pi}{4} \varkappa_c + i\lambda g(s_c) \right) \right\} + \Delta \hat{\chi}_T^0(\lambda \mid \theta = 0, \pi).\end{aligned}\quad (4.4)$$

В этой формуле $\varkappa_c = \text{sgn } g^{(2)}(s_c)$ и при условии $k_0 \geq C(\Gamma) \lambda^{-\frac{1-\sigma}{6}}$ ($\sigma > 0$), т.е., если $\lambda \geq C(\Gamma)$, имеет место оценка $|\Delta \hat{\chi}_T^0(\lambda \mid \theta = 0, \pi)| \leq C(\Gamma) \lambda^{-\frac{5}{2}}$. В случае стандартного тора $\mathbb{T}^2$ (см. (1.8)) критические точки s_c легко находятся ($s_c = \frac{a\pi}{2}$ или $s_c = \frac{a3\pi}{2}$, $|g^{(2)}(s_c)| = a^{-1}$) и равенство (4.4) принимает вид

$$\hat{\chi}_T(\lambda \mid \theta = 0, \pi) = \hat{\chi}_T^0(\lambda \mid \theta = 0, \pi) + \Delta \hat{\chi}_T^0(\lambda \mid \theta = 0, \pi)$$

и в этой формуле

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_T^0(\lambda \mid \theta = 0, \pi) &= \frac{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} b \sqrt{a} \sin \left(\lambda a - \frac{\pi}{4} \right), \\ |\Delta \hat{\chi}_T^0(\lambda \mid \theta = 0, \pi)| &\leq C(a, b) \lambda^{-\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Подставляя эти результаты в (4.2) и учитывая, что $T(\pm\varepsilon) = T(a \pm \varepsilon, b)$, получим

$$\begin{aligned}\Delta_{\varepsilon,t}^0(T(\pm\varepsilon)) &= -t^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{2} b \sqrt{a \pm \varepsilon} P(\pm\varepsilon) + O(t^{\frac{1}{2}}), \\ P(\pm\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k t (a \pm \varepsilon))}{k^{\frac{3}{2}}} \hat{\rho}(2\pi k t \varepsilon).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Если выполняется условие $Ct^{-3} \leq \varepsilon \leq ct^{-1}$, то из (4.5) следует равенство

$$\Delta_{\varepsilon,t}^0(T(\pm\varepsilon)) = t^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{2} b \sqrt{a} P(0) + O(t^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}).\quad (4.6)$$

Теперь достаточно заметить, что первый член в правой части (4.6) совпадает с соответствующим членом в (1.9), и таким образом мы выделили главный член в величине $\Delta_{\varepsilon,t}(T(\varepsilon))$ из (4.3).

4.2. Оценка остаточного члена. Для более точной, чем при доказательстве теоремы 1, оценки остаточного члена $\Delta_{\varepsilon,t}^1(T)$ из (4.3) необходимо найти главный член асимптотики величины $\widehat{\chi}_T(\lambda\vec{\eta})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\theta \neq 0, \pi$. Заметим, что в ряд $\Delta_{\varepsilon,t}^1(T)$ входят величины $\widehat{\chi}_T(2\pi\vec{n}t)$ при $n_1^2 + n_2^2 \geq 1$, и если $\vec{n} = |\vec{n}|\vec{\eta}(\vec{n})$, то $\theta(\vec{n}) \neq 0, \pi$. Запишем величину $\widehat{\chi}_T(\lambda\vec{\eta})$ в виде

$$\widehat{\chi}_T(\lambda\vec{\eta}) = \widehat{\chi}_T^0(\lambda\vec{\eta}) + \Delta\widehat{\chi}_T(\lambda\vec{\eta}), \quad (4.7)$$

где $\widehat{\chi}_T^0(\lambda\vec{\eta})$ – интересующий нас главный член асимптотики. При $\theta \neq 0, \pi$ критические точки фазы ϕ (см. (2.16)) невырождены, и, используя явный вид функций f, g (см. (1.8), (1.9)), можно явно указать критические точки $\xi^c = (s_c, \alpha_c)$ и с помощью метода стационарной фазы [11], [18] получить

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_T^0(\lambda\vec{\eta}) = & -\frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\sqrt{a}}{|\sin\theta|^{\frac{1}{2}}} \left[(b + a \sin\theta)^{\frac{1}{2}} \cos(\lambda(b \sin\theta + a)) \right. \\ & \left. + (b - a \sin\theta)^{\frac{1}{2}} \sin(\lambda(b \sin\theta - a)) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Осталось оценить величину $\Delta\widehat{\chi}_T(\lambda\vec{\eta})$ в (4.7). Для этого поступим так же, как при доказательстве леммы 1. Для тора имеем $|f(s)| \geq b - a > C(\Gamma)$ и в (2.26) можно положить $\rho_{0i} = 0$, $\tilde{\rho} = 1$. Критические точки s_{kc} ($k = 1, 2$) фазы S_k из (2.31) для $\mathcal{D} = T$ невырождены ($|S_k^{(2)}(s_{kc})| = a^{-1}$) и при условии (2.28), т.е. при

$$|\lambda \sin\theta| \geq C(a, b), \quad (4.9)$$

имеет место оценка

$$|\Delta\widehat{\chi}_T(\lambda\vec{\eta})| \leq C(a, b)\lambda^{-3}|\sin\theta|^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.10)$$

Выделим в остаточном члене $\Delta_{\varepsilon,t}^1(T)$ (см. (4.3)) сумму по области $|\vec{n}| \geq Q$

$$\Delta_{\varepsilon,t}^\alpha(T) = \sum_{|\vec{n}| > Q} \widehat{\chi}_T(2\pi\vec{n}t) \hat{\rho}(2\pi|\vec{n}|\varepsilon t)$$

и оценим ее, используя (2.3), (3.2) и предполагая, что

$$Q = t^\alpha, \quad Q\varepsilon t = t^{\sigma_1}, \quad \sigma_1 > 0, \quad \alpha < 1. \quad (4.11)$$

При этих условиях справедлива оценка

$$|\Delta_{\varepsilon,t}^\alpha(T)| \leq C(\Gamma)C_m\varepsilon^{-\frac{3}{2}}t^{-(m-\frac{3}{2})\sigma_1} \quad \forall m \geq 3.$$

По определению величины $\Delta_{\varepsilon,t}^1(T)$ (4.3) имеет место равенство

$$\Delta_{\varepsilon,t}^1(T) = \Delta_{\varepsilon,t}^Q(T) + \Delta_{\varepsilon,t}^\alpha(T), \quad (4.12)$$

в котором

$$\Delta_{\varepsilon,t}^Q(T) = t^3 \sum_{|\vec{n}| \leq Q} \hat{\chi}_T(2\pi\vec{n}t) \hat{\rho}(2\pi\vec{n}\varepsilon t).$$

Так как суммирование здесь ведется по области $n_1^2 + n_2^2 \geq 1$, то для $\vec{\omega} = 2\pi\vec{n}t = 2\pi t|\vec{n}|\vec{\eta}(\vec{n})$ при $\alpha < 1$ выполняется условие (4.9), и, следовательно, можно использовать равенство (4.8) и оценку (4.10). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon,t}^Q(T) &= \Delta_{\varepsilon,t}^{0,Q}(T) + \Delta_{\varepsilon,t}^3(T), \\ \Delta_{\varepsilon,t}^{0,Q}(T) &\equiv t^3 \sum_{|\vec{n}| \leq Q} \chi_T^0(2\pi\vec{n}t) \hat{\rho}(2\pi|\vec{n}|\varepsilon t), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где функция χ_T^0 определена в (4.8) и

$$|\Delta_{\varepsilon,t}^3(T)| \leq t^3 \sum_{|\vec{n}| \leq Q} C(\Gamma) (|\vec{n}|t)^{-3} |\sin \theta(\vec{n})|^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как

$$\sin \theta(\vec{n}) = (n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}} |\vec{n}|^{-1}, \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad (4.14)$$

то $|\Delta_{\varepsilon,t}^3(T)| \leq C(\Gamma) Q^{\frac{3}{2}} \leq C(\Gamma) t^{\frac{3}{2}\alpha}$. Таким образом, имеем

$$\Delta_{\varepsilon,t}^1(T) = t^3 \sum_{|\vec{n}| \leq Q}'' \chi_T^0(2\pi\vec{n}t) \hat{\rho}(2\pi|\vec{n}|\varepsilon t) + \Delta_{\varepsilon,t}^2(T) \quad (4.15)$$

вместе с оценкой

$$|\Delta_{\varepsilon,t}^2(T)| \leq |\Delta_{\varepsilon,t}^\alpha(T)| + |\Delta_{\varepsilon,t}^3(T)| \leq C(\Gamma) [t^{\frac{3}{2}\alpha} + C_m \varepsilon^{-\frac{3}{2}} t^{-\sigma_1(m-\frac{3}{2})}] \quad \forall m \geq 3. \quad (4.16)$$

Двустороннюю оценку (2.5) с учетом (4.3), (4.5) можно записать в виде равенства

$$R(t, T) = -t^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{2} b\sqrt{a} P(0) + R_1(t, T), \quad (4.17)$$

в котором $|R_1(t, T)| \leq C(a, b) (\varepsilon t^3 + t^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}) + |\Delta_{\varepsilon,t}^1(T)|$. Учитывая определение (4.13) величины $\Delta_{\varepsilon,t}^{0,Q}(T)$ и используя (4.16), получим

$$|R_1(t, T)| \leq C(a, b) [\varepsilon t^3 + t^{\frac{3}{2}\alpha} + C_m \varepsilon^{-\frac{3}{2}} t^{-\sigma_1(m-\frac{3}{2})} + t^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}] + |\Delta_{\varepsilon,t}^{0,Q}(T)|. \quad (4.18)$$

В сумму $\Delta_{\varepsilon,t}^{0,Q}(T)$ входит величина $\hat{\chi}_T^0(2\pi\vec{n}t)$, для которой ранее было получено явное выражение (4.8), из которого следует, что

$$|\Delta_{\varepsilon,t}^{0,Q}(T)| \leq C(|\Delta(+a, b)| + |\Delta(-a, b)|),$$

где тригонометрическая сумма $\Delta(a, b)$ определяется соотношением

$$\Delta(a, b) = t^3 \sum''_{n_i \geq 0, |\vec{n}| \leq Q} \frac{(b + a \sin \theta(\vec{n}))^{\frac{1}{2}}}{(t|\vec{n}|)^2 |\sin \theta(\vec{n})|^{\frac{1}{2}}} \exp(i2\pi |\vec{n}| t(b \sin \theta(\vec{n}) + a)) \hat{\rho}(2\pi |\vec{n}| \varepsilon t). \quad (4.19)$$

Положим $\varepsilon = t^{-\frac{3}{2}-\gamma}$ ($\varepsilon t = t^{-\frac{1}{2}-\gamma}$), $\gamma > 0$. Тогда из (4.11) получим, что $\alpha = \frac{1}{2} + \gamma + \sigma_1$ и при единственном условии $\gamma \leq \frac{3}{10} - \sigma_1$ ($\sigma_1 > 0$) не только выполняются все сделанные выше предположения о α и ε , но и оценку (4.18) можно переписать в виде

$$|R_1(t, T)| \leq C(a, b) [t^{\frac{3}{2}-\gamma} + C_m \varepsilon^{-\frac{3}{2}} t^{-\sigma_1(m-\frac{3}{2})} + |\Delta(+a, b)| + |\Delta(-a, b)|] \quad \forall m \geq 3. \quad (4.20)$$

Если при некотором фиксированном $\sigma_1 > 0$ для некоторого $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$|\Delta(a, b)| \leq C(a, b) t^{\frac{3}{2}-\gamma}, \quad (4.21)$$

то, выбирая m из условия $\sigma_1(m - \frac{3}{2}) \geq \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\gamma$, получим нужную оценку (см. (4.17))

$$|R_1(t, T)| \leq C(a, b) t^{\frac{3}{2}-\gamma}. \quad (4.22)$$

Переходим к оценке тригонометрической суммы $\Delta(a, b)$ из (4.19). Введем обозначения: $p = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, $k = n_3$,

$$\sum_{1 \leq p \leq Q}^2 a(p) \equiv \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ 1 \leq p \leq Q}} a(\sqrt{n_1^2 + n_2^2}),$$

в которых с учетом (4.14) эта сумма записывается в виде

$$\Delta(a, b) = t\sqrt{a} \sum_{1 \leq p \leq Q}^2 e^{i2\pi t b p} p^{-\frac{1}{2}} S. \quad (4.23)$$

Здесь S – одномерная тригонометрическая сумма

$$S = \sum_{k=0}^{\sqrt{Q^2-p^2}} G(k) e^{i2\pi F(k)}, \quad (4.24)$$

в которой

$$\begin{aligned} F(k) &= ta\sqrt{p^2 + k^2}, \\ G(k) &= \frac{(b\sqrt{p^2 + k^2} + ap)^{\frac{1}{2}}}{p^2 + k^2} \hat{\rho}(2\pi\sqrt{p^2 + k^2} \varepsilon t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Так как $|G(0)| \leq bp^{-\frac{3}{2}}$, то вклад в сумму $\Delta(a, b)$ членов с $k = 0$ оценивается величиной $O(t \ln t)$. Разбивая область суммирования $n_3 \equiv k \geq 1$, $p = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \geq 1$ на четыре области A_i ($i = 1, \dots, 4$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n_1, n_2, k \mid 1 \leq p \leq Q2^{-\frac{1}{2}}; 1 \leq k \leq p\}, \\ A_2 &= \{n_1, n_2, k \mid 1 \leq p \leq Q2^{-\frac{1}{2}}; p+1 \leq k \leq Q2^{-\frac{1}{2}}\}, \\ A_3 &= \{n_1, n_2, k \mid Q2^{-\frac{1}{2}} + 1 \leq p \leq Q; 1 \leq k \leq \sqrt{Q^2 - p^2}\}, \\ A_4 &= \{n_1, n_2, k \mid 1 \leq p \leq Q2^{-\frac{1}{2}}; Q2^{-\frac{1}{2}} + 1 \leq k \leq \sqrt{Q^2 - p^2}\}, \end{aligned}$$

получим оценку

$$|\Delta(a, b)| \leq Ct\sqrt{|a|} \sum_{i=1}^4 T_i + O(t \ln t), \quad (4.26)$$

в которой величины T_i определяются из соотношений

$$T_i = \sum_{p \in A_i} p^{-\frac{1}{2}} |S_i(p)|, \quad S_i(p) = \sum_{k \in A_i} G(k) e^{i2\pi F(k)}. \quad (4.27)$$

Фаза $F(k)$ в суммах $S_i(p)$ совпадает с фазой в тригонометрических суммах, возникающих в задаче о числе целых точек в круге, и для оценки сумм $S_i(p)$ можно использовать метод, описанный в книге [4]. Это связано с тем, что в каждой из областей A_i лежит только один из двух нулей $x_{\pm}(p) = \frac{1}{2}\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$ шестой производной $F^{(6)}(x)$. Суммы $S_1(p)$, $S_3(p)$ оцениваются непосредственно с помощью метода, описанного в [4]. Для оценки $S_4(p)$ надо применить тот же метод с заменой $x_-(p)$ на $x_+(p)$. Чтобы получить удовлетворительную оценку суммы T_2 , нужно предварительно сузить пределы суммирования в S_2 (см. ниже). Используя указанный метод и оценки

$$|G(x)| \leq \frac{C}{(x^2 + p^2)^{\frac{3}{4}}}, \quad G^{(1)}(x) \leq C \left(\frac{x}{(x^2 + p^2)^{\frac{7}{4}}} + \frac{\varepsilon tx}{(x^2 + p^2)^{\frac{5}{4}}} \right),$$

получим, что для $i = 1, 3, 4$

$$|S_i(p)| \leq C(a) F_i(p) (p^{-\frac{3}{4}} + \varepsilon tp^{-\frac{1}{2}})$$

и при этом

$$\begin{aligned} F_1(p) &= p^{1+\frac{1}{62}} (tp^{-6})^{\frac{1}{62}} + p^{1-\frac{1}{16}-\frac{1}{62}} (tp^{-6})^{-\frac{1}{62}}, \\ F_3(p) &= (\sqrt{Q^2 - p^2})^{1+\frac{1}{62}} (tp^{-6})^{\frac{1}{62}} + (\sqrt{Q^2 - p^2})^{1-\frac{1}{16}-\frac{1}{62}} (tp^{-6})^{-\frac{1}{62}}, \\ F_4(p) &= Q^{1-\frac{7}{62}} p^{\frac{1}{31}} t^{\frac{1}{62}} + Q^{1-\frac{1}{16}+\frac{7}{62}} p^{-\frac{1}{32}} t^{-\frac{1}{62}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму T_2 (см. (4.27)), которую запишем в виде

$$T_2 = T_{2,1} + T_{2,2},$$

$$T_{2,1} = \sum_{1 \leq p \leq Q_1}^2 p^{-\frac{1}{2}} |S_2(p)|, \quad T_{2,2} = \sum_{Q_1+1 \leq p \leq Q_2^{-\frac{1}{2}}} p^{-\frac{1}{2}} |S_2(p)|.$$

Так как

$$|S_2(p)| \leq \sum_{k=p+1}^{Q_2^{-\frac{1}{2}}} |G(k)| \leq Cp^{-\frac{1}{2}},$$

то, выбирая $Q_1 = t^{\frac{1}{2}-\gamma}$, получим, что

$$T_{2,1} \leq C \sum_{1 \leq p \leq Q_1}^2 p^{-1}.$$

При $Q_1 + 1 \leq p \leq Q_2^{-\frac{1}{2}}$ сумма $S_2(p)$ оценивается тем же методом, что и S_4 , и в этом интервале значений p

$$|S_2(p)| \leq C(a)F_2(p)(p^{-\frac{3}{2}} + \varepsilon tp^{-\frac{1}{2}}),$$

$$F_2(p) = Q^{1-\frac{7}{62}} p^{\frac{1}{31}} t^{\frac{1}{62}} (QQ_1^{-1})^{\frac{1}{2}} + Q^{1-\frac{1}{16}+\frac{7}{62}} p^{-\frac{1}{31}} t^{-\frac{1}{62}}.$$

Теперь все суммы T_i ($i = 1, 3, 4$), $T_{2,1}, T_{2,2}$, которые осталось оценить, имеют вид

$$H = \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ p_1 \leq p \leq p_2}} h(p) = \sum_{p_1^2 \leq q \leq p_2^2} h(\sqrt{q})r(q),$$

где $r(q)$ – число представлений целого числа q в виде суммы двух квадратов. Так как $r(q) \leq Cq^\sigma$ ($\forall \sigma > 0$), то

$$H \leq \sum_{p_1^2 \leq q \leq p_2^2} h(\sqrt{q})q^\sigma \quad \forall \sigma > 0.$$

Для наших целей достаточно рассмотреть случай, когда $h(\sqrt{q})q^\sigma$ – конечная сумма монотонных функций, и, следовательно,

$$H \leq h(p_1) + \int_{p_1}^{p_2+1} h(p)p^{1+\sigma} dp \quad \forall \sigma > 0.$$

Используя эту оценку и полученные выше оценки сумм $S_i(p)$, $T_{2,1}$, получим

$$|\Delta(a, b)| \leq C(a) \left[t^{\frac{3}{2}-\gamma-\sigma} + t^{\frac{3}{2}-\frac{7}{16 \cdot 62}+\gamma(1-\frac{1}{16}+\frac{5}{62})+c\sigma_1+\sigma} \right] \quad \forall \sigma > 0, \quad \forall \sigma_1 > 0.$$

Определим γ_0 из условия

$$-\gamma_0 = -\frac{7}{16 \cdot 62} + \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{16} + \frac{5}{62} \right),$$

откуда $\gamma_0 = \frac{1}{286}$. Таким образом, для $\gamma = \frac{1}{287}$ имеет место оценка (4.21) при некотором $\sigma_1 > 0$. Отсюда следует нужная оценка (4.22) с $\gamma = \frac{1}{287}$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976.
2. Van der Corput. Neue Zahlentheoretische Abschätzungen // Math. Ann. 1923. V. 89. P. 215–254.
3. Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964.
4. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
5. Krätzel E. Lattice Points. Berlin, 1988.
6. Randol B. A lattice point problem. I // Trans. AMS. 1966. V. 121. P. 257–268.
7. Randol B. A lattice point problem. II // Trans. AMS. 1966. V. 126. P. 101–113.
8. Colin de Verdier. Nombre de Points entiers dans une famille homothetique de domaines de $\mathbb{R}^N$ // Ann. Scient. Ecole Norm. 1977. Sup. Serie 4. V. 10. P. 559–575.
9. Huxley M. N. Exponential Sums and Lattice Points. II // Proc London Math. Soc. 1993. V. 66. Part 2. P. 279–301.
10. Hlawka E. Über Integrale auf convexen Körpern // Monatsh. Math. 1950. V. 54. P. 1–36.
11. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
12. Krätzel E., Nowak W. G. Lattice points in large convex bodies. II // Acta Arithm. 1992. V. 62. № 3. P. 283–295.
13. Варченко А. Н. О числе целых точек в семействах гомотетичных областей в $\mathbb{R}^n$ // Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 2. С. 1–6.
14. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.
15. Косыгин Д. В., Минасов А. А., Синай Я. Г. Статистические свойства спектров операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 3–130.
16. Грей А. Трубки. М.: Мир, 1993.
17. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958.
18. Попов Д. А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов // УМН. 1997. Т. 52. № 1. С. 77–148.
19. Попов Д. А. Сферическая сходимость ряда и интеграла Фурье индикатора двумерной области // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 354–373.

Поступило в редакцию
29.IX.1998