Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тюрин, Специальная лагранжева геометрия как малая деформация алгебраической геометрии (GQR и зеркальная симметрия), *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 2, 141–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:31:02

УДК 512.7

А. Н. Тюрин

Специальная лагранжева геометрия как малая деформация алгебраической геометрии (GQR и зеркальная симметрия)

Специальная геометрия калиброванных циклов, отвечающая за зеркальную симметрию 3-мерных многообразий Калаби–Яо, сама является лишь специализацией более общей геометрии, которую естественно назвать *малой деформацией алгебраической геометрии* или *геометрией фазы*. С другой стороны, обе эти геометрии параллельны классической калибровочной теории и ее комплексификации. Эта статья объясняет этот параллелизм, так что появление новых инвариантов в комплексифицированной калибровочной теории (см. [9] и [24]) сопровождается появлением их зеркальных отражений в теории специальных лагранжевых циклов, развитие которой до настоящего момента было не столь интенсивным и удачным, как классическая калибровочная теория. Преобразование алгебраической геометрии в специальную лагранжеву осуществляется при помощи геометрического преобразования Фурье (GFT), которое, грубо говоря, совпадает с известными конструкциями *спектральной кривой* (см. [3], [11] и другие работы на эту тему) плюс геометрия фазы.

Библиография: 29 наименований.

§ 1. spLag-циклы

Прежде всего напомним известную геометрическую конструкцию для пары $\mathcal{L} \subset S$, где S – гладкое симплектическое многообразие размерности $2n$, снабженное совместимой почти комплексной структурой, а $\mathcal{L}$ – гладкое ориентированное лагранжево подмногообразие (максимальной размерности $\dim \mathcal{L} = n = \frac{1}{2} \dim S$). Мы можем назвать такую структуру на S *почти келеровой структурой*, или *аК-многообразием* для краткости. Обозначим символом ω симплектическую форму, а I – почти комплексную структуру на S . Тогда касательное пространство TS_p в точке p есть n -мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, снабженное постоянной симплектической формой $\langle \cdot, \cdot \rangle = \omega_p$ и постоянной евклидовой метрикой g_p , объединенными в эрмитову тройку (ω_p, I_p, g_p) .

Определим *лагранжеву грассманиан* $\Lambda_{\uparrow} p = \Lambda_{\uparrow}(TS_p)$ как многообразие максимальных ориентированных лагранжевых подпространств TS_p . Объединение таких многообразий над всеми точками пространства S дает нам *лагранжеву грассманизацию* касательного расслоения TS

$$\pi: \Lambda_{\uparrow}(S) \rightarrow S, \quad \text{где} \quad \pi^{-1}(p) = \Lambda_{\uparrow} p. \quad (1.1)$$

Выбор почти комплексной структуры на S позволяет представить каждый слой лагранжевой грассманизации в стандартном виде

$$\Lambda_{\uparrow} p = U(n)/SO(n). \quad (1.2)$$

Это однородное пространство допускает каноническое отображение

$$\det: \Lambda_{\uparrow} p \rightarrow U(1) = S^1_p, \quad \text{отображающее } u \in U(n) \text{ в } \det u \in U(1) = S^1. \quad (1.3)$$

Напомним, что обратный образ фундаментального класса окружности S^1 на $\Lambda_{\uparrow} p$ является *универсальным классом Маслова*. Объединение этих отображений по всем точкам многообразия S дает отображение

$$\det: \Lambda_{\uparrow} S \rightarrow S^1(L_{-K}), \quad (1.4)$$

где $S^1(L_{-K})$ есть расслоение на единичные окружности комплексного линейного расслоения $\bigwedge^n TS = \det TS$ с первым классом Черна

$$c_1(\det TS) = -K_S, \quad (1.5)$$

где K_S – канонический класс почти комплексного многообразия S . (Напомним, что класс когомологий $[K_S]$ не зависит от выбора совместимой почти комплексной структуры.)

Для каждого ориентированного лагранжева цикла $\mathcal{L} \subset S$ мы имеем подъем Гаусса вложения $i: \mathcal{L} \rightarrow S$ до сечения

$$G(i): \mathcal{L} \rightarrow \Lambda_{\uparrow}(S)|_{\mathcal{L}}, \quad (1.6)$$

отображающего точку $p \in \mathcal{L}$ в ориентированное подпространство $T\mathcal{L}_p \subset TS_p$. Композиция этого отображения Гаусса с проекцией (1.4) определяет отображение

$$\det \circ G(i): \mathcal{L} \rightarrow S^1(L_{-K})|_{\mathcal{L}}. \quad (1.7)$$

Предположим, что класс когомологий симплектической формы пропорционален каноническому классу почти комплексного многообразия S , т.е.

$$\kappa \cdot [\omega] = K_S \quad \text{для некоторого } \kappa \in \mathbb{Q}; \quad (1.8)$$

тогда ограничение $\det TS|_{\mathcal{L}}$ топологически тривиально, потому что ограничение $[\omega]$ на лагранжев цикл $\mathcal{L}$ равно нулю. Целочисленность $[\omega]$ влечет существование комплексного линейного расслоения L с $c_1(L) = [\omega]$.

Более того, предположим, что это расслоение L допускает эрмитову связность a с формой кривизны $F_a = 2\pi i \cdot \omega$ (т.е. четверка

$$(S, \omega, L, a) \quad (1.9)$$

является *структурой предквантования классической системы*). Тогда и K_S имеет эрмитову связность a_K с формой кривизны

$$\frac{1}{2}\pi i F_{a_K} = \kappa \cdot \omega. \quad (1.10)$$

Напомним, что коэффициенты формы кривизны лежат в алгебре Ли калибровочной группы. В нашем $U(1)$ -случае эта алгебра совпадает с $2\pi i\mathbb{R}$, так что для получения вещественной (целочисленной) формы мы должны умножить кривизну на $\frac{1}{2}\pi i$ как в (1.10).

Обе связности ограничиваются до плоских связностей на $\mathcal{L}$, эквивалентных унитарным характеристам фундаментальной группы $\chi: \pi_1(\mathcal{L}) \rightarrow U(1)$ и χ^κ .

Топологически существует тривиализация $S^1(L_K)|_{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \times S^1$, но мы хотим построить каноническую проекцию

$$\text{pr}: S^1(L_K)|_{\mathcal{L}} \rightarrow S^1, \quad (1.11)$$

сохраняющую эрмитову форму. Тогда композиции отображений (1.4), (1.6) и (1.11) дадут отображение

$$m = \text{pr} \circ \det \circ G(i): \mathcal{L} \rightarrow S^1. \quad (1.12)$$

Но а priori мы не можем этого сделать, если характер χ^κ не тривиален. Чтобы обойти эту трудность, поднимем эту связность на универсальную накрывающую $U(\mathcal{L})$ и получим тривиальную связность с ковариантно постоянным сечением:

$$m_I: U(\mathcal{L}) \rightarrow U(1) \quad (1.13)$$

– подъемом (1.12). Оно удовлетворяет функциональному уравнению

$$m_I(g(u)) = \chi^\kappa(g) \cdot m(u), \quad (1.14)$$

где $g \in \pi_1(\mathcal{L})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение m_I (1.13) называется *отображением фазы лагранжева цикла* (относительно почти комплексной структуры I).

Таким образом, а priori отображение m_I является многозначной функцией на лагранжевом цикле $\mathcal{L}$, но логарифмический дифференциал этой функции $m_I^{-1}dm_I \in \Omega^1(\mathcal{L})$ – обычный 1-дифференциал на $\mathcal{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. 1) Цикл $\mathcal{L}$ называется *бор-зоммерфельдовским* для (S, ω, L, a) , если характер $\chi = 1$.

2) Цикл $\mathcal{L}$ называется *специальным лагранжевым* (spLag-циклом), если дифференциал $m_I^{-1}dm_I$ равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы называем $\mathcal{L}$ циклом, а не подмногообразием, потому что а priori он может быть особым. Единственное условие, которое здесь необходимо, – это существование отображения Гаусса. В частности, цикл с нормальными самопересечениями тоже годится. Поэтому везде ниже мы называем *циклом* любое подмногообразие с регулярным отображением Гаусса, например любую иммерсию.

Отступление о зеркальной симметрии I. Условия (1.8) и (1.10) выполнены автоматически, если S – многообразие Калаби–Яо (CY_n для краткости), т.е. $K_S = 0$. В этом случае $\kappa = 0$, и каноническое расслоение тривиально и снабжено тривиальной связностью, а наше понятие spLag -цикла совпадает с понятием специального лагранжева цикла в калибровочной геометрии (см. [16]). (К сожалению в русской терминологии прилагательное “калибровочная” утвердилось за *Gauge-теорией* и в термине *calibrated geometry* мы вынуждены применять то же прилагательное, что может привести к путанице.)

Напомним, что *комплексной ориентацией* многообразия Калаби–Яо X называется выбор тривиализации детерминанта кокасательного расслоения L_K , т.е. выбор голоморфной n -формы θ . Для ориентированного трехмерного многообразия Калаби–Яо (X, θ) spLag -цикл есть 3-мерное лагранжево подмногообразие $\mathcal{L}$ такое, что ограничение формы θ удовлетворяет эквивалентным условиям

$$\Im \theta|_{\mathcal{L}} = 0 \quad \text{или} \quad \text{Re } \theta|_{\mathcal{L}} = \text{Vol}_{\mathcal{L}}. \quad (1.15)$$

Теория локальных деформаций таких подмногообразий достаточно хорошо развита. Касательное пространство к многообразию модулей $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ таких деформаций в подмногообразии $\mathcal{L}$ совпадает с пространством первых когомологий $H^1(\mathcal{L}, \mathbb{R})$, представленным гармоническими 1-формами на $\mathcal{L}$. Это пространство не зависит от второй квадратичной формы и других атрибутов вложения. В частности, если $H^1(\mathcal{L}, \mathbb{R}) = 0$, то $\mathcal{L}$ является жестким как специальное лагранжево подмногообразие. Так что мы можем ожидать, что существует конечное число реализаций класса когомологий $[\mathcal{L}_i]$ такими подмногообразиями $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N\}$. Проблемы типа вычисления чисел, подобных N , весьма популярны в настоящее время только для многообразий Калаби–Яо. Наша более общая конструкция показывает, что подобные задачи вполне естественны и для многообразий Фано и для многообразий общего типа.

С другой стороны, на многообразии Калаби–Яо симплектическая форма келеровой метрики ω совершенно не зависит от тривиализации канонического класса. Класс когомологий $[\omega]$ целочисленный, линейное расслоение L с $c_1(L) = [\omega]$ является голоморфным и несет эрмитову связность a с формой кривизны $F_a = (2\pi i)\omega$. Так что мы можем добавить к условиям специальности лагранжева цикла $\mathcal{L}$ и условия Бора–Зоммерфельда. В этом случае вполне разумно ожидать, что в одном классе когомологий существует только конечное число spLag -бор-зоммерфельдовских циклов.

Отступление о процедуре геометрического квантования (PGQ). Напомним два варианта квантования классической механической системы (S, ω, L, a) (1.9) (см. [22] или [27]).

Первый – комплексное квантование: снабдим S комплексной структурой I так, что S_I – келерово многообразие с келеровой формой ω . Тогда для любого *уровня* $k \in \mathbb{Z}^+$ линейное расслоение L^k обладает структурой голоморфного линейного расслоения на S_I . Результатом комплексного квантования является пространство *волновых функций степени k*

$$\mathcal{H}_{L^k} = H^0(S_I, L^k) \quad (1.16)$$

– пространство *голоморфных* сечений расслоения L^k . Комплексная структура S_I вместе с голоморфной структурой на линейном расслоении L называется *комплексной поляризацией* предквантования (S, ω, L, a) (1.9).

Вещественная поляризация этой же системы есть лагранжево расслоение

$$\pi: S \rightarrow B \quad (1.17)$$

такое, что $\omega|_{\pi^{-1}(b)} = 0$ над каждой точкой $b \in B$, и для общей точки b слой $\pi^{-1}(b)$ – гладкое лагранжево подмногообразие.

Тогда ограничение L на каждый лагранжев слой дает плоскую связность $a|_{\text{fibre}}$. Согласно общей теории вещественного квантования мы в праве ожидать, что существует конечное число бор-зоммерфельдовских лагранжевых слоев и мы можем сконструировать новое семейство пространств волновых функций

$$\mathcal{H}_\pi^k = \bigoplus_{k\text{-B-S}} \mathbb{C} \cdot s_{\mathcal{L}_i}, \quad (1.18)$$

где $s_{\mathcal{L}_i}$ – ковариантно постоянное сечение ограничения пары (L^k, ka) на k -бор-зоммерфельдовский слой $\mathcal{L}_i$ вещественной поляризации π .

ЗАМЕЧАНИЕ. Важное наблюдение, математически доказанное во многих случаях, состоит в том, что проективизации пространств (1.16) не зависят от выбора комплексной структуры на S . Эта проективизация определена чисто симплектическими данными предквантования. Этот же факт справедлив и для проективизаций пространств (1.18). Более того, сами эти пространства не зависят от вещественной поляризации π (1.17) (если мы расширим наши данные предквантования $(S, \omega, L, a, \mathcal{F})$ выбором “полуплотности” $\mathcal{F}$; см. [14]).

Задача сравнения рангов $\text{rk } \mathcal{H}_{L^k}$ и $\text{rk } \mathcal{H}_{[\mathcal{L}]}^k$ называется *численной проблемой квантования*.

В частности, любое многообразие Калаби–Яо X с любой келеровой метрикой можно рассматривать как фазовое пространство классической механической системы (X, ω) , где ω – келерова форма метрики, с комплексной поляризацией (L, a) , такой, что $F_a = (2\pi i)\omega$, в качестве данных предквантования. Тогда процедура комплексного квантования приводит нас к пространству волновых функций (1.16).

С другой стороны, легко видеть, что гладкий spLag -бор-зоммерфельдовский тип не имеет деформаций, т.е. является жестким в своем классе когомологий $[\mathcal{L}]$. Тогда мы можем определить новое пространство волновых функций любого уровня k

$$\mathcal{H}_{[\mathcal{L}]}^k = \bigoplus_{\text{spLag-B-S}} \mathbb{C} \cdot s_{\mathcal{L}_i}, \quad (1.19)$$

где $\mathcal{L}_i$ – spLag -бор-зоммерфельдовский цикл системы $(X, k\omega, L^k, ka)$.

Вернемся к общему отображению фазы. Дифференциал этого отображения допускает стандартное описание: пусть $\nabla_{\text{LC}}: \Gamma(TS) \rightarrow \Gamma(TS \otimes T^*S)$ – связность Леви-Чивита, ограниченная на касательное расслоение к лагранжеву циклу $\mathcal{L}$. Пусть $N_{\mathcal{L} \subset S}$ – нормальное расслоение цикла $\mathcal{L}$ в S . Тогда связность Леви-Чивита определяет связность

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{LC}}: \Gamma(T\mathcal{L}) &\rightarrow \Gamma(T\mathcal{L} \otimes T^*\mathcal{L}), \\ \nabla_{\text{LC}}: \Gamma(N_{\mathcal{L} \subset S}) &\rightarrow \Gamma(N_{\mathcal{L} \subset S} \otimes T^*\mathcal{L}) \end{aligned}$$

и тензор

$$\Pi: T\mathcal{L} \rightarrow \text{Hom}(T\mathcal{L}, N_{\mathcal{L} \subset S})$$

(называемый *второй квадратичной формой*), т.е.

$$\Pi \in \text{End } T\mathcal{L} \otimes N_{\mathcal{L} \subset S}. \quad (1.20)$$

След компоненты $\text{End } T\mathcal{L} = \mathbb{C} \oplus \text{ad } T\mathcal{L}$ определяет сечение

$$H \in \Gamma(N_{\mathcal{L} \subset S}), \quad (1.21)$$

которое называется его *средней кривизной*.

Для векторного поля V на $\mathcal{L}$ поточечное значение дифференциала dm_I на V задается скалярным произведением:

$$dm_I(V_p) = (H_p, I(V_p)), \quad (1.22)$$

где I – оператор (почти) комплексной структуры. Отсюда немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Лагранжесв цикл $\mathcal{L}$ является spLag-циклом в том и только том случае, если в каждой точке $p \in \mathcal{L}$ вектор средней кривизны H_p равен нулю.*

Мы видим, что spLag-цикл во всех смыслах *минимален*.

Вернемся к условиям (1.8), (1.9) в общем случае (не только CY). Для каждого лагранжева подмногообразия $\mathcal{L}$ ограничение определяет тривиальное линейное расслоение $(L, a)|_{\mathcal{L}}$ с плоской связностью. Кроме того, имеется дифференциальная 1-форма $m_I^{-1} \cdot dm_I$.

ЛЕММА 1.1. 1) *Эта форма замкнута.*

2) *Ее класс когомологий – универсальный класс Маслова цикла $\mathcal{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, эта форма – прообраз постоянной формы на $S^1 = \text{U}(1)$, которая замкнута и представляет образующую группы $H^1(S^1, \mathbb{Z})$.

Мы можем откорректировать плоскую связность $a|_{\mathcal{L}}$ на эту форму:

$$a_c = a|_{\mathcal{L}} - \frac{1}{\kappa} \cdot m_I^{-1} dm_I. \quad (1.23)$$

Эта плоская связность эквивалентна заданию характера фундаментальной группы

$$\chi_c: \pi_1(\mathcal{L}) \rightarrow \text{U}(1) \quad (1.24)$$

и позволяет откорректировать понятие бор-зоммерфельдовской орбиты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Лагранжев цикл $\mathcal{L}$ называется *откорректированным бор-зоммерфельдовским циклом* (сВ-S-цикл), если $\chi_c = 1$.

Снова вполне естественно ожидать, что для любой вещественной поляризации π (1.17) существует только конечное число сВ-S-слоев, и мы получаем откорректированную версию пространств (1.18):

$$\mathcal{H}_{[\mathcal{L}]}^k = \bigoplus_{\text{spLag-}k\text{-сВ-S}} \mathbb{C} \cdot s\mathcal{L}_i, \quad (1.25)$$

где $s\mathcal{L}_i$ – ковариантно постоянное сечение ограничения (L^k, ka) на k -сВ-S-слой $\mathcal{L}_i$, а сумма берется по всем k -сВ-S-слоям расслоения π .

Отступление о зеркальной симметрии II. Если на СУ-многообразии X лагранжев цикл $\mathcal{L}$ является n -тором и spLag-циклом, то глобальное пространство его деформаций $\mathcal{M}^{[\mathcal{L}]}$ как spLag-цикла имеет размерность n (см. “Отступление о зеркальной симметрии I”). Можно предположить, следуя [23], что существует компактификация $\overline{\mathcal{M}}^{[\mathcal{L}]}$ такая, что универсальное семейство определяет расслоение

$$\pi: X \rightarrow \overline{\mathcal{M}}^{[\mathcal{L}]} \quad (1.26)$$

с T^n в качестве общего слоя.

Тогда поляризация L многообразия X задает данные предквантизации (X, ω, L, a) и конечное множество

$$\{\pi^{-1}(m_1), \dots, \pi^{-1}(m_N)\} \quad (1.27)$$

spLag-B-S-циклов, каждый из которых является spLag-сВ-S-циклом.

Теперь, если нам удастся построить двойственное расслоение

$$\pi': X' = \text{Pic}\left(X/\overline{\mathcal{M}}^{[\mathcal{L}]}\right) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}^{[\mathcal{L}]} \quad (1.28)$$

с $(\pi')^{-1}(m) = \text{Pic}(\pi^{-1}(m))$ – пространством плоских эрмитовых связностей на тривиальном линейном расслоении, то мы получим конечное множество (1.27) как пересечение двух лагранжевых циклов в S' . Но эти циклы допускают дополнительную структуру – структуру *бран* или *суперциклов*.

Отступление о бранах. Даже с технической точки зрения удобно снабдить каждый лагранжев цикл структурой браны (или суперцикла). Брана или суперцикл есть пара $(\mathcal{L}, a)$, где $\mathcal{L}$ – лагранжев цикл и a – плоская связность в тривиальном линейном расслоении $\mathcal{L}$. Тогда если X' – *многообразие модулей суперциклов* (*бран*) и проекция π' сопоставляет суперциклу его лагранжев носитель, то общим слоем этой проекции будет многообразие модулей суперциклов с гладким фиксированным носителем, т.е. тор. В силу SYZ-гипотезы это многообразие модулей X' допускает структуру СУ-многообразия и называется *зеркальным отражением* многообразия X .

Пусть L_0 – тривиальное расслоение на X с тривиальной связностью a_0 . По определению расслоение π' (1.28) допускает “нулевое” сечение

$$s_0 = \text{GFT}(L_0) \subset X', \quad s_0 = \{(\mathcal{L}, a) \mid a \text{ тривиальна}\} \quad (1.29)$$

(обозначение GFT – геометрическое преобразование Фурье – будет объяснено позже). Мы рассматриваем это сечение как n -мерный цикл в X' . С другой стороны, если голоморфное линейное расслоение L на X допускает эрмитову связность a_L с формой кривизны, пропорциональной ω , то

$$a_L|_{\mathcal{L}} \in (\pi')^{-1}(\mathcal{L}), \quad (1.30)$$

и мы получаем сечение

$$s_L \subset X', \quad s_L = (\mathcal{L}, a_L|_{\mathcal{L}}) \quad (1.31)$$

расслоения π' .

Следовательно, ожидаемое число бор-зоммерфельдовских циклов совпадает с *индексом пересечения* двух n -мерных циклов

$$N = [s_0] \cdot [s_L] \quad (1.32)$$

(где, конечно, $s_0 = s_{\mathcal{O}_X}$).

Для того чтобы доказать, что геометрическое число точек пересечения (1.27) совпадает с этим числом, мы должны исследовать геометрию циклов этого типа. Это – основная цель данной работы. Для иллюстрации мы начнем с самого простого примера.

СУ₁-эллиптические кривые. Пусть C – эллиптическая кривая с комплексной ориентацией, заданной голоморфной 1-формой θ и метрикой g так, что универсальная накрывающая U и касательное расслоение TC допускают стандартную постоянную эрмитову структуру, которую мы и фиксируем, т.е. евклидова метрика, симплектическая форма и комплексная структура I заданы. Тогда келерова форма $2\pi i\omega$ задает поляризацию степени 1. Фиксируем разложение

$$C = S_+^1 \times S_-^1 = U(1)_+ \times U(1)_-, \quad (1.33)$$

где последнее равенство превращает C в коммутативную группу с нулем $o \in C$. Пусть L – голоморфное линейное расслоение с голоморфной структурой, заданной эрмитовой связностью a с формой кривизны $F_a = 2\pi i\omega$ и $L = \mathcal{O}_C(o)$. Разложение (1.33) индуцирует разложение

$$H^1(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_- \quad (1.34)$$

с двумя выделенными образующими

$$[e] \in \mathbb{Z}_+, \quad [s] \in \mathbb{Z}_-, \quad [e]^2 = [s]^2 = 0, \quad [e] \cdot [s] = 1. \quad (1.35)$$

Любой гладкий “неприводимый” цикл в C есть образ $\phi(S^1)$ гладкого погружения $\phi: S^1 \rightarrow C$, т.е. гладкая окружность $\mathcal{L}$ в C , класс когомологий которой $[\mathcal{L}] \in H^1(C, \mathbb{Z})$ примитивен.

Далее, над каждой точкой $p \in C$ лагранжев грассманиан $\Lambda_{\uparrow} p = \Lambda_{\uparrow}(TS_p) = U(1)$ – окружность касательных направлений (см. (1.1), (1.2)) и глобальная ориентированная лагранжева грассманизация (1.1) касательного расслоения TS есть

$$\Lambda_{\uparrow}(C) = C \times U(1). \quad (1.36)$$

Следовательно, отображение фазы (1.13) сопоставляет точке $p \in \mathcal{L}$ касательное направление цикла $\mathcal{L}$ в этой точке. Отсюда получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. 1) *Цикл $\mathcal{L}$ является spLag-циклом в том и только в том случае, если он гладок и его универсальная накрывающая*

$$U(\mathcal{L}) \subset U(C) = \mathbb{C} \quad (1.37)$$

является прямой с рациональным наклоном.

2) *Любой spLag-цикл определен своим классом когомологий с точностью до сдвига.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, все касательные направления spLag-цикла должны быть одинаковы и наклон должен быть рациональным – иначе при экспоненциальном отображении мы получим иррациональную обмотку тора.

Как и положено, каждый примитивный spLag-цикл определяет наклон

$$m_I(\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1, \quad (1.38)$$

и полное семейство его сдвигов определяет SYZ-расслоение

$$\pi: C \rightarrow S^1 = \mathcal{M}^{[\mathcal{L}]} \quad (1.39)$$

со слоями – всеми spLag-циклами из $[\mathcal{L}]$ и базой – многообразием модулей spLag-циклов из фиксированного класса когомологий.

В частности, базис (1.35), т.е. классы $[e]$, $[s]$ мы можем реализовать как семейства spLag-циклов с наклонами

$$m_I(s) = 0 \quad \text{и} \quad m_I(e) = \infty. \quad (1.40)$$

Тогда каждый примитивный spLag-цикл $\mathcal{L}$ имеет наклон

$$[\mathcal{L}] = r[s] + d[e], \quad \text{причем} \quad (r, d) = 1 \quad \text{и} \quad m_I(\mathcal{L}) = \frac{d}{r}. \quad (1.41)$$

И, наконец, число точек пересечения двух spLag-циклов $[\mathcal{L}_1]$ и $[\mathcal{L}_2]$ определяется их наклонами (т.е. классами когомологий).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Два неприводимых различных spLag -цикла пересекаются трансверсально и*

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = |d_1 \cdot r_2 - d_2 \cdot r_1|, \quad (1.42)$$

где d_i/r_i – их наклоны.

Комплексное квантование. В этом случае процедура квантования – это *классическая теория тэта-функций*. В самом деле, разложение (1.34) определяет набор совместимых *тэта-структур* каждого уровня k : если C_k – подгруппа точек порядка k , то разложение (1.34) определяет разложение

$$C_k = \mathbb{Z}_k^+ \times \mathbb{Z}_k^- \quad (1.43)$$

и разложение пространства волновых функций

$$\mathcal{H}_{L^k} = H^0(C, L^k) = \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}_k^-} \mathbb{C} \cdot \theta_c, \quad \mathrm{rk} \mathcal{H}_{L^k} = k, \quad (1.44)$$

где θ_c – тэта-функция с “характеристикой” c (см. [18]).

Вещественная поляризация. Реализация класса $[e]$ как семейства spLag -циклов дает вещественную поляризацию

$$\pi: C \rightarrow S_-^1 = \mathcal{M}^{[e]} \quad (1.45)$$

(см. (1.39) и (1.26)), и мы можем рассмотреть двойственное расслоение

$$\pi': \mathrm{Pic}(C/S_-^1) \rightarrow S_-^1 \quad (1.46)$$

со слоями

$$(\pi')^{-1}(p) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\pi^{-1}(p)), \mathrm{U}(1)).$$

Это расслоение допускает сечение

$$s_0 \in \mathrm{Pic}(C/S_-^1), \quad s_0 \cap (\pi')^{-1}(p) = \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\pi^{-1}(p)), \mathrm{U}(1)), \quad (1.47)$$

так что мы получаем разложение

$$\mathrm{Pic}(C/S_-^1) = (S_-^1)' \times S_-^1. \quad (1.48)$$

Теперь мы можем поднять расслоения (1.45) и (1.46) на универсальную накрывающую окружности S_-^1 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & S_-^1 \\ \uparrow & & \uparrow \pi' \\ \mathbb{C}^* & \longrightarrow & C' \end{array} \quad (1.49)$$

где вертикальные отображения $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$ сопоставляют z число $\log(|z|)$ и

$$C = \mathbb{C}^*/\{q^n\} \quad \text{и} \quad C' = \mathbb{C}^*/\{|q|^2 \cdot q^{-n}\}. \quad (1.50)$$

Таким образом, тор C' снабжен симплектической формой ω' и комплексной структурой I' .

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Мы получаем отождествление

$$H^1(C, \mathbb{Z}) = H^1(C', \mathbb{Z}), \quad (1.51)$$

которое может быть продолжено до гладкого отождествления C и C' . Но при этом отождествлении ориентация тора C' противоположна ориентации тора C .

Теперь мы можем применить процедуру геометрического квантования к вещественной поляризации (1.45) фазового пространства (C, ω, L^k, a_k) , где a_k – эрмитова связность, определяющая голоморфную структуру на L^k . Сопоставляя линейному расслоению L^k характер фундаментальной группы ограничения на каждый слой, мы получаем сечение

$$s_{L^k} \subset C' = \text{Pic}(C/S_-^1), \quad (1.52)$$

и подмножество бор-зоммерфельдовских слоев как точек окружности S_-^1 есть

$$s_0 \cap s_{L^k} \subset s_0 = S_-^1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. На C'

- 1) классы когомологий сечений равны $[s_{L^k}] = [s_0] + k \cdot [e']$, где $[e']$ – класс слоя расслоения π' ;
- 2) эти сечения и слои расслоения π' – примитивные spLag -циклы с наклонными $m_{I'}(s_0) = 0$, $m_{I'}(s_{L^k}) = k$, $m_{I'}(e') = \infty$;
- 3) при идентификации $s_0 = S_-^1 = \text{U}(1)$ пересечение $s_0 \cap s_{L^k} = \text{U}(1)_k$ – подгруппа элементов порядка k в $\text{U}(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем со случая $k = 1$. Напомним, что эрмитова связность a с условием $F_a = 2\pi i \omega$ после подъема на универсальную накрывающую определяется постоянной 1-формой, т.е. линейным отображением универсальной накрывающей цикла s на универсальную накрывающую цикла e . Отсюда мы получаем утверждения 1)–3) для $k = 1$. В общем случае мы применяем изогению

$$\lambda_k: s_0 = \text{U}(1) \rightarrow \text{U}(1), \quad \lambda_k(z) = z^k. \quad (1.53)$$

Таким образом, мы получаем разложение

$$\mathcal{H}_\pi^k = \bigoplus_{\rho \in \text{U}(1)_k} \mathbb{C} \cdot s_\rho. \quad (1.54)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Численная проблема квантования (см. (1.16)–(1.18)) допускает положительное решение, т.е. $\text{rk } \mathcal{H}_{L^k} = \text{rk } \mathcal{H}_\pi^k$.

Более того, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Существует канонический (с точностью до гомотетии) изоморфизм $\mathcal{H}_{L^k} = \mathcal{H}_\pi^k$.

Доказательство-конструкция. Мы уже получили нужный изоморфизм с точностью до действия k -тора $(\mathbb{C}^*)^k$ (ср. разложения (1.44) и (1.54)). Канонический изоморфизм получается из действия группы Гайзенберга H_k на голоморфных сечениях линейного расслоения L^k (классическая теория тэта-функций; см. [18]) и на наборах ковариантно постоянных сечений бор-зоммерфельдовских слоев. Оба эти представления неприводимы, и единственность неприводимых представлений группы Гайзенберга H_k гарантирует нам идентификацию этих пространств с точностью до гомотетии.

Векторные расслоения произвольного ранга. Разумеется соответствие $L \rightarrow s_L$ может быть продолжено на голоморфные расслоения произвольного ранга $E \rightarrow s_E \subset C'$, где s_E есть уже $\mathrm{rk} E$ -сечение расслоения π' . Это соответствие работает в любой размерности, и мы используем его так же часто, как *slant*-произведение в 4-мерной калибровочной теории. Мы будем называть его *геометрическим преобразованием Фурье* (GFT для краткости). Хотя мы используем его в любой размерности (и даже для многообразий Фано), но совершенно достаточно понять его действие в случае эллиптических кривых.

Каждое стабильное голоморфное расслоение E на C несет эрмитово-эйнштейнову связность a_E , которая определяет голоморфную структуру на E (ниже мы опишем это соответствие в деталях). Кривизна этой связности имеет вид

$$F_{a_E} = \deg E \cdot 2\pi i \cdot \omega. \quad (1.55)$$

Таким образом, ограничение такой связности на каждый слой расслоения π есть плоская эрмитова связность на окружности и, следовательно,

$$(a_E)|_{\pi^{-1}(b)} = \chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_{\mathrm{rk} E}, \quad (1.56)$$

$$\chi_i \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\pi^{-1}(b)), \mathrm{U}(1)) = \mathrm{Pic}(\pi^{-1}(b)) = (\pi')^{-1}(b).$$

Получаем цикл

$$\mathrm{GFT}(E) \subset C', \quad (1.57)$$

который является *мульти*-сечением (точнее, $\mathrm{rk} E$ -сечением) расслоения π' . Конечно, для линейного расслоения

$$\mathrm{GFT}(L^k) = s_{L^k}. \quad (1.58)$$

Напомним, что π' – расслоение на группы, и можно сложить послойно все точки (1.56) над S_-^1 . Мы получим сечение

$$s_{\det E} = \mathrm{GFT}(\det E) \subset C'. \quad (1.59)$$

Предложение 1.6. 1) E стабильно $\iff \mathrm{GFT}(E)$ примитивен.

2) Мультисечение $\mathrm{GFT}(E)$ является spLag -циклом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 2) локально, и доказательство для линейных расслоений работает. Для доказательства утверждения 1) мы должны использовать обращение преобразования GFT, которое будет описано ниже.

Два spLag-цикла *конечного наклона* на C' мы можем послойно сложить: для любой точки $b \in S_-^1$ произвольный spLag-цикл s конечного наклона имеет конечное число точек $\{(s_i)b\}$ пересечения с этим слоем. Мы можем определить $\odot$ -сложение послойно:

$$(s^1 \odot s^2)_b = \bigcup_{i,j} (s_i^1)_b \cdot (s_j^2)_b. \quad (1.60)$$

ЛЕММА 1.2. 1) Для любых spLag-циклов s^1 и s^2 произведение $s^1 \odot s^2$ является объединением примитивных spLag-циклов.

2) Для любых двух голоморфных расслоений E_1 и E_2

$$\text{GFT}(E_1 \otimes E_2) = \text{GFT}(E_1) \odot \text{GFT}(E_2).$$

Доказательство получается непосредственно из конструкций.

В работе [2] М. Атья построил набор полустабильных расслоений

$$\mathcal{O}_C = F_1, F_2, \dots, F_r = S^r F_2, \dots, \quad (1.61)$$

однозначно определенных условием $h^0(F_r) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 [2]. 1) Свободный $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathcal{F}$, порожденный $[F_i]$ с мультипликативной структурой, заданной тензорным произведением, совпадает с коммутативным кольцом

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \quad (1.62)$$

– кольцом конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Для этого набора расслоений Атья (1.61) $\text{GFT}(F_r) = r \cdot s_0$.

Проблема обращения. Каждое стабильное векторное расслоение E на эллиптической кривой C однозначно с точностью до сдвига определено своим топологическим типом (r, d) , где $r = \text{rk } E$, $d = \text{deg } E$, т.е. многообразие модулей

$$\mathcal{M}_{r,d}^s = C. \quad (1.63)$$

Но каждый примитивный spLag-цикл $\mathcal{L}$ тоже определяется своим наклоном с точностью до сдвига, однако пространство деформаций

$$\mathcal{M}^{[\mathcal{L}]=(r,d)} = S_-^1. \quad (1.64)$$

Таким образом, отображение

$$\text{GFT}: \mathcal{M}_{r,d}^s \rightarrow \mathcal{M}^{[\mathcal{L}]=(r,d)}, \quad (1.65)$$

сопоставляющее расслоению E цикл $\text{GFT}(E)$, есть не что иное как расслоение (1.39). Размерность слоя этого отображения равна 1, и мы никак не можем восстановить E по $\text{GFT}(E)$.

Это означает, что мы не использовали всю информацию, закодированную в E . А именно, мы забываем, что на $\text{GFT}(E)$ расслоение определяет структуру суперцикла (или браны) (см. соответствующее “отступление”). Для ее определения рассмотрим относительное прямое произведение

$$C \times_{S^1_-} C' = \{(c, c') \in C \times C' \mid \pi(c) = \pi'(c')\} \quad (1.66)$$

с проекциями

$$\pi': C \times_{S^1_-} C' \rightarrow C, \quad \pi: C \times_{S^1_-} C' \rightarrow C', \quad p: C \times_{S^1_-} C' \rightarrow S^1_-.$$

Наш цикл $\text{GFT}(E)$ погружен в $C \times_{S^1} C'$:

$$\text{GFT}(E) = \{(c, c') \mid c \in s; c' \in \text{GFT}(E)\} \subset C \times_{S^1_-} C'. \quad (1.67)$$

Тогда ограничение пары

$$(\pi')^*(E, a_E)|_{\text{GFT}(E)} \quad (1.68)$$

допускает тавтологическое линейное расслоение L с эрмитовой связностью s_τ , так что пара

$$(\text{GFT}(E), a_\tau) = s\text{GFT}(E) \quad (1.69)$$

– суперцикл. Легко проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть $S\mathcal{M}^{(r,d)}$ – многообразие модулей суперциклов наклона d/r ; тогда отображение $s\text{GFT}: \mathcal{M}_{r,d}^s \rightarrow S\mathcal{M}^{(r,d)}$ – изоморфизм.

Это дает решение проблемы обращения для GFT .

Наконец, если голоморфное неразложимое расслоение E топологически тривиально, то E допускает голоморфную плоскую связность a_h и ограничение $(\pi')^*(E, a_E)|_{\text{GFT}(E)}$ определяет плоскую связность на $\text{GFT}(E)$, возможно, не эрмитову. Такая связность задается классом сопряженности $[M]$ произвольной матрицы M . Следовательно,

$$s\text{GFT}(E) = (\text{GFT}(E), [M]). \quad (1.70)$$

Пусть N_r – стандартная унитарная матрица порядка r ; тогда легко видеть, что для набора расслоений Атья (1.61)

$$s\text{GFT}(F_r) = (r \cdot s_0, [N_r]). \quad (1.71)$$

Таким образом, проблема обращения допускает положительное решение для всех полустабильных голоморфных расслоений на C .

Зеркальное отображение “Келер–Ходж”. Мы приводим здесь эту конструкцию только для полноты картины “зеркальной симметрии” среди многообразий Калаби–Яо. Для эллиптических кривых это не более чем образец многомерного случая.

Для эллиптической кривой C кольцо алгебраических когомологий имеет вид

$$A_C = H^{2*}(C, \mathbb{Z}) = H^0(C, \mathbb{Z}) \oplus H^2(C, \mathbb{Z}). \quad (1.72)$$

Кроме стандартного умножения в когомологиях и симметрической билинейной формы

$$(u, v) = [u \cdot v]_2, \quad (1.73)$$

где $[w]_i$ – i -я однородная компонента класса w , мы имеем и кососимметрическую форму

$$\langle u, v \rangle = (u^*, v), \quad (1.74)$$

где оператор

$$*: A_C \rightarrow A_C, \quad *(u_1, u_2) = (u_1, -u_2), \quad (1.75)$$

сопоставляет характеру Черна векторного расслоения характер Черна двойственного расслоения.

Таким образом, мы можем рассматривать A_C , стандартную четную унимодулярную гиперболическую решетку ранга 2, и как симплектическую унимодулярную решетку ранга 2.

Теперь рассмотрим отображение

$$\text{mir}: A_C \rightarrow H^1(C', \mathbb{Z}), \quad \text{mir}([C]) = [s_0], \quad \text{mir}([\text{pt}]) = [e'], \quad (1.76)$$

где $[C]$ – фундаментальный класс кривой C и $[\text{pt}]$ – класс точки на C . Очевидно, что

$$\text{mir}(u) \cdot \text{mir}(v) = \langle u, v \rangle = (u^*, v). \quad (1.78)$$

Обе наши кривые *отмечены*, т.е. базисы $[s]$, $[e]$ и $[s_0]$, $[e']$ фиксированы, так что решетки $H^1(C, \mathbb{Z})$ и $H^1(C', \mathbb{Z})$ отождествлены (см. (1.51)). Многообразие модулей таких отмеченных кривых есть классическая *область периодов* $\Omega_{C'} \subset \mathbb{P}H^1(C', \mathbb{C})$,

$$\Omega_{C'} = \left\{ (z_0, z_1) \mid \text{Im} \left(\frac{z_1}{z_0} \right) > 0 \right\} = \{ \mathbb{C} \cdot \theta' \mid i \cdot \theta' \wedge \bar{\theta}' > 0 \}. \quad (1.79)$$

С другой стороны, для любой отмеченной кривой мы имеем *комплексификацию келерова конуса*

$$\mathcal{K}_C \subset H^2(C, \mathbb{R}) \oplus i \cdot H^2(C, \mathbb{R}), \quad \mathcal{K}_C = \{ u + i \cdot v \mid v > 0 \}, \quad (1.80)$$

где ориентация на $H^2(C, \mathbb{R})$ задается условием $\omega > 0$.

Комплексификация отображения mir (1.76)

$$\text{mir}_{\mathbb{C}}: \mathcal{K}_C \rightarrow \Omega_{C'} \quad (1.81)$$

называется *зеркальным отображением “Келер–Ходж”*. Легко проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Зеркальное отображение “Келер–Ходж” устанавливает изоморфизм областей.*

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Зеркальное отображение “Келер–Ходж” может быть продолжено до отождествления*

$$\mathcal{H}_C \times \Omega_C \longleftrightarrow \mathcal{H}_{C'} \times \Omega_{C'}. \quad (1.82)$$

Наконец, мы можем рассматривать кольцо A_C как топологический K -функтор, сопоставляя векторному расслоению E его характер Черна $(\mathrm{rk} E, \deg E)$. Мы получаем отображение

$$\mathrm{mir}: K_{\mathrm{top}}^0(C) \rightarrow H^1(C', \mathbb{Z}). \quad (1.83)$$

Сравнивая это отображение с отображением

$$[\mathrm{GFT}]: K_{\mathrm{top}}^0(C) \rightarrow H^1(C', \mathbb{Z}), \quad (1.84)$$

сопоставляющим голоморфному расслоению E на C класс когомологий $[\mathrm{GFT}(E)]$, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Для голоморфного векторного расслоения E на C*

$$\mathrm{mir}(\mathrm{ch}(E) \cdot \sqrt{\mathrm{td}_C}) = [\mathrm{GFT}(E)]. \quad (1.85)$$

Конечно, здесь $\sqrt{\mathrm{td}_C} = (1, 0)$, так что $u \cdot \sqrt{\mathrm{td}_C} = u$, но ниже мы убедимся, что вид этой формулы сохраняется в любой размерности.

§ 2. sdAG-циклы (малая деформация алгебраических циклов)

Конструкция отображения фазы (1.13) может быть “комплексифицирована” до отображения в “комплексную фазу”

$$m_{\mathbb{C}}: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^* \quad (2.1)$$

для любого цикла срединной размерности $\Sigma \subset S$, где S – любое почти келерово многообразие размерности ≥ 4 .

Проиллюстрируем эту конструкцию случаем aK-поверхностей S (см. начало предыдущего параграфа). Над каждой точкой $p \in S$ слой касательного расслоения $TS_p = \mathbb{C}^2$ снабжен стандартной эрмитовой тройкой (ω_p, I_p, g_p) , и лагранжев грассманиан ориентируемых лагранжевых подпространств вложен в грассманиан любых ориентированных подпространств

$$\Lambda_{\uparrow} p \subset \mathrm{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p). \quad (2.2)$$

Далее,

$$\Lambda_{\uparrow} p = S^2 \times S^1 \quad (2.3)$$

(см. (1.2)) и

$$\mathrm{Gr}_\uparrow(2, TS_p) = S_-^2 \times S_+^2, \quad (2.4)$$

так что включение (2.2) согласовано с прямым разложением, т.е.

$$S^2 = S_-^2 \quad \text{и} \quad S^1 \subset S_+^2. \quad (2.5)$$

И первая идентификация и второе включение имеют глубокий геометрический смысл в теории твисторов римановой метрики.

Прежде всего, каждая ориентированная плоскость $V \subset TS_p$ определяет новую комплексную структуру I_V на TS_p , совместимую с евклидовой метрикой g_p . Следовательно, мы имеем естественное отображение

$$I: \mathrm{Gr}_\uparrow(2, TS_p) \rightarrow S^2 = \mathbb{P}W_p^+, \quad (2.6)$$

где $W^+ = \mathbb{C}^2$ – пространство спиноров правой киральности евклидовой метрики.

Слой этого отображения

$$I^{-1}(I_V) = \mathbb{P}\mathbb{C}_V^2 = \mathbb{P}W_p^- \quad (2.7)$$

– проективная прямая с комплексной структурой I_V , т.е. многообразие комплексных направлений в комплексной структуре I_V . Легко видеть, что разложение (2.4) есть в точности твисторное разложение

$$\mathrm{Gr}_\uparrow(2, TS_p) = \mathbb{P}W_p^- \times \mathbb{P}W_p^+. \quad (2.8)$$

Далее, для любой ориентированной плоскости V , рассмотрим *келеров угол* $\alpha(V)$, определяемый по формуле

$$\omega_p|_V = \arccos \alpha \cdot \mathrm{Vol}_{g_p}. \quad (2.9)$$

Геометрический смысл угла $\alpha(V)$ очень прост: это угол между V и $I_p(V)$. Сопоставление плоскости ее келерова угла дает отображение

$$\alpha_p: \mathrm{Gr}_\uparrow(2, TS_p) \rightarrow [0, \pi] \quad (2.10)$$

нашего грассманиана ориентированных плоскостей в указанный интервал.

Однако угол $\alpha(V)$ зависит только от комплексной структуры I_V , так что отображение α_p есть композиция

$$\mathrm{Gr}_\uparrow(2, TS_p) \xrightarrow{\mathrm{pr}_+} \mathbb{P}W^+ \xrightarrow{h} [0, \pi] \quad (2.11)$$

и последнее отображение

$$h: \mathbb{P}W^+ = S^2 \rightarrow [0, \pi] \quad (2.12)$$

– стандартная *функция высоты* на S^2 , отображающая стандартную сферу в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ на третью координату.

Специальные слои отображения в келеров угол α имеют следующий геометрический смысл:

$$\alpha^{-1}(0) = \mathbb{P}\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}W^- \quad (2.13)$$

есть пространство комплексных касательных направлений в точке p . По той же причине

$$\alpha^{-1}(\pi) = \overline{\mathbb{P}W^-} \quad (2.14)$$

– пространство комплексных направлений в точке p с противоположной ориентацией. Далее,

$$\alpha^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Lambda_{\uparrow}p \quad (2.15)$$

– лагранжев грассманиан (1.1).

Очевидно, что смена ориентации отображает α в $\pi - \alpha$ и сохраняет лагранжев грассманиан (2.15). Таким образом, разложение лагранжева грассманиана (2.3) допускает следующую геометрическую интерпретацию:

$$\Lambda_{\uparrow}p = \mathbb{P}W^- \times h^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (2.16)$$

Все слои функции высоты h одинаковы ($= S^1$), за исключением двух точек – Северного и Южного полюсов, а слои отображения в келеров угол одинаковы, за исключением двух сфер

$$(\mathbb{P}W^- \times 0) \cup (\mathbb{P}W^- \times \pi). \quad (2.17)$$

Следовательно, удалив исключительные слои, мы получим отображение

$$\det_{\mathbb{C}}: \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p) \setminus (\alpha^{-1}(0) \cup \alpha^{-1}(\pi)) \xrightarrow{\text{pr}_+} \mathbb{C}^*, \quad (2.18)$$

ограничение которого на лагранжев грассманиан $\Lambda_{\uparrow}p$ дает отображение детерминанта $\det$ (1.3):

$$\det_{\mathbb{C}}|_{\Lambda_{\uparrow}p} = \det; \quad (2.19)$$

и его образ есть окружность

$$S^1 = \alpha_p^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}W^+. \quad (2.20)$$

Дадим другую конструкцию отображения $\det_{\mathbb{C}}$: фиксируем любой ненулевой элемент $w \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^2$ и назовем его *комплексной ориентацией* пространства $\mathbb{C}^2$. Теперь фиксируем ортогональный базис $e_1, e_2, I(e_1), I(e_2)$ пространства $\mathbb{C}^2$ такой, что

$$w = (e_1 + I(e_1)) \wedge (e_2 + I(e_2)). \quad (2.21)$$

Тогда для любой ориентированной плоскости $V \in \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p)$ рассмотрим ориентированный ортогональный базис v_1, v_2 , и пусть M_V – линейное преобразование, переводящее вектор e_i в v_i и $I(e_i)$ в $I(v_i)$. Легко проверяются следующие утверждения (см., например, [16]).

ЛЕММА 2.1. 1) M_V есть $\mathbb{C}$ -линейное преобразование $TS_p \rightarrow TS_p$, т.е.

$$M_V \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) \quad (2.22)$$

– комплексная матрица.

2) $\det_{\mathbb{C}} = 0$ в том и только том случае, если V является комплексным или антикомплексным направлением и

$$V = \ker M_V. \quad (2.23)$$

3) Если V лагранжева, то $M_V \in \text{U}(2)$ – унитарная матрица.

Таким образом, сопоставляя плоскости V число $\det M_V$, мы получаем отображение

$$d: \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p) \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.24)$$

с легко проверяемыми свойствами:

ЛЕММА 2.2. 1) Имеем

$$|d(V)| \leq 1, \quad (2.25)$$

$$|d(V)| = 1 \iff V \in \Lambda_{\uparrow} p. \quad (2.26)$$

2) Пусть

$$V \rightarrow \bar{V} \quad (2.27)$$

– отображение смены ориентации; тогда

$$d(V) = -d(\bar{V}). \quad (2.28)$$

Значит, отображение

$$d^2: \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p) \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.29)$$

не зависит от ориентации.

Рассмотрим разложение

$$\text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p) = \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p)^+ \cup d^{-1}(S^1) \cup \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p)^-, \quad (2.30)$$

где

$$\text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p)^- = \overline{\text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p)^+}. \quad (2.31)$$

Тогда мы получим два отображения:

$$d: \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p)^+ \rightarrow \{|z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}, \quad -(\bar{d})^{-1}: \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p)^- \rightarrow \{|z| \geq 1\}, \quad (2.32)$$

ограничения которых на $d^{-1}(S^1)$ совпадают:

$$d|_{d^{-1}(S^1)} = (\bar{d})^{-1}|_{d^{-1}(S^1)}. \quad (2.33)$$

Отсюда следует доказательство следующих утверждений.

ЛЕММА 2.3. 1) Два отображения (2.32) склеиваются в отображение

$$\det_{\mathbb{C}}: \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS_p) \rightarrow \mathbb{P}^1 = S^2. \quad (2.34)$$

2) Отображение (2.34) гладко и совпадает с отображением gr_{+} из (2.11).

Заметим, что в теории твисторов на римановом 4-многообразии антиавтоморфизм вещественной структуры действует на каждом проективном твисторном пространстве $\mathbb{P}W^{+}$ как антиподальное отображение $z \rightarrow -(\bar{z})^{-1}$.

Глобализация. Для того чтобы глобализовать эти конструкции, как это было сделано в случае лагранжевой грассманизации (1.1), прежде всего рассмотрим грассманизацию касательного расслоения многообразия S :

$$\text{Gr}_{\uparrow}(2, TS) = \mathbb{P}W^{-} \times_S \mathbb{P}W^{+} \quad (2.35)$$

– расслоение на комплексные квадрики над S , которые послойно являются произведениями твисторных пространств. Это расслоение содержит лагранжеву грассманизацию (1.1)

$$\Lambda_{\uparrow} \subset \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS), \quad (2.36)$$

и существует естественная проекция

$$\text{Gr}_{\uparrow}(2, TS) \xrightarrow{\text{pr}^{+}} \mathbb{P}W^{+}. \quad (2.37)$$

Отображение в келеров угол

$$\alpha: \text{Gr}_{\uparrow}(2, TS) \rightarrow [0, \pi] \quad (2.38)$$

(которое послойно совпадает с отображением (2.10)) представляется в виде композиции

$$\text{Gr}_{\uparrow}(2, TS) \xrightarrow{\text{pr}^{+}} \mathbb{P}W^{+} \xrightarrow{\alpha} [0, \pi] \quad (2.39)$$

и

$$\Lambda_{\uparrow} = \alpha^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (2.40)$$

Далее, каждое спинорное расслоение $\mathbb{P}W^{+}$ есть проективизация векторного расслоения

$$\mathbb{P}W^{+} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-K_S)). \quad (2.41)$$

В частности, это проективное расслоение содержит расслоение на единичные окружности антиканонического линейного расслоения

$$S^1(L_{-K}) \subset \mathbb{P}W^{+}, \quad (2.42)$$

и ограничение на $\Lambda_{\uparrow}$ отображения gr_{+} (2.39) дает отображение (1.4).

Для любого ориентированного 2-мерного подмногообразия $\Sigma \subset S$ отображение Гаусса вложения $i: \Sigma \rightarrow S$

$$G(i): \Sigma \rightarrow \text{Gr}_1(2, TS)|_{\Sigma} = \mathbb{P}W^- \times_S \mathbb{P}W^+|_{\Sigma} \quad (2.43)$$

сопоставляет точке $p \in \Sigma$ ориентированное подпространство $T\Sigma_p \subset TS_p$. Композиция этого отображения Гаусса с проекцией pr_+ (2.11) определяет отображение

$$\det_{\mathbb{C}}: \Sigma \rightarrow \mathbb{P}W^+|_{\Sigma}. \quad (2.44)$$

Рассмотрим связность Леви-Чивиты a_{LC} на линейном расслоении L_K (мы предполагаем на время, что наша поверхность келерова) и

$$F_{LC} \in \Omega^2(S) \quad (2.45)$$

– ее кривизну как 2-форму на S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Цикл Σ называется *канонически плоским*, если существует односвязное подмногообразие $B \supset \Sigma$ такое, что

$$F_{LC}|_B = 0. \quad (2.46)$$

Если цикл Σ канонически плоский, то существуют каноническая тривиализация

$$\mathbb{P}W^+|_{\Sigma} = \Sigma \times S^2 \quad (2.47)$$

и каноническая проекция

$$\text{pr}: \mathbb{P}W^+|_{\Sigma} \rightarrow S^2 = \mathbb{P}^1. \quad (2.48)$$

Более того, композиция всех отображений дает отображение

$$m_{\mathbb{C}} = \text{pr} \circ \det_{\mathbb{C}} \circ G(i): \Sigma \rightarrow S^2 = \mathbb{P}^1. \quad (2.49)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. 1) Отображение (2.49) называется отображением *комплексной фазы*.

2) Цикл Σ называется *sdAG-циклом*, если $m_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ – точка или, что эквивалентно, дифференциал

$$dm_{\mathbb{C}} = 0. \quad (2.50)$$

В частности, prLag -цикл автоматически является sdAG -циклом. Смысл акронима “sdAG” мы объясним ниже.

Отступление о зеркальной симметрии III. Как и выше, свойство (2.46) выполнено автоматически, если S является односвязной поверхностью Калаби–Яо, т.е. КЗ-поверхностью. В этом случае, конечно, $B = S$. Многообразие образа $S^2 = \mathbb{P}^1$ отображения комплексной фазы (2.49) есть пространство интегрируемых комплексных структур, совместимых с метрикой Калаби–Яо g на S . Следовательно, любой sdAG-цикл Σ есть комплексная кривая в комплексной структуре $m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \in S^2 = \mathbb{P}^1$ и любой spLag-цикл есть комплексная кривая в некоторой специальной комплексной структуре на S . Любая такая неприводимая кривая должна быть слоем эллиптического пучка или 2-рациональной кривой.

Многообразие образа S^2 допускает стандартную комплексную структуру

$$S^2 = \mathbb{C} \cup \infty = D^+ \cup S^1 \cup D^-, \quad (2.51)$$

где

$$D^+ = \{z \mid |z| < 1\}, \quad D^- = \{z \mid |z| > 1\}, \quad S^1 = \{z \mid |z| = 1\}. \quad (2.52)$$

Для любого ориентированного цикла Σ имеются следующие частные случаи: $m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \subset D^+ \Leftrightarrow \Sigma$ – симплектический; $m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \subset S^1 \Leftrightarrow \Sigma$ – лагранжев; $m_{\mathbb{C}}(\Sigma) = 0 \Leftrightarrow \Sigma$ – комплексный (алгебраический), AG-цикл для краткости; $m_{\mathbb{C}}(\Sigma) = \infty \Leftrightarrow \Sigma$ – антикомплексный, antiAG-цикл для краткости. Таким образом, sdAG – это акроним для *slightly deformed Algebraic Geometric*-цикл: каждая точка многообразия образа отображения комплексной фазы может быть сдвинута вдоль меридиана в 0 – образ отображения комплексной фазы комплексных циклов.

Предположим, что Σ – симплектический ориентированный цикл в S . Тогда образ $m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \subset D^+$ компактен и существует минимальный диск, содержащий $m_{\mathbb{C}}(\Sigma)$:

$$m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \subset D_{\Sigma} \subset D^+. \quad (2.53)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Для ориентированного симплектического цикла $\Sigma \subset S$ центр c_{Σ} диска D_{Σ} называется *центром* цикла Σ ; радиус r_{Σ} диска D_{Σ} называется *радиусом* цикла Σ ; Σ называется ε -AG, если

$$c_{\Sigma} = 0 \quad \text{и} \quad r_{\Sigma} < \varepsilon. \quad (2.54)$$

Дональдсон доказал следующий аналог теоремы вложения Кодаиры (см. [28]).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть L – линейное расслоение на произвольной аК-поверхности S с нулевым каноническим классом и a – эрмитова связность на L с формой кривизны, совпадающей с симплектической формой на S :

$$F_a = \frac{i}{2\pi} \omega. \quad (2.55)$$

Тогда для любого $k \gg 0$ существует сечение $s \in \Gamma(L^k)$ такое, что:

1) множество нулей $s^{-1}(0) = \Sigma$ является гладким ориентированным симплектическим 2-циклом;

2) $c_\Sigma = 0$;

3) $r_\Sigma < 1/\sqrt{k}$.

В частности, существует достаточно много циклов, как угодно близких к AG-циклам.

Теперь рассмотрим алгебраическую поверхность S с “определенным” каноническим классом $K_S > 0$ или $K_S < 0$. Под малой деформацией алгебраической геометрии мы понимаем геометрию, задаваемую семействами 2-циклов, отличных от голоморфных кривых. Геометрические свойства этих циклов и их отличие от голоморфных кривых определяются их инфинитезимальным поведением первого порядка, т.е. эти циклы определяются свойствами их отображений Гаусса (1.6).

Напомним, что выбор $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры есть подъем проективного расслоения $\mathbb{P}W^+$ до векторного W^+ . Существуют два канонических выбора $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры:

$$W^+ = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(\pm K_S), \quad (2.56)$$

и мы должны рассмотреть два случая: $K_S > 0$ и $K_S < 0$.

Общий тип ($K_S > 0$). В этом случае мы рассмотрим подъем $W^+(K_S) = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(K_S)$. Напомним, что любое сечение $s \in \Gamma(W^+)$ называется *спинорным полем*. В частности, если мы рассмотрим сечение без нулей s (или сечение с нулями вдоль “дивизора”), то мы получим сечение проективного расслоения $\mathbb{P}W^+$, т.е. почти комплексную структуру I_s , совместимую с нашей келеровой метрикой g .

В келеровом (алгебраическом) случае мы имеем конечномерное семейство *голоморфных* сечений

$$s \in H^0(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(K_S)) = \mathbb{C} \oplus H^0(\mathcal{O}_S(K_S)). \quad (2.57)$$

Как всегда, обозначим через $p_g = \dim H^0(\mathcal{O}_S(K_S))$ геометрический род поверхности S , т.е. комплексный ранг пространства $H^{2,0}(S)$.

Семейство спинорных полей (2.57) определяет семейство почти комплексных структур

$$S^{2p_g} = \mathbb{C}^{p_g} \cup \infty, \quad (2.58)$$

потому что

$$\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus H^0(\mathcal{O}_S(K_S))) = \mathbb{C}^{p_g} \cup \mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_S(K_S)), \quad (2.59)$$

где $\mathbb{C}^{p_g} = \{(1, s)\}$ – пространство не обращающихся в нуль сечений и $\mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_S(K_S)) = |K_S|$ – каноническая полная линейная система, точки которой дают одну и ту же комплексную структуру, а именно сопряженную исходной.

Эрмитова структура на касательном расслоении определяет эрмитову структуру на каноническом линейном расслоении $L_K = \mathcal{O}_S(K_S)$, а также эрмитова

структура на $\mathbb{C}^{2p_g} \cup \infty$ дает стандартную метрику на сфере. Это позволяет отождествить нашу сферу с двойственной сферой $S^{2p_g} = (S^{2p_g})^*$. Эта сфера содержит “экватор”

$$S_e^{2p_g-1} = \{z \mid \|z\| = 1\} \subset \mathbb{C}^{2p_g}. \quad (2.60)$$

Интерпретация пространства $\mathbb{C}^{2p_g} \cup \{\infty \setminus \text{point}\}$ как пространства сечений определяет погружение

$$i_{\text{can}}: \mathbb{P}W^+ \rightarrow S^{2p_g} \times S, \quad (2.61)$$

где, как обычно, $W^+ = W^+(K_S)^* = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-K_S)$. Композиция этого погружения с проекцией на слой тривиального расслоения $S^{2p_g} \times S$ дает отображение

$$\text{pr}: \mathbb{P}W^+ \rightarrow S^{2p_g}. \quad (2.62)$$

Далее, для любого цикла $\Sigma \subset S$ композиция отображения Гаусса (2.43), проекции pr_+ (2.44) и отображения (2.48) определяет отображение комплексной фазы

$$m_{\mathbb{C}} = \text{pr} \circ \text{pr}_+ \circ G(i): \Sigma \rightarrow S^{2p_g}. \quad (2.63)$$

В терминах этого отображения фазы мы можем теперь определить аналог специальных лагранжевых циклов, известных до сих пор только в случае многообразий Калаби–Яо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Цикл $\Sigma \subset S$ называется *sdAG-циклом*, если образ $m_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ – точка, или, что то же самое,

$$dm_{\mathbb{C}} = 0. \quad (2.64)$$

Образ $m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \in S^{2p_g}$ определяет почти комплексную структуру на S , совместимую с келеровой метрикой и для которой Σ есть *псевдоголоморфная кривая*. Значит, в частности, если Σ – гладкая поверхность, то ее род равен

$$g(\Sigma) = \frac{1}{2}([\Sigma]^2 + [\Sigma] \cdot K_S) + 1. \quad (2.65)$$

Теперь мы можем обобщить и “лагранжевы” свойства цикла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. 1) Цикл Σ называется *слабо лагранжевым* (wLag-цикл для краткости), если

$$m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \subset S_e^{2p_g-1}, \quad (2.66)$$

где $S_e^{2p_g-1}$ – экватор (2.60).

2) Σ называется *spLag-циклом*, если это sdAG-цикл и

$$m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \in S_e^{2p_g-1}. \quad (2.67)$$

Экватор делит сферу образа отображения комплексной фазы на верхнюю и нижнюю полусферы:

$$S^{2p_g} = D^+ \cup S_e^{2p_g-1} \cup D^-, \quad (2.68)$$

и весь набор определений (таких, как определение 2.3), свойств и фактов (таких, как теорема 2.3) может быть повторен в этой новой геометрической ситуации.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Мы начинали с келеровой поверхности. Но, если исходная поверхность только почти келерова, мы должны внести привычные коррекции в наши основные конструкции. Так, вместо голоморфных спинорных полей мы должны рассматривать гармонические спинорные поля из ядра скрученного оператора Дирака, т.е. решения системы дифференциальных уравнений $D_a s = 0$, где D_a – оператор Дирака Spin^c -структуры $-K_S$, скрученный со связностью Леви-Чивита на W^+ , продолженной связностью a на детерминантное линейное расслоение L_{-K} . Более точно, решения уравнений Зайберга–Виттена дают сферу образа отображения комплексной фазы (2.60). Это дает возможность обобщить все наши конструкции на почти келеров случай (см. [8]).

Наконец, совершенно очевидно, что надо делать в случае, когда $K_S < 0$: мы сменим знак у канонической системы $K_S \rightarrow -K_S$ и получим сферу

$$S^{2h^0(\mathcal{O}_S(-K_S))} \quad (2.69)$$

в качестве сферы образа отображения комплексной фазы. После этого мы должны только повторить все конструкции и определения. Однако заметим, что

$$h^0(\mathcal{O}_S(K_S)) = p_g = \frac{1}{2}(b_2^+ - 1) \quad (2.70)$$

является чисто топологическим инвариантом S , а $h^0(\mathcal{O}_S(-K_S))$ не является таковым ни в малой степени. Только для поверхностей дель Пеццо мы можем сказать, что

$$h^0(\mathcal{O}_S(-K_S)) \leq 10, \quad (2.71)$$

$$h^0(\mathcal{O}_S(-K_S)) = 10 - b_2^-. \quad (2.72)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В случае

$$h^0(\mathcal{O}_S(K_S)) = h^0(\mathcal{O}_S(-K_S)) = 0, \quad (2.73)$$

например в случае поверхностей Барлоу, мы не можем деформировать алгебраическую геометрию так, как мы это сделали выше, чтобы связать одним семейством алгебраическую и симплектическую геометрии. Это абсолютно жесткий случай, как и классическая теория кривых, не допускающая никаких (даже малых) деформаций.

§ 3. Малая деформация алгебраической геометрии

В этом параграфе мы объясним, почему так уж необходимо деформировать алгебраическую геометрию предложенным выше образом. Естественно, что прежде чем начать объяснения, нам необходимо очертить тот круг вопросов в алгебраической геометрии, который приводит к необходимости выйти за ее рамки.

Прежде всего, развитие калибровочной теории (см. обзор [8]) привело к тому, что все конструкции алгебраической геометрии могут быть реализованы в рамках

римановой геометрии. Как это уже упоминалось в замечании 2.1, голоморфное сечение голоморфного расслоения для келеровой метрики на поверхности есть не что иное, как гармоническое спинорное поле для этой метрики. Таким образом, геометрия гармонических спинорных полей – это геометрия полных линейных рядов и все задачи, поставленные в рамках келеровой (алгебраической) геометрии, могут быть поставлены и решены в рамках общей римановой геометрии. Поскольку пространство римановых метрик стягиваемо, большинство алгебро-геометрических инвариантов алгебраической поверхности являются инвариантами гладкости подлежащего четырехмерного многообразия (см., например, [20]). С другой стороны, геометрические объекты (такие, как многообразия модулей и т.д.) составляют семейства, параметризованные римановыми метриками. В частности, для специальных метрик, таких как келеровы, математически корректно поставить вопрос о трансверсальности их поведения в семействе над всеми метриками соответствующих геометрических объектов. Формальное развитие соответствующей теории (на которое не хватает места в этой статье) мотивируется приведенными ниже наблюдениями. Математические утверждения, такие как “алгебраическая геометрия для следующих конструкций нетрансверсальна”, следует понимать, как “соответствующие конструкции для келеровых метрик как элементы семейства, параметризованного всеми римановыми метриками, нетрансверсальны в обычном смысле Арнольда–Тома”.

В алгебраической геометрии мы имеем совершенную теорию кривых, менее совершенную теорию поверхностей и довольно скверную теорию трехмерных многообразий и т.д. Но во многих естественных вопросах возникают смешанные ситуации, когда мы должны исследовать геометрию пар, таких как $C \subset S$, где C – гладкая алгебраическая кривая рода g и S – регулярная гладкая алгебраическая поверхность, содержащая C . Каждая неприводимая компонента $\mathcal{M}$ многообразия модулей таких пар допускает отображение

$$f: \mathcal{M} \rightarrow M_g \times \mathcal{M}_s, \quad (3.1)$$

где M_g – многообразие модулей кривых рода g и $\mathcal{M}_s$ – неприводимая компонента многообразия модулей алгебраических поверхностей, содержащая S как точку. Преодолев обычную процедуру компактификации, мы получим фундаментальный класс $[f(\mathcal{M})]$, определяющий когомологическое соответствие

$$H_*(M_g) \rightarrow H^*(\mathcal{M}_s) \quad \text{и} \quad H_*(\mathcal{M}_s) \rightarrow H^*(M_g), \quad (3.2)$$

представляющее “топологическую” часть интересующей нас проблемы. С другой стороны, проекции на компоненты прямого произведения определяют специальные подмногообразия многообразия модулей

$$\text{pr}_g \circ f(\mathcal{M}) \subset M_g \quad \text{и} \quad \text{pr}_s \circ f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_s, \quad (3.3)$$

первое из которых – интересное подмногообразие многообразия модулей кривых рода g , а второе, как правило, совпадает со всей компонентой $\mathcal{M}_s$, и слой этой проекции

$$(\text{pr}_s \circ f)^{-1}(S) = |C| \quad (3.4)$$

является полной линейной системой на S – естественной компактификации пространства всех деформаций кривой C внутри S .

ПРИМЕР 1 (КЗ-поверхности). Пусть S является КЗ-поверхностью, и предположим, что род g кривой C достаточно велик, т.е. ≥ 12 . Тогда алгебраический класс когомологий $[C]$ определяет квазиполяризацию на S и компоненту многообразия модулей $\text{МКЗ}_{[C]}$ размерности 19:

$$\text{pr}_s \circ f(\mathcal{M}) = \text{МКЗ}_{[C]}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, компактификация многообразия модулей голоморфных деформаций кривой C внутри фиксированной КЗ-поверхности S есть проективное пространство

$$|C| = \mathbb{P}^g. \quad (3.6)$$

Следовательно,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = g + 19. \quad (3.7)$$

Но $(\text{pr}_g \circ f)(\mathcal{M})$ – собственное подмногообразие многообразия модулей M_g кривых рода g и

$$\text{codim}_{\mathbb{C}}((\text{pr}_g \circ f)(\mathcal{M})) = 2g - 22. \quad (3.8)$$

Таким образом, возникает алгебро-геометрическая проблема: описать это собственное подмногообразие многообразия модулей кривых.

НАБЛЮДЕНИЕ. Общая алгебраическая кривая рода > 11 , лежащая на КЗ-поверхности, “помнит” эту поверхность. Напомним “рецепт” Мукайи, как восстановить поверхность S по модулям кривой C , лежащей на этой поверхности (в случае нечетного рода g).

РЕЦЕПТ МУКАЙИ. 1) Рассмотрим многообразие модулей $\mathcal{SU}_C(2, K_C)$ полустабильных голоморфных расслоений на C ранга 2 с $c_1 = K_C$ (канонический класс). Внутри этого многообразия модулей рассмотрим подмногообразие Бриллю–Нётера

$$\mathcal{SU}_C \left(2, K_C, \frac{1}{2}(g-1) \right) = \left\{ E \in \mathcal{SU}_C(2, K_C) \mid h^0(E) \geq \frac{1}{2}(g-1) \right\}. \quad (3.9)$$

Если C – общая кривая в $(\text{pr}_g \circ f)(\mathcal{M})$, то это подмногообразие является КЗ-поверхностью S' .

2) Многообразие модулей

$$M_{S'} \left(2, \Theta|_{S'}, \frac{1}{2}(g-5) \right) = S \quad (3.10)$$

пучков без кручения ранга 2 с $c_1 = \Theta|_{S'}$ (т.е. ограничение тэта-дивизора на многообразии модулей векторных расслоений), и $c_2 = \frac{1}{2}(g-5)$ снова является КЗ-поверхностью, а именно той самой поверхностью, которая содержит C .

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой конструкции Мукаи реализовал свою философию: на многообразиях модулей векторных расслоений на кривой номер в фильтрации Брилла–Нётера играет роль второго класса Черна для расслоений на поверхности.

Базисные классы. Такого же типа проблемы возникают при реализации специальных целых 2-мерных классов когомологий специальными подмногообразиями, например (псевдо)голоморфными кривыми. Основной пример: гладкая структура алгебраической поверхности с $p_g > 0$ определяет набор некоторых 2-мерных классов когомологий, называемых *базисными классами*, или классами *Кронхеймера–Мровки*, или классами *Зайберга–Виттена* (см. [8]):

$$\{\kappa_i\}_{\text{К-М}} = \{\kappa_i\}_{\text{З-В}} \subset H^2(S, \mathbb{Z}). \quad (3.11)$$

Эти классы инвариантны относительно действия группы диффеоморфизмов и могут быть реализованы алгебраическими кривыми в каждой алгебраической структуре на S . Это множество классов содержит и канонический класс K_S , реализованный эффективной кривой, скажем C . Род этой кривой – чисто топологический инвариант поверхности:

$$g(C) = 2\chi + 3\sigma + 1, \quad (3.12)$$

где χ – эйлерова характеристика нашей поверхности S и σ – его сигнатура. Но модули таких кривых далеко не общие. В самом деле, нормальный пучок канонической кривой

$$\theta_C(C) = \theta_C(\theta), \quad 2\theta = K_C, \quad h^0(\theta_C(\theta)) = p_g - 1 \quad (3.13)$$

– тэта-характеристика на C , и если $p_g > 2$, то эта тэта-характеристика вырождена, т.е. ее тэта-константа обращается в нуль. В этом случае легко проверить, что

$$\text{codim}_{\mathbb{C}}(\text{pr}_g \circ f)(\mathcal{M}) = p_g - 2. \quad (3.13')$$

С другой стороны, виртуальная размерность пространства решений уравнения Зайберга–Виттена для общей метрики равна нулю, но, как мы видим, для келеровой метрики она равна $2(p_g - 1) = b_2^+ - 2$. Следовательно, келеровы метрики далеко не общие и алгебраическая геометрия “нетрансверсальна” для большинства проблем дифференциальной и симплектической геометрий, для теории квантового умножения и многого другого.

Чтобы оценить “уровень дефективности” алгебраической геометрии, достаточно заметить, что ее основная причина – иррегулярность локальной структуры теории деформаций кривых внутри фиксированной алгебраической поверхности.

НАБЛЮДЕНИЕ 3.1. На алгебраической поверхности S с $p_g > 0$ нормальное расслоение $N_{C \subset S} = \theta_C(C)$ алгебраической кривой C почти всегда иррегулярно, т.е.

$$h^1(N_{C \subset S}) > 0. \quad (3.14)$$

Более точно, $h^1(N_{C \subset S}) = 0$ только в следующих двух случаях:

- 1) C – неподвижная компонента канонической полной линейной системы;
- 2) C – кратный слой эллиптического пучка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Этот дефект нормальных расслоений кривых был открыт Кастельнуово и Энриквесом более ста лет назад и назван ими “избыточностью”: слишком много кривых относительно точек. Недавно это еще раз было отмечено Дональдсоном в его работе [6].

Геометрическая причина этого эффекта чрезвычайно проста: виртуальное касательное пространство к многообразию деформаций $|C|$ кривой C в S в точке C есть

$$T|C|_C = H^0(N_{C \subset S}), \quad (3.15)$$

а пространство препятствий совпадает с

$$H^1(N_{C \subset S}). \quad (3.16)$$

Однако на самом деле препятствия к деформациям отсутствуют: каждая инфинитезимальная деформация порождена геометрической (в точности как деформации многообразий Калаби–Яо): имеется точная последовательность

$$H^0(\mathcal{O}_S(C)) \rightarrow H^0(N_{C \subset S}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S) = 0. \quad (3.17)$$

Наконец, последняя причина нашего желания продеформировать алгебраическую геометрию – чисто арифметическая. Каждая гладкая алгебраическая кривая C над $\mathbb{Q}$ традиционно рассматривается как алгебраическая поверхность, расслоенная над $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$, т.е. как пучок кривых. Эта модель геометрического понимания ситуации предписывает рассматривать рациональные точки на C как сечения $s_1, \dots, s_N$ этого пучка. По теореме Аракелова квадраты этих сечений отрицательные. Предположим на секунду, что эти квадраты равны -1 . Тогда мы можем стянуть эти кривые в точки $p_1, \dots, p_N$ на гладкой поверхности S с кривой C (общим слоем) с нормальным пучком

$$N_{C \subset S} = \mathcal{O}_C(p_1 + \dots + p_N). \quad (3.18)$$

Но если $g(C) > 1$, то $h^1(\mathcal{O}_C(p_1 + \dots + p_N)) > 0$ и, следовательно,

$$N < 2g - 2. \quad (3.19)$$

Однако эта оценка слишком хороша, чтобы быть верной. Значит, стандартное представление геометрически неверно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интересно отметить, что стандартное представление достаточно хорошо работает при доказательстве такого “грубого” факта как гипотеза Морделла. Но его использование при подходе Мийаока к доказательству теоремы Ферма показало его дефектность.

Что мы должны сделать, чтобы избежать эффекта специальности модулей кривых, движущихся внутри алгебраических поверхностей, т.е. нетрансверсальности отображения rg_g (3.3)? Достаточно сильным средством является переход к рассмотрению почти келеровых поверхностей. В этой чисто симплектической ситуации мы должны рассмотреть пространство пар $C \subset S$, где S – любая аК-поверхность. Тогда “мягкость” (это математический термин) симплектической геометрии немедленно приводит к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для аК-поверхностей образ проекции p_g

$$(\mathrm{pr}_g \circ \mathcal{M}) = M_g$$

есть все многообразие модулей кривых рода g .

В самом деле, для любого симплектического гладкого ориентированного 2-цикла Σ на 4-мерном симплектическом многообразии S любую комплексную структуру на Σ можно продолжить до совместимой комплексной структуры на S так, чтобы Σ была псевдоголоморфной кривой (см., например, [29]). Однако возникает проблема с многообразием образа $\mathcal{M}_s$ второй проекции pr_s : “многообразие модулей” аК-структур бесконечномерно. Но, к счастью, вопрос описания слоев второй проекции, т.е. “полных линейных систем” псевдоголоморфных кривых на аК-поверхности вполне корректен (потому что линеаризованный оператор деформации эллиптичен).

Для того чтобы не выйти из конечномерной ситуации, мы должны зафиксировать некоторый класс конечномерных подпространств полного пространства модулей $\mathcal{M}$ аК-структур. Здесь полезно сменить порядок общности и рассмотреть малые деформации комплексных структур, связанные с келеровыми метриками.

Мы хотели бы их деформировать так, чтобы сохранить полностью теорию кривых, а в паре $(C \subset S)$ рассмотреть вместо алгебраического цикла C гладкий sdAG-цикл Σ с фиксированной (или подвижной, см. ниже) фазой

$$p = m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \in S^{2p_g}. \quad (3.20)$$

Каждая “неприводимая” компонента пространства модулей $\mathcal{M}$ таких пар $(\Sigma \subset S)$ определяет отображение f (3.1), когомологическое соответствие (3.2) (потому что каждый sdAG-цикл допускает комплексную структуру) и подпространство (3.3) в многообразии модулей кривых рода g . В частности, мы должны описать глобальную структуру компактифицированного пространства $|\Sigma|$ деформаций sdAG-цикла Σ в S . Такой тип циклов представляется псевдоголоморфными кривыми для почти комплексной структуры S^p , заданной точкой p (3.20). Конечно наша исходная комплексная структура задается точкой S^0 , а сопряженная ей – точкой S^∞ . Локальная теория деформаций sdAG-циклов достаточно хорошо изучена благодаря подробному исследованию частного случая spLag-циклов (см. [16]).

Теперь фиксируем алгебраическую поверхность S и рассмотрим гладкий sdAG-цикл Σ фазы p (3.20). Пусть

$$\Sigma \in |[\Sigma]|^p \quad (3.21)$$

– пространство модулей деформаций Σ как sdAG-цикла внутри поверхности. Тогда существует деформационный δ -комплекс такой, что касательное пространство к деформациям задается как

$$T|[\Sigma]|_\Sigma^p = H_\delta^0(N_{\Sigma \subset S}) = H^0(\Sigma, N_{\Sigma \subset S}). \quad (3.22)$$

(Напомним, что Σ допускает комплексную структуру, в которой нормальное расслоение $N_{\Sigma \subset S}$ допускает голоморфную структуру. Последнее пространство – обычные когомологии голоморфного расслоения.)

По тем же причинам пространством препятствий к инфинитезимальным деформациям цикла Σ как sdAG-цикла является

$$H_\delta^1(N_{\Sigma \subset S}) = H^1(\Sigma, N_{\Sigma \subset S}), \quad (3.23)$$

где последнее пространство – тоже пространство когерентных когомологий голоморфного расслоения $N_{\Sigma \subset S}$ на комплексной кривой Σ .

Теорию делают регулярной два результата о трансверсальности. Первый был предложен Дональдсоном в [6].

ТЕОРЕМА 3.1. 1) *Для общей аК-структуры пространство препятствий к локальным деформациям псевдоголоморфной кривой равно нулю:*

$$H_\delta^1(N_{\Sigma \subset S}) = H^1(\Sigma, N_{\Sigma \subset S}) = 0. \quad (3.24)$$

2) *Размерность пространства локальных деформаций задается формулой*

$$\dim T|[\Sigma]|_\Sigma^p = H_\delta^0(N_{\Sigma \subset S}) = H^0(\Sigma, N_{\Sigma \subset S}) = 2(\Sigma^2 + 1 - g). \quad (3.25)$$

Мы можем расширить этот результат о трансверсальности.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если S – поверхность с $p_g > 0$, то для любой точки $p \in S^{2p_g}$ сферы образа отображения комплексной фазы и любого sdAG-цикла фазы p равенства (3.24) и (3.25) остаются справедливыми.*

Идея доказательства совершенно стандартна и содержится в той же статье Дональдсона [6]. Прежде всего строится полное семейство

$$\|\Sigma\| = \bigcup_{p \in S^{2p_g}} |[\Sigma]|^p \quad (3.26)$$

sdAG-циклов для всех фаз $p \in S^{2p_g}$ и доказывается, что это семейство гладко и правильной размерности (т.е. виртуальной размерности). Далее теорема чистоты Смейла для проекции на комплексную фазу дает доказательство утверждения теоремы.

Заметим, что в ситуации, отличной от ситуации Калаби–Яо, полное семейство sdAG-циклов не расслаивается над сферой образа отображения комплексной фазы, потому что sdAG-цикл может обладать этим свойством в разных почти комплексных структурах. Но существует соответствие или пространство пар

$$\mathcal{M} = \{(\Sigma, p) \mid \Sigma - \text{sdAG} \text{ с } m_{\mathbb{C}}(\Sigma) = p\} \subset \|\Sigma\| \times S^{2p_g} \quad (3.27)$$

с двумя проекциями

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\text{pr}_t} S^{2p_g} \quad \text{и} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{\text{pr}_c} \|\Sigma\| \quad (3.28)$$

и со слоем второй проекции вида $\text{pr}_t^{-1}(p) = |[\Sigma]|^p$.

ПРИМЕР (полная каноническая система). Рассмотрим канонический класс K_S поверхности S и реализуем его как sdAG-цикл для всех значений фазы $p \in S^{2p_g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Имеем*

$$\|K_S\| = |K_S|^0.$$

В частности, образ отображения $\mathrm{pr}_g \circ f(\mathcal{M})$ (3.3) совпадает с образом для канонических кривых алгебраической поверхности S^0 (см. (3.13)).

Это – тот самый случай, когда никакого выигрыша в общности модулей кривых мы не получаем. Чтобы описать пространство пар (3.27), мы должны раздуть точку $(1, 0)$ в проективном пространстве $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus H^0(\mathcal{O}_{S^0}(K_S)))$ (2.57), (2.59):

$$\sigma: \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(H)) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus H^0(\mathcal{O}_{S^0}(K_S))). \quad (3.29)$$

Тогда вторая проекция этого раздутого пространства

$$\pi: \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-H)) \rightarrow |K_S|^0, \quad (3.30)$$

где $\mathcal{O}$ – структурный пучок проективного пространства

$$\mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_{S^0}(K_S)) = |K_S|^0 \quad (3.31)$$

и $\mathcal{O}(-H)$ – расслоение Хопфа над ним. Эта конструкция показывает, что пространством пар (3.27) является

$$\mathcal{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-H)), \quad (3.32)$$

и отображение комплексной фазы

$$\mathrm{pr}_t: \mathcal{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(H)) \rightarrow S^{2p_g} \quad (3.33)$$

есть стягивание “лишних” сечений $\mathbb{P}(\mathcal{O})$ и $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-H))$ – проективное расслоение (3.32) над проективным пространством $|K_S|^0$:

$$\mathrm{pr}_t(\mathbb{P}\mathcal{O}) = 0 \in S^{2p_g} \quad \text{и} \quad \mathrm{pr}_t(\mathbb{P}\mathcal{O}(-H)) = \infty \in S^{2p_g}. \quad (3.34)$$

Из этой геометрической картинки немедленно следует доказательство следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. 1) Для любого $p \in S^{2p_g} \setminus (0 \cup \infty)$ на аК-поверхности S^p канонический класс допускает единственное представление в виде псевдоголоморфной кривой

$$|K_S|^p = \text{точка}. \quad (3.35)$$

2) Для каждой кривой $C \in |K_S|^0$ существует 2-сфера

$$S^2 = \mathrm{pr}_t(\pi^{-1}(C)) \in S^{2p_g} \quad (3.36)$$

почти комплексных структур, в каждой из которых C есть псевдоголоморфная реализация канонического класса.

§ 4. Применение процедуры геометрического квантования к CY_2 -случаю

Пусть S – гладкая КЗ-поверхность с комплексной ориентацией, задаваемой голоморфной 2-формой θ , и келеровой метрикой g с келеровой формой ω . Напомним, что сфера S_g^2 образа отображения комплексной фазы (2.49) параметризует почти комплексные структуры, совместимые с этой метрикой. Если наша метрика g Риччи плоская, то все эти почти комплексные структуры интегрируемы. Отображение комплексной фазы в этом случае устроено просто: для каждого 2-цикла Σ отображение комплексной фазы $m: \Sigma \rightarrow S_g^2 = \mathbb{P}^1$ сопоставляет точке $p \in \Sigma$ комплексную структуру, которую определяет плоскость $T\Sigma_p \subset TS$. Цикл Σ является sdAG-циклом в том и только том случае, если его образ является точкой, описывающей комплексную структуру, в которой наш цикл Σ псевдоголоморфен.

Заметим, что конформный класс метрики g , ограниченной на Σ , определяет на нем комплексную структуру Σ_g . Естественное обобщение понятия sdAG-цикла следующее: цикл Σ называется *g-твисторным*, если его отображение комплексной фазы $m: \Sigma_g \rightarrow \mathbb{P}^1$ является голоморфным. Разумеется, постоянное отображение голоморфно.

По причинам, которые станут ясны ниже, исходная точка предлагаемых конструкций – *алгебраические* поверхности.

Зеркальное отображение “Келер–Ходж”. Рассмотрим кольцо алгебраических циклов

$$A_S \subset H^{2*}(S, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^2 H^{2i}(S, \mathbb{Z}). \quad (4.1)$$

Каждое голоморфное векторное расслоение E на S определяет вектор $\text{ch}(E)$ – его характер Черна:

$$\text{ch}(E) = \left(\text{rk } E, c_1(E), \frac{1}{2}c_1(E)^2 - c_2(E) \right). \quad (4.2)$$

Так же, как и в CY_1 -случае (эллиптических кривых), кроме стандартной симметрической билинейной формы

$$(u, v) = [u \cdot v]_4, \quad (4.3)$$

индуцированной умножением в когомологиях, существует вторая билинейная форма, снова симметрическая,

$$\langle u, v \rangle = u^* \cdot v \cdot \text{td}_S, \quad (4.4)$$

где $*$: $A_S \rightarrow A_S$, $(u_0, u_1, u_2)^* = (u_0, -u_1, u_2)$ и td_S – класс Тодда нашей поверхности S :

$$\text{td}_S = (1, 0, 2) \in A_S. \quad (4.5)$$

Более того, в решетке A_S выделена стандартная четная унимодулярная подрешетка ранга 2

$$H = H^0(S, \mathbb{Z}) \oplus H^4(S, \mathbb{Z}) \quad (4.6)$$

так, что

$$A_S = H \oplus \text{Pic } S. \quad (4.7)$$

Далее, все кольцо четномерных когомологий $H^{2*}(X, \mathbb{Z})$ содержит подрешетку *трансцендентных циклов*

$$T_S = A_S^\perp \subset H^{2*}(X, \mathbb{Z}). \quad (4.8)$$

ОСНОВНОЕ УСЛОВИЕ 4.1. Мы рассмотрим поверхность типа КЗ, подрешетка T_S которой содержит подрешетку H , т.е. допускает ортогональное разложение

$$T_S = H \oplus \text{Pic}_{S'}, \quad \text{Pic}_{S'} = H^\perp \quad (4.9)$$

(здесь последняя компонента этого разложения – подрешетка решетки T_S , ортогональная к H , но позднее мы реализуем ее как решетку Пикара зеркального партнера S' нашей поверхности S ; это объясняет обозначение). Везде далее мы фиксируем

- 1) разложение (4.9);
- 2) пару образующих $[e]$ и $[s]$ решетки H таких, что

$$[e]^2 = 0, \quad [s]^2 = -2, \quad [e] \cdot [s] = 1. \quad (4.10)$$

Более того, мы предположим, что ортогональное разложение, определенное а priori над $\mathbb{Q}$,

$$H^{2*}(S, \mathbb{Z}) = [H \oplus \text{Pic } S] \oplus [H \oplus \text{Pic } S'] \quad (4.11)$$

определено над $\mathbb{Z}$. Таким образом, каждая из двух компонент H имеет базис: в первой

$$[S] \in H^0(S, \mathbb{Z}), \quad [\text{pt}] \in H^4(S, \mathbb{Z}) \quad (4.12)$$

с таблицей умножения

$$[S]^2 = 0, \quad [\text{pt}]^2 = 0, \quad [S] \cdot [\text{pt}] = 1 \quad (4.13)$$

и базис (4.10) – во второй компоненте.

Конечно, мы можем сменить базис (4.13), чтобы имитировать “эллиптический пучок с сечением”:

$$[\text{pt}], \quad [S] - [\text{pt}], \quad \text{так что} \quad [\text{pt}] \cdot ([S] - [\text{pt}]) = 1, \quad ([S] - [\text{pt}])^2 = -2, \quad (4.14)$$

в точности, как в (4.10) (этот параллелизм будет важен ниже).

Отступление об AG. В алгебро-геометрической ситуации решетка A_S называется *решеткой Мукаи* и каждое голоморфное векторное расслоение E определяет свой *вектор Мукаи*

$$m(E) = \text{ch}(E) \sqrt{\text{td}_S}, \quad (4.15)$$

где

$$\sqrt{\text{td}_S} = (1, 0, 1) \quad (4.16)$$

– *положительный корень* из класса Тодда (4.5).

Таким образом, для любой пары голоморфных расслоений E_1 и E_2 по теореме Римана–Роха

$$\chi(\mathrm{Hom}(E_1, E_2)) = \mathrm{ch}(E_1^*) \mathrm{ch}(E_2) \mathrm{td}_S = m(E_1^*) \cdot m(E_2). \quad (4.17)$$

В частности, размерность многообразия модулей $\mathcal{M}_E$ *простых* расслоений E топологического типа $\mathrm{ch}(E)$ задается формулой

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_E = 2 - m(E) \cdot m(E^*). \quad (4.18)$$

Таким образом, чтобы перейти от стандартной квадратичной формы (4.3) к более экзотической (4.4), мы только должны сменить базис подрешетки H (4.12) на базис “эллиптического пучка с сечением” (4.14):

$$[S] - [\mathrm{pt}] = (1, 0, -1), \quad [\mathrm{pt}] = (0, 0, 1); \quad (4.19)$$

умножение на $\sqrt{\mathrm{td}_S}$ переводит этот базис в базис (4.12).

Естественно продолжить структуру Ходжа поверхности S на всю решетку (4.11) и индуцировать структуру Ходжа на всех компонентах многообразий модулей векторных расслоений на S (см. [25] для общих конструкций такого рода).

Подрешетка $A_S \oplus \mathrm{Pic}_S \oplus H = \mathrm{Pic}_{S'}^{\perp}$ в (4.11) содержит две подрешетки A_S и $\mathrm{Pic}_S \oplus H$, которые могут быть идентифицированы при помощи гомоморфизма

$$\mathrm{mir}: A_S \rightarrow \mathrm{Pic}_S \oplus H, \quad (4.20)$$

определенного равенствами $\mathrm{mir}([S] - [\mathrm{pt}]) = [s]$, $\mathrm{mir}([\mathrm{pt}]) = [e]$ и $\mathrm{mir}(L) = L$ для $L \in \mathrm{Pic}_S$. Теперь рассмотрим композицию

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} \circ \mathrm{mir} \circ [i]: \mathrm{Pic}_S &\rightarrow H \oplus i \cdot \mathrm{Pic}_S, \\ \mathrm{ch} \circ \mathrm{mir} \circ [i](L) &= [s] + i \cdot c_1(L) - \frac{1}{2} c_1(L)^2 \cdot [e], \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $[i]: A_S \rightarrow \bigoplus_{n=0}^2 i \cdot H^{2n}(S, \mathbb{Z})$ задается как $[i](u_0, u_1, u_2) = (u_0, i \cdot u_1, -u_2)$.

Удобно применить это отображение ко второй части разложения (4.11), т.е. к $\mathrm{Pic}_{S'}$, и получить отображение $\mathrm{Pic}_{S'} \rightarrow H \oplus i \cdot \mathrm{Pic}_{S'}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Комплексификация этого отображения совпадает с зеркальным отображением “Келер–Ходж” $\mathrm{mir}_{\mathrm{K-H}}$ для поверхностей типа КЗ.*

Для доказательства мы просто должны напомнить, что зеркальное отображение “Келер–Ходж” для КЗ-поверхностей имеет богатую историю. Мы отсылаем читателя к обзору [10] за информацией о развитии этого сюжета. Напомним, что если зафиксировать отождествление

$$H^{2*}(S, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^2 H^{2i}(S, \mathbb{Z}) = H \oplus \left(\bigoplus^3 H \right) \oplus \left(\bigoplus^2 E_{-8} \right) \quad (4.22)$$

(поверхность с таким отождествлением называется *отмеченной*), то мы получим погружение

$$A_S = A \subset H \oplus \left(\bigoplus^3 H \right) \oplus \left(\bigoplus^2 E_{-8} \right) \quad (4.23)$$

и погружение

$$T_S = T \subset \left(\bigoplus^3 H \right) \oplus \left(\bigoplus^2 E_{-8} \right). \quad (4.24)$$

Тогда в проективном пространстве

$$\mathbb{P}T \otimes \mathbb{C} \quad (4.25)$$

мы получаем “квадрику пересечений”

$$q = \{u \in T_S \otimes \mathbb{C} \mid u^2 = 0\}, \quad (4.26)$$

а на ней *область периодов*

$$\Omega_A = \{u \in q \mid u \cdot \bar{u} > 0\}. \quad (4.27)$$

Следуя работам Никулина, назовем эту область *областью периодов отмеченных КЗ-поверхностей с A-условиями на решетку Пикара*. Эта область параметризует отмеченные поверхности S с условием

$$A/H \subset \text{Pic } S. \quad (4.28)$$

С другой стороны, комплексификация подрешетки

$$A/H \subset \left(\bigoplus^3 H \right) \oplus \left(\bigoplus^2 E_{-8} \right) \quad (4.29)$$

содержит *комплексный келеров конус*

$$\mathcal{K}_{A/H} = \{u + i \cdot v \mid v^2 > 0\} \subset \text{Pic}_S \otimes \mathbb{R} \oplus i \cdot \text{Pic}_S \otimes \mathbb{R}. \quad (4.30)$$

Теперь, если наше основное условие 4.1 (см. (4.9), (4.10)) выполнено, рассмотрим комплексный келеров конус

$$\mathcal{K}_{\text{Pic}_{S'}} \quad (4.31)$$

и область периодов отмеченных КЗ-поверхностей с A -условием на решетку Пикара Ω_A (4.27). Тогда предложение 4.1 утверждает, что комплексификация $(\text{ch} \circ \text{mir} \circ [i])_{\mathbb{C}}$ отображения (4.21) дает отображение mir_{K-H} как композиция

$$\mathcal{K}_{\text{Pic}_{S'}} \xrightarrow{(\text{ch} \circ \text{mir} \circ [i])_{\mathbb{C}}} (T \otimes \mathbb{C} - \{0\}) \xrightarrow{/\mathbb{C}^*} \Omega_A, \quad (4.32)$$

и это отображение *биголоморфно*.

Заметим, что последнее $\mathbb{C}^*$ -расслоение над Ω_A – главное расслоение линейного расслоения со слоями $H^{2,0}$ над каждой поверхностью нашего семейства.

Таким образом, мы получаем гладкое отождествление двух отмеченных 4-многообразий S и S' , подлежащих поверхностям. Решетки их 2-когомологий отождествлены (см. (2.11)) и по теореме Куликова об эпиморфизме отображение mir_K -н может быть продолжено до отождествления

$$\mathcal{H}_{\text{Pic}_S} \times \Omega_{A_S} \equiv \mathcal{H}_{\text{Pic}_{S'}} \times \Omega_{A_{S'}}, \quad (4.33)$$

где $A_{S'} = H \oplus \text{Pic}_{S'}$.

Таким образом, для любого целочисленного класса $[\omega_I]$, представляющего класс келеровой формы ω_I некоторой келеровой метрики на S_I , пара $([\omega_I], S_I)$ определяет “зеркальную” пару $([\omega_{I'}], (S')_{I'})$.

Но mir_K -н дает больше: а именно, рассмотрим первую часть композиции (4.32) без факторизации по гомотетиям. Мы получим тройки

$$([\omega_{I'}], (S')_{I'}, \theta'), \quad (4.34)$$

где θ' – комплексная ориентация на $(S')_{I'}$. Напомним, что для любой тройки симплектических форм $(\text{Re } \theta', \text{Im } \theta', \omega)$ мы используем обычную нормировку

$$\begin{aligned} (\text{Re } \theta')^2 &= (\text{Im } \theta')^2 = \omega^2, \\ (\text{Re } \theta') \wedge (\text{Im } \theta') &= (\text{Re } \theta' \wedge \omega) = (\text{Im } \theta' \wedge \omega) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Комплексная ориентация θ' определена с точностью до поворота $e^{i\phi}$ и дает две замкнутые симплектические формы

$$\text{Re } \theta' \quad \text{и} \quad \text{Im } \theta'. \quad (4.36)$$

Используя эти соотношения, мы можем поднять класс когомологий $[\omega_{I'}]$ до келеровой формы $\omega_{I'}$ келеровой метрики g' на S' однозначно и получить келерову структуру на S' .

Более того, мы получаем идентификацию сферы-образа отображения комплексной фазы S_g^2 поверхности $(i \cdot \omega_I, S_I)$ и такой же сферы $S_{g'}^2$ для $(\omega_{I'}, (S')_{I'})$, окружностей $S_g^2 \cap H \otimes \mathbb{R}$ и $S_{g'}^2 \cap H \otimes \mathbb{R}$ так, что базис $[e], [s]$ переходит в $[e'], [s_0]$.

ЗАМЕЧАНИЕ о QFT. Такая зеркальная симметрия “Келер–Ходж” допускает описание в терминах локальной структуры пространства модулей *конформных теорий поля* (см. [1]). В частности, ортогональное разложение (4.22) совпадает с разложением (4.11) из [1] и т.д.

SYZ-версия зеркальной симметрии КЗ-поверхностей. Следуя основной идее [23], реализуем все появляющиеся классы когомологий геометрическими объектами, такими как spLag - и sdAG -циклы.

Для этого фиксируем *гиперкелерову метрику* g (т.е. риччи-плоскую метрику). Семейство совместимых комплексных структур и соответствующее семейство келеровых форм содержит две выделенные алгебраические структуры и их келеровы (ходжевы) формы

$$I \in S_g^2, \quad \omega_I \in S_g^2 \quad (4.37)$$

и антиподальную точку $\bar{I}$. Эта сфера S_g^2 отождествлена со сферой образа отображения комплексной фазы как ориентированная обыкновенная сфера в $\mathbb{R}^3$:

$$S_g^2 \subset \mathbb{R}^3 = \langle [\omega_I], [\operatorname{Re} \theta], [\operatorname{Im} \theta] \rangle \subset H^2(S, \mathbb{R}), \quad (4.38)$$

где θ – произвольная комплексная ориентация поверхности S_I с нормировкой (4.35). Более того,

$$[\omega_I] \in \operatorname{Pic} S_I = A_{S_I}/H \in H^2(S, \mathbb{Z}) \quad (4.39)$$

(см. (4.11)).

Все три формы (4.38) попарно ортогональны и определяют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, которое мы можем рассматривать как подпространство мнимых кватернионов в 4-мерном пространстве кватернионов $\mathbb{H}$. Используя эту интерпретацию, мы можем перенумеровать формы

$$[\omega_I], [\omega_J], [\omega_K], \quad \text{где} \quad I, J, K \in \mathbb{H}. \quad (4.40)$$

Комплексное квантование. Алгебраический класс (4.39) определяет I -голоморфное линейное расслоение L на комплексной поверхности S_I с первым классом Черна

$$c_1(L) = [\omega_I]. \quad (4.41)$$

Как любое голоморфное расслоение, линейное расслоение L несет на себе эрмитову структуру и унитарную связность a_L , задаваемую ковариантной производной

$$\nabla_L = d + \partial_I \phi \quad (4.42)$$

с формой кривизны

$$F_{a_L} = 2\pi i \cdot \omega_I = \partial_I \bar{\partial}_I \phi, \quad (4.43)$$

где функция ϕ – потенциал нашей келеровой метрики.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что на односвязном 4-многообразии S любая орбита калибровочной группы однозначно определяется формой кривизны.

Мы можем рассматривать пару (S, ω) как фазовое пространство классической механической системы, а весь набор

$$(S, \omega_I, L, a_L) \quad (4.44)$$

– как данные предквантизации на нем. Тогда в качестве результата комплексной версии квантования мы получаем пространство волновых функций

$$\mathcal{H}_L = H^0(S_I, L). \quad (4.45)$$

Наш случай в корне отличается от случая “ $\operatorname{Pic} = \mathbb{Z}$ ”, поэтому все степени L^k должны рассматриваться наравне со всеми целыми мнимыми точками келерова конуса (4.30).

Специальные вещественные поляризации. Теперь мы сконструируем вещественную поляризацию фазового пространства (4.44), т.е. специальное лагранжево расслоение

$$S \rightarrow S^2 \quad (4.46)$$

для того, чтобы применить предыдущие конструкции для сравнения результатов комплексного и вещественного квантования нашей системы (4.44).

Прежде всего мы имеем ортогональное разложение, индуцированное (4.11),

$$H^2(S, \mathbb{R}) = \text{Pic}_{S_I} \otimes \mathbb{R} \oplus H \otimes \mathbb{R} \oplus \text{Pic}_{S'} \otimes \mathbb{R}. \quad (4.47)$$

Пространство $T_{S_I} \otimes \mathbb{R}$ содержит две плоскости

$$\langle \text{Re } \theta, \text{Im } \theta \rangle \quad \text{и} \quad H \otimes \mathbb{R} = \langle [s], [e] \rangle \quad (4.48)$$

(см. (4.9)–(4.11)). Очевидно, что $\langle \text{Re } \theta, \text{Im } \theta \rangle \neq \langle [s], [e] \rangle$ (форма пересечения на этих плоскостях имеет различные индексы). Но с другой стороны, $[s]$ и $[e]$ ортогональны к ω_I , следовательно, оба имеют одинаковые образы при ортогональной проекции на 3-мерное пространство $\langle \text{Re } \theta, \text{Im } \theta, \omega \rangle$.

Применяя (если это необходимо) *сдвиг по фазе*

$$\theta \rightarrow e^{i \cdot \phi} \cdot \theta, \quad (4.49)$$

мы можем предположить, что

$$J = \text{pr}([e]) \quad \text{и} \quad K = \text{pr}([s]). \quad (4.50)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. 1) *Классы*

$$[e] \subset \text{Pic } S_J \quad \text{и} \quad [s] \subset \text{Pic } S_K, \quad (4.51)$$

так что $[e]$ – алгебраический цикл в комплексной структуре J , а $[s]$ – в комплексной структуре K (см. (4.40)).

2) После конечного числа (-2) -отражений и (может быть) смены базиса мы можем предположить, что $[e]$ – класс некоторой неприводимой гладкой эллиптической кривой e в комплексной структуре J и $[s]$ – класс неприводимой рациональной гладкой кривой s в комплексной структуре K .

3) Эллиптический пучок $|e|$ определяет J -голоморфное расслоение

$$\pi: S_J \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (4.52)$$

т.е. spLag -расслоение над компактификацией многообразия модулей

$$\mathbb{P}^1 = \overline{\mathcal{M}_J^{[e]}} \quad (4.53)$$

комплексной фазы J .

4) Неприводимая гладкая K -голоморфная кривая s – сечение этого пучка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 2) следует из стандартных аргументов § 3 работы [19]. Другие утверждения вытекают непосредственно из определений и описанных конструкций. Заметим, что из локального (твисторного) описания комплексных направлений в точке (см. предыдущий параграф) следует, что выбранные комплексные направления пересекаются трансверсально и с правильной ориентацией.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для того чтобы обойти все технические проблемы, мы можем рассматривать эти утверждения только для общей точки пространства периодов Ω_{A_S} (см. (4.33)). Тогда мы можем доказать эти утверждения и для любой, не обязательно риччи-плоской келеровой метрики. В этом случае наши почти комплексные структуры J и K неинтегрируемы, а кривые e и s только псевдоголоморфны. Удивительный факт: аргументы из § 3 классической работы [19] работают и в этом случае.

Рассмотрим расслоение π (4.52) как вещественную поляризацию нашего фазового пространства (4.44) и исследуем бор-зоммерфельдовские слои этой системы.

Прежде всего такое расслоение допускает 24 особых слоя, и мы будем предполагать, что все вырождения простейшие (ниже мы прибавим необходимые для общего случая аргументы). Пусть

$$\text{Sing}(\pi) = \{p_1, \dots, p_{24}\} \quad (4.54)$$

– особые точки слоев и

$$S_J^0 = S_J - \text{Sing}(\pi) \quad \text{и} \quad \pi: S_J^0 \rightarrow \mathbb{P}^1 \quad (4.55)$$

– гладкое расслоение со слоями T^2 или $\mathbb{C}^*$. Рассмотрим двойственное расслоение

$$\pi': \text{Pic}(S_J^0/\mathbb{P}^1) \rightarrow \mathbb{P}^1. \quad (4.56)$$

Это расслоение имеет “нулевое” сечение

$$s_0 \subset \text{Pic}(S_J^0/\mathbb{P}^1), \quad (4.57)$$

соответствующее тривиальным плоским связностям на слоях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. 1) *Расслоение (4.56) на коммутативные группы может быть компактифицировано (прибавлением 24 точек) до расслоения*

$$\pi': S' \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (4.58)$$

где S' – гладкое 4-многообразие, лежащее на КЗ-поверхности.

2) *Поверхность S имеет структуру главного однородного расслоения над главным якобиевым расслоением (4.56).*

3) Сечение (4.57) – компактный гладкий ориентированный 2-цикл $s_0 \subset S'$ – топологически S^2 .

Решетка $H^2(S', \mathbb{Z})$ содержит подрешетку H с фиксированным базисом

$$\langle [s_0], [e'] \rangle \subset H^2(S', \mathbb{Z}), \quad (4.59)$$

где e' – слой расслоения π' .

Удобно рассмотреть ортогональную проекцию

$$\text{pr}_H: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H = \langle [s_0], [e'] \rangle. \quad (4.60)$$

Теперь мы готовы применить геометрическое преобразование Фурье для аК-структуры на S' , описанной выше (см. (4.33)–(4.36)).

Напомним, что мы идентифицировали сферы – образы S_g^2 и $S_{g'}^2$ отображений комплексной фазы и окружности $S^2 \cap H \otimes \mathbb{R}$ и $(S^2)' \cap H \otimes \mathbb{R}$ так, что базис $[e], [s]$ переходит в базис $[e'], [s_0]$.

GFT для голоморфных линейных расслоений. Возвратимся к ситуации (4.41)–(4.45). Ограничение нашей пары (L, a_L) на любой слой e_p , $p \in \mathbb{P}^1$, расслоения π (4.52) определяет плоскую связность и характер

$$\chi_p: \pi_1(e_p) \rightarrow \text{U}(1) \in \text{Pic } e_p \quad \text{и} \quad \chi_p \in e'_p \subset S' - \text{Sing}(\pi)$$

(см. (4.56)).

Для любого 1-цикла $\gamma \in H_1(e_p, \mathbb{Z})$

$$\chi_p(\gamma) = e^{2\pi \cdot i \cdot \int_\gamma \partial_I \phi} \quad (4.61)$$

(см. (4.42), (4.43)). Более того, в S существует диск $D \subset S$ такой, что $\gamma = \partial D$, и тогда

$$\chi_p(\gamma) = e^{2\pi \cdot i \cdot \int_D \bar{\partial}_I \partial_I \phi} = e^{2\pi \cdot i \cdot \int_D \omega} \quad (4.62)$$

по формуле Стокса, и это число не зависит от выбора D . В самом деле,

$$D - D' \in H^2(S, \mathbb{Z}) \Rightarrow \int_D \omega - \int_{D'} \omega \in \mathbb{Z}. \quad (4.63)$$

Далее, каждый 1-цикл $\gamma \in H_1(e_p, \mathbb{Z})$ определяет отображение

$$\psi_\gamma: T_S \otimes \mathbb{R} \rightarrow e'_p \quad (4.64)$$

следующим образом: пусть диск $D = D_I$ будет голоморфным в комплексной структуре I ; тогда для любой 2-формы $q \in T_S \otimes \mathbb{R}$ интеграл

$$e^{2\pi \cdot i \cdot \int_{D_I} q} \quad (4.65)$$

не зависит от выбора D_I , потому что $D_I - (D_I)'$ – алгебраический цикл и интеграл формы q вдоль него равен нулю.

Теперь мы должны рассмотреть семейство таких интегралов, параметризованных точками $p \in \mathbb{P}^1$ – базы нашего эллиптического пучка π . Локально, вокруг регулярной точки $p \in \mathbb{P}^1$, мы имеем специальные параметры для деформаций spLag -циклов.

Специальные локальные координаты на многообразии модулей spLag -циклов. Пусть $u \subset \mathbb{P}^1$ – (очень) маленький диск вокруг регулярной точки $p_0 \in \mathbb{P}^1$ и $U = \pi^{-1}(u)$. Тогда

$$\pi: U \rightarrow u = S_1^1 \times S_2^1 \times u \quad (4.66)$$

– гладкое топологически тривиальное T^2 -расслоение над нашим диском, и мы имеем пару расслоенных трехмерных многообразий

$$\pi: S_1^1 \times u \rightarrow u \quad \text{и} \quad \pi: S_2^1 \times u \rightarrow u. \quad (4.67)$$

Для каждой точки $p \in u$ 1-циклы $(S_j^1)_p$, $j = 1, 2$, стягиваемы в S и для каждого такого 1-цикла мы можем найти I -голоморфный диск $D_p^j \subset S$ такой, что

$$\partial D_p^j = (S_j^1)_p. \quad (4.68)$$

Тогда

$$u_j(p) = e^{-2\pi \int_{D_p^j} \omega} \quad (4.69)$$

– специальные координаты на $u \subset \mathcal{M}_J^{[e]}$ (см. (4.52), формулу (3.1) из [26] и ссылки к этой статье).

Далее, если для каждой точки $p \in u$

$$(S_1^1)_p^* \times (S_2^1)_p^* = \text{Hom}(\pi_1(\pi^{-1}(p)), \text{U}(1)) \subset (\pi')^{-1}(u) \subset S' \quad (4.70)$$

– двойственный тор с параметрами

$$e^{-2\pi i \cdot \phi_j(p)}, \quad (4.71)$$

то

$$\tilde{u}_j(p) = e^{-2\pi(\int_{D_p^j} \omega + i \cdot \phi_j(p))} \quad (4.72)$$

– локальные координаты на многообразии модулей $S\mathcal{M}_J^{[e]}$ spLag -суперциклов. Точнее, мы получаем специальные локальные координаты

$$U' = (\pi')^{-1}(u) \subset S' = S\mathcal{M}_J^{[e]}. \quad (4.73)$$

Возвращаясь к отображению (4.62), мы получаем корректно определенное отображение

$$\psi_u: (\text{Pic}_S \oplus T_S \otimes \mathbb{R}) \times u \rightarrow U', \quad (4.74)$$

задаваемое формулой (4.65) для любой формы $q \in (\text{Pic}_S \oplus T_S \otimes \mathbb{R})$. Это отображение корректно определено на Pic_S в силу (4.63) и на $T_S \otimes \mathbb{R}$ в силу аргументов, приведенных после формулы (4.65).

В частности, для $q = \omega$ мы получаем локальное сечение расслоения π' :

$$\psi_u(\omega) = \text{GFT}(L)_u: u \rightarrow U'. \quad (4.75)$$

Глобализация. Теперь мы можем глобализовать эти локальные координаты. Нетрудно проверить следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. 1) *Для формы ω описанные локальные комплексные координаты могут быть склеены в комплексную структуру на S' , заданную формулами (4.33)–(4.36).*

2) *Локальные сечения (4.75) склеиваются в сечение $\text{GFT}(L) \subset S'$.*

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ. Несмотря на то, что локально специальные координаты дают одинаковые описания сечений $\text{GFT}(L)_u$ для любой поляризации L , глобальная комплексная структура на S' зависит от поляризации L (см. (4.33)).

ТЕОРЕМА 4.1. 1) *Проекция класса $[\text{GFT}(L)]$ на подрешетку H (4.60) имеет вид*

$$\text{pr}_H([\text{GFT}(L)]) = [s_0] - \frac{1}{2}c_1(L)^2[e']. \quad (4.76)$$

2) *Класс когомологий*

$$[\text{GFT}(L)] = [s_0] + [\omega_{I'}] - \frac{1}{2}c_1(L)^2[e'] \quad (4.77)$$

(см. (4.21)).

3) *Цикл $\text{GFT}(L)$ – spLag -цикл наклона $-\frac{1}{2}c_1(L)^2$ относительно aK -структуры $(\omega_{I'}, (S')_{I'})$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Фаза spLag -цикла, т.е. точка на окружности

$$S_g^2 \cap \langle \text{Re } \theta, \Im \theta \rangle = \text{U}(1), \quad (4.78)$$

определяется отношением координат в базисе $\text{pr}([e])$ и $\text{pr}([s])$ при идентификации (4.50), в точности, как для случая эллиптических кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Топологическая часть доказательства извлекается непосредственно из мультипликативности характера Черна, как это делается в [5] или в более современных работах [11], [3] при преобразовании аддитивной структуры 2-когомологий в мультипликативную структуру сечений эллиптического пучка и из (4.21). Доказательство того, что $\text{GFT}(L)$ – spLag -цикл, является чисто локальным и в специальных координатах (4.68)–(4.71) очевидно. Наконец, для вычисления наклона используется отображение (4.74).

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо специальных локальных координат (4.66)–(4.72) можно использовать другой прием: поверхность $R^1\pi\mathcal{O}_S = T^*\mathbb{P}^1$ допускает гиперкелерову метрику Егучи–Хансена $g_{\text{Е-Н}}$ (гиперкелерову редукцию постоянной метрики относительно гиперкелеровой редукции стандартного $\text{U}(1)$ -действия на $\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^2)^*$) со сферой совместимых комплексных структур $S_{\text{Е-Н}}^2$, содержащей два полюса $I, \bar{I}$ обычной и сопряженной структур на $T\mathbb{P}^1$. Для любой другой комплексной структуры $p: (T^*\mathbb{P}^1)_J \rightarrow \mathbb{P}^1$ – аффинное расслоение над векторным расслоением $p: T^*\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Далее, локально универсальная накрывающая окрестности U (4.66) $(\tilde{\pi}: \tilde{U} \rightarrow u) = p^{-1}(u)$ несет ограничение метрики Егучи–Хансена

на $p^{-1}(u)$, которое совпадает с универсальной накрывающей окрестности U . Локальный подъем сечения $\text{GFT}(L)$ – псевдоголоморфная кривая с наклоном в $S_{\text{E-H}}^2$.

Естественно ожидать, что существует конечное число бор-зоммерфельдовских слоев относительно (L, a_L) :

$$\{m_1, \dots, m_{N_L}\}_{\text{B-S}} \subset \mathbb{P}^1, \quad (4.79)$$

так что мы можем сконструировать пространство волновых функций для нашей вещественной поляризации π (4.52):

$$\mathcal{H}_{\pi, L} = \sum_{\text{B-S-fibers}} \mathbb{C} \cdot s_{\text{B-S}} \quad (4.80)$$

– прямую сумму прямых, порожденных ковариантно постоянными сечениями бор-зоммерфельдовских слоев расслоения π .

ТЕОРЕМА 4.2. *Для каждой поляризации L имеет место равенство*

$$\text{rk } \mathcal{H}_L = \text{rk } \mathcal{H}_{\pi, L},$$

т.е. численная проблема квантования (см. §1) допускает положительное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана–Роха и теореме о структуре линейных рядов на КЗ-поверхностях

$$h^0(L) = \frac{1}{2}c_1(L)^2 + 2. \quad (4.81)$$

С другой стороны, набор точек (4.79) состоит из точек пересечения

$$\text{GFT}(L) \cap s_0 = \{m_1, \dots, m_{N_L}\}_{\text{B-S}}. \quad (4.82)$$

Более того, для любой точки пересечения $\text{GFT}(L)$ и s_0 ориентации обоих сечений положительны в точности как для голоморфных кривых. Поэтому число точек пересечения задается формулой

$$N_L = |[\text{GFT}(L)] \cdot [s_0]| \quad (4.83)$$

(см. случай эллиптических кривых (1.42)). Нам осталось только заметить, что как нулевое сечение расслоения на группы цикл s_0 имеет противоположную ориентацию. Но тогда

$$N_L = (-[s_0]) \left([s_0] - \frac{1}{2}c_1(L)^2[e'] \right) = 2 + \frac{1}{2}c_1(L)^2 \quad (4.84)$$

и доказательство закончено (см. (4.81)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Естествен вопрос о существовании “канонического изоморфизма” между пространствами волновых функций из теоремы 4.2, т.е. о “тэта-базисе” полной линейной системы на КЗ-поверхности, зеркальный партнер которой содержит эллиптический пучок. Этот вопрос допускает положительное решение, которое естественно интерпретировать как обобщение теории тэта-функции на случай КЗ-поверхности.

Теперь уместно напомнить, что поверхность $(S')_{I'} - \text{Sing}(\pi) \xrightarrow{\pi'} \mathbb{P}^1$ – расслоение на группы и для любой поляризации L на S_I

$$\text{GFT}(L) \subset (S')_{I'} - \text{Sing}(\pi). \quad (4.85)$$

Снова, в точности как в CY_1 -случае (см. (1.60)), сечения можно умножать послойно:

$$\text{GFT}(L_1 \otimes L_2) = \text{GFT}(L_1) \odot \text{GFT}(L_2). \quad (4.86)$$

Это дает возможность продолжить конструкцию GFT на любые голоморфные расслоения на S_I .

Далее, точно так же для каждого стабильного (относительно поляризации $[\omega]$) голоморфного векторного расслоения E на S_I такого, что $c_1(E) = \lambda \cdot [\omega]$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, та же конструкция (см. (1.55), (1.56)) с несвязностью определяет цикл

$$\text{GFT}(E) \subset S', \quad (4.87)$$

который является $\text{spLag-rk } E$ -сечением расслоения π' и его класс когомологий, заданный характером Черна, описывается такой же формулой, как (2.76), и его наклон определяется такой же формулой, как (4.77). Мы снова приходим к зеркальному отражению голоморфной геометрии как spLag - и sdAG -геометрии при GFT .

Проблема обращения для случая CY_2 . Пусть E – стабильное расслоение относительно поляризации на S_I , заданной целочисленным классом $[\omega]$, векторное расслоение на S_I с условием $c_1(E) = \lambda \cdot [\omega]$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. В этом случае E несет на себе эйнштейно–эрмитову связность с формой кривизны вида (1.55). Тогда:

- 1) эта кривизна определяет КН-зеркальную пару (S', ω') ;
- 2) топологический тип расслоения E , определяемый вектором $m = m(E)$ (4.15), вместе с $[\omega']$ определяет
  - а) класс двумерных когомологий

$$[\text{GFT}(E)] \in H^2(S', \mathbb{Z}), \quad (4.88)$$

- б) комплексную фазу

$$p = m_{I'}(\text{GFT}(E)) \in S_{g'}^2, \quad (4.89)$$

т.е. комплексную структуру на S' , в которой вложенная риманова поверхность $\text{GFT}(E)$ псевдоголоморфна и

- в) полную линейную систему

$$|[\text{GFT}(E)]|^p = \mathcal{M}^{[\text{GFT}(E)]} \quad (4.90)$$

(см. (3.21)), содержащую нашу псевдоголоморфную кривую

$$\text{GFT}(E) \in \left| [\text{GFT}(E)] \right|^P; \quad (4.91)$$

3) мы имеем отображение многообразия модулей $\mathcal{M}_m^s$ стабильных векторных расслоений на S_I топологического типа m :

$$\text{GFT}: \mathcal{M}_m^s \rightarrow \left| [\text{GFT}(E)] \right|^P, \quad (4.92)$$

сопоставляющее расслоению E цикл $\text{GFT}(E)$ (см. (1.63)–(1.65)).

Точно так же, как в CY_1 -случае, мы можем определить на $\text{GFT}(E)$ структуру суперцикла

$$(\Sigma, \chi), \quad \text{где} \quad \Sigma \in \left| [\text{GFT}(E)] \right|^P \quad \text{и} \quad \chi \in \text{Hom}(\pi_1(\text{GFT}(E), \text{U}(1))). \quad (4.93)$$

Здесь последнее пространство является пространством унитарных плоских связностей на топологически тривиальном линейном расслоении, т.е. пространством $\text{U}(1)$ -характеров фундаментальной группы цикла Σ .

Напомним, что каждая псевдоголоморфная кривая Σ допускает комплексную структуру (см. §3), и, следовательно, мы получаем идентификацию

$$\text{Hom}(\pi_1(\text{GFT}(E), \text{U}(1))) = J(\Sigma) \quad (4.94)$$

с якобианом римановой поверхности Σ .

Теперь мы можем определить многообразие модулей

$$J(|\Sigma|^P) \quad (4.95)$$

всех таких *псевдоголоморфных суперкривых*.

Таким образом, наше GFT -отображение (4.92) может быть продолжено до отображения

$$\text{sGFT}: \mathcal{M}_m^s \rightarrow J(|\Sigma|^P). \quad (4.96)$$

Оценка слоев этого отображения и составляет “проблему обращения” для GFT в CY_2 -случае.

Напомним, что род псевдоголоморфной кривой вычисляется по обычной формуле присоединения (см. §3), а размерность многообразия модулей вычисляется по формуле (4.18). Отсюда и из формулы для класса $[\text{GFT}(E)]$ получаем $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_m^s \geq 4g(\text{GFT}(E))$. Теперь, используя стандартные аргументы теории спектральных кривых, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Отображение sGFT (4.96) имеет степень 1.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Особенно интересна геометрия циклов серии $\text{sGFT}(S^r T S)$ – аналога серии $\text{sGFT}(S^r F_1)$ (напомним, что $S^r F_1$ – расслоение на r -струи эллиптической кривой).

Следующая общая картина будущей теории возникает в CY_2 -случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для любой келеровой поверхности (S, g) множество классов 2-циклов, которые могут быть реализованы как целые комбинации неприводимых sdAG-циклов одной комплексной фазы, называется *расширенным множеством Пикара*:

$$\text{SDAG}_g = \{[\Sigma] \in H^2(S, \mathbb{Z}) \mid \Sigma \text{ есть sdAG}\}. \quad (4.97)$$

Заметим, что каждый такой класс когомологий допускает два антиподальных значения фазы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Если метрика g на S гиперкелерова, т.е. риччи-плоская, то любой класс когомологий $c \in H^2(S, \mathbb{Z})$ при реализации его как sdAG-цикла допускает только два антиподальных значения фазы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство комплексных структур

$$S_I, \quad I \in S^2, \quad (4.98)$$

параметризующее пространство ковариантно постоянных спиноров правой киральности, изображается коникой в пространстве периодов. В этом пространстве условие алгебраичности цикла линейное. Следовательно, если некоторая гиперплоскость содержит три (или более) точки, то вся эта коника содержится в этой гиперплоскости. Если класс когомологий алгебраичен в комплексной структуре I , то он также алгебраичен и в сопряженной структуре $\bar{I}$. Но если он алгебраичен и в третьей комплексной структуре, то он алгебраичен и во всех структурах семейства (4.78), но это запрещается стандартной теорией твисторов.

Далее, факторизация сферы образа $S_g^2 = \mathbb{P}^1$ по антиподальной инволюции дает проективную плоскость

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = S^2/J \quad (4.99)$$

и отображение

$$m_g: \text{SDAG} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2. \quad (4.100)$$

Мы получаем подмножество

$$P_g = m_g(\text{SDAG}_g) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \quad (4.101)$$

значений комплексных фаз sdAG-циклов.

Более того, если $\mathcal{C} = \{c \mid c^2 > 0\} \subset H^2(S, \mathbb{R})$ – внутренность светового конуса и

$$\text{SDAG} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset, \quad (4.102)$$

то это пересечение содержится в одном слое отображения (4.76) и определяет алгебраическую структуру $(I, \bar{I})$, скажем Северный и Южный полюсы. Такие две точки на S_g^2 дают специальные координаты (z_0, z_1) на нашей комплексной сфере Римана (не забудьте о проективной эрмитовой структуре на сфере-образе). Таким

образом, наша проективная плоскость допускает структуру проективной плоскости над $\mathbb{Q}$ с множеством рациональных точек как множеством рациональных направлений $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$. И рациональная проективная прямая $\mathbb{P}_{\infty}^1$ параметризует рациональные наклоны на экваторе. Отсюда, в точности так же, как в CY_1 -случае (см. (1.34)), получаем

$$P_g \subset S_{\mathbb{Q}}^2, \quad (4.103)$$

т.е. каждый наклон sdAG -цикла рационален.

ЗАМЕЧАНИЕ. Именно поэтому нам удобно было начинать с алгебраических K3 -поверхностей.

Основное условие 4.1 дает нам две ортогональные точки

$$m_g([e]) \quad \text{и} \quad m_g([s]) \quad (4.104)$$

на экваторе. Но уже тройка попарно ортогональных точек

$$(I, m_S([e]), m_S([s])) \subset P_S \subset S_{\mathbb{Q}}^2 \quad (4.105)$$

включает GFT-процесс, который в некоторых случаях превращает включение (4.80) в равенство.

Наконец, для наших отмеченных зеркальных пар (S, g) и (S', g') (см. (4.33), (4.34)) с идентификацией

$$H^2(S, \mathbb{Z}) = \text{Pic}_{S_I} \oplus H \oplus \text{Pic}_{S'} = H^2(S', \mathbb{Z}) \quad (4.106)$$

(см. (4.11)) имеем

$$\text{SDAG}_g \cap \text{SDAG}_{g'} \subset H. \quad (4.107)$$

§ 5. Комплексный 3-мерный случай

Здесь мы повторим конструкции предыдущих параграфов в случае трехмерных aK -многообразий. Такая структура X задается эрмитовой тройкой (ω, I, g) . Начнем с простых фактов и конструкций из линейной алгебры таких структур над точкой многообразия. Затем, в следующем параграфе, мы глобализуем эти конструкции до геометрии касательного расслоения в терминах специальных подпространств касательных направлений, чтобы определить новые типы подмногообразий и, следовательно, новые типы геометрий почти комплексных 3-мерных многообразий.

В четномерном случае мы имели две формы объема, как в формуле (2.9). В нечетномерном случае мы должны использовать специальный прием, позволяющий свести размерность 3 к 2.

Над любой точкой $p \in X$ в качестве слоя касательного расслоения мы имеем пространство $TX_p = \mathbb{C}^3$ со стандартной эрмитовой тройкой (ω_p, I_p, g_p) , состоящей из постоянной симплектической формы $\langle, \rangle = \omega_p$, постоянной евклидовой

метрики g_p , согласованных с комплексной структурой. Ориентированный лагранжев грассманиан является подмногообразием ориентированного грассманиана

$$(\Lambda_{\uparrow})_p \subset \text{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p) \quad (5.1)$$

коразмерности 3. Далее, вместо комплексного грассманиана (2.13) мы имеем в этой размерности подпространство

$$\{V \in \text{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p) \mid V \text{ содержит комплексное направление } z \in \mathbb{P}TX_p\} \quad (5.2)$$

3-мерных подпространств, содержащих комплексное направление. Так же, как и в двумерном случае, для каждого $V \in \text{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)$ существуют две возможности. Первая:

$$\dim \langle V, I(V) \rangle = 6. \quad (5.3)$$

Это – общий случай. В частности, каждое лагранжево подпространство V обладает этим свойством. Вторая:

$$\dim \langle V, I(V) \rangle = 4. \quad (5.4)$$

В этом случае V содержит комплексное направление (см. (5.2)) и определяет флаг

$$z_V \subset V \subset Z_V, \quad (5.5)$$

где z – единственное комплексное направление в V и $Z_V = \langle V, I(V) \rangle$ (5.4).

Мы можем различить две компоненты множества (5.2) при помощи ориентации: ориентация пространства V может быть (или не быть) совместимой с комплексной ориентацией плоскости z_V . Мы можем реализовать эти компоненты как подмногообразия уровня отображения грассманиана $\text{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)$ в S^2 в точности, как в двумерном случае для комплексных и антикомплексных направлений. Приведенные ниже конструкции работают в любой размерности. Мы уже описали их в §2 (см. (2.18)–(2.34)), но для избежания путаницы мы повторим их для 3-мерного случая еще раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Любой ненулевой элемент пространства $w \in \bigwedge^3 \mathbb{C}^3$ называется *комплексной ориентацией* пространства $\mathbb{C}^3$.

Пусть $w \in \bigwedge^3 \mathbb{C}^3$ – фиксированная комплексная ориентация на $\mathbb{C}^3 = TX_p$. Фиксируем некоторый ортогональный базис $e_1, e_2, e_3, I(e_1), I(e_2), I(e_3)$ пространства TX_p такой, что

$$w = (e_1 + I(e_1)) \wedge (e_2 + I(e_2)) \wedge (e_3 + I(e_3)). \quad (5.6)$$

Если мы фиксируем и форму объема w , так что $|w| = 1$, то для выбора комплексной ориентации нам останется фиксировать только фазу $e^{i\varphi}$.

Теперь в любом ориентированном подпространстве $V \in \text{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)$ рассмотрим ортогональный базис v_1, v_2, v_3 , и пусть M_V будет линейным преобразованием, переводящим вектор e_i в v_i и $I(e_i)$ в $I(v_i)$. Снова справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. 1) M_s является $\mathbb{C}$ -линейным отображением $TX_p \rightarrow TX_p$, т.е. это комплексная матрица в нашем базисе.

2) $\det M_V = 0$ в том и только том случае, если V содержит комплексное направление z . Конечно, z_V – ядро отображения M_V .

3) Подпространство V лагранжево в том и только том случае, если $M_V \in U(3)$.

Мы снова получаем отображение

$$d: \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (5.7)$$

сопоставляющее подпространству V детерминант матрицы M_V с теми же свойствами (2.25), но с одним существенным отличием от (2.26): в этом случае справедлива лемма Адамара.

ЛЕММА (Адамара). Имеем $V \in (\Lambda_\uparrow)_p \iff |d(V)| = 1$ (см. [15, лемма 1.9]).

Следовательно, ориентированный лагранжев грассманиан

$$(\Lambda_\uparrow)_p = d^{-1}(S^1). \quad (5.8)$$

Однако размерности всех других слоев равны 7, в то время как размерность слоя $d^{-1}(e^{i\varphi})$ равна 5 – исключительно маленькое число!

Теперь мы можем закончить нашу конструкцию. Снова имеем разложение

$$\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p) = \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)^+ \cup d^{-1}(\{|d(V)| = 1\}) \cup \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)^- \quad (5.9)$$

с отображением смены ориентации (2.31). Напомним, что средний член есть $\Lambda_\uparrow$.

Тогда склейка двух отображений: d на $\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)^+$ и $-(\bar{d})^{-1}$, которые совпадают на $d^{-1}(\{|d(V)| = 1\})$, дают отображение

$$\det_I: \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p) \rightarrow \mathbb{P}^1 = S_w^2 \quad (5.10)$$

(полезно сравнить с (2.30), (2.31)). Но различие 2-мерного и 3-мерного случаев заключается в том, что это отображение *в высшей степени не гладко вдоль* $(\Lambda_\uparrow)_p$.

Чтобы сделать его гладким, мы должны “раздуть” $(\Lambda_\uparrow)_p$ внутри $\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)$. Мы сделаем это после двух полезных замечаний о комплексных ориентациях.

Конечно, отображение $\det_I$ зависит от I и комплексной ориентации w , но слои

$$(\det_I)^{-1}(0) \quad \text{и} \quad (\det_I)^{-1}(\infty) \quad (5.11)$$

не зависят от комплексной ориентации. Только идентификация сферы образа $\mathbb{P}^1 = S_w^2$ зависит от w .

На самом деле пространство комплексных ориентаций

$$\{w\} = \mathbb{C}^* \quad (\text{или } e^{i\varphi}, \text{ если } |w| = 1) \quad (5.12)$$

действует на комплексной сфере $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ при помощи обычного умножения: для любого $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$

$$\det_{I, \varepsilon \cdot w} = \varepsilon \cdot \det_{I, w}. \quad (5.13)$$

Отсюда получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Все слои отображения $\det_I$ (5.10) над $S^2 \setminus (0 \cup \infty \cup S^1)$ диффеоморфны:*

$$(\det_I)^{-1}(z) = (\det_I)^{-1}(z') \quad \text{для} \quad z, z' \neq 0, \infty, e^{2\pi i \varphi}. \quad (5.14)$$

Отображая сферу образа S^2 нашего отображения на интервал $[0, \pi]$ при помощи отображения h (2.12), мы получаем отображение в “келеров угол”:

$$\alpha_{I,w} = h \cdot \det_{I,w}: \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p) \rightarrow [0, \pi] \quad (5.15)$$

(в точности, как в 2-мерном случае).

Более того, так же, как и в двумерном случае,

$$\dim \alpha_I^{-1}(z) = 8, \quad \dim \alpha_I^{-1}(e^{i\varphi}) = 5 \quad \text{и} \quad \dim \alpha_I^{-1}(0) = 7, \quad (5.16)$$

и для $\alpha_I^{-1}(z)$ (5.14) существует дополнительное отображение фазы

$$\alpha_I^{-1}(z) \rightarrow S^1, \quad (5.17)$$

ограничение которого на ориентированный лагранжев грассманиан совпадает со стандартным отображением фазы

$$\det: \Lambda_\uparrow(3, TX_p) \rightarrow S_p^1 \quad (5.18)$$

(см. начало нашей истории в §1).

Каждое подпространство $V \in \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)$ может содержать только одно комплексное направление, следовательно,

$$\text{rk } M_V \geq 2. \quad (5.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Следовательно, вместо M_V мы можем рассматривать $\text{adj } M_V$ и образ

$$\text{im}(\text{adj } M_V) = z_V, \quad \ker(\text{adj } M_V) = Z_V. \quad (5.20)$$

Так что, если $\det M_V = 0$, имеем ортогональное разложение

$$V = \ker M_V \oplus (\ker M_V)^{\perp_V}, \quad (5.21)$$

где $\perp_W$ обозначает ортогонал к подпространству в евклидовом пространстве W . Следовательно, $(\ker M_V)^{\perp_V}$ есть ориентированное 1-подпространство в V . Но плоскость

$$\langle (\ker M_V)^{\perp_V}, I((\ker M_V)^{\perp_V}) \rangle \quad (5.22)$$

комплексная. Это дает описание канонического флага $(z_V \subset V \subset Z_V)$ (5.5).

Отсюда получаем отображение

$$f: \alpha_I^{-1}(0) \rightarrow F_{1,2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{P}(TX_p)) = \mathbb{P}T\mathbb{P}(TX_p) \quad (5.23)$$

в комплексные флаги типа $(1,2)$ в $TX_p = \mathbb{C}^3$. Очевидно, что слоем этого отображения служит S^1 . Более точно, $\mathbb{P}^1$ – расслоение, которое является пространством образа отображения f (5.23), несет на себе тавтологическое расслоение H (расслоение Гротендика проективизации), снабженное эрмитовой метрикой. Расслоение на окружности единичного радиуса этого линейного расслоения является областью определения отображения (5.23):

$$\alpha_I^{-1}(0) = S^1(H). \quad (5.24)$$

Напомним, что эта конструкция дает описание всех слоев отображения $\det_I$, исключая $\{e^{i\varphi}\} = S^1$.

Далее, если мы рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}(TX_p)$, то слоем нашего отображения над точкой z будет пространство вещественных лучей в пространстве $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^3/z$. Следовательно, этот слой есть 3-сфера единичного радиуса

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{C}}^{-1}(z) = S^3 \subset \mathbb{C}^3/z. \quad (5.25)$$

Пользуясь точной последовательностью Эйлера, нетрудно показать, что полный слой отображения α_I над нулем есть

$$\alpha_I^{-1}(0) = S^3(T\mathbb{P}(TX_p)(-1)), \quad (5.26)$$

т.е. расслоение на единичные 3-сферы подкрученного касательного расслоения $T\mathbb{P}(TX_p)(-1)$ комплексной проективизации касательного пространства к X в точке $p \in X$. Конечно,

$$S^3(T\mathbb{P}(TX_p)(-1)) = S^1(H) \quad (5.27)$$

и послойно

$$S^3 \rightarrow \mathbb{P}^1 \quad (5.28)$$

является расслоением Хопфа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это первое существенное различие 2- и 3-мерных комплексных случаев: в 2-мерном случае слой отображения α над нулем есть в точности проективизация касательного пространства $\mathbb{P}W_-$ в точке p (см. (2.13)).

Второе различие заключается в том, что прообраз

$$\alpha_{I,w}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\Lambda_{\uparrow})_p \quad (5.29)$$

имеет предельно маленькую размерность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. 1) Ориентированное 3-мерное подпространство $V \in \mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)$ называется *3/2-псевдоголоморфным* (3/2-ph для краткости), если

$$\alpha_I(V) = 0 \quad (5.30)$$

и *3/2-антипсевдоголоморфным* (3/2-aph для краткости), если

$$\alpha_I(V) = \infty. \quad (5.31)$$

2) Подпространство V , расширенное до пары $(v \subset V)$, где v – ориентированное одномерное подпространство пространства V , называется *суперлагранжевым* (superLag для краткости), если

$$V \in (\Lambda_{\uparrow})_p, \quad (5.32)$$

и – superspLag, если V есть spLag.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Мы знаем, что свойство 1) не зависит от комплексной ориентации w , но свойство 2) зависит от w .

2) Для определения $\Lambda_{\uparrow}$ мы используем форму ω , которая зависит от I . Поэтому абсолютно полное обозначение выглядело бы как $\Lambda_{\uparrow}(I)$.

3) Если определять суперструктуру на V как фиксацию ядра ограничения симплектической формы на это подпространство, то каждое $3/2$ -ph-подпространство будет автоматически суперподпространством: ортогонал к комплексному направлению – единственное ядро ограничения симплектической формы на V . Значит, выбор любого вектора в лагранжевом подпространстве ликвидирует это различие между лагранжевыми и $3/2$ -ph-подпространствами, что и приводит в конечном счете к возможности продеформировать лагранжеву супергеометрию в $3/2$ -алгебраическую в нечетномерном случае (см. ниже).

Но мы можем описать отображение α_I (5.7) и другим способом: используя форму ω , которая определяется комплексной структурой I (и нашей метрикой). Рассмотрим открытое множество

$$\mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)_{\neq 0} = \mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p) - (\Lambda_{\uparrow})_p, \quad (5.33)$$

определенное условием $V \in \mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)_{\neq 0} \iff \omega|_V \neq 0$. Любое такое V допускает разложение

$$V = \ker \omega|_V \oplus (\ker \omega|_V)^{\perp V}, \quad (5.34)$$

и мы фиксируем *ориентацию плоскости*

$$t_V = (\ker \omega|_V)^{\perp V} \quad (5.35)$$

так, что *объем $\omega|_t$ положителен*.

Получаем отображение

$$\beta_{\omega}: \mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)_{\neq 0} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\uparrow}(2, TX_p), \quad (5.36)$$

отображающее V в t_V (5.25).

Но для $\mathrm{Gr}_{\uparrow}(2, TX_p)$ мы имеем *классическое* отображение в келеров угол

$$\alpha_p: \mathrm{Gr}_{\uparrow}(2, TX_p) \rightarrow [0, \pi], \quad (5.37)$$

сопоставляющее плоскости t ее келеров угол (2.9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта конструкция зависит только от *конформного класса* формы ω .

Как было замечено выше, все, что мы должны теперь сделать, – это “раздуть лагранжев грассманиан $(\Lambda_{\uparrow})$ внутри всего грассманиана”, т.е. рассмотреть пространство пар

$$\widetilde{\mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)} = \{(v \in V) \mid v - \text{ядро формы } \omega|_V\} \quad (5.38)$$

и его проекцию на V :

$$\sigma: \widetilde{\mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p)} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\uparrow}(3, TX_p). \quad (5.39)$$

ТЕОРЕМА 5.1. 1) *Отображение σ является изоморфизмом над $\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)_{\neq 0}$.*

2) *Прообраз*

$$\sigma^{-1}(\Lambda_\uparrow) = S^2(U) \quad (5.40)$$

есть расслоение на единичные сферы универсального расслоения U над ориентированным лагранжеевым грассманианом $\Lambda_\uparrow$. Это пространство является многообразием модулей суперлагранжевых 3-направлений (5.32).

3) *Отображение (5.36) допускает подъем до гладкого отображения*

$$\beta_\omega: \widetilde{\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)} \rightarrow \text{Gr}_\uparrow(2, TX_p); \quad (5.41)$$

и для любого лагранжеева супернаправления $v \in V$ $\beta_\omega(v \subset V) = v^\perp$, т.е. $t_{(v \subset V)} = v^\perp$ и V есть 3/2-ph $\Rightarrow \beta_\omega(V) = z_V$.

4) $\beta_\omega \sigma^{-1}(\Lambda_\uparrow) = \Lambda_\uparrow(2, TX_p) \subset \text{Gr}_\uparrow(2, TX_p)$, и любой слой $\beta_\omega^{-1}(t) \subset S^3(Q_4)_t$, где Q_4 – универсальное факторрасслоение на $\text{Gr}_\uparrow(2, TX_p)$; пусть $\mathbb{P}TX_p \subset \text{Gr}_\uparrow(2, TX_p)$ – проективная плоскость комплексных направлений в касательном пространстве, тогда

$$\beta_\omega^{-1}(t) = I(t) \cap S^3(Q_4)_t = S^1 \iff t \in \text{Gr}_\uparrow(2, TX_p) - \mathbb{P}TX_p$$

и

$$\beta_\omega^{-1}(t) = S^3(Q_4)_t \iff t \in \mathbb{P}TX_p.$$

5) *Композиция отображений (5.37) и (5.41) дает гладкое отображение*

$$\tilde{\alpha}_I: \widetilde{\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)} \rightarrow [0, \pi]. \quad (5.42)$$

Его геометрический смысл чрезвычайно прост: $\tilde{\alpha}_I$ сопоставляет подпространству V келеров угол плоскости t_V . В частности, $\tilde{\alpha}_I((v \in V)) = \pi/2$.

Все утверждения этой теоремы проверяются непосредственно шаг за шагом. Мы называли ее теоремой не из-за сложности доказательства, а из-за важности этих утверждений во всех конструкциях, приводимых ниже.

Наше отображение зависит от комплексной структуры I . *Что случится, если мы эту комплексную структуру поменяем?*

В нашем нечетномерном случае ориентированное 3-мерное подпространство $V \in \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)$ никакой новой комплексной структуры на TX_p , совместимой с метрикой g , не определяет. Но флаг $(t \subset V \subset T)$, где t – ориентированная 2-плоскость в V и T – ориентированное 4-мерное подпространство, определяет новую комплексную структуру на TX_p , совместимую с метрикой g . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим ортогональное разложение на 2-мерные подпространства

$$TX_p = t \oplus t^\perp \oplus T^\perp \quad (5.43)$$

и введем стандартную комплексную структуру на каждом 2-мерном подпространстве в этом разложении. Это и определяет новую комплексную структуру

$$I_{(t \subset V \subset W)} \quad (5.44)$$

на TX_p , в которой t является комплексным направлением, а T – комплексным подпространством.

Далее, описание пространства всех флагов $(t \subset V \subset T)$ следующее:

$$F_{2,3,4} = S^2(U) \times_{\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)} S^2(Q_3) \rightarrow \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p), \quad (5.45)$$

где U – тавтологическое расслоение на грассманиане, Q – универсальное фактор-расслоение и $S^2(*)$ – расслоение на единичные сферы расслоения $*$.

Каждая новая комплексная структура (5.44) определяет отображение

$$\alpha_{I_{(t \subset V \subset T)}} : \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p) \rightarrow [0, \pi], \quad (5.46)$$

которое негладко вдоль лагранжевого грассманиана $\Lambda_\uparrow(I_{(t \subset V \subset T)})$, и отображение $\tilde{\alpha}_{I_{(t \subset V \subset T)}}$ (5.42), которое регуляризует отображение α_I .

Снова имеем подпространство 3/2-псевдоголоморфных ориентированных 3-подпространств

$$\alpha_{I_{(t \subset V \subset W)}}^{-1}(0) \subset \text{Gr}_\uparrow(3, TX_p) \quad (5.47)$$

и т.д.

§ 6. Комплексные структуры и глобализации

Теперь настало время описать пространство комплексных структур на TX_p , совместимых с метрикой g_p . Для этого рассмотрим комплексификацию метрической квадрики $g_p^\mathbb{C}$ в $TX_p^\mathbb{C} = TX_p \otimes \mathbb{C}$; любая совместимая комплексная структура на TX_p задается максимальным изотропным подпространством в $T^{1,0} \subset TX_p^\mathbb{C}$ относительно нашей квадрики $g_p^\mathbb{C}$. Здесь естественно проективизировать все наши геометрические объекты. Мы получим

$$G_p \subset \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}TX_p^\mathbb{C}, \quad (6.1)$$

где G_p – гладкая 4-мерная квадрика в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}TX_p^\mathbb{C}$ изотропных прямых. Проективизация пространства $T^{1,0} \subset TX_p^\mathbb{C}$ – проективная плоскость на квадрике G_p . Существуют две системы таких плоскостей на любой неособой квадрике, которую мы можем интерпретировать как квадрику Плюккера, т.е. как грассманиан прямых в $\mathbb{P}_+^3$. Тогда наша система плоскостей в G_p задается точками пространства $\mathbb{P}_+^3$ (как множество прямых, проходящих через эту точку) и другая система плоскостей задается как множество прямых в фиксированной плоскости, т.е. точками двойственного пространства $(\mathbb{P}_+^3)^* = \mathbb{P}_-^3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Эти системы плоскостей в G_p различаются ориентацией многообразия X .*

Каждое из этих проективных пространств – проективизация спинорного пространства в точке $p \in X$:

$$\mathbb{P}_\pm^3 = \mathbb{P}W^\pm, \quad \mathbb{P}W^+ = (\mathbb{P}W^-). \quad (6.2)$$

Далее, проективное пространство $\mathbb{P}TX_p^\mathbb{C}$ имеет вещественную структуру, относительно которой наша метрическая квадрака G_p (6.1) вещественна:

$$\theta: G_p \rightarrow G_p \quad (6.3)$$

и без вещественных точек. Следовательно, антиинволюция θ должна отображать одну систему плоскостей на G_p в другую:

$$\theta: \mathbb{P}_+^3 \rightarrow \mathbb{P}_-^3 = (\mathbb{P}_+^3)^*. \quad (6.4)$$

Таким образом, θ определяет проективно-эрмитову структуру на $\mathbb{P}_+^3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Пространство комплексных структур на TX_p , совместимых с метрикой g_p и ориентацией на X , есть $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}W_p^+$. (В точности, как в двумерном случае.)*

Получаем отображение

$$c_p: F_{2,3,4} = S^2(U) \times_{\text{Gr}_1(3, TX_p)} S^2(Q) \rightarrow \mathbb{P}W_p^+, \quad (6.5)$$

сопоставляющее флагу $(t \subset V \subset W)$ комплексную структуру $I_{(t \subset V \subset W)}$ (ср. с (2.6)). Здесь и далее U и Q – универсальные под- и факторрасслоения на грасманиане.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Слой*

$$c_p^{-1}(I_{(t \subset V \subset W)}) = \alpha_{I_{(t \subset V \subset W)}}^{-1}(0). \quad (6.6)$$

(см. (5.46), (5.47)).

Нашей исходной комплексной структурой на I является точка в $\mathbb{P}W_p^+$,

$$I_p \in \mathbb{P}W_p^+, \quad (6.7)$$

и сопряженная комплексная структура

$$\bar{I} = \theta(I) \in \mathbb{P}W_p^-. \quad (6.8)$$

Но эта точка определяет проективную плоскость

$$(\mathbb{P}_I^2)_p \subset \mathbb{P}W_p^+. \quad (6.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. 1) Каждая пара (I, I') комплексных структур на TX_p имеет единственное общее комплексное направление.

2) Плоскость $\mathbb{P}_I^2$ канонически изоморфна проективизации $\mathbb{P}TX_p$ касательного пространства (в комплексной структуре I).

3) Каждая ориентированная плоскость t в TX_p определяет прямую $l_t \in \mathbb{P}W_p^+$, т.е. точку на комплексной квадрике G_p (6.1). Это отображение

$$s_p: \text{Gr}_1(2, TX_p) \rightarrow G_p \quad (6.10)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, каждая пара точек $I, I' \in \mathbb{P}W_p^+$ определяет две проективные плоскости

$$\mathbb{P}T_I^{1,0}, \mathbb{P}T_{I'}^{1,0} \subset G_p \subset \mathbb{P}TX_p^{\mathbb{C}} \quad (6.11)$$

(см. (6.1)). Эти плоскости на квадрике имеют одну точку пересечения

$$\mathbb{P}T_I^{1,0} \cap \mathbb{P}T_{I'}^{1,0} = z(I, I') \subset \mathbb{P}TX_p^{\mathbb{C}}, \quad (6.12)$$

которая и дает общее голоморфное направление. Получаем утверждение 1).

Для проверки утверждения 2) рассмотрим отображение

$$z(I, \cdot): \mathbb{P}_I^2 \rightarrow \mathbb{P}T_I^{1,0}, \quad (6.13)$$

сопоставляющее плоскости $I' \in \mathbb{P}_I^2$ точку пересечения $z(I, I')$. Ясно, что это сопоставление обратимо.

Таким образом, мы получаем следующую интерпретацию спинорного пространства правой киральности (6.2)

$$W_p^+ = \mathbb{C} \cdot I \oplus TX_p \quad (6.14)$$

в силу равенства $TX_p = T_I^{1,0}$. Теперь, для любой точки $p \in \mathbb{P}_I^2$ мы имеем проективную прямую

$$\langle I, p \rangle \subset \mathbb{P}W^+ \quad (6.15)$$

комплексных структур.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. 1) Каждая комплексная структура из семейства $\langle I, p \rangle$ имеет одно и то же общее с I комплексное направление.

2) Для каждого комплексного направления p комплексной структуры I семейство комплексных структур $F_I(p)$, каждая из которых содержит p как комплексное направление, совпадает с семейством (6.15):

$$F_I(p) = \langle I, p \rangle \subset \mathbb{P}W^+. \quad (6.16)$$

Теперь мы можем отождествить семейство комплексных структур $F_I(p)$ (6.16) с p , заданным комплексным направлением $t \subset T_I^{1,0}$, с пространством комплексных структур на 4-мерном пространстве

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4 = T_I^{1,0}/t. \quad (6.17)$$

А его, в свою очередь, можно отождествить со сферой образа отображения pr_+ (2.6) для комплексного двумерного случая (см. § 2), т.е. мы имеем отождествление $\langle I, p \rangle = \mathbb{P}_+^1$ для $TX_p = \mathbb{R}^4$ и отображение

$$\text{pr}_+ : \text{Gr}_\uparrow(2, T\mathbb{P}_{\theta(I)}^2) \rightarrow \langle I, p \rangle. \quad (6.18)$$

Теперь мы можем включить в работу нашу форму ω и получить отображение в келеров угол (2.11)

$$\text{Gr}_\uparrow(2, T\mathbb{P}_\infty^2) \xrightarrow{\text{pr}_+} \langle I, p \rangle \xrightarrow{h} [0, \pi] \quad (6.20)$$

(см. (2.7)–(2.13)).

Таким образом, отождествляя точку p плоскости $\mathbb{P}_{\theta(I)}^2$ с комплексным направлением $t \subset T_I^{1,0}$, мы получаем отождествление семейства $F_I(p)$ (6.15) с семейством комплексных структур $\langle I, p \rangle = S^2$ на $\mathbb{C}^2 = T_I^{1,0}/t$ (6.16).

Следовательно, все отображения (2.12)

$$h : \langle I, p \rangle \rightarrow [0, \pi] \quad (6.21)$$

являются ограничениями на прямые $\langle I, p \rangle \subset \mathbb{P}^3$ отображения

$$\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\bar{\sigma}} S_I^6 \xrightarrow{h} [0, \pi], \quad (6.22)$$

где $\bar{\sigma}$ – сжатие проективной плоскости $\mathbb{P}_\theta^2$ в точку ∞ . Обозначим эту композицию через

$$h_I : S_I^6 \rightarrow [0, \pi] \quad (6.23)$$

и назовем ее *функцией высоты* (для 3-мерного случая).

Полученная шестимерная сфера S^6 является слоем пространства Тома комплексного векторного расслоения TX^I для исходной аК-структуры на X .

Таким образом, в 2-мерном случае мы имеем отображение (2.12) $\mathbb{P}_+^1 = S^2 \xrightarrow{h} [0, \pi]$, а в 3-мерном случае – отображение (6.23) слоя пространства Тома

$$\text{Th}(TX_p^I) \xrightarrow{h_i} [0, \pi]. \quad (6.24)$$

Снова мы имеем две точки $I = 0$ и

$$\bar{I} = \theta(I) = \infty, \quad (6.25)$$

прообразами которых служат точки

$$h_I^{-1}(0) = I, \quad h_I^{-1}(\infty) = \bar{I}, \quad (6.26)$$

а все другие слои мы можем поднять при помощи $\bar{\sigma}^{-1}$ (6.22) до $\mathbb{P}^3$ и спроектировать (из I) на проективную плоскость $\mathbb{P}_\theta^2$:

$$\psi = \bar{\sigma}^{-1} \cdot \text{pr}_I: h_i^{-1}(\varphi) \rightarrow \mathbb{P}_\theta^2. \quad (6.27)$$

Легко видеть, что это отображение сюръективно и слой над I -комплексным направлением $z \in \mathbb{P}T X_p^I$

$$\psi^{-1}(z) = h^{-1}(\varphi) \quad (6.28)$$

есть фазовая окружность стандартного отображения в келеров угол (2.12) (в 2-мерном случае)

$$h: \langle I, z \rangle \rightarrow [0, \pi], \quad (6.29)$$

сопоставляющего комплексной структуре $I' \in \langle I, z \rangle$ комплексную структуру на $\mathbb{R}^4 = TX/z$ с келеровым углом φ .

В частности, $h^{-1}(\pi/2)$ – окружность комплексных структур $\{I'\} \subset \langle I, z \rangle$ таких, что любое I' -комплексное направление в $\mathbb{R}^4 = TX/z$ является лагранжевым (точнее, I -лагранжевым).

Далее, в прямом произведении

$$\text{Gr}_\uparrow(2, TX_p) \times \mathbb{P}_+^3 \quad (6.30)$$

имеем подпространство

$$\bigwedge_{\text{univ}} = \{(t, I) \mid \omega_I|_t = 0\}. \quad (6.31)$$

В частности, для каждого $t \in \text{Gr}_\uparrow(2, TX_p)$ имеем

$$\mathcal{J}_t = (t, \mathbb{P}_+^3) \cap \bigwedge_{\text{univ}} \in \mathbb{P}_+^3, \quad (6.32)$$

т.е. пространство всех комплексных структур, для которых t лагранжево.

По тем же причинам мы получаем подпространства в $\mathbb{P}_+^3$:

$$\mathcal{J}_V = \{I \mid \omega_I|_V = 0\} \quad (6.33)$$

и т.д. Задачу описания этих подпространств мы оставляем читателю.

Глобализация. В 3-мерном случае наши поточечные геометрические объекты имеют “модули”. Поэтому, прежде чем их глобализовать, соберем вместе все наблюдения наших локальных исследований.

1) Прежде всего, зависимость отображения $\det_{I,w}$ от I и от комплексной ориентации w (см. (5.6)) описывается формулой (5.13).

2) Раздутый грассманиан $\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)$ (5.39) имеет регулярное отображение $\tilde{\alpha}_I$ (5.42) на интервал $[0, \pi]$, которое *субмерсивно* над открытым интервалом $(0, \pi)$, т.е. все слои его диффеоморфны.

3) Это отображение $\tilde{\alpha}_I$ (5.42) разлагается в композицию

$$\tilde{\alpha}_I: \widetilde{\text{Gr}_\uparrow(3, TX_p)} \xrightarrow{\widetilde{\det}_I} \mathbb{P}^1 = S^2 \xrightarrow{h} [0, \pi], \quad (6.34)$$

где $\widetilde{\det}_I$ – регуляризация отображения (5.10) после раздутия лагранжева грассманиана $\Lambda_\uparrow$.

Основной результат наших конструкций:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. 1) *Отображение $\widetilde{\det}_I$* (6.34)

$$\mathrm{Gr}_\uparrow(\widetilde{3, TX_p}) \rightarrow \mathbb{P}^1 = S^2 \quad (6.35)$$

субмерсивно всюду над сферой образа.

2) *Все слои этого отображения диффеоморфны и*

$$\widetilde{\det}_I^{-1}(z) = \alpha_I^{-1}(0). \quad (6.36)$$

По сути дела эти утверждения уже доказаны выше.

В частности, как и в 2-мерном случае, пространство $\widetilde{\det}_I^{-1}(e^{i\varphi})$ *суперлагранжевых подпространств* изоморфно пространству 3/2-псевдоголоморфных подпространств:

$$\widetilde{\det}_I^{-1}(e^{i\varphi}) = \alpha_I^{-1}(0). \quad (6.37)$$

Более того, как и в 2-мерном случае, каждый слой $\tilde{\alpha}_I^{-1}(z)$, $z \neq 0, \infty$ допускает отображение фазы

$$\alpha_I^{-1}(z) \rightarrow S^1, \quad (6.38)$$

которое на ориентированном лагранжевом грассманиане совпадает со стандартным отображением фазы

$$\det: \Lambda_\uparrow(3, TX_p) \rightarrow S_p^1, \quad (6.39)$$

описанным в § 1.

Глобализуем эти отображения. Прежде всего мы имеем ориентированную грассманизацию касательного расслоения

$$\pi: \mathrm{Gr}_\uparrow(3, TX) \rightarrow X, \quad (6.40)$$

послойно совпадающую с $\mathrm{Gr}_\uparrow(3, TX_p)$, и расслоение

$$\tilde{\pi}: \mathrm{Gr}_\uparrow(\widetilde{3, TX}) \rightarrow X \quad (6.41)$$

на раздутые грассманианы $\sigma: \mathrm{Gr}_\uparrow(\widetilde{3, TX}) \rightarrow \mathrm{Gr}_\uparrow(3, TX)$ вдоль $\Lambda_\uparrow(TX)$.

Затем мы должны глобализовать 2-сферы образов. Здесь геометрический смысл формулы (5.13) показывает, что пространство образа глобализации послойных отображений $\det_{I,w}$ (5.10) есть проективное $\mathbb{P}^1$ -расслоение

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)). \quad (6.42)$$

Это векторное расслоение $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)$ не простое. В частности, его группа автоморфизмов содержит мультипликативную группу

$$\mathbb{C}^* \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)), \quad (6.43)$$

которая сохраняет компоненты прямого разложения. Конечно, мы можем рассматривать ее как подгруппу группы автоморфизмов линейного расслоения $L_{-K} = \mathcal{O}_X(-K_X)$:

$$\mathbb{C}^* \subset \mathrm{Aut}(L_{-K}). \quad (6.44)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Выбор изоморфизма

$$\bigwedge^2 (\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)) = L_{-K} \quad (6.45)$$

называется *глобальной комплексной ориентацией* многообразия X .

Таким образом, пространством глобальных ориентаций снова служит $\mathbb{C}^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку мы хотим лишь слегка продеформировать алгебраическую геометрию, исходная почти комплексная структура на X интегрируема, и мы имеем изоморфизм

$$\mathbb{C}^* = \text{Aut}(L_{-K}) \quad (6.46)$$

с группой голоморфных автоморфизмов линейного расслоения L_{-K} .

В общем случае, это отождествление определено с точностью до комплексного калибровочного преобразования расслоения L_{-K} .

ПРИМЕР (случай Калаби–Яо). В этом случае глобальная комплексная ориентация задается выбором голоморфной 3-формы θ .

Фиксируем теперь глобальную комплексную ориентацию w на X как в (6.12); тогда мы получим глобализацию отображения (5.10)

$$\det_I: \text{Gr}_\uparrow(3, TX) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)) \quad (6.47)$$

расслоений на X .

Ограничение этого отображения на ориентированный лагранжев грассманиан $\Lambda_\uparrow(TX)$ дает отображение

$$\det: \Lambda_\uparrow(TX) \rightarrow S^1(L_{-K}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)) \quad (6.48)$$

(в точности, как в (2.42)).

Это расслоение образов (линейчатое 4-мерное многообразие) имеет два сечения

$$S_0 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X) \quad \text{и} \quad S_\infty = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X(-K_X)), \quad (6.49)$$

и S^1 -подрасслоение

$$S^1(L_{-K}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)), \quad (6.50)$$

и все эти три подпространства попарно не пересекаются.

Регуляризация отображения (6.47) есть отображение

$$\widetilde{\det}_I: \widetilde{\text{Gr}_\uparrow(3, TX)} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X)), \quad (6.51)$$

которое субмерсивно и гладко.

Наконец, над каждой точкой $p \in X$ пространство пар (I, w) *ориентированных комплексных структур* является подъемом проективного пространства $\mathbb{P}_+^3$ до векторного пространства W^+ :

$$W_p^+ = \{(I, w)\}. \quad (6.52)$$

ПРЕДОЖЕНИЕ 6.7. *Пространство ориентированных комплексных структур есть векторное расслоение*

$$W^+ = \mathcal{O}_X \oplus TX. \quad (6.53)$$

Группа автоморфизмов $\text{Aut } W^+$ содержит подгруппу $\mathbb{C}^*$, действующую гомотетиями на TX . Эту подгруппу мы можем снова отождествить с $\mathbb{C}^* \subset \text{Aut } L_{-K}$.

Послойное сжатие подрасслоения $\mathbb{P}TX$ до сечения дает расслоение Тома

$$S = TX \cup X_\infty, \quad (6.54)$$

которое послойно является S^6 -расслоением (см. (6.22)).

§ 7. SpLag- и sdAG 3-циклы

Как и в предыдущих случаях, каждый ориентированный 3-мерный цикл $Y \subset X$, заданный вложением $i: Y \rightarrow X$, допускает подъем Гаусса:

$$G(i): Y \rightarrow \text{Gr}_1(3, TX)|_Y, \quad (7.1)$$

сопоставляющий точке $y \in Y$ ориентированное подпространство $TY_y \subset TX_y$. Композиция этого отображения Гаусса и отображения $\det_I$ (6.46) определяют отображение

$$\det_I: Y \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X))|_Y. \quad (7.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Ориентированный 3-мерный цикл $Y \subset X$ называется *3/2-псевдоголоморфным* (3/2-ph для краткости), если

$$\det_I(Y) \subset S_0 \quad (7.3)$$

(см. (6.49)) и *3/2-антипсевдоголоморфным* (3/2-aph для краткости), если

$$\det_I(Y) \subset S_\infty. \quad (7.4)$$

Как мы знаем, цикл Y лагранжев в том и только том случае, если

$$\det_I(Y) \subset S^1(L_{-K}). \quad (7.5)$$

Как и выше, пусть a_{L-C} – связность Леви-Чивита на антиканоническом линейном расслоении L_{-K} и

$$F_{L-C} \in \Omega^2(X) \quad (7.6)$$

– ее кривизна как 2-форма на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Ориентированный 3-цикл Y на X называется *канонически плоским*, если существует односвязное подмногообразие $B \supset Y$ такое, что

$$F_{L-C}|_Y = 0. \quad (7.7)$$

Как и выше, если цикл Y канонически плоский, то существует каноническая тривиализация ограничения расслоения образа отображения $\det_I$

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X))|_Y = Y \times \mathbb{P}^1,$$

а каноническая проекция на слой есть отображение

$$\text{pr}: \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X))|_Y \rightarrow \mathbb{P}^1 = S^2. \quad (7.8)$$

Композиция этих отображений дает отображение канонически плоского цикла Y :

$$m_I = \text{pr} \cdot \det_{\mathbb{C}} \cdot G(i): Y \rightarrow S^2. \quad (7.9)$$

Для того чтобы регуляризовать это отображение, т.е. отображение (6.51), мы должны слегка уточнить определение 3-мерного цикла: каждый 3-цикл Y имеет (компактное) подмножество

$$Y_{\Lambda} = \{y \in Y \mid TY_y \in \Lambda_{\uparrow}(3, TX_y)\}, \quad (7.10)$$

т.е. множество точек с лагранжевым касательным пространством.

Теперь на подмножестве $Y \setminus Y_{\Lambda}$ определено поле направлений

$$0 \rightarrow \ker(\omega|_Y) \rightarrow TY \xrightarrow{\omega} T^*Y. \quad (7.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Пара (v, Y) , где v – любое гладкое продолжение поля направлений $\ker \omega|_Y$ с $Y \setminus Y_{\Lambda}$ на Y , называется *суперциклом*, если это поле параллельно самому себе относительно связности Леви-Чивита на TY .

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждый 3/2-ph цикл может иметь только одну структуру суперцикла: $Y_{\Lambda} = \emptyset$ и $\omega|_Y$ должна быть плоской относительно $g|_Y$. Такой цикл мы назовем s3/2-ph цикл.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ. Не каждый 3/2-ph-цикл является s3/2-ph-циклом.

Для любого лагранжева цикла структура суперцикла задается фиксацией характера его фундаментальной группы Y .

Но теперь для любого ориентированного суперцикла (v, Y) существует подъем Гаусса его погружения $i: Y \rightarrow X$:

$$G(i): (v, Y) \rightarrow \widetilde{\text{Gr}_{\uparrow}(3, TX)}|_Y, \quad (7.12)$$

сопоставляющий точке $y \in Y$ ориентированную пару

$$v_y TY_y \in \widetilde{\text{Gr}_{\uparrow}(3, TX_y)}. \quad (7.13)$$

Композиция этого отображения Гаусса и отображения $\widetilde{\det_I}$ (6.51) определяет отображение

$$\det_{\mathbb{C}}: Y \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X))|_Y. \quad (7.14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Ориентированный 3-мерный суперцикл (v, Y) называется *лагранжевым суперциклом*, если

$$\det_{\mathbb{C}}(Y) \subset S^1(L_{-K}) \quad (7.15)$$

(см. (6.50)).

Для любого канонически плоского 3-мерного суперцикла (v, Y) *отображение комплексной фазы*

$$m_{\mathbb{C}} = \text{pr} \circ \det_{\mathbb{C}} \circ G(i): Y \rightarrow S^2 \quad (7.16)$$

корректно определено как композиция регуляризованных отображений.

Сфера образа S^2 этого отображения имеет две специальные точки

$$0 = \mathbb{P}^1 \cap S_0 \quad \text{и} \quad \infty = \mathbb{P}^1 \cap S_{\infty} \quad (7.17)$$

и выделенную окружность

$$S^1 = \mathbb{P}^1 \cap S^1(L_K). \quad (7.18)$$

Эта сфера допускает стандартную комплексную структуру и разбиение (2.37), (2.38):

$$S^2 = \mathbb{C} \cup \infty = D^+ \cup S^1 \cup D^-.$$

Теперь мы можем расширить наш список (6.3)–(6.5) следующими специальными случаями:

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{C}}(Y) \subset D^+ &\iff Y \text{ — } 3/2\text{-симплектический,} \\ m_{\mathbb{C}}(Y) \subset D^- &\iff Y \text{ — } 3/2\text{-антисимплектический} \end{aligned}$$

и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. 1) Канонически плоский цикл Y является *sdAG-циклом*, если образ $m_{\mathbb{C}}(Y)$ есть точка сферы образа S^2 (7.16), т.е. дифференциал этого отображения зануляется:

$$dm_{\mathbb{C}} = 0. \quad (7.19)$$

2) sdAG-цикл Y является *spLag-циклом*, если

$$m_{\mathbb{C}}(Y) \in S^1 \subset S^2 \quad (7.20)$$

(см. (7.18); ясно, что это отображение “забывает” суперструктуру).

3) sdAG-цикл Y называется *α -циклом*, если

$$\alpha_I(Y) = \alpha \in [0, \pi]. \quad (7.21)$$

Легко видеть, что sdAG-цикл Y является 3/2-ph-циклом в том и только том случае, если

$$m_{\mathbb{C}}(Y) = 0 \in S^2, \quad (7.22)$$

и 3/2-aph-циклом в том и только том случае, если

$$m_{\mathbb{C}}(Y) = \infty \quad (7.23)$$

(см. определение 6.1).

Отступление о зеркальной симметрии IV: CY_3 . Снова каждый лагранжев цикл является канонически плоским, если X – односвязное многообразие Калаби–Яо с риччи-плоской метрикой. В этом случае $B = X$ и *существует глобальное отображение комплексной фазы*

$$m_{\mathbb{C}}: \widetilde{\text{Gr}}_{\uparrow}(3, TX) \rightarrow S^2 \quad (7.24)$$

такое, что для каждого 3-мерного суперцикла Y его отображение комплексной фазы есть композиция отображения Гаусса и этого универсального отображения.

Более того, каждый sdAG-цикл Y на CY -трехмерном многообразии X определяет комплексную ориентацию X , т.е. тривиализацию канонического линейного расслоения $\wedge^3 TX$. Такая тривиализация задается выбором голоморфной 3-формы θ . Пара (X, θ) называется *ориентированным CY_3 -трехмерным многообразием Калаби–Яо*.

Любой spLag-цикл Y на ориентированном CY_3 X является лагранжевым относительно келеровой формы ω и удовлетворяет условию

$$\text{Re } \theta|_Y = 0 \quad (7.25)$$

(см. [16]).

Теперь наша цель – исследовать локальную теорию деформаций супер sdAG-циклов внутри фиксированного CY_3 точно так же, как мы это сделали в §3 для случая CY_2 -К3-поверхностей (см. (3.24)–(3.28)). Напомним, что начальной точкой этого исследования была теория полных линейных систем голоморфных кривых на алгебраической поверхности, а основным стимулирующим фактом было наблюдение 3.1. В 3-мерном случае используется опыт теории локальной деформации spLag-циклов внутри CY_3 .

Эта теория сравнительно хорошо развита (полезный для нас аспект ее содержится в [17]). Пусть $\mathcal{M}_Y$ – пространство локальных деформаций spLag-циклов в окрестности гладкого spLag-цикла Y . Тогда касательное пространство к этому многообразию модулей в точке Y есть

$$T\mathcal{M}_Y = H^1(Y, \mathbb{R}) \quad (7.26)$$

– пространство гармонических (в индуцированной метрике) 1-форм на Y .

Это – пространство инфинитезимальных деформаций, а пространство препятствий для семейства Курашии деформаций совпадает с $H^2(Y, \mathbb{R})$. Однако на самом деле никаких препятствий нет: каждая инфинитезимальная деформация продолжается до геометрической деформации (в точности, как это происходит для голоморфных кривых на регулярной алгебраической поверхности S положительного геометрического рода (см. (3.17)).

С другой стороны, если Y – гомологическая сфера (т.е. $H^*(Y) = H^*(S^3)$), то spLag-цикл *жесткий*.

Теперь пусть $S\mathcal{M}_{(v,Y)}$ – пространство локальных деформаций spLag -суперциклов вблизи гладкого spLag -суперцикла (v, Y) . Тогда касательным пространством к этому пространству модулей в точке (v, Y) будет

$$TS\mathcal{M}_{(v,Y)} = H^1(Y, \mathbb{R}) \oplus i \cdot H^1(Y, \mathbb{R}) = H^1(Y, \mathbb{C}) \quad (7.27)$$

как пространство гармонических *комплексных* 1-форм (в индуцированной метрике) на Y .

Это – пространство инфинитезимальных деформаций, а пространством препятствий для семейства Кураниши будет $H^2(Y, \mathbb{C})$. Однако на самом деле препятствий нет: каждая инфинитезимальная деформация продолжается до геометрической.

Но теперь, в точности как в 2-мерном случае, геометрия специальных лагранжевых суперциклов может быть продеформирована в геометрию sdAG -3/2-псевдоголоморфных (супер) циклов.

В самом деле, пусть $e^{i\varphi}$ – образ супер- spLag -циклов. Тогда пространством специальных лагранжевых направлений является

$$m_{\mathbb{C}}^{-1}(e^{i\varphi}) \subset S^2(U) \subset \widetilde{\text{Gr}}_{\uparrow}(3, TX), \quad (7.28)$$

где $m_{\mathbb{C}}$ – универсальное отображение комплексной фазы (2.24), $S^2(U)$ – расслоение на единичные сферы в тавтологическом расслоении над лагранжевым грассманом $\Lambda_{\uparrow}(3, TX)$ касательного расслоения на X .

Теперь мы можем продеформировать слой отображения комплексной фазы вдоль меридиана в Северный полюс 0 сферы образа универсального отображения комплексной фазы (2.24) (см. (7.17)). Мы получаем семейство геометрий, параметризованное интервалом $[0, \pi/2]$:

$$\mathcal{G} = m_{\mathbb{C}}^{-1}([0, \pi/2]), \quad (7.29)$$

которое дает *гладкий бордизм* между *специальной лагранжевой супергеометрией*, задаваемой пространством супернаправлений (7.28), и малой деформацией алгебраической геометрии, задаваемой пространством 3/2-псевдоголоморфных направлений

$$m_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \in \text{Gr}_{\uparrow}(3, TX). \quad (7.30)$$

Это объясняет, почему теория локальных деформаций s3/2-ph -циклов так же хороша, как теория локальных деформаций супер- spLag -циклов: пусть $\text{S3/2}\mathcal{M}_Y$ – пространство локальных деформаций s3/2-ph -циклов вблизи гладкого s3/2-ph -цикла Y . Тогда

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. 1) *Касательное пространство к этому пространству в точке Y есть*

$$TS3/2\mathcal{M}_Y = H^1(Y, \mathbb{C}). \quad (7.31)$$

2) *Пространство (7.31) обладает канонической комплексной ориентацией.*

3) *Не существует препятствий к деформациям: каждая инфинитезимальная деформация продолжается до геометрической.*

Доказательство представляет собой имитацию аргументов Хитчина [17] и МакЛина в комплексной версии.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы должны заметить, что предложенная нами комплексная версия теории sdAG-циклов никоим образом не принадлежит симплектической геометрии. Действительно, sdAG-циклы не обязаны быть симплектическими в общем. Мы рассматриваем метрику как основной геометрический объект, а вовсе не симплектическую форму ω . Если мы сменим почти комплексную структуру I_t в исходной аК-тройке (ω_0, I_0, g) , сохраняя метрику g , и так, что форма ω_t гармонична, то для достаточно малого t в эрмитовой тройке (ω_t, I_t, g) 2-форма ω_t остается положительной, но со временем а priori она утрачивает это свойство, мы покидаем область симплектической геометрии.

Одной из причин, почему иногда полезно выйти за рамки симплектической геометрии, является геометрическое наблюдение Хитчина из [17]. Оно заключается в том, что локально пространство модулей $\mathcal{M}_Y$ деформаций spLag-циклов в фиксированном CY_3 X вблизи Y может быть погружено в пространство $H^1(Y, \mathbb{R}) \times H^2(Y, \mathbb{R})$ и образ является spLag-циклом относительно стандартной симплектической структуры (напомним, что $H^1(Y, \mathbb{R}) = H^2(Y, \mathbb{R})^*$). Однако на “кокасательном” многообразии существует стандартная комплексная структура, которая определяет и “метрику”. Эта метрика не риманова, но ультрагиперболическая (однако она индуцирует риманову метрику на самом Y) (см. [17]). Нетрудно видеть, что мы можем преобразовать всю тройку канонически, так что индуцируемая метрика на Y не изменится, новая метрика риманова, но образ многообразия модулей $\mathcal{M}_Y$ перестанет быть симплектическим: относительно новой тройки он будет sdAG, но не spLag.

Так что комплексная версия spLag-циклов продуктивна для сохранения стандартной схемы: “многообразие модулей комплексных подмногообразий само является комплексным многообразием” (как полные линейные системы кривых на поверхностях). Имитируя конструкции и аргументы Хитчина, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Многообразие модулей sdAG-суперциклов является sdAG-циклом для погружения Хитчина.*

Следующий параграф по форме является большим “отступлением о зеркальной симметрии для CY_3 ”. Но здесь уместно дополнить гипотезы программы Стромингера–Яо–Заслова, касающиеся *глобальной теории деформаций супер-spLag-циклов* (см. [23]):

ГИПОТЕЗЫ ГЛОБАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ. 1) *Существует естественная компактификация*

$$|Y| \quad (7.32)$$

глобального многообразия модулей всех гладких s3/2-ph-деформаций s3/2-ph-цикла Y в CY_3 -многообразии X (мы назовем его полной линейной системой s3/2-ph-циклов).

2) *Естественная комплексная структура, задаваемая идентификацией (7.31), продолжается до интегрируемой комплексной структуры на полном многообразии $|Y|$. Тогда*

$$Y = T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1 \Rightarrow |Y| = X' \quad \text{есть} \quad CY_3. \quad (7.33)$$

Но даже сами по себе, без какой-либо связи с зеркальной симметрией для CY_3 , эти конструкции дают красивое семейство геометрий.

Мы закончим наш набор определений и конструкций продолжением их на случай трехмерных многообразий с положительным или отрицательным каноническим классом.

В случае CY_3 мы получаем следующий набор понятий: предположим, что Y – $3/2$ -симплектический ориентированный цикл на X . Тогда образ $m_{\mathbb{C}}(Y) \subset D^+$ – компактное подмножество и существует единственный диск минимального радиуса, содержащий образ

$$m_{\mathbb{C}}(Y) \subset D_Y \subset D^+ \quad (7.34)$$

(см. (2.39)).

Как и в двумерном случае, центр c_Y диска D_Y называется *центром* цикла Y ; радиус r_Y диска D_Y называется *радиусом* цикла Y ; Y называется $\varepsilon 3/2$ -ph-циклом, если

$$c_Y \in S^1 \quad \text{и} \quad r_Y < \varepsilon. \quad (7.35)$$

Было бы замечательно получить аналог теоремы 2.1 для $\varepsilon 3/2$ -ph-циклов.

Рассмотрим теперь односвязное алгебраическое трехмерное многообразие X с каноническим классом $K_X > 0$ (или $K_X < 0$). Мы хотели бы слегка продеформировать $3/2$ -ph-геометрию, рассмотрев выделенное семейство ориентированных 3-циклов. Свойства этих циклов снова будут определяться их инфинитезимальным поведением первого порядка, т.е. геометрия определяется свойствами их отображений Гаусса.

Поднимем проективное расслоение $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X))$ до векторного

$$\begin{aligned} V_K &= \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(K_X), & \text{если } K_X > 0, \\ &\text{и } \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X), & \text{если } K_X < 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Общий тип ($K_S > 0$). В этом случае рассмотрим не обращающееся в нуль сечение s (или сечение, обращающееся в нуль вдоль “дивизора”), чтобы получить сечение проективного расслоения $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-K_X))$ как, например, S_0 или S_∞ (6.49).

В келеровом (алгебраическом) случае мы имеем конечномерное семейство *голоморфных* сечений

$$s \in H^0(V_K) = \mathbb{C} \oplus H^0(\mathcal{O}_X(K_X)). \quad (7.37)$$

Как обычно, пусть $p_g = \dim H^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ обозначает геометрический род многообразия X , т.е. комплексную размерность пространства $H^{3,0}(S)$. Семейство таких сечений определяет семейство сечений проективизаций $\mathbb{P}V_K$

$$S^{2p_g} = \mathbb{C}^{p_g} \cup \infty, \quad (7.38)$$

где $\mathbb{C}^{p_g} = \{(1, s)\}$ – пространство не обращающихся в нуль сечений и

$$\mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = |K_X|$$

– каноническая полная линейная система, точки которой дают одно и то же линейное подрасслоение, а тем самым, одно и то же сечение проективизации, т.е. отображение

$$\sigma_\infty: \mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_X(K_X)) \rightarrow S^{2p_g} \quad (7.39)$$

не голоморфно и стягивает гиперплоскость $|K_X|$ в точку ∞ .

Снова связность Леви-Чивита определяет эрмитову связность на каноническом расслоении $L_K = \mathcal{O}_X(K_X)$ и также – эрмитову структуру на сфере $\mathbb{C}^{2p_g} \cup \infty$ – стандартную метрику на этой сфере. Таким образом, мы отождествляем эту сферу с двойственной сферой (см. (2.57)–(2.60)).

Эта сфера содержит экватор

$$S_e^{2p_g-1} = \{z \mid \|z\| = 1\} \subset \mathbb{C}^{2p_g}. \quad (7.40)$$

Интерпретация сферы $\mathbb{C}^{2p_g} \cup \infty$ как пространства сечений дает погружение

$$i_{\text{can}}: \mathbb{P}V_K \rightarrow \mathbb{P}H^0(V_K)^* \times X, \quad (7.41)$$

проекцию тривиального расслоения на его слой

$$i_{\text{can}}: \mathbb{P}V_K \rightarrow \mathbb{P}H^0(V_K)^* \rightarrow S^{2p_g}. \quad (7.42)$$

Наконец, композиция этой проекции и сжатия (7.39) определяет отображение

$$\text{pr}: \mathbb{P}V_K \rightarrow S^{2p_g}. \quad (7.43)$$

Теперь для любого цикла $Y \subset X$ композиция отображения Гаусса, проекции $\widetilde{\det}_I$ (6.51) и (7.43) определяет отображение комплексной фазы

$$m_{\mathbb{C}} = \text{pr} \circ \widetilde{\det}_I \circ G(i): X \rightarrow S^{2p_g}. \quad (7.44)$$

В терминах этого отображения определяем аналоги sdAG- и spLag-циклов, известных для CY₃-случая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6. Цикл $Y \subset X$ называется *sdAG-циклом*, если $m_{\mathbb{C}}(Y)$ – точка, или, эквивалентно,

$$dm_{\mathbb{C}} = 0. \quad (7.45)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.7. 1) 3-цикл Y называется *слабо лагранжесвым* (wLag-циклом для краткости), если

$$m_{\mathbb{C}}(\Sigma) \subset S_e^{2p_g-1}, \quad (7.46)$$

где $S_e^{3p_g-1}$ – экватор.

2) Y называется *spLag-циклом*, если это – sdAG-цикл и

$$m_{\mathbb{C}}(Y) \in S_e^{2p_g-1}. \quad (7.47)$$

Экватор делит сферу образа отображения комплексной фазы на верхнюю и нижнюю полусферы:

$$S^{2p_g} = D^+ \cup S_e^{2p_g-1} \cup D^-, \quad (7.48)$$

и весь список определений (таких, как определение 2.3), свойств и фактов может быть повторен в этой новой ситуации.

Случай многообразий Фано. Наконец, совершенно очевидно, что мы должны делать в случае, когда $K_S < 0$: сменить знак у канонической системы $K_S \rightarrow -K_S$, получить сферу

$$S^{2h^0(\mathcal{O}_S(-K_S))} \quad (7.49)$$

как сферу образа отображения комплексной фазы, а после этого повторить все конструкции и определения.

§ 8. GFT для CY_3

Напомним, что наша основная цель – сравнить геометрии голоморфных расслоений на алгебраическом (келеровом) многообразии с геометрией их GFT-образов (циклов серединной размерности) в его зеркальном партнере. А priori этот зеркальный партнер – многообразие другого топологического типа. Но в CY -случае естественно ожидать, что зеркальные картинки симметричны и, в частности, зеркальный партнер многообразия Калаби–Яо есть многообразие того же типа и преобразование GFT может быть обращено. Гипотетическая конструкция зеркальной симметрии, допускающая GFT, была предложена Стромингером–Яо–Засловым в [23], развернута в ряде статей и препринтов (см. [15], [12], [13] и др.). Она описана в предыдущем параграфе (см. гипотезы глобальной деформации, 1)–3)). Центральной технической проблемой реализации SYZ-программы является описание глобальной структуры многообразия модулей $spLag$ -циклов, которое в данный момент полностью отсутствует. Этим $spLag$ -геометрия – одна сторона медали – принципиально отличается от калибровочной геометрии – другой стороны той же медали: нам нужны априорные оценки, подобные тем, которые появляются в теореме Уленбека. В калибровочной теории они немедленно приводят к описанию компактификации многообразия орбит связностей (как многообразий с концами). По причине этой технической зеркальной асимметрии предлагаемые ниже конструкции можно рассматривать только в качестве *условных*, как и во всех современных работах на эту тему.

Итак, пусть X – односвязное CY -трехмерное многообразие с комплексной ориентацией, заданной выбором голоморфной тривиализации линейного расслоения $\det T^*X$. Снова все топологические инварианты голоморфных векторных расслоений и когерентных пучков на X могут быть реализованы как элементы кольца

$$A_X = H^{2*}(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=0}^n H^{2i}(X, \mathbb{Q}). \quad (8.1)$$

Эта решетка несет обыкновенную симметрическую и кососимметрические формы

$$(u, v) = [u \cdot v]_6 = \sum_{i=0}^3 u_i \cdot v_{3-i} \quad \text{и} \quad (u^*, v), \quad (8.2)$$

где u_i – однородные компоненты и $*$: $A_X \rightarrow A_X$ – инволюция, задаваемая формулой $(u_0, \dots, u_3)^* = (u_0, -u_1, u_2, -u_3)$ (см. (1.73), (1.74)).

Кроме этих “обычных” форм существует еще одна *кососимметрическая* форма

$$\langle u, v \rangle = u^* \cdot v \cdot \text{td}_X, \quad (8.3)$$

где td_X – класс Тодда многообразия X :

$$\text{td}_X = \left(1, 0, \frac{1}{12}c_2(X), 0\right) \in A_X, \quad \text{так что} \quad (\text{td}_X)^* = \text{td}_X. \quad (8.4)$$

Класс

$$c_2(X) = k_X \in H^4(X, \mathbb{Z}) \quad (8.5)$$

назовем *вторым каноническим классом*.

Экзотическая билинейная форма $\langle u, v \rangle$ (8.3) приводится к стандартной билинейной форме (u^*, v) (8.2) умножением на положительный корень из класса Тодда

$$\sqrt{\text{td}_X} = \left(1, 0, \frac{1}{24}k_X, 0\right); \quad (8.6)$$

и топологический тип любого голоморфного расслоения E может быть описан его *вектором Мукаи*

$$m(E) = \text{ch}(E) \cdot \sqrt{\text{td}_X}. \quad (8.7)$$

Снова для пары голоморфных векторных расслоений E_1 и E_2 на X формула (8.3) – это формула Римана–Роха:

$$\chi(E_1^* \otimes E_2) = \langle \text{ch}(E_1^*), \text{ch}(E_2) \rangle = (m(E_1^*), m(E_2)), \quad (8.8)$$

и, в частности, виртуальная размерность многообразия модулей h -стабильных векторных расслоений E равна

$$v. \dim \mathcal{M}_E = \langle \text{ch}(E), \text{ch}(E) \rangle = 0, \quad (8.9)$$

так как экзотическая билинейная форма (8.3) кососимметрична. (По той же причине размерность многообразия модулей стабильных векторных расслоений *с фиксированным детерминантом* на эллиптической кривой равна нулю (см. § 1).)

Отсюда получаем целый $\text{CY-}h$ -инвариант топологического класса h -стабильного голоморфного векторного расслоения:

$$CD_X^h(m) = \deg \mathcal{M}_h^m = \#\{E\} \quad (8.10)$$

– число h -стабильных голоморфных векторных расслоений топологического типа $m = m(E)$ в трансверсальном случае и старший класс Черна пучка препятствий (при деформации к нормальному конусу) в нетрансверсальном случае (см. [24]). Напомним определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Функция

$$CD_X^h: A_X \rightarrow \mathbb{Z} \quad (8.11)$$

называется *инвариантом Кассона–Дональдсона* многообразия X .

Это – комплексный аналог инварианта Кассона трехмерного вещественного многообразия и полинома Дональдсона нулевой степени (см. [9] и [24]). Отметим, что если некоторый класс $a \in A_X$ не может быть реализован как вектор Мукаи векторного расслоения, то $CD_X^h(a) = 0$.

Аналогом решетки Пикара является решетка

$$A_S/H = H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z})^* \quad (8.12)$$

дивизоров и кривых.

Комплексная поляризация. Опять задавая линейное расслоение $L = \mathcal{O}_X(h)$ любой поляризации h , мы можем рассматривать наше многообразие X как фазовое пространство классической механической системы с комплексной структурой предквантования

$$(X, \omega, L, a_L), \quad (8.13)$$

где ω – келерова форма, a_L – связность (4.42), (4.43) с формой кривизны $2\pi i\omega$. Тогда пространство волновых функций

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}_X(h)} = H^0(X, \mathcal{O}_X(h)) \quad \text{и} \quad X \subset \mathbb{P}\mathcal{H}^*. \quad (8.14)$$

Опять, как и ранее, существует выделенная подрешетка в A_X

$$H = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^6(X, \mathbb{Z}) \in A_X \quad (8.15)$$

с выделенными образующими $[X]$ и $[\text{pt}]$. Ограничение на нее симметрической билинейной формы $(\ , \ )$ (8.2) определяет стандартную четную унимодулярную решетку. Но, в отличие от случая КЗ-поверхностей, умножение на $\sqrt{\text{td}_X}$ (8.7) ее не сохраняет, а порождает новую стандартную подрешетку

$$H' = \sqrt{\text{td}_X} \cdot H \quad (8.16)$$

с базисом $\sqrt{\text{td}_X}$ и $[\text{pt}]$, так что ограничение на нее формы (8.2) дает стандартную унимодулярную решетку снова, но ограничение формы $\langle \ , \ \rangle$ (8.3) определяет стандартную унимодулярную симплектическую форму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более инвариантный способ заключается в рассмотрении $\text{rk } 3$ -подрешетки $\langle [X], k_X, [\text{pt}] \rangle$. На ней ограничения обеих форм (8.2) и (8.3) вырождены и k_X – образующая ядер обеих форм.

Теперь для того чтобы включить зеркальное отражение голоморфной картины, мы должны повторить шаг за шагом все конструкции, предложенные в CY_2 -случае.

Напомним, что для любого суперцикла Y на X мы имеем отображение комплексной фазы (7.16) $m_X: Y \rightarrow S^2$ и цикл sdAG , если его образ – точка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. 1) Для CY₃-многообразия X подмножество

$$\text{SDAG} = \{[Y] \in H^3(X, \mathbb{Z}) \mid Y\text{-sdAG}\} \subset H^3(X, \mathbb{Z})$$

называется *множеством Пикара*.

2) Запись P_X ,

$$P_X \subset S^2/J = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \quad (8.17)$$

обозначает подмножество комплексных фаз sdAG-циклов.

3) Запись F_X ,

$$F_X \subset \text{SDAG} \times P_X, \quad (8.18)$$

обозначает подмножество пар $([Y], m_X(Y))$.

Начальная алгебраическая структура $(I, \bar{I})$, скажем Северный и Южный полюсы на S^2 , определяет специальные координаты (z_0, z_1) на этой сфере Римана, фактор по инволюции – проективная плоскость – допускает структуру проективной плоскости над $\mathbb{Q}$ с множеством рациональных точек $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ как множество рациональных направлений и рациональную проективную прямую $\mathbb{P}_{\infty}^1$, параметризующую рациональные наклоны на экваторе.

Предположим (следуя SYZ-программе [23]), что P_X содержит точку $J = m_X(e)$, ортогональную к обоим полюсам, и $e = T^3$ – 3-тор. Тогда SYZ-гипотеза предсказывает существование расслоения

$$\pi: X \rightarrow \overline{\mathcal{M}_X^{[e]}} = |e|, \quad \pi^{-1}(e_{\text{gen}}) = T^3 \quad (8.19)$$

со специальными лагранжевыми слоями над компактификацией многообразия модулей – полной линейной системой специальных лагранжевых циклов с классом когомологий $[e]$ (см. [23]).

Специальная вещественная поляризация. Далее, предположим, что P_X содержит ортогональную к $m_X(e)$ точку экватора K . Тогда существует spLag-цикл s наклона $K = m_X(s)$ – сечение расслоения π (8.19).

В этом случае решетка $H^3(X, \mathbb{Z})$ содержит выделенную подрешетку

$$H = \mathbb{Z} \cdot [s] \oplus \mathbb{Z} \cdot [e] \subset H^3(X, \mathbb{Z}). \quad (8.20)$$

Переходя к относительному Pic-расслоению (как в (4.56)) и используя SYZ-гипотезу, мы получаем “зеркальное” расслоение

$$\pi': X' \rightarrow \overline{\mathcal{M}_X^{[e]}} = |e|, \quad (8.21)$$

и комплексная структура на X' следует из интерпретации X' как многообразия модулей $S\overline{\mathcal{M}_X^{[e]}}$ специальных лагранжевых суперциклов. Формульное описание этой комплексной структуры будет дано ниже.

Это расслоение имеет выделенное сечение

$$s_0 \subset X', \quad (8.22)$$

содержащее суперциклы с тривиальными плоскими связностями. Снова мы получаем выделенную кососимметрическую подрешетку

$$H = \mathbb{Z} \cdot [s_0] \oplus \mathbb{Z} \cdot [e'] \subset H^3(X', \mathbb{Z}), \quad (8.23)$$

где $[e']$ – класс слоя расслоения π' (8.21).

Специальные локальные координаты пространства модулей spLag-суперциклов . В точности так же, как в CY_2 -случае, пусть $u \subset \overline{\mathcal{M}}_X^{[e]}$ – малый шар вокруг регулярной точки $p_0 \in \overline{\mathcal{M}}_X^{[e]}$ и $U = \pi^{-1}(u)$. Тогда $\pi: U = S_1^1 \times S_2^1 \times S_3^1 \times u \rightarrow u$ – гладкое топологически тривиальное T^3 -расслоение над шаром, и мы имеем три расслоенных 4-мерных многообразия

$$\pi: S_j^1 \times u \rightarrow u, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8.24)$$

и три расслоенных 5-мерных многообразия

$$\pi: S_i^1 \times S_j^1 \times u \rightarrow u. \quad (8.25)$$

Для каждой точки $p \in u$ 1-цикл $(S_j^1)_p$, $j = 1, 2, 3$, стягиваем в X и для каждого такого 1-цикла мы можем найти I -голоморфный диск $D_p^j \subset X$ такой, что

$$\partial D_p^j = (S_j^1)_p. \quad (8.26)$$

Тогда

$$u_j(p) = e^{-2\pi \int_{D_p^j} \omega} \quad (8.27)$$

– специальные координаты на $u \subset \mathcal{M}_J^{[e]}$.

Более того, если для каждого $p \in u$

$$(S_1^1)_p^* \times (S_2^1)_p^* \times (S_3^1)_p^* = \text{Hom}(\pi_1(\pi^{-1}(p)), \text{U}(1)) \subset (\pi')^{-1}(u) \subset X' \quad (8.28)$$

– двойственный тор с параметрами $e^{-2\pi i \cdot \phi_j(p)}$, то

$$\tilde{u}_j(p) = e^{-2\pi i (\int_{D_p^j} \omega + i \cdot \phi_j(p))} \quad (8.29)$$

– локальные координаты многообразия модулей $S\mathcal{M}_J^{[e]}$ spLag-суперциклов . Более точно, мы получаем локальные координаты на

$$U' = (\pi')^{-1}(u) \subset S' = S\mathcal{M}_J^{[e]}. \quad (8.30)$$

Таким же образом мы получаем систему двойственных координат: для каждой точки $p \in u$ 2-циклы $(S_i^1) \times (S_j^1)_p$, $i \neq j = 1, 2, 3$, стягиваемы в X и для каждого такого 2-цикла мы можем найти I -голоморфную поверхность $S_p^{i,j} \subset X$ такую, что

$$\partial S_p^{i,j} = ((S_i^1)_p \times D_p^j) \cup (D_p^i \times (S_j^1)_p). \quad (8.31)$$

Тогда

$$u_{i,j}(p) = e^{-2\pi \int_{S_p^{i,j}} \omega \wedge \omega} \quad (8.32)$$

– двойственные специальные координаты на $u \subset \mathcal{M}_J^{[e]}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле на этапе этой работы достаточно взять любой диск D_p^j или 4-мерное многообразие $S_p^{i,j}$, заклеивающие соответствующие циклы, необязательно I-голоморфные.

Далее, 1-цикл $(S_j^1)_p \in H_1(e_p, \mathbb{Z})$ определяет отображение

$$\psi_j^1: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow e'_p \quad (8.33)$$

по формуле $\psi_j^1(q) = e^{2\pi \cdot i \cdot \int_{D_p^j} q}$ и 2-цикл $S_p^{i,j} \in H_2(e_p, \mathbb{Z})$ определяет отображение

$$\psi_j^2: H^4(X, \mathbb{Z}) \rightarrow e'_p \quad (8.34)$$

по формуле $\psi_j^2(q) = e^{\pi \cdot i \cdot \int_{S_p^{i,j}} q}$.

Их комбинация дает отображение

$$\psi_u^j: H^{2j}(X, \mathbb{Z}) \times u \rightarrow U', \quad (8.35)$$

задаваемое на однородных компонентах этими формулами для любого $q \in H^{2j}(X, \mathbb{Z})$. Отображение определено корректно в силу тех же аргументов, как и выше ((4.63) и (4.65)).

В частности, для $q = \omega$ мы получаем локальное сечение расслоения π' :

$$\psi_u^j(\omega): u \rightarrow U', \quad (8.36)$$

и можем сложить эти сечения послойно (см. (1.60)), чтобы получить локальное сечение

$$\psi_u(\omega) = \psi_u^1(\omega) \odot \psi_u^2(\omega). \quad (8.37)$$

Глобализация. Прежде всего существует топологическая глобализация отображений (8.35) (см. [12] и [13]), т.е. для любого $q \in H^{2j}(X, \mathbb{Z})$ локальные сечения $\psi_u^j(q)$ (8.36) могут быть склеены в глобальное сечение

$$\psi^j(q) \subset X'. \quad (8.38)$$

В частности, мы получаем топологическое зеркальное отображение

$$\text{mir}: A_X \rightarrow H^3(X', \mathbb{Z}), \quad (8.39)$$

задаваемое формулами

$$\text{mir}\left((u_0, u_1, u_2, u_3)\sqrt{\text{td}_X}^{-1}\right) = u_0 \cdot [s_0] + u_3 \cdot [e'] + [\psi^1(u_1)] + [\psi^2(u_2)].$$

Нетрудно проверить следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Имеем $(\text{mir}(u), \text{mir}(v)) = \langle u, v \rangle$, где $(,)$ – индекс пересечения в $H^3(X', \mathbb{Z})$, а $\langle , \rangle$ – форма (8.3).*

Для любой I-поляризации $[\omega]$ голоморфного векторного расслоения L с $c_1(L) = [\omega]$ мы получаем цикл

$$\psi^j([\omega]) = \text{GFT}(L) \subset X'. \quad (8.40)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. 1) *Индекс пересечения $[\text{GFT}(L)] \cdot [s_0]$ на X' задается формулой*

$$([\text{GFT}(L)]) \cdot [s_0] = [\text{ch } L \cdot \text{td}_X]_6. \quad (8.41)$$

2) *Цикл $\text{GFT}(L)$ – spLag-цикл наклона $\chi(L)$ – левой стороны равенства Римана–Роха.*

Доказательство такое же, как для CY_2 -случая.

Мы можем рассмотреть расслоение π (8.19) как вещественную поляризацию системы (8.13) и, как результат GQP, получить пространство волновых функций

$$\mathcal{H}_\pi^L = \sum_{L\text{-BS}} \mathbb{C} \cdot s_{L\text{-BS}} \quad (8.42)$$

(суммирование по всем L-BS-слоям системы (8.42) относительно поляризации π).

Снова число таких слоев равно индексу пересечения циклов $s_0 = \text{GFT}(\mathcal{O}_X)$ и $\text{GFT}(L)$. Используя те же аргументы, что и в $\text{CY}_{1,2}$ -случаях, получаем

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Для каждой поляризации L имеет место равенство*

$$\text{rk } \mathcal{H}_L = \text{rk } \mathcal{H}_{\pi, L}$$

(см. (8.14) и (8.42)), т.е. численная проблема квантования допускает положительное решение.

Далее, так же, как и выше, для любого стабильного (относительно поляризации $[\omega]$) голоморфного векторного расслоения E на X с $c_1(E) = \lambda \cdot [\omega]$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, та же конструкция с эйнштейно-эрмитовой связностью определяет цикл

$$\text{GFT}(E) \subset X' \quad (8.43)$$

– spLag-rk E -сечение расслоения π' , класс которого определяется отображением mir (8.39), а наклон определяется при помощи отображения (3.40).

Проблема обращения в CY_3 -случае. Как это уже многократно отмечалось, каждое стабильное расслоение E на X с условием $c_1(E) = \lambda \cdot [\omega]$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, несет на себе эйнштейно-эрмитову связность с кривизной нужного вида и тогда:

- 1) эта кривизна определяет КН-зеркального партнера (X, ω') ;
- 2) топологический тип расслоения E , записанный в виде $m = m(E)$ (8.7), вместе с $[\omega']$ определяют когомологический 3-класс

$$[\text{GFT}(E)] \in H^3(X', \mathbb{Z}); \quad (8.44)$$

3) мы имеем “полную линейную систему”

$$|[\mathrm{GFT}(E)]|^p = \overline{\mathcal{M}[\mathrm{GFT}(E)]}, \quad (8.45)$$

содержащую все spLag -циклы из этого класса когомологий фиксированного на-клона p .

Таким образом, мы опять получаем отображение многообразия модулей $\mathcal{M}_m^s$ стабильных векторных расслоений на X топологического типа m :

$$\mathrm{GFT}: \mathcal{M}_m^s \rightarrow \overline{\mathcal{M}[\mathrm{GFT}(E)]}, \quad (8.46)$$

сопоставляющее расслоению E цикл $\mathrm{GFT}(E)$.

Точно так же, как и в $\mathrm{CY}_{1,2}$ -случаях, определяем на $\mathrm{GFT}(E)$ структуру супер-цикла

$$(\Sigma, \chi), \text{ где } \Sigma \in |[\mathrm{GFT}(E)]|^p \text{ и } \chi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathrm{GFT}(E)), \mathrm{U}(1)). \quad (8.47)$$

Снова получаем “забывающее отображение”

$$f: \overline{S\mathcal{M}[\mathrm{GFT}(E)]} \rightarrow \overline{\mathcal{M}[\mathrm{GFT}(E)]} \quad (8.48)$$

и отображение

$$\mathrm{sGFT}: \mathcal{M}_m^s \rightarrow \overline{S\mathcal{M}[\mathrm{GFT}(E)]} \quad (8.49)$$

такое, что $\mathrm{GFT} = \mathrm{sGFT} \circ f$.

Оценка слоя этого отображения – проблема обращения GFT для CY_3 -случая.

По тем же причинам, что и в $\mathrm{CY}_{1,2}$ -случаях, используя теорию деформаций spLag -циклов, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *Отображение sGFT (8.49) имеет степень 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathrm{sGFT}(E_1) = \mathrm{sGFT}(E_2)$, то

$$\mathrm{sGFT}(E_1^* \otimes E_2) = \mathrm{sGFT}(E_1^*) \odot \mathrm{sGFT}(E_2) \quad (8.50)$$

содержит пару $([s_0], \chi = 1)$ как компоненту. Но тогда существует нетривиальный гомоморфизм $E_1 \rightarrow E_2$. Отсюда стандартные аргументы стабильности дают равенство $E_1 = E_2$.

Таким образом, ситуация предельно близка к CY_1 - и CY_2 -случаям.

Теперь в теории деформаций векторных расслоений на X имеется отображение Кураниши

$$K: H^1(X, \mathrm{ad} E) \rightarrow H^2(X, \mathrm{ad} E), \quad (8.51)$$

так что локально, в окрестности точки $E \in \mathcal{M}_m^s$,

$$\mathcal{M}_m^s = K^{-1}(0). \quad (8.52)$$

Отсюда получаем неравенство

$$\dim_{\mathbb{C}}(K^{-1}(0)) \leq b_1(\text{GFT}(E)), \quad (8.53)$$

потому что при деформации spLag -циклов препятствия отсутствуют.

В частности, если и при деформациях E препятствия также отсутствуют, то

$$\text{rk } H^1(X, \text{ad } E) \leq \text{rk } H^1(\text{GFT}(E), \mathbb{C}). \quad (8.54)$$

Это уже очень близко к равенству, которое приводит К. Вафа в [26, § 3]. Конечно, дифференциал отображения sGFT задает гомоморфизм

$$ds\text{GFT}: H^1(X, \text{ad } E) \rightarrow H^1(\text{GFT}(E), \mathbb{C}) \quad (8.55)$$

– мономорфизм по модулю дифференциала отображения Кураниши.

Более того, во многих случаях (и прежде всего, в регулярном случае, когда $\dim \mathcal{M}_m^s = 0$) можно проверить, что (8.54) – равенство. Проблема в том, как реализовать общий spLag -суперцикл в виде $\text{sGFT}(E)$.

Пример: TX . Хорошо известно, что при деформациях $\text{rk } 3$ векторного расслоения TX препятствия отсутствуют (по той же причине, по которой они отсутствуют при деформациях самого X). Тогда, используя SYZ-гипотезу, можно доказать, что

$$H^1(X, \text{ad } TX) = H^1(\text{GFT}(TX), \mathbb{C}), \quad (8.56)$$

а это сердце зеркальной симметрии.

§ 9. Геометрия $3/2$ -псевдоголоморфных суперциклов

В то время, как система дифференциальных уравнений для spLag -циклов чрезвычайно сложна (см. [16]), для s3/2-ph -циклов она намного проще. Но вместо ее описания мы объясним ниже, почему s3/2-ph -псевдоголоморфная геометрия представляет малую деформацию алгебраической геометрии. Существует тип комплексно-ориентированных трехмерных комплексных многообразий (т.е. с тривиальным каноническим классом), которые 2-связны и, следовательно, не келеровы и не лагранжевы. В этом случае геометрия s3/2-ph -циклов – единственное орудие исследования. Наша цель – показать, как техника специальных циклов одной и той же фазы работает в этом случае.

Напомним кратко общие свойства таких многообразий. Класс таких многообразий был рассмотрен М. Ридом [21] как некоторая иллюстрация проблемы минимальных моделей, а немного раньше Фридман предложил базисную конструкцию, позволяющую построить их как деформации приводимых многообразий. Поэтому естественно называть их *многообразиями Фридмана–Рида* (FR_3 для краткости) ровно на том же основании, на котором в келеровом случае мы называем их многообразиями Калаби–Яо (CY_3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. FR_3 есть компактное гладкое комплексное 3-мерное многообразие X такое, что

$$H^p(X, \Omega^q) = 0 \quad \text{для } p + q \neq 0, 3, 6, \quad (9.1)$$

где Ω – кокасательное расслоение многообразия X и X 2-связно:

$$\pi_n(X) = 0 \quad \text{для } n < 3. \quad (9.2)$$

Уолл доказал, что все многообразия FR_3 диффеоморфны связным суммам g копий $S^3 \times S^3$, где g – любое положительное число, которое мы назовем *родом* многообразия X .

Основные свойства FR_3 очень близки к свойствам CY_3 :

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА [4, предложение 1.3]. Для любого FR_3 -многообразия X имеем:

1) *спектральная последовательность Ходжа*

$$E_2^{p,q} = H^q(X, \Omega^p) \quad (9.3)$$

вырождается в E_2 , следовательно, когомологии многообразия X обладают целочисленной чистой структурой Ходжа веса 3;

2) в пространстве локальных деформаций многообразия X препятствия отсутствуют, оно гладко с касательным пространством в точке X , равным

$$H^1(TX) = H^1(X, \Omega^2) = \mathbb{C}^{g-1}; \quad (9.4)$$

3) если $F^2 H^3(X, \mathbb{C})$ – классы когомологий, которые могут быть представлены d -замкнутыми формами типа $(3, 0)$ и $(2, 1)$, то мы имеем ортогональное разложение

$$H^3(X, \mathbb{C}) = F^2 H^3(X, \mathbb{C}) \oplus \overline{F^2 H^3(X, \mathbb{C})} \quad (9.5)$$

с эрмитовой формой

$$\left(\frac{1}{2i} \right) \langle \alpha, \bar{\beta} \rangle. \quad (9.6)$$

Напомним, что сигнатура этой эрмитовой формы (9.6) называется *сигнатурой* многообразия X .

Как обычно, мы фиксируем комплексную ориентацию на X , т.е. голоморфную 3-форму θ , и пара (X, θ) называется *ориентированным FR_3 -многообразием*.

Теория периодов FR_3 -многообразий. В терминах структуры Ходжа на X существование целочисленного класса 3-мерных когомологий

$$[Y] \in H^3(X, \mathbb{Z}), \quad (9.7)$$

которое допускает реализацию гладким $3/2$ -псевдоголоморфным циклом Y , задается одним уравнением на области периодов FR_3 -многообразий. В самом деле, так же, как и в теории КЗ-поверхностей, имеем

$$\int_Y \theta = 0. \quad (9.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. 3-мерный класс когомологий $[Y]$ называется *поляризацией* многообразия X , если существует *глобальное* многообразие модулей $|Y|$ всех деформаций цикла Y в X как $s3/2$ -ph-цикла с естественной комплексной структурой и компактификацией (мы будем называть его *полной линейной системой*) и такой, что полная линейная система $|Y|$ – *алгебраическое многообразие*, и комплексная размерность

$$\dim |Y| > 2. \quad (9.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что такая величина как *размерность* многообразия модулей работает здесь так же, как формула Римана–Роха в комбинации с формулой присоединения в случае комплексных поверхностей.

Как мы это уже делали, определим аналог решетки Пикара для FR_3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. Подрешетка

$$3/2\text{-Pic}(X) \subset H^3(X, \mathbb{Z}), \quad (9.10)$$

порожденная $s3/2$ -ph-циклами, называется *$3/2$ -решеткой Пикара* многообразия X .

Точно таким же образом при помощи эрмитовой формы (9.6) определяем подрешетку *трансцендентных циклов*:

$$\mathrm{Tr}(X) \subset H^3(X, \mathbb{Z}), \quad (9.11)$$

и далее конструкции абсолютно параллельны стандартным конструкциям для КЗ-поверхностей.

Вернемся к локальной геометрии вокруг гладкого $s3/2$ -ph-цикла Y .

Для любого такого цикла Y имеем ортогональное “разложение Ходжа”

$$TY = \ker(\omega|_Y) \oplus TY_I, \quad (9.12)$$

где TY_I – комплексное направление в касательном расслоении к Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Гладкий s3/2-ph-цикл Y называется *обволакивающим* в том и только том случае, если существует голоморфная кривая

$$C \subset Y \quad (9.13)$$

внутри Y .

Такие циклы можно определять с помощью голоморфной кривой C : надо рассмотреть нормальное расслоение

$$N_{C \subset X} \quad (9.14)$$

кривой в X . Действие оператора комплексной структуры I на подпространствах $\ker(\omega|_Y)$ (9.12) определяет подрасслоение

$$L_Y = \langle \ker(\omega|_Y), I(\ker(\omega|_Y)) \rangle. \quad (9.15)$$

Это подрасслоение *комплексно*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Подрасслоение L_Y – голоморфное линейное подрасслоение голоморфного расслоения $N_{C \subset X}$ (9.14) ранга 2.

Грубо говоря, наш s3/2-ph-цикл Y обволакивает нулевое сечение в линейном расслоении L_Y .

Теперь по определению

$$\text{s3/2-ph-цикл } Y \text{ есть суперцикл} \Rightarrow \deg L_Y = 0, \quad (9.16)$$

и мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Для s3/2-ph-цикла Y :

1) линейное расслоение L_Y допускает плоскую $U(1)$ -связность, т.е. существует характер фундаментальной группы цикла Y

$$\rho: \pi(Y) \rightarrow U(1), \quad (9.17)$$

который определяет линейное расслоение:

$$L_\rho = L_Y; \quad (9.18)$$

2) цикл

$$Y = S^1(L_\rho) \quad (9.19)$$

– расслоение на единичные окружности этого плоского $U(1)$ -расслоения, в частности, топологически

$$Y = C \times S^1. \quad (9.20)$$

Вернемся теперь к FR_3 -многообразиям. Такое многообразие не имеет нетривиальных голоморфных линейных расслоений и не имеет никаких дивизоров. Но

некоторые из них допускают бесконечно много попарно не пересекающихся эллиптических кривых. Рассмотрим одно из них: X с множеством $\{C_i\}$ голоморфных эллиптических кривых. Нормальное расслоение к такой кривой,

$$N_{C \subset X} = \mathcal{O}_C(\xi) \oplus \mathcal{O}_C(-\xi) \quad \text{для} \quad \xi \in \text{Pic}_0(C), \quad (9.21)$$

обладает свойством

$$h^0(\mathcal{O}_C(\xi)) = h^1(\mathcal{O}_C(\xi)) = h^1(\mathcal{O}_C(-\xi)) = h^0(\mathcal{O}_C(-\xi)) = 0, \quad (9.22)$$

и любое линейное подрасслоение L степени нуль является либо $\mathcal{O}_C(\xi)$, либо $\mathcal{O}_C(-\xi)$. Так что в этом случае мы имеем два обволакивающих s3/2-ph-цикла Y_+ и Y_- , которые топологически есть

$$C \times S^1 = T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1. \quad (9.23)$$

Тогда, следуя нашим основным гипотезам, мы имеем комплексное 3-мерное многообразие $|Y_+|$. Типичный вопрос в этой ситуации:

ЧИСЛЕННАЯ ПРОБЛЕМА. *Сколько других обволакивающих s3/2-ph-циклов содержится в полном линейном ряду $|Y_+|$?*

ЗАМЕЧАНИЕ. Вы можете самостоятельно посмотреть, что случится, если $N_{C \subset X}$ – подкрученное расслоение Атья F_2 (1.51) (в этом случае получается только один s3/2-ph-цикл) или тривиальное расслоение, подкрученное на точку второго порядка в $\text{Pic}_0(C)$ (мы получаем S^2 семейство s3/2-ph-циклов).

Закончим эту достаточно длинную статью описанием следующей конструкции, которая возвращает нас в лоно калибровочной теории: конечно, эквивалентность 3/2-ph-циклов на X имеет своих специальных представителей. Пусть X есть FR_3 -многообразие,

$$[Y] \in 3/2\text{-Pic}(X) \quad (9.24)$$

(см. (9.10)) и Y_+ и Y_- – два s3/2ph-цикла из этого класса когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5. Эти циклы называются *КЗ-кобордантными*, если существует гладкое 4-многообразие S – *комплексная симплектическая поверхность* в смысле [7, § 2] такая, что $\partial S = Y_+ \cup Y_-$, т.е. S – комплексная поверхность с голоморфной формой

$$\theta_2 \in \Omega^{2,0}. \quad (9.25)$$

Конечно, эта конструкция тесно связана с “комплексификацией” группы диффеоморфизмов циклов $Y_{\pm}$ и уравнением Нама (см. [7]). С другой стороны, этот комплексный симплектический бордизм дает специальную петлю в промежуточном якобиане

$$J^3(X) = F^2 H^3(X, \mathbb{C}) / H^3(X, \mathbb{Z}). \quad (9.26)$$

Этот аспект тесно связан с теорией векторных расслоений на FR_3 - и CY_3 -многообразиях. Содержание работы [24] можно рассматривать как развитие этого направления.

Наконец, если циклы $Y_{\pm}$ обволакивают комплексные кривые $C_{\pm}$, то голоморфное расслоение E ранга 2 на “пленке” комплексного симплектического бордизма S с граничными условиями

$$E|_{C_{\pm}} = N_{C_{\pm} \subset X} \quad (9.27)$$

мы можем рассматривать как аналог рациональной функции с двумя “дивизорами”: нулей и полюсов. Открывается новое поле для численной геометрии.

Список литературы

1. *Aspinwall P. S., Morrison D. R.* String Theory on K3 Surfaces // Essay on Mirror Manifolds II / Eds. B. R. Greene, S.-T. Yau. Hong-Kong: International Press, 1996. P. 703–716.
2. *Atiyah M. F.* Vector bundles over an elliptic curve // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 3. P. 415–452.
3. *Bershadsky M., Johansen A., Pantev T., Sadov V.* On four-dimensional compactifications of F -theory // Nucl. Phys. B. 1997. V. 505. P. 165–201.
4. *Clemens H.* 2-connected compact complex threefolds. Preprint, 1989.
5. *Cox D. A., Zucker S.* Intersection numbers of sections of elliptic surfaces // Inventiones math. 1979. V. 53. P. 1–44.
6. *Donaldson S. K.* Yang–Mills invariants of four-manifolds // LMS Lecture Notes. 1993. V. 150. P. 5–40.
7. *Donaldson S. K.* Complex cobordism, Ashtekar’s equations and diffeomorphisms // LMS Lecture Notes. 1992. V. 192. P. 1–15.
8. *Donaldson S. K.* The Seiberg–Witten equations and 4-manifold topology // BAMS. 1996. V. 33. № 1. P. 45–70.
9. *Donaldson S. K., Thomas R. P.* Gauge theory in higher dimensions. Preprint. Oxford, 1996.
10. *Dolgachev I.* Mirror symmetry for lattices polarized K3 surfaces // Alg. Geom. 4. J. Math. Sci. 1996. V. 81. P. 2599–2630.
11. *Friedman ‘R., Morgan J., Witten E.* Vector bundles and F theory // Commun. Math. Phys. 1997. V. 187. P. 679–743.
12. *Gross M.* Special Lagrangian fibrations I: topology. alg-geom/9710006.
13. *Gross M.* Special Lagrangian fibrations II. alg-geom/9810 .
14. *Guillemin V., Sternberg S.* Symplectic Techniques in Physics // CUP. 1983.
15. *Gross M., Willson P. M. H.* Mirror symmetry via 3-tori for a class of Calabi–Yau threefolds // Math. Ann. 1997. V. 309. P. 505–531.
16. *Harvey R., Lawson H. B.* Calibrated geometries // Acta Math. 1982. V. 148. P. 47–157.
17. *Hitchin N.* The moduli space of special Lagrangian submanifolds // Preprint. Cambridge, 1998. P. 1–14.
18. *Mumford D.* Tata lectures on theta I // Progr. Math. 28. Birkhäuser, 1983; II. Jacobian theta functions and differential equations // Progr. Math. 43. Birkhäuser, 1984; III // Progr. Math. 97. Birkhäuser, 1991.

19. *Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р.* Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа КЗ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 3. С. 530–572.
20. *Пидстригач В. Я., Тюрин А. Н.* Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности, задаваемые оператором Дирака // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 279–371.
21. *Miles Reid* The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible // Math. Ann. 1987. V. 278. P. 329–334.
22. *Sniatycki J.* Quantization and Quantum Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
23. *Strominger A., Yau S.-T., Zaslow E.* Mirror symmetry is T -duality // Nucl. Phys. B. 1996. V. 479. P. 243–259.
24. *Tyurin A. N.* Non-Abelian analogues of Abel's theorem. Preprint I.C.T.P. Trieste, 1997.
25. *Тюрин А. Н.* Симплектические структуры на многообразиях модулей векторных расслоений на алгебраической поверхности с $p_g > 0$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 813–851.
26. *Vafa C.* Extending mirror conjecture to Calabi–Yau with bundles. hep-th/9804131.
27. *Woodhouse N.* Geometric Quantization. London–N.Y.: Oxford Univ. Press, 1980.
28. *Donaldson S. K.* Symplectic submanifolds and almost complex geometry // J. Diff. Geom. 1998.
29. *Gromov M.* Soft and hard symplectic geometry // Proc. ICM. Berkeley, 1986. AMS. 1987. P. 81–98.

Отдел алгебры, Математический институт им. В. А. Стеклова, Поступило в редакцию
ул. Губкина 8, Москва, ГСП–1, 117966, Россия 24.XI.1998
E-mail: Tyurin@tyurin.mian.su or
Tyurin@Maths.Warwick.Ac.UK
Tyurin@mpim-bonn.mpg.de