Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Р. Волевич, А. Р. Ширикян, Локальная динамика для полулинейных гиперболических уравнений высокого порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 3, 3–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/im288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:12:24

УДК 517.9

Л. Р. Волевич, А. Р. Ширикян

Локальная динамика для полулинейных гиперболических уравнений высокого порядка

Работа посвящена исследованию полулинейных гиперболических уравнений высокого порядка. Предполагается, что рассматриваемое уравнение является малым возмущением уравнения с постоянными вещественными коэффициентами, причем корни полного символа невозмущенного уравнения относительно переменной, двойственной ко времени, либо отделены от мнимой оси, либо лежат вне области $\nu < |\operatorname{Re} \tau| < \delta$, где $\delta > \nu \geq 0$. В первом случае доказывается, что в окрестности нуля фазовый портрет возмущенного уравнения можно линеаризовать с помощью сохраняющего время семейства гомеоморфизмов. Устанавливается также непрерывность по Гёльдеру построенных гомеоморфизмов и их обратных. Во втором случае доказывается, что в окрестности нуля фазового пространства рассматриваемого уравнения существует локально инвариантное гладкое многообразие $\mathcal{M}$, которое содержит все решения, равномерно ограниченные на временной оси, и экспоненциально притягивает решения, ограниченные на полуоси. Многообразие $\mathcal{M}$ представимо в виде графика некоторого нелинейного оператора, действующего в фазовом пространстве и являющегося малым возмущением псевдодифференциального оператора с явно выписываемым символом. При этом динамика на инвариантном многообразии $\mathcal{M}$ описывается гиперболическим уравнением, порядок которого совпадает с числом корней полного символа, лежащих в полосе $|\operatorname{Re} \tau| \leq \nu$.

Библиография: 34 наименования.

Введение

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) поведение решений в окрестности стационарной точки изучено достаточно подробно. Приведем хорошо известный результат Гробмана–Хартмана о линеаризации фазового портрета в окрестности гиперболической стационарной точки (см. [4], [20], [2], [10]).

Рассмотрим систему

$$\dot{u}(t) = Pu(t) + \varepsilon Q(u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{E}, \quad (0.1)$$

где $\mathbb{E} = \mathbb{R}^m$ – фазовое пространство, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ – малый параметр, P – матрица размера $m \times m$ с вещественными элементами, а $Q(u): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гладкая финитная функция, обращающаяся в нуль при $u = 0$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (0.1):

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m. \quad (0.2)$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00541) и фондом Volkswagen-Stiftung (грант I-71016).

Обозначим через

$$\mathcal{U}_\varepsilon(t, \cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u_0 \mapsto u(t),$$

разрешающий оператор для задачи (0.1), (0.2). При $\varepsilon = 0$ оператор $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \cdot)$ является линейным и обозначается через $\mathcal{U}_0(t)$. Теорема Гробмана–Хартмана утверждает, что если вещественные части собственных значений матрицы P отличны от нуля, то найдется такой гомеоморфизм $\Phi_\varepsilon: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $|\varepsilon| \ll 1$, что при всех $t \in \mathbb{R}$ и $u_0 \in \mathbb{R}^m$ выполнено соотношение (см. рис. 1, где $u = \mathcal{U}_\varepsilon(t, u_0)$)

$$\mathcal{U}_0(t)\Phi_\varepsilon(u_0) = \Phi_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(t, u_0)).$$

Рис. 1. Линеаризация фазового портрета

В случае, когда матрица P имеет корни на мнимой оси, линеаризация, вообще говоря, невозможна, однако, как следует из результатов работы [29] (см. также [21], [33]), найдется гладкое многообразие $\mathcal{M}$ размерности m_c (где m_c – число чисто мнимых собственных значений матрицы P) такое, что справедливы следующие утверждения:

- (i) любое решение, равномерно ограниченное при $t \in \mathbb{R}$, лежит на $\mathcal{M}$, при этом динамика на $\mathcal{M}$ описывается уравнением порядка m_c ;
- (ii) любое решение, равномерно ограниченное при $t \geq 0$ ($t \leq 0$), экспоненциально притягивается к некоторой траектории на $\mathcal{M}$.

Приведенные выше результаты являются частью общей теории, посвященной описанию поведения решений ОДУ в окрестности стационарной точки. Подробное изложение соответствующего раздела ОДУ можно найти в [2], [6], [9], [10], [33], где, в частности, изучаются такие вопросы, как асимптотическая устойчивость, экспоненциальная дихотомия, существование и гладкость устойчивого, неустойчивого и центрального многообразий. Все эти результаты в том или ином виде переносятся на уравнения вида (0.1) с бесконечномерным фазовым пространством $\mathbb{E}$ при условии, что P – ограниченный линейный оператор, а $Q(u)$ – гладкая функция в $\mathbb{E}$ (см. [5], [28]). Условие ограниченности P не позволяет применить развитую абстрактную теорию к эволюционным уравнениям с частными производными, так как оператор P , возникающий в результате сведения таких уравнений к системам вида (0.1), представляет собой дифференциальный оператор по пространственным переменным и поэтому неограничен. Таким образом, при изучении уравнения (0.1) в бесконечномерном фазовом пространстве “естественные” условия на оператор P и нелинейную функцию $Q(u)$ диктуются конкретными примерами уравнений с

частными производными. Упомянутые выше задачи для таких уравнений изучались многими авторами (см. работы [1], [8], [11], [14]–[18], [22]–[27], [31], [34] и цитированную там литературу).

В настоящей работе изучаются полулинейные гиперболические уравнения вида

$$P(\partial)u(t, x) + \varepsilon Q(\varepsilon, t, x, \partial^m u(t, x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.3)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$ – малый параметр, $\partial = (\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\partial^m = \{\partial^\alpha : |\alpha| \leq m\}$, а $\partial^\alpha = \partial_t^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Предполагается, что оператор

$$P(\partial) = P(\partial_t, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha \partial^\alpha, \quad p_\alpha \in \mathbb{R}, \quad (0.4)$$

является строго гиперболическим, а нелинейный член Q имеет вид

$$Q(\varepsilon, t, x, \partial^m u) = \sum_{|\alpha| \leq m} q_\alpha(\varepsilon, t, x) \partial^\alpha u + q(\varepsilon, t, x, \partial^{m-1} u), \quad (0.5)$$

где $q_\alpha(\varepsilon, t, x)$ и $q(\varepsilon, t, x, z)$, $z = \{z_\beta : |\beta| \leq m-1\} \in \mathbb{R}^d$, – гладкие вещественнозначные функции, причем $q(\varepsilon, t, x, 0) \equiv 0$. Наряду со строгой гиперболичностью на $P(\partial)$ налагается одно из следующих условий.

УСЛОВИЕ (Н). *Найдется такое $\delta > 0$, что*

$$P(\tau, \xi) \neq 0 \quad \text{при} \quad |\operatorname{Re} \tau| < \delta, \quad (\operatorname{Im} \tau, i\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (0.6)$$

где $P(\tau, \xi)$ – полный символ оператора $P(\partial_t, \partial_x)$.

УСЛОВИЕ (Н_c). *Найдутся такие $\delta > \nu \geq 0$, что*

$$P(\tau, \xi) \neq 0 \quad \text{при} \quad \nu < |\operatorname{Re} \tau| < \delta, \quad (\operatorname{Im} \tau, i\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (0.7)$$

Другими словами, в условии (Н) предполагается, что корни полинома $P(\tau, \xi)$ отделены от мнимой оси равномерно по $i\xi \in \mathbb{R}^n$, тогда как в условии (Н_c) допускается наличие корней символа $P(\tau, \xi)$ в окрестности мнимой оси, но требуется, чтобы они были отделены от остальных корней равномерно по ξ . Мы докажем, что если выполнено условие (Н), то в произвольной конечной окрестности нуля фазовый портрет уравнения (0.3) можно линеаризовать (при достаточно малых ε) с помощью сохраняющего время семейства гомеоморфизмов. Более того, мы покажем, что если оператор Q имеет порядок $m-1$, то линеаризующие гомеоморфизмы являются непрерывными по Гёльдеру вместе со своими обратными. Мы не приводим точные формулировки этих утверждений, отсылая читателя к п. 1.2.

В случае, когда выполнено условие (Н_c), мы докажем, что в произвольной конечной окрестности нуля фазового пространства уравнения (0.3) найдется гладкое бесконечномерное многообразие $\mathcal{M}$, обладающее свойствами, аналогичными (i) и (ii) (см. выше). Более того, будет установлено, что $\mathcal{M}$ является графиком некоторого гладкого нелинейного оператора, зависящего от m_c функций (где m_c – число¹ корней, лежащих в полосе $|\operatorname{Re} \tau| \leq \nu$) и представляющего собой малое

¹Всюду ниже мы будем предполагать, что $1 \leq m_c \leq m-1$.

нелинейное возмущение матричного псевдодифференциального оператора, символ которого выражается через символ исходного уравнения. Точные формулировки этих утверждений приведены в п. 5.1.

Коротко опишем структуру статьи, состоящей из двух частей. Первая часть посвящена доказательству теорем типа Гробмана–Хартмана. В § 1 приводятся формулировки основных результатов первой части (см. теоремы 1.3 и 1.4) и рассматриваются некоторые примеры. В § 2, посвященном изучению линейных гиперболических уравнений, доказываем, что фазовые портреты уравнения с постоянными коэффициентами и его малого возмущения можно преобразовать друг в друга с помощью сохраняющего время семейства гомеоморфизмов. В § 3 доказываются теоремы 1.3 и 1.4. В приложении (§ 4) собраны некоторые вспомогательные утверждения, использованные в основном тексте.

Вторая часть посвящена построению центрального многообразия для уравнения (0.3). В § 5 приводятся формулировки и наброски доказательств основных результатов (см. теоремы 5.1–5.3). В § 6 изучается начальная задача с условиями роста на бесконечности для уравнения со срезанной нелинейностью. § 7 посвящен доказательству теорем 5.1–5.3. В приложении (§ 8) собраны некоторые вспомогательные утверждения.

Авторы выражают благодарность А.Л. Аффендикову, А.Ю. Горишкому и А.И. Комечу за обсуждение полученных результатов и ценные замечания, а также М. Левитину за ТЭХническую поддержку.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Пусть $0 < \gamma \leq 1$, $J \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал, D – область в $\mathbb{R}^d$, X и Y – банаховы пространства, а Ω – открытое подмножество в X . Мы будем использовать следующие пространства функций.

$C_b^\infty(D)$ – пространство бесконечно гладких функций на D , которые ограничены вместе со всеми производными.

$C(J, X)$ – пространство непрерывных функций на J со значениями в X .

$C^{l,\gamma}(\Omega, Y)$ – пространство l раз непрерывно дифференцируемых (по Фреше) функций $f: \Omega \rightarrow Y$, для которых l -я производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем γ , и конечна полунорма

$$|f|_{C^{l,\gamma}} := \sup_{u \in \Omega} \sum_{j=1}^l \|D^j f(u)\|_{\mathcal{L}^j(X,Y)} + \sup_{\substack{u,v \in \Omega \\ u \neq v}} \frac{\|D^l f(u) - D^l f(v)\|_{\mathcal{L}^l(X,Y)}}{\|u - v\|_X^\gamma},$$

где $\mathcal{L}^j(X, Y)$ обозначает пространство ограниченных j -линейных форм из X в Y (см. [11, п. 1.2.5]). Заметим, что если область Ω ограничена, то конечна также норма

$$\|f\|_{C^{l,\gamma}} := \sup_{u \in \Omega} \|f(u)\|_Y + |f|_{C^{l,\gamma}}.$$

В случае, когда $l = 0$, будем писать $C^\gamma(\Omega, Y)$.

Через C_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать несущественные положительные константы.

Часть I. Теорема Гробмана–Хартмана

§ 1. Формулировки теорем о линеаризации и примеры

В этом параграфе мы напомним теорему о корректности задачи Коши для нелинейных гиперболических уравнений (предложение 1.1), сформулируем основные результаты первой части (теоремы 1.3 и 1.4) и рассмотрим некоторые примеры.

1.1. Задача Коши для уравнения (0.3). Мы будем предполагать, что для операторов P и Q из уравнения (0.3) выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ (P). Оператор $P(\partial)$ имеет вид (0.4) и является строго гиперболическим, т.е. он разрешен относительно старшей производной по t , а корни по τ старшего символа

$$P^0(\tau, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha \tau^{\alpha_0} \xi^{\alpha'}, \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha'),$$

являются чисто мнимыми и попарно различными при $i\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

УСЛОВИЕ (Q). Оператор Q имеет вид (0.5), где q_α и q – вещественнозначные функции, удовлетворяющие включениям $q_\alpha \in C_b^\infty([-1, 1] \times \mathbb{R}_{t,x}^{n+1})$ и $q \in C_b^\infty([-1, 1] \times \mathbb{R}_{t,x}^{n+1} \times B_\rho)$ для любого шара $B_\rho = \{z \in \mathbb{R}^d : |z| \leq \rho\}$, причем $q(\varepsilon, t, x, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (0.3):

$$\partial_t^j u(\theta, x) = u_j(x) \in H^{(m-1+k-j)}, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (1.1)$$

где $k \geq 0$ – целое число, а $H^{(s)} = H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева порядка s со стандартной нормой $\|\cdot\|_s$. Определим фазовое пространство уравнения (0.3) по формуле

$$\mathbb{E}_{m-1,k} = \prod_{j=0}^{m-1} H^{(m-1+k-j)}$$

и снабдим его нормой

$$\|U\|_{m-1,k} = \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{(m-1+k-j)}^2 \right)^{1/2}, \quad U = [u_0, \dots, u_{m-1}].$$

Обозначим через $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ открытый шар в $\mathbb{E}_{m-1,k}$ радиуса $\rho > 0$ с центром в нуле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть выполнены условия (P) и (Q). Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Для любого $\rho > 0$ и целого числа $k > n/2$ найдется такое $T > 0$, что задача (0.3), (1.1) с данными Коши $[u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ имеет (притом единственное) решение $u(t, x)$, удовлетворяющее включениям

$$\partial_t^j u \in C(J, H^{(m-1+k-j)}), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (1.2)$$

где $J = [\theta - T, \theta + T]$.

(ii) Если $u_i(t, x)$, $i = 1, 2$, – два решения задачи (0.3), (1.1), (1.2) с $J = J_i$, где $J_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, – замкнутые интервалы, содержащие точку θ , то $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ при $t \in J_1 \cap J_2$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Предложение 1.1 является одним из вариантов теоремы о корректности задачи Коши для нелинейных гиперболических уравнений. Его доказательство можно найти, например, в [7, гл. 7].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из предложения 1.1 следует, что для любых $\theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ найдутся такие $T_\varepsilon^\pm = T_\varepsilon^\pm(k, \theta, U_0)$, что $(T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+)$ – максимальный интервал, на котором определено решение, соответствующее данным Коши U_0 . При этом если $T_\varepsilon^+ < +\infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow T_\varepsilon^+ - 0} \|\mathcal{D}(t)u\|_{m-1,k} = +\infty,$$

где через

$$\mathcal{D}(t)u = [u(t, x), \partial_t u(t, x), \dots, \partial_t^{m-1} u(t, x)] \quad (1.3)$$

мы обозначили *фазовую траекторию, соответствующую $u(t, x)$* . Аналогично, если $T_\varepsilon^- > -\infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow T_\varepsilon^- + 0} \|\mathcal{D}(t)u\|_{m-1,k} = +\infty.$$

Обозначим через

$$\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0): \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad t \in (T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+), \quad (1.4)$$

оператор, отображающий $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ в вектор-функцию (1.3), где $u(t, x)$ – решение задачи (0.3), (1.1), (1.2) с $J = (T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+)$. При $\varepsilon = 0$ уравнение (0.3) является линейным, а его коэффициенты не зависят от (t, x) . Поэтому $T_0^\pm = \pm\infty$, а (1.4) – обратимый линейный оператор, зависящий только от разности $t - \theta$. Его мы будем обозначать через $\mathcal{U}_0(t - \theta)$.

1.2. Формулировка результатов. Напомним, что условие (Н) определено во введении.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполнены условия (Р), (Q) и (Н). Тогда для любого $\rho > 0$ и произвольного целого числа $k > n/2$ найдутся константа $\varepsilon_0 > 0$ и семейство непрерывных отображений

$$\Phi_\varepsilon(\theta, U_0): \mathbb{R} \times \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho) \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k} \quad (1.5)$$

таких, что $\Phi_\varepsilon(\theta, 0) \equiv 0$, и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Если вектор-функция $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ такова, что

$$\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0) \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho) \quad \text{при} \quad t \in J,$$

где $J \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал, содержащий точку $\theta \in \mathbb{R}$, то

$$\mathcal{U}_0(t - \theta)\Phi_\varepsilon(\theta, U_0) = \Phi_\varepsilon(t, \mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0)). \quad (1.6)$$

(ii) Для произвольного фиксированного $\theta \in \mathbb{R}$ образ $\mathbb{V}_\varepsilon(\rho, \theta)$ открытого шара $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ при отображении $\Phi_\varepsilon(\theta, \cdot)$ является открытой окрестностью нуля в $\mathbb{E}_{m-1,k}$, причем $\Phi_\varepsilon(\theta, \cdot)$ гомеоморфно отображает $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ на $\mathbb{V}_\varepsilon(\rho, \theta)$.

(iii) Множество $\mathbb{R}_\theta \times \mathbb{V}_\varepsilon(\rho, \theta) = \{(\theta, U_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k} : U_0 \in \mathbb{V}_\varepsilon(\rho, \theta)\}$ открыто в $\mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k}$, а обратное отображение

$$\Phi_\varepsilon^{-1}(\theta, U_0) : \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{V}_\varepsilon(\rho, \theta) \rightarrow \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho) \quad (1.7)$$

непрерывно для любого фиксированного ε .

Рассмотрим теперь вопрос об эквивалентности оператора $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, \cdot)$ и разрешающего оператора $\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)$ задачи Коши для линейного уравнения

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)u \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} (p_\alpha + \varepsilon q_\alpha(\varepsilon, t, x)) \partial^\alpha u = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, по определению линейный оператор $\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)$, определенный при всех $t, \theta \in \mathbb{R}$, переводит $[u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ в вектор-функцию (1.3), где $u(t, x)$ – решение задачи (1.8), (1.1), (1.2) с $J = \mathbb{R}$.

Хорошо известно, что если оператор P является строго гиперболическим, то корни $\tau_j(\xi)$, $j = 1, \dots, m$, полного символа $P(\tau, \xi)$ лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Re} \tau| \leq \text{const}$ при $i\xi \in \mathbb{R}^n$ (см., например, [7, гл. 4] или [32, п. 2.2]). Положим

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \max_{j=1, \dots, m} \sup_{\xi \in i\mathbb{R}^n} |\operatorname{Re} \tau_j(\xi)|, \\ \sigma_{\min} &= \min_{j=1, \dots, m} \inf_{\xi \in i\mathbb{R}^n} |\operatorname{Re} \tau_j(\xi)|. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заметим, что если оператор $P(\partial)$ удовлетворяет условию (H), то $\sigma_{\min} \geq \delta > 0$.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H). Тогда для любых $\rho > 0$ и γ , $0 < \gamma < \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$, и произвольного целого числа $k > n/2$ можно указать константу $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k, \gamma, \rho) > 0$ и семейство непрерывных операторов

$$\Psi_\varepsilon(\theta, U_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho) \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad (1.10)$$

таких, что $\Psi_\varepsilon(\theta, 0) \equiv 0$, и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Если вектор-функция $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ такова, что

$$\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0) \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho) \quad \text{при} \quad t \in J,$$

где $J \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал, содержащий точку $\theta \in \mathbb{R}$, то

$$\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta) \Psi_\varepsilon(\theta, U_0) = \Psi_\varepsilon(t, \mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0)) \quad \text{при} \quad t \in J. \quad (1.11)$$

(ii) Для любого фиксированного $\theta \in \mathbb{R}$ образ $\mathbb{W}_\varepsilon(\rho, \theta)$ открытого шара $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ при отображении $\Psi_\varepsilon(\theta, \cdot)$ является открытой окрестностью нуля в $\mathbb{E}_{m-1,k}$, причем $\Psi_\varepsilon(\theta, \cdot)$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ на $\mathbb{W}_\varepsilon(\rho, \theta)$. Более того, оператор $\Psi_\varepsilon(\theta, \cdot)$ и его обратный оператор $\Psi_\varepsilon^{-1}(\theta, \cdot)$ непрерывны по Гёльдеру с показателем γ .

(iii) Множество $\mathbb{R}_\theta \times \mathbb{W}_\varepsilon(\rho, \theta) = \{(\theta, U_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k} : U_0 \in \mathbb{W}_\varepsilon(\rho, \theta)\}$ открыто в $\mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k}$, а обратное отображение

$$\Psi_\varepsilon^{-1}(\theta, U_0) : \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{W}_\varepsilon(\rho, \theta) \rightarrow \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$$

непрерывно для любого фиксированного ε .

Доказательство теорем 1.3 и 1.4 приведено в § 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Как будет видно из доказательства теорем 1.3 и 1.4, для любого $\rho > 0$ можно указать такие $\rho', \rho'' > 0$, что

$$\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho') \subset \mathbb{V}_\varepsilon(\rho, \theta), \quad \mathbb{W}_\varepsilon(\rho, \theta) \subset \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho''), \quad (1.12)$$

причем $\rho' \rightarrow \infty$, когда $\rho \rightarrow \infty$. Из доказательства будет также следовать, что если нелинейный оператор Q из (0.3) не зависит от t , то линеаризующие операторы Φ_ε и Ψ_ε не зависят от θ .

1.3. Примеры. Приведем некоторые примеры строго гиперболических операторов, удовлетворяющих условию (Н).

ПРИМЕР 1.6. Пусть $a > 0$, $b, \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$P_{b,c}(\partial_t, \partial_x) = \partial_t + c\partial_x + b, \quad P_{a,\sigma}(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^2 + \sigma\partial_t + (1 - a^2\Delta), \quad (1.13)$$

где Δ – оператор Лапласа. Легко видеть, что операторы (1.13) являются строго гиперболическими и удовлетворяют условию (Н).

ПРИМЕР 1.7. Пусть вектор $c \in \mathbb{R}^n$, вещественные числа a_j, σ_j , $j = 1, \dots, l$, и b таковы, что $|c| < a_j$ при всех j , $a_j \neq a_k$ при $j \neq k$ и $b, \sigma_j \neq 0$. Тогда для строго гиперболических операторов

$$\prod_{j=1}^l P_{a_j, \sigma_j}(\partial_t, \partial_x), \quad P_{b,c}(\partial) \prod_{j=1}^l P_{a_j, \sigma_j}(\partial_t, \partial_x)$$

выполнено условие (Н).

ПРИМЕР 1.8. Условия (Р) и (Н) устойчивы относительно малых возмущений символа (см. [32, предложение 3.9]). Другими словами, если некоторый оператор $P(\partial)$ порядка m удовлетворяет этим условиям, а $Q(\partial)$ – произвольный оператор порядка m с вещественными коэффициентами, то при достаточно малых $\nu \in \mathbb{R}$ для $P + \nu Q$ выполнены условия (Р) и (Н).

Следующий пример показывает, что оценка для показателя γ непрерывности по Гёльдеру является точной в случае $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$.

ПРИМЕР 1.9. Рассмотрим линейное ОДУ

$$\dot{u} = -(1 + \varepsilon)u. \quad (1.14)$$

В этом случае $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 1$, а разрешающий оператор задачи Коши для уравнения (1.14) имеет вид

$$\mathcal{V}_\varepsilon(t)u_0 = e^{-(1+\varepsilon)t}u_0. \quad (1.15)$$

Пусть для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ непрерывный оператор $\Psi: [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{U}_0(t)\Psi(u_0) = \Psi(\mathcal{U}_\varepsilon(t)u_0), \quad 0 \leq u_0 \leq \rho, \quad t \geq 0. \quad (1.16)$$

Тогда, подставляя (1.15) в (1.16) и полагая $u_0 = \rho$, получим

$$e^{-t}\Psi(\rho) = \Psi(e^{-(1+\varepsilon)t}\rho),$$

откуда следует, что

$$\Psi(u) = cu^{\frac{1}{1+\varepsilon}}, \quad u > 0, \quad c = \Psi(\rho)\rho^{-\frac{1}{1+\varepsilon}}.$$

Таким образом, оператор $\Psi(u)$ непрерывен по Гёльдеру с показателем $\gamma = 1/(1 + \varepsilon)$, но не удовлетворяет условию Липшица ни при каком $\varepsilon > 0$.

§ 2. Эквивалентность линейных уравнений

В этом параграфе мы покажем, что если выполнено условие (H), то интегральные кривые уравнения (1.8) можно отобразить на интегральные кривые уравнения

$$P(\partial)u(t, x) = 0 \quad (2.1)$$

с помощью сохраняющего время семейства гомеоморфизмов. Это утверждение будет использоваться в § 3 при доказательстве теоремы 1.3.

2.1. Формулировка результата. Напомним, что операторы $\mathcal{U}_0(t - \theta)$ и $\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)$ определены в пп. 1.1 и 1.2 соответственно.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H). Тогда для любого целого числа $k \geq 0$ можно указать константу $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$ и семейство непрерывных отображений

$$L_\varepsilon(\theta, U_0): \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad (2.2)$$

таких, что $L_\varepsilon(\theta, 0) \equiv 0$, и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

- (i) $\mathcal{U}_0(t - \theta)L_\varepsilon(\theta, U_0) = L_\varepsilon(t, \mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0)$ при всех $t, \theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}$.
- (ii) Для любого фиксированного $\theta \in \mathbb{R}$ оператор $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ гомеоморфно отображает $\mathbb{E}_{m-1,k}$ на себя. Более того, обратный оператор

$$L_\varepsilon^{-1}(\theta, U_0): \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}$$

непрерывен по совокупности переменных (θ, U_0) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Как будет видно из доказательства теоремы, для любого $\rho > 0$ можно указать такие $\rho', \rho'' > 0$, что для образа шара $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ под действием отображения L_ε справедливо включение

$$\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho') \subset L_\varepsilon(\theta, \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)) \subset \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho''), \quad (2.3)$$

причем $\rho' \rightarrow \infty$, когда $\rho \rightarrow \infty$. Из доказательства будет также следовать, что если коэффициенты q_α не зависят от t , то операторы L_ε не зависят от θ .

Теорема 2.1 будет доказана в п. 2.4. Чтобы пояснить основные идеи доказательства, в п. 2.2 мы рассмотрим частный случай, когда все корни символа $P(\tau, \xi)$ являются устойчивыми, т.е. лежат в левой полуплоскости. Кроме того, нам понадобятся некоторые результаты [3], связанные со свойством экспоненциальной дихотомии для уравнения (1.8). Они изложены в п. 2.3.

2.2. Доказательство теоремы 2.1. Случай устойчивых корней. В этом пункте мы будем предполагать, что корни $\tau_j(\xi)$, $j = 1, \dots, m$, полного символа $P(\tau, \xi)$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \tau_j(\xi) \leq -\sigma_{\min} \quad \text{при} \quad i\xi \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m.$$

- 1) Как показано в [32, теорема 6.1], при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \ll 1$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0\|_{m-1,k} \leq C_1 e^{-\mu(t-\theta)} \|U_0\|_{m-1,k}, \quad t \geq \theta, \quad (2.4)$$

где $0 < \mu < \sigma_{\min}$, а константа $C_1 > 0$ не зависит от U_0 . Для заданных $\theta \in \mathbb{R}$ и ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, определим полунорму в $\mathbb{E}_{m-1,k}$ по формуле

$$|U_0|_{(\varepsilon, \theta)} = \left(\int_{\theta}^{+\infty} \|\mathcal{V}_{\varepsilon}(t, \theta)U_0\|_{m-1,k}^2 dt \right)^{1/2}, \quad U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}. \quad (2.5)$$

Покажем, что полунорма (2.5) эквивалентна $\|\cdot\|_{m-1,k}$. Более точно, найдется такая константа $K > 1$, не зависящая от ε и θ , что

$$K^{-1}\|U_0\|_{m-1,k} \leq |U_0|_{(\varepsilon, \theta)} \leq K\|U_0\|_{m-1,k}, \quad U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}. \quad (2.6)$$

В самом деле, в силу (2.4) имеем

$$|U_0|_{(\varepsilon, \theta)}^2 = \int_{\theta}^{+\infty} \|\mathcal{V}_{\varepsilon}(t, \theta)U_0\|_{m-1,k}^2 dt \leq C_1^2(2\mu)^{-1}\|U_0\|_{m-1,k}^2.$$

Для доказательства обратного неравенства нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.3. *Пусть выполнены условия (P) и (Q). Тогда найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$, $\varkappa > 0$ и $C > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{V}_{\varepsilon}(t, \theta)U_0\|_{m-1,k} \leq C e^{\varkappa|t-\theta|} \|U_0\|_{m-1,k}, \quad t, \theta \in \mathbb{R}, \quad U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}. \quad (2.7)$$

Более того, оператор $\mathcal{V}_{\varepsilon}(t, \theta)U_0$ непрерывен по (t, θ, U_0) .

Неравенство (2.7) установлено в [12, лемма 23.2.1]. Непрерывность $\mathcal{V}_{\varepsilon}$ доказывается так же, как и утверждение (iii) предложения 4.2.

В неравенстве (2.7) поменяем местами t и θ и заменим U_0 на $\mathcal{V}_{\varepsilon}(t, \theta)U_0$. В результате получим

$$\|U_0\|_{m-1,k} \leq C_2 \|\mathcal{V}_{\varepsilon}(t, \theta)U_0\|_{m-1,k}, \quad |t - \theta| \leq 1,$$

где константа $C_2 > 0$ не зависит от ε и U_0 . Поэтому

$$|U_0|_{(\varepsilon, \theta)}^2 \geq \int_{\theta}^{\theta+1} \|\mathcal{V}_{\varepsilon}(t, \theta)U_0\|_{m-1,k}^2 dt \geq C_2^{-2} \|U_0\|_{m-1,k}^2,$$

что завершает доказательство (2.6).

2) Обозначим через $S_{\varepsilon}(\theta)$ сферу в $\mathbb{E}_{m-1,k}$ радиуса 1 с центром в нуле относительно нормы $|\cdot|_{(\varepsilon, \theta)}$:

$$S_{\varepsilon}(\theta) = \{U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k} : |U_0|_{(\varepsilon, \theta)} = 1\}.$$

Покажем, что для любого ненулевого решения $u(t, x)$ задачи (1.8), (1.1) существует, притом единственный, момент времени T такой, что

$$U(T) \in S_{\varepsilon}(T), \quad (2.8)$$

где $U(t) = \mathcal{D}(t)u$ – фазовая траектория, соответствующая решению $u(t, x)$ (см. (1.3)). В самом деле, в силу неравенства

$$|U(\theta)|_{(\varepsilon, \theta)}^2 = \int_{\theta}^{+\infty} \|U(t)\|_{m-1, k}^2 dt > \int_{\theta'}^{+\infty} \|U(t)\|_{m-1, k}^2 dt = |U(\theta')|_{(\varepsilon, \theta')}^2,$$

где $\theta < \theta'$, функция $|U(\theta)|_{(\varepsilon, \theta)}$ монотонно убывает. Кроме того, из (2.4) и (2.6) следует, что

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} |U(\theta)|_{(\varepsilon, \theta)} = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} |U(\theta)|_{(\varepsilon, \theta)} = +\infty.$$

Поэтому найдется, притом единственное, число $T \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $|U(T)|_{(\varepsilon, T)} = 1$, что эквивалентно (2.8).

Для заданных $\varepsilon, \theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1, k}$ обозначим через $T_\varepsilon(\theta, U_0)$ число T , удовлетворяющее условию (2.8), где $U(t) = \mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0$. Искомое отображение (2.2) определим по формуле

$$L_\varepsilon(\theta, U_0) = \begin{cases} |\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(0, T)}^{-1} \mathcal{U}_0(\theta - T) \mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0 & \text{при } U_0 \neq 0, \\ 0 & \text{при } U_0 = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $T = T_\varepsilon(\theta, U_0)$. Другими словами, если $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1, k}$ лежит на сфере $S_\varepsilon(\theta)$, то $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ определяется как точка пересечения луча $\{\lambda U_0, \lambda > 0\}$ со сферой² $S_0 = S_0(\theta)$. Если же ненулевая вектор-функция $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1, k}$ не лежит на $S_\varepsilon(\theta)$, то $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ определяется следующим образом: вектор $U(T)$, $T = T_\varepsilon(\theta, U_0)$, который лежит на траектории, проходящей через U_0 в момент времени θ , и удовлетворяет (2.8), с помощью сжатия или растяжения отображается на сферу S_0 , и к полученной функции применяется оператор $\mathcal{U}_0(\theta - T)$, $T = T_\varepsilon(\theta, U_0)$ (см. рис. 2, где $S_\varepsilon = S_\varepsilon(T)$, $A = \mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0$ и $B = |\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(0, T)}^{-1} \mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0$).

Рис. 2. Отображение $L_\varepsilon(\theta, U_0)$

3) Мы покажем, что отображение (2.9) удовлетворяет всем требуемым свойствам. Для этого нам понадобятся три вспомогательные леммы.

²При $\varepsilon = 0$ норма $|\cdot|_{(\varepsilon, \theta)}$ не зависит от θ , и поэтому сфера $S_0(\theta)$ также не зависит от θ .

ЛЕММА 2.4. (i) Для любого $\rho > 1$ модуль разности $T_\varepsilon(\theta, U_0) - \theta$ равномерно ограничен при $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho^{-1} \leq \|U_0\|_{m-1,k} \leq \rho$.

(ii) Найдутся такие константы $C > 0$ и $\varkappa > 0$, не зависящие от ε и θ , что если $T_\varepsilon(\theta, U_0) < \theta$, то

$$T_\varepsilon(\theta, U_0) \leq \theta + \varkappa^{-1} \ln \|U_0\|_{m-1,k} + C. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Функция $T_\varepsilon(\theta, U_0)$ определялась как единственное решение уравнения

$$F_\varepsilon(T, \theta, U_0) := |\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(\varepsilon, T)}^2 - 1 = 0. \quad (2.11)$$

Поэтому в силу (2.6) имеем

$$K^{-1} \leq \|\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0\|_{m-1,k} \leq K, \quad T = T_\varepsilon(\theta, U_0). \quad (2.12)$$

Теперь заметим, что норма $\|\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0\|_{m-1,k}$ стремится к нулю при $t - \theta \rightarrow +\infty$ и стремится к бесконечности при $t - \theta \rightarrow -\infty$, причем в обоих случаях сходимость является равномерной при $\rho^{-1} \leq \|U_0\|_{m-1,k} \leq \rho$. Отсюда и из (2.12) следует равномерная ограниченность разности $T_\varepsilon(\theta, U_0) - \theta$.

(ii) Из неравенства (2.7) следует, что

$$\|\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0\|_{m-1,k} \leq C_2 e^{\varkappa(\theta-t)} \|U_0\|_{m-1,k}, \quad t \leq \theta.$$

Полагая в этом неравенстве $t = T_\varepsilon(\theta, U_0)$ и пользуясь (2.12), получим

$$-\ln K \leq \varkappa(\theta - T_\varepsilon(\theta, U_0)) + \ln C_2 + \ln \|U_0\|_{m-1,k},$$

откуда следует требуемое неравенство (2.10).

ЛЕММА 2.5. Функция $T_\varepsilon(\theta, U_0)$ непрерывна по $(\theta, U_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k} \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что последовательности $\{\theta_i\} \subset \mathbb{R}$ и $\{U_{i0}\} \subset \mathbb{E}_{m-1,k}$ сходятся к $\theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ соответственно. Положим $T_i = T_\varepsilon(\theta_i, U_{i0})$. По лемме 2.4 разность $T_i - \theta_i$ ограничена равномерно по i . Следовательно, найдется подпоследовательность $\{T_{i_k}\}$, сходящаяся к некоторому пределу $T' \in \mathbb{R}$. Полагая $T = T_{i_k}$, $\theta = \theta_{i_k}$ и $U_0 = U_{i_k0}$ в (2.11) и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим, что T' является решением (2.11). В силу единственности этого решения отсюда следует, что $T' = T_\varepsilon(\theta, U_0)$ и что вся последовательность $\{T_i\}$ сходится к T' .

ЛЕММА 2.6. Для любых фиксированных ε , $\theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k} \setminus \{0\}$ справедливо соотношение³

$$T_\varepsilon(\theta, U_0) = T_0(L_\varepsilon(\theta, U_0)). \quad (2.13)$$

³При $\varepsilon = 0$ функция $T_\varepsilon(\theta, U_0)$ не зависит от θ , и мы обозначаем ее через $T_0(U_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $T_0(L_\varepsilon(\theta, U_0))$ является единственным решением уравнения

$$|\mathcal{U}_0(T - \theta)L_\varepsilon(\theta, U_0)|_{(0,T)} = 1. \quad (2.14)$$

В силу (2.9) при $T = T_\varepsilon(\theta, U_0)$ имеем

$$\mathcal{U}_0(T - \theta)L_\varepsilon(\theta, U_0) = |\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(0,T)}^{-1} \mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0.$$

Остается заметить, что правая часть этого равенства удовлетворяет (2.14).

4) Покажем теперь, что оператор $L_\varepsilon(\theta, U_0)$, определенный по формуле (2.9), удовлетворяет всем требуемым свойствам.

Непрерывность $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ при $U_0 \neq 0$ является простым следствием лемм 2.3 и 2.5. Докажем, что $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ непрерывен в точках вида $(\theta, 0)$. Для этого заметим, что если $\|U_0\|_{m-1,k} \ll 1$, то $T = T_\varepsilon(\theta, U_0) < \theta$, и поэтому в силу (2.4) для любого $V_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{U}_0(\theta - T)V_0\|_{m-1,k} \leq C_1 e^{-\mu(\theta-T)} \|V_0\|_{m-1,k}. \quad (2.15)$$

Из (2.6) следует, что

$$|\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(0,T)} \geq K^{-1} \|\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0\|_{m-1,k}. \quad (2.16)$$

Подставляя $V_0 = \mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0$ в (2.15) и учитывая (2.16), придем к оценке

$$\|L_\varepsilon(\theta, U_0)\|_{m-1,k} \leq C_1 K e^{-\mu(\theta-T)}. \quad (2.17)$$

Из (2.10) и (2.17) получим

$$\|L_\varepsilon(\theta, U_0)\|_{m-1,k} \leq C_1 K \exp(\mu\kappa^{-1} \ln \|U_0\|_{m-1,k} + \mu C) \leq C_3(\kappa, \mu) \|U_0\|_{m-1,k}^{\mu/\kappa},$$

откуда следует непрерывность $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ в точке $(\theta, 0)$.

Итак, закончим доказательство теоремы 2.1 для случая устойчивых корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) При $U_0 = 0$ требуемое соотношение тривиально. Предположим, что $U_0 \neq 0$, и зафиксируем произвольные $t, \theta \in \mathbb{R}$. Прямая проверка показывает, что

$$T_\varepsilon(\theta, U_0) = T_\varepsilon(t, \mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0). \quad (2.18)$$

Полагая $T = T_\varepsilon(\theta, U_0)$ и $V_0 = \mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0$ и пользуясь групповым свойством операторов $\mathcal{V}_\varepsilon$ и соотношением (2.18), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0(t - \theta)L_\varepsilon(\theta, U_0) &= |\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(0,T)}^{-1} \mathcal{U}_0(t - T)\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0 \\ &= |\mathcal{V}_\varepsilon(T, t)V_0|_{(0,T)}^{-1} \mathcal{U}_0(t - T)\mathcal{V}_\varepsilon(T, t)V_0 \\ &= L_\varepsilon(t, V_0). \end{aligned}$$

(ii) По аналогии с (2.9) определим оператор

$$K_\varepsilon(\theta, U_0) = \begin{cases} |\mathcal{U}_0(T - \theta)U_0|_{(\varepsilon,T)}^{-1} \mathcal{V}_\varepsilon(\theta, T)\mathcal{U}_0(T - \theta)U_0 & \text{при } U_0 \neq 0, \\ 0 & \text{при } U_0 = 0, \end{cases}$$

где $T = T_0(U_0)$, и докажем, что он является обратным к $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ для любого фиксированного θ .

Положим $T = T_\varepsilon(\theta, U_0)$, $T' = T_0(L_\varepsilon(\theta, U_0))$. В силу леммы 2.7 имеем $T = T'$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_0(T' - \theta)L_\varepsilon(\theta, U_0) &= |\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(0, T)}^{-1} \mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0, \\ |\mathcal{U}_0(T' - \theta)L_\varepsilon(\theta, U_0)|_{(\varepsilon, T)} &= |\mathcal{V}_\varepsilon(T, \theta)U_0|_{(0, T)}^{-1},\end{aligned}$$

откуда следует, что $K_\varepsilon(\theta, L_\varepsilon(\theta, U_0)) = U_0$. Аналогично доказывается, что $L_\varepsilon(\theta, K_\varepsilon(\theta, U_0)) = U_0$.

Таким образом, оператор $L_\varepsilon(\theta, \cdot)$ взаимно однозначно отображает пространство $\mathbb{E}_{m-1, k}$ на себя. Дословно повторяя использованные выше рассуждения, можно показать, что $L_\varepsilon^{-1}(\theta, U_0) = K_\varepsilon(\theta, U_0)$ непрерывен по совокупности переменных (θ, U_0) .

2.3. Свойство экспоненциальной дихотомии. Для $\mu, \theta \in \mathbb{R}$ и целых чисел $k, l \geq 0$ определим пространство

$$\mathbb{F}_{l, k, [\mu]}(\mathbb{R}_\pm(\theta)) = \{u(t, x) : e^{\mu t} \partial_t^j u \in C_b(\mathbb{R}_\pm(\theta), H^{(l+k-j)}), j = 0, \dots, l\},$$

где $\mathbb{R}_\pm(\theta) = [\theta, \pm\infty)$, и снабдим его нормой

$$E_{l, k, [\mu]}(u, \mathbb{R}_\pm(\theta)) = \sup_{\pm(t-\theta) \geq 0} e^{\mu(t-\theta)} E_{l, k}(u, t),$$

где

$$E_{l, k}^2(u, t) = \sum_{j=0}^l \|\partial_t^j u(t, \cdot)\|_{(k+l-j)}^2.$$

Рассмотрим уравнение (1.8), в котором строго гиперболический оператор $P(\partial)$ удовлетворяет условию (H). Положим $\mathbb{C}_\pm(\delta) := \{\tau \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Re} \tau \geq \delta\}$ и обозначим через m_s и m_u число корней символа $P(\tau, \xi)$, которые лежат в полуплоскостях $\mathbb{C}_-(\sigma_{\min})$ и $\mathbb{C}_+(\sigma_{\min})$ соответственно. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H). Тогда для любого μ , $0 \leq \mu < \sigma_{\min}$, и целого числа $k \geq 0$ найдутся положительные константы $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k, \mu)$ и $C = C(k, \mu)$ такие, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Для любой вектор-функции $U_s = [u_0, \dots, u_{m_s-1}] \in \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u}$ уравнение (1.8) имеет, притом единственное, решение $u \in \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu]}(\mathbb{R}_+(\theta))$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\partial_t^j u(\theta, x) = u_j(x) \in H^{(m-1+k-j)}, \quad j = 0, \dots, m_s - 1. \quad (2.19)$$

Для этого решения справедлива оценка

$$E_{m-1, k, [\mu]}(u, \mathbb{R}_+(\theta)) \leq C \sum_{j=0}^{m_s-1} \|u_j\|_{(m-1+k-j)}. \quad (2.20)$$

Аналогично, для любой вектор-функции $U_u = [u_0, \dots, u_{m_u-1}] \in \mathbb{E}_{m_u-1, k+m_s}$ уравнение (1.8) имеет единственное решение $u \in \mathbb{F}_{m-1, k, [-\mu]}(\mathbb{R}_-(\theta))$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\partial_t^j u(\theta, x) = u_j(x) \in H^{(m-1+k-j)}, \quad j = 0, \dots, m_u - 1. \quad (2.21)$$

Для этого решения справедлива оценка

$$E_{m-1, k, [-\mu]}(u, \mathbb{R}_-(\theta)) \leq C \sum_{j=0}^{m_u-1} \|u_j\|_{(m-1+k-j)}. \quad (2.22)$$

(ii) Оператор

$$\mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta): \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1, k}, \quad (2.23)$$

переводящий U_s в вектор-функцию (1.3), где $u \in \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu]}(\mathbb{R}_+(\theta))$ – решение задачи (1.8), (2.19), непрерывен по (t, θ, U_s) . Аналогично, оператор

$$\mathcal{V}_\varepsilon^u(t, \theta): \mathbb{E}_{m_u-1, k+m_s} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1, k}, \quad (2.24)$$

переводящий U_u в вектор-функцию (1.3), где $u \in \mathbb{F}_{m-1, k, [-\mu]}(\mathbb{R}_-(\theta))$ – решение задачи (1.8), (2.21), непрерывен по (t, θ, U_u) .

Утверждение (i) предложения 2.7 установлено в [3, теорема 4.1]. Непрерывность операторов (2.23) и (2.24) доказывается так же, как утверждение (iii) предложения 4.2 (см. § 4).

Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathbb{E}_{m-1, k}^s(\theta)$ и $\mathbb{E}_{m-1, k}^u(\theta)$ устойчивое и неустойчивое подпространства в $\mathbb{E}_{m-1, k}$, которые по определению состоят из вектор-функций $[u_0, \dots, u_{m-1}]$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} [u_0, \dots, u_{m-1}] &= \mathcal{V}_\varepsilon^s(\theta, \theta)[u_0, \dots, u_{m_s-1}], \\ [u_0, \dots, u_{m-1}] &= \mathcal{V}_\varepsilon^u(\theta, \theta)[u_0, \dots, u_{m_u-1}] \end{aligned}$$

соответственно. Следующее утверждение установлено в [3, теорема 5.3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. В условиях предложения 2.7 для любых $\theta \in \mathbb{R}$ и ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, имеет место прямое разложение

$$\mathbb{E}_{m-1, k} = \mathbb{E}_{m-1, k}^s(\varepsilon, \theta) \dot{+} \mathbb{E}_{m-1, k}^u(\varepsilon, \theta). \quad (2.25)$$

При этом проекторы $\mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta)$ и $\mathcal{P}_\varepsilon^u(\theta)$, соответствующие (2.25), непрерывны по θ в сильной операторной⁴ топологии, а их нормы ограничены равномерно по (θ, ε) .

⁴Напомним, что последовательность линейных отображений $L_k: X \rightarrow Y$ (где X, Y – банаховы пространства) сходится к нулю в сильной операторной топологии, если $L_k u \rightarrow 0$ в Y для любого $u \in X$.

2.4. Доказательство теоремы 2.1. Общий случай. Приведем сначала схему доказательства. Прежде всего отметим, что оператор $\mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta)$, определенный при $t \geq \theta$, можно продолжить на полуось $t \leq \theta$, полагая

$$\mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta) = \mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta) \mathcal{V}_\varepsilon^s(\theta, \theta), \quad t \leq \theta. \quad (2.26)$$

Аналогичным образом мы можем продолжить оператор $\mathcal{V}_\varepsilon^u(t, \theta)$ при $t \geq \theta$. В силу прямого разложения (2.25) оператор $\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)$ представим в виде

$$\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta) = \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta) \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) + \mathcal{V}_\varepsilon^u(t, \theta) \mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{P}_\varepsilon^u(\theta), \quad (2.27)$$

где для $l = 1, \dots, m$ мы положили

$$\mathcal{Q}_l: \mathbb{E}_{m-1, k} \rightarrow \mathbb{E}_{l-1, k+m-l}, \quad [u_0, \dots, u_{m-1}] \mapsto [u_0, \dots, u_{l-1}].$$

Первое и второе слагаемые в правой части (2.27) соответствуют динамике на семействе устойчивых и неустойчивых подпространств $\mathbb{E}_{m-1, s}^s(\theta)$ и $\mathbb{E}_{m-1, s}^u(\theta)$. Теперь заметим, что

$$\mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta) \mathcal{Q}_{m_s} U_0 = U_0 \quad \text{при} \quad U_0 \in \mathbb{E}_{m-1, k}^s(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Поэтому

$$\mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta) \mathcal{Q}_{m_s} = \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, t) [\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta)] \mathcal{Q}_{m_s}.$$

Таким образом, динамика на устойчивых подпространствах определяется семейством операторов $\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta): \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u} \rightarrow \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u}$, которое экспоненциально асимптотически устойчиво при $t - \theta \rightarrow +\infty$:

$$\|\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta) U_s\|_{m_s-1, k+m_u} \leq C e^{-\mu(t-\theta)} \|U_s\|_{m_s-1, k+m_u}, \quad t \geq \theta. \quad (2.29)$$

Повторяя рассуждения, использованные в п. 2.2, мы можем построить семейство непрерывных операторов

$$L_\varepsilon^s(\theta, U_s): \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u} \rightarrow \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u}, \quad (2.30)$$

удовлетворяющих соотношению

$$\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{U}_0^s(t - \theta) L_\varepsilon^s(\theta, U_s) = L_\varepsilon^s(t, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta) U_s), \quad t, \theta \in \mathbb{R}, \quad (2.31)$$

где через $\mathcal{U}_0^s(t)$ мы обозначаем оператор $\mathcal{V}_\varepsilon^s(t, 0)|_{\varepsilon=0}$. Аналогичное семейство

$$L_\varepsilon^u(\theta, U_u): \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m_u-1, k+m_s} \rightarrow \mathbb{E}_{m_u-1, k+m_s} \quad (2.32)$$

мы можем построить для операторов $\mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{V}_\varepsilon^u(t, \theta)$, которые определяют динамику на неустойчивых подпространствах. Искомое отображение (2.2) определяется как “сумма” операторов L_ε^s и L_ε^u :

$$L_\varepsilon(\theta, U_0) = \mathcal{U}_0^s(0) L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) U_0) + \mathcal{U}_0^u(0) L_\varepsilon^u(\theta, \mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{P}_\varepsilon^u(\theta) U_0), \quad (2.33)$$

где $\mathcal{U}_0^u(t) = \mathcal{V}_\varepsilon^u(t, 0)|_{\varepsilon=0}$. Все требуемые свойства легко проверяются.

Перейдем к подробному доказательству. Нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H). Тогда для любого целого числа $k \geq 0$ можно указать константу $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$ и семейство непрерывных отображений L_ε^s (см. (2.30)) таких, что $L_\varepsilon^s(\theta, 0) \equiv 0$ и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

- (i) Для любых $t, \theta \in \mathbb{R}$ и $U_s \in \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u}$ выполнено (2.31).
- (ii) Для любого фиксированного $\theta \in \mathbb{R}$ оператор $L_\varepsilon^s(\theta, \cdot)$ гомеоморфно отображает $\mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u}$ на себя. Более того, обратный оператор

$$K_\varepsilon^s(\theta, U_s): \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u} \rightarrow \mathbb{E}_{m_s-1, k+m_u}$$

непрерывен по совокупности переменных (θ, U_s) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. 1) Мы не приводим доказательство предложения 2.9, так как схема, изложенная в п. 2.2 для $\mathcal{V}_\varepsilon$, дословно переносится на операторы $\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s$. В самом деле, доказательство теоремы 2.1 в случае устойчивых корней было основано на непрерывности оператора $\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0$ по (t, θ, U_0) и на неравенствах (2.4) и (2.7). Непрерывность оператора $\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s$ по совокупности переменных (t, θ, U_s) установлена в предложении 2.7. Неравенство (2.29) является аналогом (2.4), а из (2.26) и (2.7) следует, что

$$\|\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta)U_s\|_{m_s-1, k+m_u} \leq C e^{\varkappa(\theta-t)} \|U_s\|_{m_s-1, k+m_u}, \quad t \leq \theta.$$

2) Аналогичное утверждение справедливо для $\mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{V}_\varepsilon^u(t, \theta)$. Соответствующие операторы будем обозначать через L_ε^u и K_ε^u .

Определим оператор L_ε по формуле (2.33). Тогда непрерывность $L_\varepsilon(\theta, U_0)$ следует из непрерывности операторов, входящих в правую часть (2.33), а соотношение $L_\varepsilon(\theta, 0) \equiv 0$ очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Применяя к (2.31) оператор $\mathcal{U}_0^s(0)$, в силу соотношения (2.28), в котором $\varepsilon = 0$, получим

$$\mathcal{U}_0^s(t - \theta)L_\varepsilon^s(\theta, U_s) = \mathcal{U}_0^s(0)L_\varepsilon^s(t, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta)U_s). \quad (2.34)$$

Кроме того, заметим, что

$$\mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta)\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) = \mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)\mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) = \mathcal{P}_\varepsilon^s(t)\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta).$$

Полагая $U_s = \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta)U_0$ в (2.34) и пользуясь (2.26), придем к равенству

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0(t - \theta)\mathcal{U}_0^s(0)L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta)U_0) &= \mathcal{U}_0^s(t - \theta)L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta)U_0) \\ &= \mathcal{U}_0^s(0)L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon^s(t, \theta)\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta)U_0) \\ &= \mathcal{U}_0^s(0)L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)\mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta)U_0) \\ &= \mathcal{U}_0^s(0)L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(t)\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Аналогично,

$$\mathcal{U}_0(t - \theta)\mathcal{U}_0^u(0)L_\varepsilon^u(\theta, \mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{P}_\varepsilon^u(\theta)U_0) = \mathcal{U}_0^u(0)L_\varepsilon^u(\theta, \mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{P}_\varepsilon^u(t)\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)U_0). \quad (2.36)$$

Складывая (2.35) и (2.36) и учитывая (2.33), получим требуемое соотношение.

(ii) По аналогии с (2.33) положим

$$K_\varepsilon(\theta, U_0) = \mathcal{U}_\varepsilon^s(\theta, \theta) K_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_0^s U_0) + \mathcal{U}_\varepsilon^u(\theta, \theta) K_\varepsilon^u(\theta, \mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{P}_0^u U_0), \quad (2.37)$$

где операторы K_ε^s и K_ε^u определены в предложении 2.9 и замечании 2.10, а через $\mathcal{P}_0^s$ и $\mathcal{P}_0^u$ обозначаются проекторы $\mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta)$ и $\mathcal{P}_\varepsilon^u(\theta)$ при $\varepsilon = 0$. Легко видеть, что оператор (2.37), действующий из $\mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k}$ в $\mathbb{E}_{m-1,k}$, является непрерывным по совокупности переменных (θ, U_0) . Таким образом, утверждение (ii) будет установлено, если мы покажем, что $L_\varepsilon(\theta, \cdot)$ и $K_\varepsilon(\theta, \cdot)$ являются взаимно обратными отображениями для любого θ .

Проверим, например, равенство

$$K_\varepsilon(\theta, L_\varepsilon(\theta, U_0)) = U_0, \quad U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}. \quad (2.38)$$

Для этого заметим, что

$$\mathcal{P}_0^s L_\varepsilon(\theta, U_0) = \mathcal{U}_0^s(0) L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) U_0).$$

Отсюда и из предложения 2.9, (ii) и соотношения $\mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{U}_0^s(0) U_s = U_s$ следует, что

$$K_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_0^s L_\varepsilon(\theta, U_0)) = K_\varepsilon^s(\theta, L_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) U_0)) = \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) U_0,$$

и поэтому в силу (2.28)

$$\mathcal{V}_\varepsilon^s(\theta, \theta) K_\varepsilon^s(\theta, \mathcal{Q}_{m_s} \mathcal{P}_0^s L_\varepsilon(\theta, U_0)) = \mathcal{P}_\varepsilon^s(\theta) U_0.$$

Аналогично,

$$\mathcal{V}_\varepsilon^u(\theta, \theta) K_\varepsilon^u(\theta, \mathcal{Q}_{m_u} \mathcal{P}_0^u L_\varepsilon(\theta, U_0)) = \mathcal{P}_\varepsilon^u(\theta) U_0.$$

Складывая эти два соотношения, получим (2.38).

Также просто можно показать, что

$$L_\varepsilon(\theta, K_\varepsilon(\theta, U_0)) = U_0, \quad U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}.$$

Теорема 2.1 полностью доказана.

§ 3. Доказательство основных результатов

Настоящий параграф посвящен доказательству теорем 1.3 и 1.4. Мы сначала приведем одно вспомогательное утверждение о глобальной линеаризации для уравнения со срезанной нелинейностью, а затем покажем, что теоремы 1.3 и 1.4 являются простыми следствиями этого утверждения и теоремы 2.1.

3.1. Сведение теорем 1.3 и 1.4 к линеаризации для уравнения со срезанной нелинейностью. Запишем функцию q из (0.5) в виде

$$q(\varepsilon, t, x, \partial^{m-1} u) = q(\varepsilon, t, x, \partial_x^{m-1} u, \partial_x^{m-2} \partial_t u, \dots, \partial_t^{m-1} u),$$

где $\partial_x^k = \{\partial_x^\alpha : |\alpha| \leq k\}$. Для заданных $\rho > 0$ и $k \geq 0$ положим

$$Q_\rho(\varepsilon, t, U) = \chi(\rho^2 - \|U\|_{m-1,k}^2) q(\varepsilon, t, x, \partial_x^{m-1} u_0, \partial_x^{m-2} u_1, \dots, u_{m-1}), \quad (3.1)$$

где $U = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$, $\chi(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(s) = 0$ при $s \leq -1$ и $\chi(s) = 1$ при $s \geq 0$. Необходимые для дальнейшего свойства функции Q_ρ собраны в предложении 4.1.

Рассмотрим следующее уравнение, полученное из (0.3) заменой нелинейности $q(\varepsilon, t, x, \partial^{m-1}u)$ на $Q_\rho(\varepsilon, t, U(t))$, где $U(t) = \mathcal{D}(t)u$:

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)u + \varepsilon Q_\rho(\varepsilon, t, U(t)) = 0. \quad (3.2)$$

В силу приводимого ниже предложения 4.2 при $|\varepsilon| \ll 1$ для уравнения (3.2) корректно поставлена задача Коши, т.е. для любого $\theta \in \mathbb{R}$ и произвольной вектор-функции $[u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ существует, притом единственное, решение уравнения (3.2), которое удовлетворяет включениям

$$\partial_t^j u \in C(\mathbb{R}, H^{(m-1+k-j)}), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (3.3)$$

и начальным условиям

$$\partial_t^j u(\theta, x) = u_j(x) \in H^{(m-1+k-j)}, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (3.4)$$

Обозначим через

$$\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0): \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}$$

разрешающий процесс задачи (3.2)–(3.4) (см. предложение 4.2).

Для доказательства теорем 1.3 и 1.4 нам понадобится следующее утверждение. Напомним, что числа $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$ определены в (1.9).

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H). Тогда для любых $\rho > 0$ и γ , $0 < \gamma < \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$, и произвольного целого числа $k > n/2$ можно указать константу $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k, \gamma, \rho) > 0$ и семейство непрерывных операторов*

$$N_{\varepsilon, \rho}(\theta, U_0): \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad (3.5)$$

таких, что $N_{\varepsilon, \rho}(\theta, 0) \equiv 0$, и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

- (i) $\mathcal{V}_\varepsilon(t, \theta)N_{\varepsilon, \rho}(\theta, U_0) = N_{\varepsilon, \rho}(t, \mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0))$ при всех $t, \theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}$.
- (ii) Для любого фиксированного $\theta \in \mathbb{R}$ оператор $N_{\varepsilon, \rho}(\theta, \cdot)$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{E}_{m-1,k}$ на себя. Более того, оператор $N_{\varepsilon, \rho}(\theta, \cdot)$ и его обратный $N_{\varepsilon, \rho}^{-1}(\theta, \cdot)$ непрерывны по Гёльдеру с показателем γ .
- (iii) Обратный оператор $N_{\varepsilon, \rho}^{-1}(\theta, U_0): \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}$ непрерывен по совокупности переменных (θ, U_0) .

Теорема 3.1 будет доказана в пп. 3.2 и 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Зафиксируем произвольные $\rho > 0$ и γ , $0 < \gamma < \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$, и целое число $k > n/2$ и выберем константу $\varepsilon_0 > 0$ настолько малой, чтобы при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ выполнялось утверждение теоремы 3.1. Определим оператор Ψ_ε как сужение $N_{\varepsilon,\rho}$ на множество $\mathbb{R} \times \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$:

$$\Psi_\varepsilon(\theta, U_0) = N_{\varepsilon,\rho}(\theta, U_0), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad U_0 \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho).$$

Очевидно, что $\Psi_\varepsilon(\theta, 0) \equiv 0$ и что оператор $\Psi_\varepsilon(\theta, U_0)$ непрерывен по совокупности переменных и обратим для любого фиксированного θ , причем обратный оператор Ψ_ε^{-1} совпадает с сужением $N_{\varepsilon,\rho}^{-1}$ на образ $\mathbb{W}_\varepsilon(\theta, \rho)$ шара $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ под действием $N_{\varepsilon,\rho}(\theta, \cdot)$. Следовательно, $\Psi_\varepsilon^{-1}(\theta, U_0)$ также непрерывен по совокупности переменных. Так как уравнения (0.3) и (3.2) совпадают в шаре $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$, то утверждение (i) следует из теоремы 3.1, (i). Множество $\mathbb{W}_\varepsilon(\theta, \rho)$, как образ открытого шара под действием гомеоморфизма, является открытым. Непрерывность по Гёльдеру оператора $\Psi_\varepsilon(\theta, \cdot)$ и его обратного следует из аналогичных свойств для $N_{\varepsilon,\rho}$. Остается заметить, что множество $\mathbb{R} \times \mathbb{W}_\varepsilon(\theta, \rho)$ является прообразом открытого шара $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ под действием непрерывного отображения $N_{\varepsilon,\rho}^{-1}$ и поэтому открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Зафиксируем произвольные $\rho > 0$ и γ , $0 < \gamma < \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$, и целое число $k > n/2$ и выберем константу $\varepsilon_0 > 0$ настолько малой, чтобы при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ выполнялись утверждения теорем 2.1 и 3.1. Определим оператор Φ_ε как сужение композиции L_ε и $N_{\varepsilon,\rho}$ на множество $\mathbb{R} \times \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$:

$$\Phi_\varepsilon(\theta, U_0) = L_\varepsilon(\theta, N_{\varepsilon,\rho}(\theta, U_0)), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad U_0 \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho).$$

Как и в случае теоремы 4.1, все требуемые свойства легко проверяются.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из доказательства теоремы 3.1 будет следовать, что оператор $N_{\varepsilon,\rho}$ удовлетворяет неравенству

$$\|N_{\varepsilon,\rho}(\theta, U_0) - U_0\|_{m-1,k} \leq \text{const} \ll 1 \quad \text{при всех } \theta \in \mathbb{R}, \quad U_0 \in \mathbb{B}_{m-1,k}. \quad (3.6)$$

На примере обыкновенных дифференциальных уравнений покажем, что в классе операторов, удовлетворяющих условию (3.6), оценка показателя Гёльдера γ является точной. А именно рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 + \varepsilon q(u_2), \\ \dot{u}_2 &= u_3, \\ \dot{u}_3 &= 4u_3 + 4u_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\varepsilon > 0$,

$$q \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad q \geq 0, \quad q(u) = u^2 \quad \text{при } |u| \leq 1. \quad (3.8)$$

В этом случае $\sigma_{\min} = 1$ и $\sigma_{\max} = 2$. Обозначим через $\mathcal{U}_\varepsilon(t, u^0): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $u^0 \in \mathbb{R}^3$, разрешающий оператор задачи Коши для системы (3.7). Как показано в [30, § 4], при $|\varepsilon| \ll 1$ существует, притом единственный, гомеоморфизм $N: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0(t)N(u^0) &= N(\mathcal{U}_\varepsilon(t, u^0)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u^0 \in \mathbb{R}^3, \\ |N(u^0) - u^0| &\leq \text{const} \ll 1, \quad u^0 \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

где через $|\cdot|$ обозначена норма в $\mathbb{R}^3$. Покажем, что N не удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma = 1/2$. В самом деле, согласно [2, § 34] оператор N имеет вид

$$N(u^0) = u^0 + \varepsilon \int_0^{+\infty} \mathcal{U}_0(-\tau)[q(u_2(\tau, u^0)), 0, 0] d\tau, \quad (3.9)$$

где $u_2(\tau, u^0)$ – вторая компонента вектор-функции $\mathcal{U}_\varepsilon(t, u^0)$. В частности, полагая $u^0 = (1/2)[0, 0, v]$, $0 < v \ll 1$, для первой компоненты (3.9) получим

$$N_1(u^0) = \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\tau} q(\tau e^{2\tau} v) d\tau.$$

Предположим, что N удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma = \frac{1}{2}$. Тогда

$$|N_1(u^0)| \leq \text{const } |v|^{1/2}. \quad (3.10)$$

С другой стороны, обозначим через $h(v) > 0$ единственное решение уравнения $\tau e^{2\tau} v = 1$. Легко видеть, что

$$h(v) + \frac{1}{2} \ln v \rightarrow +\infty \quad \text{при } v \rightarrow +0. \quad (3.11)$$

Поэтому в силу (3.8) имеем

$$N_1(u^0) \geq \varepsilon \int_0^{h(v)} e^{-\tau} (\tau e^{2\tau} v)^2 d\tau \geq \frac{\varepsilon}{6} (vh(v))^{1/2}.$$

Полученная оценка противоречит (3.10).

3.2. Доказательство теоремы 3.1. Нам понадобится одно вспомогательное утверждение (см. ниже предложение 3.3). Чтобы сформулировать его, рассмотрим уравнение (3.2), в котором функция Q_ρ заменена на другую функцию R_ρ вида (3.1):

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)v + \varepsilon R_\rho(\varepsilon, t, V(t)) = 0. \quad (3.12)$$

Здесь $V(t) = V(t, \cdot) = \mathcal{D}(t)v$,

$$R_\rho(\varepsilon, t, V) = \chi(\rho^2 - \|V\|_{m-1,k}^2) r(\varepsilon, t, x, \partial_x^{m-1} v_0, \partial_x^{m-2} v_1, \dots, v_{m-1}), \quad (3.13)$$

где $V = [v_0, \dots, v_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$, а $r(\varepsilon, t, x, z)$ – гладкая функция. Как и в случае уравнения (3.2), мы будем рассматривать решения уравнения (3.12), удовлетворяющие включениям

$$\partial_t^j v \in C(\mathbb{R}, H^{(m-1+k-j)}), \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (3.14)$$

Для заданного $\mu \geq 0$ и целых чисел $k, l \geq 0$ определим пространство

$$\mathbb{F}_{l,k,[\mu,-\mu]} = \{u(t, x) : e^{-\mu|t|} \partial_t^j u \in C_b(\mathbb{R}, H^{(l+k-j)}), j = 0, \dots, l\}, \quad (3.15)$$

снабженное нормой

$$E_{l,k,[\mu,-\mu]}(u) = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-\mu|t|} E_{l,k}(u, t). \quad (3.16)$$

В случае $\mu = 0$ вместо $\mathbb{F}_{l,k,[\mu,-\mu]}$ и $E_{l,k,[\mu,-\mu]}(u)$ будем писать $\mathbb{F}_{l,k}$ и $E_{l,k}(u)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H), и пусть функция $r(\varepsilon, t, x, z)$ из (3.13) удовлетворяет тем же условиям, что и $q(\varepsilon, t, x, z)$. Тогда для любых $\rho > 0$, $\varkappa > \sigma_{\max}$ и μ , $0 < \mu < \sigma_{\min}$, и произвольного целого числа $k > n/2$ можно указать константы $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Для любых $\theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ существует, притом единственное, решение $v(t, x) =: \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta, U_0)$ задачи (3.12), (3.14) такое, что

$$v \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\varkappa, -\varkappa]}, \quad u - v \in \mathbb{F}_{m-1,k}, \quad (3.17)$$

где $u(t, x)$ – решение задачи (3.2)–(3.4).

(ii) Пусть $v_i = \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta_i, U_{i0})$, $i = 1, 2$, где $\theta_i \in \mathbb{R}$ и $U_{i0} \in \mathbb{E}_{m-1,k}$. Тогда

$$E_{m-1,k,[\varkappa, -\varkappa]}(v_1 - v_2) \leq C(\|U_{10} - U_{20}\|_{m-1,k} + \|U_{10} - U_{20}\|_{m-1,k}^\gamma), \quad (3.18)$$

где $\gamma = \mu/\varkappa$.

(iii) Пусть последовательности $\{\theta_i\} \subset \mathbb{R}$ и $\{U_{i0}\} \subset \mathbb{E}_{m-1,k}$ сходятся к $\theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ соответственно, и пусть $v_i = \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta_i, U_{i0})$, $v = \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta, U_0)$. Тогда

$$E_{m-1,k,[\varkappa, -\varkappa]}(v_i - v) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Предполагая предложение 3.3 установленным, завершим⁵ доказательство теоремы 3.1.

Определим искомое отображение (3.5) по формуле

$$N_{\varepsilon, \rho}(\theta, U_0) = \mathcal{D}(\theta)(\mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta, U_0)|_{R_\rho \equiv 0}),$$

где оператор $\mathcal{D}(\theta)$ определен в (1.3). Соотношение $N_{\varepsilon, \rho}(\theta, 0) \equiv 0$ очевидно. В силу утверждения (iii) предложения 3.3 оператор $N_{\varepsilon, \rho}$ непрерывен по совокупности переменных (θ, U_0) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (i). Зафиксируем произвольные θ и $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ и обозначим через $u(t, x)$ решение задачи (3.2)–(3.4). Положим $v(t, x) = \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta, U_0)|_{R_\rho \equiv 0}$. Пусть $U(t)$ и $V(t)$ – фазовые траектории, соответствующие решениям $u(t, x)$ и $v(t, x)$. Из утверждения (i) предложения 3.3 вытекает, что

$$v = \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(t, U(t))|_{R_\rho \equiv 0}, \quad t \in \mathbb{R},$$

и поэтому

$$V(t) = \mathcal{D}(t)(\mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta, U_0)|_{R_\rho \equiv 0}) = \mathcal{D}(t)(\mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(t, U(t))|_{R_\rho \equiv 0}).$$

Отсюда следует требуемое соотношение.

⁵Мы повторяем рассуждения, использованные в [28].

Доказательство (ii) и (iii). Простая проверка показывает, что оператор

$$N_{\varepsilon,\rho}^{-1}(\theta, U_0) := \mathcal{D}(\theta)(\mathcal{F}_{R_\rho, Q_\rho}(\theta, U_0)|_{R_\rho \equiv 0})$$

является обратным к $N_{\varepsilon,\rho}(\theta, \cdot)$ для любого фиксированного $\theta \in \mathbb{R}$. Поэтому непрерывность по Гёльдеру операторов $N_{\varepsilon,\rho}(\theta, \cdot)$ и $N_{\varepsilon,\rho}^{-1}(\theta, \cdot)$ следует из неравенства (3.18), а непрерывность $N_{\varepsilon,\rho}^{-1}$ по совокупности переменных (θ, U_0) – из утверждения (iii) предложения 3.3.

3.3. Доказательство предложения 3.3. (i) Функцию $v(t, x)$ будем искать в виде

$$v = u + w, \quad w \in \mathbb{F}_{m-1,k}. \quad (3.20)$$

Подставляя (3.20) в (3.12) и учитывая (3.2), для $w(t, x)$ получим уравнение

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)w = \varepsilon M(U, W), \quad M(U, W) = Q_\rho(\varepsilon, t, U) - R_\rho(\varepsilon, t, U + W), \quad (3.21)$$

где $U = \mathcal{D}(t)u$, $W = \mathcal{D}(t)w$. Методом сжимающих отображений докажем, что при $|\varepsilon| \ll 1$ уравнение (3.21) однозначно разрешимо в пространстве $\mathbb{F}_{m-1,k}$.

Рассмотрим оператор A , переводящий функцию $z \in \mathbb{F}_{m-1,k}$ в решение $w \in \mathbb{F}_{m-1,k}$ уравнения

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)w = \varepsilon M(U, Z), \quad Z = \mathcal{D}(t)z. \quad (3.22)$$

Проверим, что оператор A корректно определен и переводит пространство $\mathbb{F}_{m-1,k}$ в себя. В самом деле, в силу предложения 4.1, (i) если $z \in \mathbb{F}_{m-1,k}$, то $M(U, Z) \in \mathbb{F}_{0,k}$. Поэтому согласно предложению 4.3, в котором $\mu = 0$, при $|\varepsilon| \ll 1$ уравнение (3.22) имеет, притом единственное, решение $w \in \mathbb{F}_{m-1,k}$.

Покажем теперь, что A является сжимающим отображением. Пусть $w_i = A(z_i)$, $i = 1, 2$. Тогда функция $w = w_1 - w_2 \in \mathbb{F}_{m-1,k}$ удовлетворяет уравнению

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)w = \varepsilon(M(U, Z_2) - M(U, Z_1)),$$

где $Z_i = \mathcal{D}(t)z_i$, $i = 1, 2$. Поэтому согласно неравенству (4.8) с $\mu = \theta = 0$

$$E_{m-1,k}(w) \leq C_1 |\varepsilon| E_{0,k}(M(U, Z_1) - M(U, Z_2)). \quad (3.23)$$

Применяя к правой части (3.23) неравенство (4.2) с $\gamma = 1$, получим

$$E_{0,k}(M(U, Z_1) - M(U, Z_2)) \leq C_2 E_{m-1,k}(z_1 - z_2).$$

Сопоставляя эту оценку с (3.23), приходим к неравенству

$$E_{m-1,k}(A(z_1) - A(z_2)) \leq C_1 C_2 |\varepsilon| E_{m-1,k}(z_1 - z_2).$$

Отсюда следует, что отображение $A(z)$ является сжимающим.

Таким образом, мы установили существование и единственность решения $w \in \mathbb{F}_{m-1,k}$ уравнения (3.21). Отсюда следует требуемое утверждение.

(ii) Прежде всего покажем, что если $v_i = \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta, U_{i0})$, $i = 1, 2$, то

$$E_{m-1,k, [\mu, -\mu]}(S(\theta)(w_1 - w_2)) \leq C_3 \|U_{10} - U_{20}\|_{m-1,k}^\gamma, \quad (3.24)$$

где $w_i = v_i - u_i$, а $u_i(t, x)$ – решение задачи (3.2)–(3.4) с данными Коши U_{i0} . В самом деле, положим $w = w_1 - w_2$, $U_i = \mathcal{D}(t)u_i$, $W_i = \mathcal{D}(t)w_i$. Тогда функция $w(t, x) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ является решением уравнения

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)w = \varepsilon h(t, x), \quad h(t, x) = R_\rho(\varepsilon, t, U_2 + W_2) - R_\rho(\varepsilon, t, U_1 + W_1). \quad (3.25)$$

В силу неравенства (4.2)

$$\|h(t, \cdot)\|_k \leq C_4(\|U_2(t, \cdot) - U_1(t, \cdot)\|_{m-1,k}^\gamma + \|W_2(t, \cdot) - W_1(t, \cdot)\|_{m-1,k}),$$

откуда следует, что $h \in \mathbb{F}_{0,k,[\mu,-\mu]}$, причем

$$\begin{aligned} E_{0,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)h) &\leq C_4 \sup_{t \in \mathbb{R}} (e^{-\mu|t-\theta|} [\|U_2(t, \cdot) - U_1(t, \cdot)\|_{m-1,k}^\gamma \\ &\quad + \|W_2(t, \cdot) - W_1(t, \cdot)\|_{m-1,k}]) \\ &\leq C_4 \left(E_{m-1,k,[\varkappa,-\varkappa]}^\gamma(S(\theta)(u_2 - u_1)) \right. \\ &\quad \left. + E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)w) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

По неравенству (4.6) имеем

$$E_{m-1,k,[\varkappa,-\varkappa]}(S(\theta)(u_2 - u_1)) \leq K_2 \|U_{20} - U_{10}\|_{m-1,k}. \quad (3.27)$$

Подставляя эту оценку в (3.26), получим

$$E_{0,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)h) \leq C_5 (\|U_{20} - U_{10}\|_{m-1,k}^\gamma + E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)w)). \quad (3.28)$$

Согласно предложению 4.3 решение $w \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ уравнения (3.25) удовлетворяет неравенству

$$E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)w) \leq K_3 |\varepsilon| E_{0,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)h). \quad (3.29)$$

Сопоставляя (3.28) и (3.29), придем к неравенству

$$E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)w) \leq K_3 C_5 |\varepsilon| (\|U_{20} - U_{10}\|_{m-1,k}^\gamma + E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)w)),$$

откуда при $|\varepsilon| \ll 1$ следует (3.24).

Докажем теперь (3.18). В силу представления (3.20) для функций v_i , $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} E_{m-1,k,[\varkappa,-\varkappa]}(S(\theta)(v_1 - v_2)) \\ \leq E_{m-1,k,[\varkappa,-\varkappa]}(S(\theta)(u_1 - u_2)) + E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)(w_1 - w_2)). \end{aligned}$$

Поэтому требуемая оценка следует из (3.24) и (3.27).

(iii) Обозначим через $u(t, x)$ решение задачи (3.2)–(3.4), отвечающее данным Коши U_0 , а через $u_i(t, x)$ – решение той же задачи с начальной точкой θ_i и с данными Коши U_{i0} . Тогда в силу предложения 4.2

$$U_i(\theta) \rightarrow U(\theta) = U_0 \quad \text{в } \mathbb{E}_{m-1,k} \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \quad (3.30)$$

где $U_i(t) = \mathcal{D}(t)u_i$, $U(t) = \mathcal{D}(t)u$. Из единственности решения $v(t, x)$ задачи (3.12), (3.14), удовлетворяющего условиям (3.17), следует, что

$$v_i = \mathcal{F}_{Q_\rho, R_\rho}(\theta, U_i(\theta)) \quad \text{при всех } i.$$

Поэтому в силу (3.18) имеем

$$E_{m-1,k,[\varkappa,-\varkappa]}(S(\theta)(v_i - v)) \leq C(\|U_i(\theta) - U_0\|_{m-1,k} + \|U_i(\theta) - U_0\|_{m-1,k}^\gamma).$$

Сопоставляя это неравенство с (3.30), получим (3.19). Предложение 3.3 полностью доказано.

§ 4. Приложение

4.1. Срезанная нелинейность. Напомним, что функция $Q_\rho(\varepsilon, t, U)$ определялась по формуле (3.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для любых $\varepsilon \in [-1, 1]$, $\rho > 0$ и целого числа $k > n/2$ справедливы следующие утверждения.

(i) Оператор $Q_\rho(\varepsilon, t, U): \mathbb{R}_t \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow H^{(k)}$ бесконечно дифференцируем по Фреше, причем все производные ограничены равномерно по $(\varepsilon, t, U) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{E}_{m-1,k}$ для любого фиксированного $\rho > 0$.

(ii) Для любого γ , $0 < \gamma \leq 1$, найдется такое $K_1 = K_1(\rho, k, \gamma) > 0$, что

$$\|Q_\rho(\varepsilon, t, U)\|_{(k)} \leq K_1 \min\{\rho, \|U\|_{m-1,k}\}, \quad (4.1)$$

$$\|Q_\rho(\varepsilon, t, U) - Q_\rho(\varepsilon, t, V)\|_{(k)} \leq K_1(\|U_1 - V_1\|_{m-1,k} + \|U_2 - V_2\|_{m-1,k}^\gamma), \quad (4.2)$$

где $U, V \in \mathbb{E}_{m-1,k}$, $U = U_1 + U_2$, $V = V_1 + V_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы ограничимся доказательством (4.2), так как утверждения типа (i) хорошо известны в теории уравнений с частными производными (см., например, [7, гл. 7, § 3]), а неравенство (4.1) легко следует из финитности функции Q_ρ и равномерной ограниченности ее производной.

При $\gamma = 1$ неравенство (4.2) является простым следствием формулы о среднем значении. Не очевидно то, что в качестве γ можно выбрать любое число из интервала $(0, 1)$.

Неравенство (4.2) тривиально при $\min\{\|U\|_{m-1,k}, \|V\|_{m-1,k}\} \geq \rho$. Поэтому можно считать, что $\|U\|_{m-1,k} \leq \rho$. Предположим сначала, что $\|V\|_{m-1,k} \leq 3\rho$. Обозначим через Q'_ρ производную оператора Q_ρ по U . Тогда в силу теоремы о среднем значении и равномерной ограниченности производной Q'_ρ имеем

$$\|Q_\rho(\varepsilon, t, U) - Q_\rho(\varepsilon, t, V)\|_{(k)} \leq C_1 \|U - V\|_{m-1,k}. \quad (4.3)$$

Теперь заметим, что если $\|U_2 - V_2\|_{m-1,k} \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \|U - V\|_{m-1,k} &\leq \|U_1 - V_1\|_{m-1,k} + \|U_2 - V_2\|_{m-1,k} \\ &\leq \|U_1 - V_1\|_{m-1,k} + \|U_2 - V_2\|_{m-1,k}^\gamma, \end{aligned} \quad (4.4)$$

а если $\|U_2 - V_2\|_{m-1,k} \geq 1$, то

$$\|U - V\|_{m-1,k} \leq 4\rho \leq 4\rho(\|U_1 - V_1\|_{m-1,k} + \|U_2 - V_2\|_{m-1,k}^\gamma). \quad (4.5)$$

Сопоставляя оценки (4.3)–(4.5), получим (4.2).

Предположим теперь, что $\|V\|_{m-1,k} \geq 3\rho$. Тогда $\|U - V\|_{m-1,k} \geq 2\rho$, и поэтому⁶

$$\|U_1 - V_1\|_{m-1,k} + \|U_2 - V_2\|_{m-1,k}^\gamma \geq \rho^\gamma.$$

Отсюда и из (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} \|Q_\rho(\varepsilon, t, U) - Q_\rho(\varepsilon, t, V)\|_{(k)} &= \|Q'_\rho(\varepsilon, t, U)\|_{(k)} \leq C_2 \rho \\ &\leq C_2 \rho^{1-\gamma} (\|U_1 - V_1\|_{m-1,k} + \|U_2 - V_2\|_{m-1,k}^\gamma). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

⁶ Не ограничивая общности, мы считаем, что $\rho \geq 1$.

4.2. Задача Коши для уравнения со срезанной нелинейностью. Напомним, что число $\sigma_{\max}$ определялось в (1.9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть выполнены условия (P) и (Q). Тогда для любых $\rho > 0$, $\varkappa > \sigma_{\max}$ и целого числа $k > n/2$ найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$ и $K_2 > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ и произвольного набора данных Коши $[u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ задача (3.2)–(3.4) имеет, притом единственное, решение $u(t, x)$. Если $u_i(t, x)$, $i = 1, 2$, – два решения этой задачи, соответствующие данным Коши $U_{i0} \in \mathbb{E}_{m-1,k}$, то

$$E_{m-1,k}(u_1 - u_2, t) \leq K_2 e^{\varkappa|t-\theta|} \|U_{10} - U_{20}\|_{m-1,k}. \quad (4.6)$$

(ii) Оператор $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0): \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}$, переводящий $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}]$ в вектор-функцию (1.3), является бесконечно дифференцируемым по U_0 в смысле Фреше при любых фиксированных t и θ .

(iii) Оператор $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho$ непрерывен по $(t, \theta, U_0) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{E}_{m-1,k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только утверждение (iii), так как (i) и (ii) являются следствиями общих результатов, касающихся обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

Пусть последовательности $\{t_i\}$, $\{\theta_i\} \subset \mathbb{R}$ и $\{U_{i0}\} \subset \mathbb{E}_{m-1,k}$ сходятся к $t, \theta \in \mathbb{R}$ и $U_0 \in \mathbb{E}_{m-1,k}$ соответственно. Обозначим через $u(t, x)$ решение задачи (3.2)–(3.4), а через $U(t)$ – соответствующую фазовую траекторию (см. (1.3)). Тогда в силу группового свойства операторов $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t_i, \theta_i, U_{i0}) - \mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0) &= (\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t_i, \theta_i, U_{i0}) - \mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t_i, \theta_i, U_0)) \\ &\quad + (\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t_i, \theta_i, U_0) - \mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t_i, \theta_i, U(\theta_i))) + (U(t_i) - U(t)). \end{aligned}$$

Применяя (4.6), получим неравенство

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t_i, \theta_i, U_{i0}) - \mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0)\|_{m-1,k} \\ &\leq \text{const}(\|U_{i0} - U_0\|_{m-1,k} + \|U(\theta) - U(\theta_i)\|_{m-1,k}) + \|U(t_i) - U(t)\|_{m-1,k}, \end{aligned}$$

правая часть которого стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$.

4.3. Гиперболические операторы в пространствах функций с экспоненциальным весом по t . Рассмотрим неоднородное уравнение

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)u \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} (p_\alpha + \varepsilon q_\alpha(\varepsilon, t, x)) \partial^\alpha u = f(t, x). \quad (4.7)$$

Напомним, что пространство $\mathbb{F}_{l,k,[\mu,-\mu]}$ и норма $E_{l,k,[\mu,-\mu]}(u)$ были определены в (3.15) и (3.16). Следующее утверждение доказано в [3, теорема 2.7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H). Тогда для любого μ , $0 \leq \mu < \sigma_{\min}$, и целого числа $k \geq 0$ найдутся положительные константы $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k, \mu)$ и $K_3 = K_3(k, \mu)$ такие, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ уравнение (4.7) имеет, притом единственное, решение $u \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ для любой правой части $f \in \mathbb{F}_{0,k,[\mu,-\mu]}$. Для этого решения справедлива оценка

$$E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)u) \leq K_3 E_{0,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)f), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

где $S(\theta)w(t, x) = w(t + \theta, x)$ – оператор сдвига по t .

Часть II. Теорема о центральном многообразии

§ 5. Основные результаты и схема их доказательства

5.1. Формулировка результатов. Рассматривается уравнение (0.3), в котором операторы P и Q удовлетворяют условиям (P) и (Q) из п. 1.1. Напомним, что фазовое пространство $\mathbb{E}_{m-1,k}$ уравнения (0.3) определяется как прямое произведение пространств Соболева $H^{(m-1+k-j)}$, $j = 0, \dots, m-1$, с нормой

$$\|U\|_{m-1,k} = \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|u_j\|_{(m-1+k-j)}^2 \right)^{1/2}, \quad U = [u_0, \dots, u_{m-1}],$$

а через $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ обозначается открытый шар в $\mathbb{E}_{m-1,k}$ радиуса $\rho > 0$ с центром в нуле. Напомним также, что разрешающий оператор задачи Коши для уравнения (0.3) был определен в п. 1.1 (см. (1.4)).

Для оператора $P(\partial)$, удовлетворяющего условию (H_c) (см. введение), через m_c обозначается число корней полного символа $P(\tau, \xi)$, лежащих в полосе $|\operatorname{Re} \tau| \leq \nu$. Положим $m_h = m - m_c$. Следующая теорема является основным результатом второй части.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия (P), (Q), (H_c) . Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ и целое число $l \geq 1$ таковы, что

$$0 < \gamma < 1, \quad l\nu + \gamma < \delta. \quad (5.1)$$

Тогда для любого целого числа $k > n/2$ и любых $\rho > 0$ и $\mu \in (\nu, \delta/l)$ найдутся константы $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ и семейство непрерывных операторов⁷

$$\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}): \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{B}_{m_c-1,k+m_h}(\rho) \rightarrow H^{(m-1+k-j)}, \quad j = m_c, \dots, m-1,$$

таких, что $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, 0) = 0$, и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) **Локальная инвариантность.** Семейство многообразий

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\theta, \rho) &= \{[u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho): u_j \\ &= \mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}), j \geq m_c\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

согласовано с действием разрешающего оператора $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, \cdot)$. Другими словами, если $U_0 \in \mathcal{M}(\theta, \rho)$ и $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0) \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ при $t \in J$ для некоторого интервала $J \subset \mathbb{R}$, содержащего точку θ , то $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0) \in \mathcal{M}(t, \rho)$ при $t \in J$.

(ii) **Притягивающее свойство.** Пусть начальная точка θ и данные Коши $U_0 \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$ таковы, что $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0) \in \mathbb{B}_{m-1,k}(\rho_1)$ при $t \geq \theta$ для некоторого $\rho_1 < \rho$. Тогда найдется $T \geq \theta$ и такое $V_0 \in \mathcal{M}(T, \rho)$, что

$$\|\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0) - \mathcal{U}_\varepsilon(t, T, V_0)\|_{m-1,k} \leq Ce^{-\mu(t-\theta)}, \quad t \geq T. \quad (5.3)$$

⁷Число ε рассматривается как параметр.

Аналогичное утверждение справедливо, если фазовая траектория $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \theta, U_0)$ принадлежит $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho_1)$ на полуоси $t \leq \theta$. Более того, если фазовая траектория $\mathcal{D}(t)$ некоторого решения, определенного на всей временной оси, целиком содержится в шаре $\mathbb{B}_{m-1,k}(\rho)$, то $\mathcal{D}(t) \in \mathcal{M}(t, \rho)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Гладкость. Для любых фиксированных ε и θ оператор $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, \cdot)$ принадлежит классу $C^{l,\gamma}(\mathbb{B}_{m_c-1,k+m_h}(\rho), H^{(m-1+k-j)})$, причем норма $\|\mathcal{R}_j\|_{C^{l,\gamma}}$ ограничена равномерно по (ε, θ) .

Перейдем теперь к описанию операторов $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, \cdot)$. Для этого нам понадобится один класс символов псевдодифференциальных операторов. Подобные символы возникают при факторизации строго гиперболических полиномов, удовлетворяющих условию (H_c) .

Обозначим через S^j множество функций $p(\varepsilon, y, \xi)$, которые определены и бесконечно дифференцируемы при $(\varepsilon, y, \xi) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_y^{n+1} \times i\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

(i) для любых мультииндексов α, β

$$[p]_{j,\alpha,\beta} := \sup_{(\varepsilon,y,\xi)} |\partial_\xi^\alpha \partial_y^\beta p(\varepsilon, y, \xi)| \langle \xi \rangle^{|\alpha|-j} < \infty,$$

где $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2)^{1/2}$;

(ii) найдется функция $p^0(\varepsilon, y, \xi) \in C^\infty([-1, 1] \times \mathbb{R}_y^{n+1} \times (i\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$, положительно однородная по ξ порядка j и такая, что

$$[p - \chi p^0]_{j-1,\alpha,\beta} < \infty \quad \text{для любых мультииндексов } \alpha, \beta,$$

где $\chi(\xi) \in C^\infty(i\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) = 0$ при $|\xi| < 1$ и $\chi(\xi) = 1$ при $|\xi| > 2$.

Каждому символу $p(\varepsilon, y, \xi)$ ставится в соответствие псевдодифференциальный оператор

$$p(\varepsilon, t, x, \partial_x)u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\zeta} p(\varepsilon, t, x, i\zeta) \hat{u}(\zeta) d\zeta,$$

где через $\hat{u}(\zeta)$ обозначается преобразование Фурье функции $u(x)$:

$$\hat{u}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\zeta} u(x) dx.$$

Рассмотрим символ

$$P_\varepsilon(t, x, \tau, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (p_\alpha + \varepsilon q_\alpha(\varepsilon, t, x)) \eta^\alpha, \quad \eta = (\tau, \xi). \quad (5.4)$$

Согласно [32, теорема 3.10] при $|\varepsilon| \ll 1$ символ (5.4) допускает факторизацию

$$P_\varepsilon(y, \tau, \xi) = P_c(\varepsilon, y, \tau, \xi) P'_c(\varepsilon, y, \tau, \xi),$$

где P_c и P'_c имеют вид

$$\begin{aligned} P_c(\varepsilon, y, \tau, \xi) &= \sum_{j=0}^{m_c} (p_{cj}(\xi) + \varepsilon q_{cj}(\varepsilon, y, \xi)) \tau^{m_c-j}, \quad p_{cj}, q_{cj} \in S^j, \\ P'_c(\varepsilon, y, \tau, \xi) &= \sum_{j=0}^{m_h} (p'_{cj}(\xi) + \varepsilon q'_{cj}(\varepsilon, y, \xi)) \tau^{m_h-j}, \quad p'_{cj}, q'_{cj} \in S^j, \end{aligned}$$

причем при $\varepsilon = 0$ корни символов P_c и P'_c лежат соответственно в полосе $|\operatorname{Re} \tau| \leq \nu$ и вне полосы $|\operatorname{Re} \tau| < \delta$. В дальнейшем мы будем считать, что коэффициент при τ^{m_c} в символе P_c тождественно равен единице. С помощью этого условия P_c и P'_c определяются однозначно.

Обозначим через

$$R_j(\varepsilon, t, x, \tau, \xi) = \sum_{i=0}^{m_c-1} r_{ij}(\varepsilon, t, x, \xi) \tau^i, \quad j = m_c, \dots, m-1,$$

остаток от деления полинома τ^j на $P_c(\varepsilon, t, x, \tau, \xi)$. Легко проверить, что

$$r_{ij}(\varepsilon, y, \xi) \in S^{j-i}, \quad i = 0, \dots, m_c-1,$$

и поэтому соответствующий псевдодифференциальный оператор $r_{ij}(\varepsilon, t, x, \partial_x)$ непрерывно отображает пространство $H^{(m-1+k-i)}$ в $H^{(m-1+k-j)}$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда для каждого ε найдутся непрерывные нелинейные операторы*

$$\mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}): \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{B}_{m_c-1, k+m_h}(\rho) \rightarrow H^{(m-1+k-j)}, \quad j = m_c, \dots, m-1,$$

такие, что $\mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, 0) = 0$, и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}) &= \\ &= \sum_{i=0}^{m_c-1} r_{ij}(\varepsilon, \theta, x, \partial_x) u_i(x) + \varepsilon \mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Более того, имеют место следующие утверждения.

(i) Операторы $\mathcal{B}_j$ удовлетворяют условию Липшица по $[u_0, \dots, u_{m_c-1}]$ при любом фиксированном $\theta \in \mathbb{R}$, причем константа Липшица ограничена равномерно по (ε, θ) .

(ii) Если нелинейный член $q(\varepsilon, y, \partial^{m-1}u)$ (см. (0.5)) не зависит от производных $\partial^\alpha u$ при $|\alpha| = m-1$, то операторы $\mathcal{B}_j$ действуют непрерывно из $\mathbb{R}_\theta \times \mathbb{B}_{m_c-1, k+m_h}(\rho)$ в $H^{(m+k-j)}$, и для них справедливо утверждение (i) с заменой $H^{(m-1+k-j)}$ на $H^{(m+k-j)}$.

Теоремы 5.1 и 5.2 будут доказаны в § 7. Здесь мы приведем лишь наброски доказательств (см. п. 5.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие

$$\mathcal{M}_\rho = \{[\theta, u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}_{m-1, k}(\rho): [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathcal{M}(\theta, \rho)\}, \quad (5.6)$$

вложенное в расширенное фазовое пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1, k}$, называется *центральным многообразием уравнения (0.3)*.

В силу свойства локальной инвариантности (см. теорему 5.1) в окрестности любой точки центральное многообразие $\mathcal{M}_\rho$ состоит из интегральных кривых решений задачи (0.3), (1.2). В связи с этим возникает вопрос об описании динамики на $\mathcal{M}_\rho$. Следующий *принцип редукции* дает частичное решение этой задачи.

ТЕОРЕМА 5.3. *В условиях теоремы 5.1 при достаточно малых ε справедливы следующие утверждения.*

(i) Пусть решение $u(t, x)$ задачи (0.3), (1.2) таково, что $\mathcal{D}(t)u \in \mathcal{M}(t, \rho)$ при $t \in J$. Тогда $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$P_c(\varepsilon, t, x, \partial)u - \varepsilon \mathcal{B}_{m_c}(\varepsilon; t, u, \partial_t u, \dots, \partial_t^{m_c-1} u) = 0. \quad (5.7)$$

(ii) Пусть нелинейный член $q(\varepsilon, t, x, \partial^{m-1} u)$ не зависит от производных $\partial^\alpha u$, $|\alpha| = m - 1$. Предположим, что функция $u(t, x)$, удовлетворяющая включениям

$$\partial_t^j u \in C(I, H^{(m-1+k-j)}), \quad j = 0, \dots, m_c - 1, \quad (5.8)$$

для некоторого интервала $I \subset \mathbb{R}$, такова, что вектор-функция

$$\mathcal{D}_c(t)u := [u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot), \dots, \partial_t^{m_c-1} u(t, \cdot)]$$

целиком лежит в шаре $\mathbb{B}_{m_c-1, k+m_h}(\rho)$, и выполнено уравнение (5.7). Пусть $I_1 \subset I$ – произвольный интервал, на котором кривая

$$[u(t, \cdot), \dots, \partial_t^{m_c-1} u(t, \cdot), u_{m_c}(t, \cdot), \dots, u_{m-1}(t, \cdot)],$$

где $u_j = \mathcal{R}_j(\varepsilon; t, u, \dots, \partial_t^{m_c-1} u)$ при $j \geq m_c$, содержится в шаре $\mathbb{B}_{m-1, k}(\rho)$. Тогда $u(t, x)$ является решением задачи (0.3), (1.2) с $J = I_1$, причем $\mathcal{D}(t)u \in \mathcal{M}(t, \rho)$ при $t \in I_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. В силу теоремы 5.3, если нелинейный член q в (0.5) не зависит от производных порядка $m - 1$, динамика на центральном многообразии описывается задачей (5.7), (5.8). Заметим, что левая часть (5.7) представляет собой малое липшицево возмущение строго гиперболического оператора $P_c(\varepsilon, y, \partial)$, и поэтому задача Коши для уравнения (5.7) является корректной (см., например, [19]). Вопрос о “явном” описании динамики на центральном многообразии в общем случае остается открытым. Отметим, что если q зависит от старших производных, то возмущение $\varepsilon \mathcal{B}_{m_c}$ в уравнении (5.7) имеет порядок $m_c = \text{ord } P_c$ и ввиду гиперболичности не подчинено главной линейной части.

5.2. Наброски доказательств теорем 5.1 и 5.2. В этом пункте изложены основные идеи, которые используются при построении центрального многообразия и изучении его свойств. Подробные доказательства приведены в § 6, 7.

Переход к уравнению со срезанной нелинейностью. Прежде всего заметим, что все утверждения теорем 5.1 и 5.2 касаются решений, фазовые траектории которых содержатся в шаре $\mathbb{B}_{m-1, k}(\rho)$. Поэтому мы можем заменить исходное уравнение (0.3) на уравнение со срезанной нелинейностью. А именно, повторяя построения из п. 3.1, для заданного $\rho > 0$ и целого числа $k > n/2$ определим функцию $Q_\rho(\varepsilon, t, U)$ по формуле (3.1). Вместо (0.3) будем изучать уравнение

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)u + \varepsilon Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u) = 0, \quad (5.9)$$

где символ $P_\varepsilon(t, x, \eta)$ и вектор-функция $\mathcal{D}(t)u$ определены в (5.4) и (1.3) соответственно. Мы покажем (см. теорему 7.1), что для уравнения (5.9) справедливы “глобальные варианты” утверждений теорем 5.1 и 5.2. Так как уравнения (0.3) и (5.9) совпадают на решениях, фазовые траектории которых содержатся в шаре $\mathbb{B}_{m-1, k}(\rho)$, то отсюда будут следовать теоремы 5.1 и 5.2.

Начальная задача с условиями роста на бесконечности. Следуя стандартной схеме построения центрального многообразия (см., например, [24], [26], [33]), для заданного $\theta \in \mathbb{R}$ рассмотрим следующую начальную задачу для уравнения (5.9):

$$\partial_t^j u \in C(\mathbb{R}, H^{(m-1+k-j)}), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (5.10)$$

$$\partial_t^j u(\theta, x) = u_j(x) \in H^{(m-1+k-j)}, \quad j = 0, \dots, m_c - 1. \quad (5.11)$$

Таким образом, для уравнения порядка m мы задали $m_c < m$ начальных условий. Недостающие $m_h = m - m_c$ условий заменяются ограничением на рост при $|t| \rightarrow \infty$. А именно предполагается, что энергия решения $E_{m-1,k}(u, t)$ растёт не быстрее $e^{\mu|t|}$, где $\nu < \mu < \delta$. Другими словами, ищется решение, принадлежащее классу $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ (см. (3.15)). Мы покажем (см. теорему 6.1), что при $|\varepsilon| \ll 1$ задача (5.9)–(5.11) имеет, притом единственное, решение $u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$. Обозначим через

$$\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot): [u_0, \dots, u_{m_c-1}] \mapsto u(t, x) \quad (\mathbb{E}_{m_c-1,k+m_h} \rightarrow \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}) \quad (5.12)$$

соответствующий разрешающий оператор.

Построение семейства инвариантных многообразий. Определим операторы

$$\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}) = (\partial_t^j \mathcal{G}(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1})) \Big|_{t=\theta} \quad (5.13)$$

и положим (ср. (5.2))

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\theta) = \{ & [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,k}: \\ & u_j = \mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}), \quad j \geq m_c \}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Таким образом, вектор-функция $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}]$ принадлежит многообразию $\mathcal{M}(\theta)$ тогда и только тогда, когда она является набором данных Коши для некоторого решения $u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ уравнения (5.9). Обозначим через

$$\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, \cdot): \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1,k}, \quad t, \theta \in \mathbb{R}, \quad |\varepsilon| \ll 1,$$

разрешающий оператор задачи Коши для (5.9), (5.10). Из (5.14) легко следует (см. теорему 7.1), что семейство $\mathcal{M}(\theta)$ согласовано с действием оператора $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho$, т.е. если $U_0 \in \mathcal{M}(\theta)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0) \in \mathcal{M}(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Свойство притяжения. Прежде всего заметим, что если энергия $E_{m-1,k}(u, t)$ некоторого решения $u(t, x)$ задачи (5.9), (5.10) равномерно ограничена (или растёт при $|t| \rightarrow \infty$ не быстрее $e^{\mu|t|}$), то $u \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$, и поэтому соответствующая фазовая траектория $\mathcal{D}(t)u$ принадлежит $\mathcal{M}(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Более сложно устанавливается тот факт, что решение, энергия которого ограничена на полуоси, притягивается к некоторому решению, лежащему на многообразии (ср. (5.6))

$$\mathcal{M} = \{ [\theta, u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m-1,k}: [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathcal{M}(\theta) \}.$$

Набросаем доказательство этого свойства, которое основано на разрешимости неоднородного уравнения

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)u(t, x) = h(t, x) \quad (5.15)$$

в пространстве функций с экспоненциальным весом $e^{\mu t}$ или $e^{-\mu t}$.

Пусть энергия $E_{m-1,k}(u, t)$ некоторого решения $u(y)$ задачи (5.9), (1.2) с $J = [\theta, +\infty)$ равномерно ограничена. Аппроксимирующее решение ищется в виде

$$v(t, x) = \zeta(t)u(t, x) + w(t, x), \quad (5.16)$$

где $\zeta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta(t) = 0$ при $t \leq \theta$ и $\zeta(t) = 1$ при $t \geq \theta + 1$. Подставляя (5.16) в (5.9) и учитывая, что $u(y)$ удовлетворяет (5.9), для функции $w(t, x)$ получим уравнение

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)w(t, x) = g(t, x) - \varepsilon(Q_\rho(\varepsilon, t, V(t)) - \zeta(t)Q_\rho(\varepsilon, t, U(t))), \quad (5.17)$$

где $U(t) = \mathcal{D}(t)u$, $V(t) = \mathcal{D}(t)v$,

$$g(t, x) = - \sum_{l=1}^m \frac{1}{l!} D_t^l \zeta(t) P_\varepsilon^{(l)}(t, x, \partial)u(t, x), \quad P_\varepsilon^{(l)}(t, x, \eta) = \partial_\tau^l P_\varepsilon(t, x, \eta). \quad (5.18)$$

Мы покажем (см. теорему 7.1), что уравнение (5.17) имеет, притом единственное, решение $u(y)$, принадлежащее пространству

$$\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]} = \{f(t, x) : e^{\mu t} \partial_t^j f \in C_b(\mathbb{R}, H^{(m-1+k-j)}), j = 0, \dots, m-1\}.$$

Отсюда и из (5.16) следует, что норма разности $U(t) - V(t)$ в $\mathbb{E}_{m-1,k}$ убывает как $e^{-\mu t}$ при $t \rightarrow +\infty$, а норма $V(t)$ растет при $|t| \rightarrow \infty$ не быстрее $e^{\mu|t|}$, и поэтому $V(t) \in \mathcal{M}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Гладкость. Мы установим гладкость $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, \cdot)$ как следствие аналогичных свойств разрешающего оператора $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$. Существование первой производной и ее гёльдеровость доказывается достаточно просто. А именно, для заданного решения $u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ задачи (5.9), (5.11) рассмотрим линеаризованное уравнение

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)v + \varepsilon(DQ_\rho)(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u)\mathcal{D}(t)v = 0, \quad (5.19)$$

дополненное начальными условиями

$$\partial_t^j v(\theta, x) = v_j(x) \in H^{(m-1+k-j)}, \quad j = 0, \dots, m_c - 1, \quad (5.20)$$

где $(DQ_\rho)(\varepsilon, t, U)W$ – значение производной функции $Q_\rho(\varepsilon, t, U)$ по U на векторе $W = [w_0, \dots, w_{m-1}]$. Мы покажем (см. п. 6.3), что задача (5.19), (5.20) однозначно разрешима в пространстве $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$, причем решение $v^{(1)}(y)$ совпадает со значением производной оператора $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$ на векторе $[v_0, \dots, v_{m_c-1}]$:

$$v(y) = (D\mathcal{G})(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1})[v_0, \dots, v_{m_c-1}].$$

Существование производных оператора $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$ порядка $i \geq 2$ доказывается несколько сложнее. Это связано с тем, что i -я линейаризация уравнения (5.9), вообще говоря, не разрешима в пространстве $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$. Например, вторая линейаризация имеет вид

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)v + \varepsilon(DQ_\rho)(\varepsilon, t, U(t))V(t) = -\varepsilon(D^2Q_\rho)(\varepsilon, t, U(t))[V_1(t), V_1(t)], \quad (5.21)$$

где $U(t) = \mathcal{D}(t)u$, $V(t) = \mathcal{D}(t)v$, $V_1(t) = \mathcal{D}(t)v^{(1)}$, а $(D^2Q_\rho)(\varepsilon, t, U)[W, W]$ – значение второй производной функции $Q_\rho(\varepsilon, t, U)$ по U на векторе $W = [w_0, \dots, w_{m-1}]$. Теперь заметим, что $H^{(k)}$ -норма правой части уравнения (5.21) может расти при $t \rightarrow \infty$ как $e^{2\mu|t|}$. Поэтому решение уравнения (5.21) не обязано принадлежать пространству $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$. Однако если число μ не очень велико (а именно выполнено неравенство $\mu < \delta/2$, так что $\nu < \mu$, $2\mu < \delta$), то уравнение (5.21) имеет, притом единственное, решение $v(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[2\mu,-2\mu]}$, удовлетворяющее начальным условиям⁸

$$\partial_t^j v(\theta, x) = 0, \quad j = 0, \dots, m_c - 1. \quad (5.22)$$

Мы докажем, что оператор $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$, рассматриваемый как отображение из $\mathbb{E}_{m_c-1,k+m_h}$ в $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu',-\mu']}$, где $2\mu < \mu' < \delta$, дважды непрерывно дифференцируем, и значение его второй производной на векторе $[v_0, \dots, v_{m_c-1}]$ совпадает с решением $v(y)$ задачи (5.21), (5.22).

Аналогично, i -я линейаризация уравнения (5.9) содержит слагаемые, растущие как $e^{i\mu|t|}$ при $t \rightarrow \infty$. При этом если $\mu < \delta/i$, а $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$ рассматривается как оператор из $\mathbb{E}_{m_c-1,k+m_h}$ в $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu',-\mu']}$, где $i\mu < \mu' < \delta$, то существует i -я производная, значение которой на векторе $[v_0, \dots, v_{m_c-1}]$ совпадает с решением i -ой линейаризации, дополненной начальными условиями (5.22) (см. [16, 33] и п. 6.4).

Структура операторов $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, \cdot)$. Обозначим через

$$G(\varepsilon, \theta): \mathbb{E}_{m_c-1,k+m_h} \times \mathbb{F}_{0,k,[\mu,-\mu]} \rightarrow \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$$

оператор, переводящий вектор-функцию $[u_0, \dots, u_{m_c-1}, h]$ в решение

$$u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$$

задачи (5.15), (5.11). Как показано в [3, § 5], при $|\varepsilon| \ll 1$ такой оператор корректно определен и непрерывен. Теперь заметим, что

$$\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}) = G(\varepsilon, \theta)[u_0, \dots, u_{m_c-1}, 0] + \varepsilon G(\varepsilon, \theta)[0, \dots, 0, f], \quad (5.23)$$

где

$$f(t, x) = Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1})). \quad (5.24)$$

Применяя к (5.23) оператор ∂_t^j и полагая $t = \theta$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}) &= \partial_t^j (G(\varepsilon, \theta)[u_0, \dots, u_{m_c-1}, 0] \\ &\quad + \varepsilon G(\varepsilon, \theta)[0, \dots, 0, f]) \Big|_{t=\theta}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Представление (5.5) следует из (5.25) и аналога формулы (5.5) в случае линейных уравнений (см. [3, п. 5.3]).

⁸ Легко видеть, что если разрешающий оператор $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$ имеет вторую производную, то ее значение на произвольной вектор-функции $[v_0, \dots, v_{m_c-1}]$ удовлетворяет нулевым начальным условиям.

§ 6. Начальная задача с условиями роста на бесконечности

Настоящий параграф посвящен исследованию задачи (5.9)–(5.11). Мы докажем, что она однозначно разрешима в пространстве $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$, причем разрешающий оператор является гладким в соответствующих пространствах. Полученные результаты будут использоваться в § 7 при доказательстве теорем 5.1 и 5.2.

6.1. Формулировка результатов. Напомним, что пространство $\mathbb{F}_{l,k,[\mu,-\mu]}$ и соответствующая норма $E_{l,k,[\mu,-\mu]}(\cdot)$ определены в (3.15) и (3.16). Для $\theta \in \mathbb{R}$ и функции $w(t, x)$ положим $S(\theta)w(t, x) = w(t + \theta, x)$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть выполнены условия (P), (Q) и (H_c). Тогда для любых $\rho > 0$, $\mu \in (\nu, \delta)$ и целого числа $k > n/2$ найдется такая константа $\varepsilon_0 > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ и начальных данных $[u_0, \dots, u_{m_c-1}] \in \mathbb{E}_{m_c-1,k+m_h}$ задача (5.9)–(5.11) имеет, притом единственное, решение*

$$u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}.$$

(ii) *Если $u_1, u_2 \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ – два решения, соответствующие начальным точкам $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $|\theta_1 - \theta_2| \leq 1$, и начальным данным $U_1, U_2 \in \mathbb{E}_{m_c-1,k+m_h}$, то*

$$E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta_1)(u_1 - u_2)) \leq C \|U_1 - U_2\|_{m_c-1,k+m_h} + b(\theta_1, U_1; |\theta_1 - \theta_2|), \quad (6.1)$$

где константа $C > 0$ и непрерывная функция $b(\theta_1, U_1; r) \geq 0$ переменной $r \in [0, 1]$ зависят от параметров k , ρ и μ , причем $b(\theta_1, U_1; r)$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$.

Теорема 6.1 будет доказана в п. 6.2.

Напомним, что оператор $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1})$ определен в п. 5.2 (см. формулу (5.12)). Из неравенства (6.1), в частности, следует, что он непрерывен по совокупности переменных $(\theta, u_0, \dots, u_{m_c-1})$. В следующей теореме доказываем, что при фиксированном θ и достаточно малых ε оператор $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$ является гладким в соответствующих пространствах.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть выполнены условия (P), (Q), (H_c) и неравенства (5.1), где $l \geq 1$ – целое число. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ оператор $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$ принадлежит классу $C^{l,\gamma}(\mathbb{E}_{m_c-1,k+m_h}, \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu',-\mu']})$, где $\mu' = l\mu + \gamma$, причем полунорма $|\mathcal{G}|_{C^{l,\gamma}}$ ограничена равномерно по (ε, θ) .*

Доказательство теоремы 6.2 приведено в пп. 6.3 и 6.4.

6.2. Доказательство теоремы 6.1. Нам понадобится следующее утверждение о разрешимости линейных уравнений в пространстве $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$. Его доказательство можно найти в [3, § 4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. В условиях теоремы 6.1 для любого $\mu \in (\nu, \delta)$ и целого числа $k \geq 0$ найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ задача (5.15), (5.11) с правой частью $h \in \mathbb{F}_{0,k,[\mu,-\mu]}$ и начальными данными $[u_0, \dots, u_{m_c-1}] \in \mathbb{F}_{m_c-1,k+m_h}$ имеет, притом единственное, решение $u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$, которое удовлетворяет неравенству

$$E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)u) \leq C \left(\sum_{j=0}^{m_c-1} \|u_j\|_{(m-1+k-j)} + E_{0,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)h) \right). \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для простоты обозначений будем считать, что $\theta = 0$. Существование решения доказывается методом сжимающих отображений. Напомним, что для функции $w(t, x)$ через $\mathcal{D}(t)w$ обозначается соответствующая фазовая траектория (см. (1.3)). Рассмотрим оператор A , переводящий функцию $v(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ в решение $u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ уравнения

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)u(t, x) = -\varepsilon Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)v) \quad (6.3)$$

с начальными условиями (5.11). Очевидно, что неподвижная точка оператора A является искомым решением.

В силу леммы 8.2 правая часть (6.3) принадлежит $\mathbb{F}_{0,k,[\mu,-\mu]}$. Поэтому согласно предложению 6.3 при $|\varepsilon| \ll 1$ задача (6.3), (5.11) имеет, притом единственное, решение $u \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$. Таким образом, оператор

$$A: \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]} \rightarrow \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$$

корректно определен. Более того, если $u_i = A(v_i)$, то разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (5.15) с правой частью

$$h(t, x) = \varepsilon(Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)v_2) - Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)v_1))$$

и имеет нулевые данные Коши до порядка $m_c - 1$. Поэтому в силу неравенства (6.2) имеем

$$E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(u) \leq C E_{0,k,[\mu,-\mu]}(h). \quad (6.4)$$

Согласно лемме 8.2 имеет место неравенство

$$E_{0,k,[\mu,-\mu]}(h) \leq C_1 |\varepsilon| E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(v_1 - v_2).$$

Подставляя эту оценку в (6.4), получим

$$E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(u_1 - u_2) \leq C_2 |\varepsilon| E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(v_1 - v_2).$$

Отсюда следует, что при $|\varepsilon| \ll 1$ оператор A является сжимающим и поэтому имеет неподвижную точку $u(y)$.

Единственность построенного решения следует из неравенства (6.1), которое устанавливается ниже.

(ii) Разность $u = u_1 - u_2$ является решением уравнения (5.15) с правой частью

$$h(t, x) = \varepsilon (Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u_2) - Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u_1)). \quad (6.5)$$

Поэтому в силу неравенства (6.2) имеем

$$\begin{aligned} & E_{m-1, k, [\mu, -\mu]}(S(\theta_2)u) \\ & \leq C \left(\sum_{j=0}^{m_c-1} \|\partial_t^j u(\theta_2, \cdot)\|_{(m-1+k-j)} + E_{0, k, [\mu, -\mu]}(S(\theta_2)h) \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Оценим правую часть (6.6). Положим

$$u_{ij}(x) = \partial_t^j u_i(\theta_i, x), \quad i = 1, 2, \quad j = 0, \dots, m_c - 1.$$

Тогда

$$\partial_t^j u(\theta_2, x) = (\partial_t^j u_1(\theta_2, x) - u_{1j}(x)) + (u_{1j}(x) - u_{2j}(x)),$$

откуда следует, что

$$\|\partial_t^j u(\theta_2, \cdot)\|_{(m-1+k-j)} \leq b_1(\theta_1, U_1; |\theta_1 - \theta_2|) + \|u_{1j} - u_{2j}\|_{(m-1+k-j)}, \quad (6.7)$$

где непрерывная по $r \geq 0$ функция $b_1(\theta_1, U_1; r) \geq 0$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Далее, в силу леммы 8.2 для (6.5) справедлива оценка

$$E_{0, k, [\mu, -\mu]}(S(\theta_2)h) \leq C_1 |\varepsilon| E_{m-1, k, [\mu, -\mu]}(S(\theta_2)u). \quad (6.8)$$

Подставляя (6.7) и (6.8) в (6.6), при $|\varepsilon| \ll 1$ получим

$$E_{m-1, k, [\mu, -\mu]}(S(\theta_2)u) \leq C \left(\sum_{j=0}^{m_c-1} \|u_{1j} - u_{2j}\|_{(m-1+k-j)} + b_1(\theta_1, U_1; |\theta_1 - \theta_2|) \right).$$

Остается заметить, что при $\theta \in \mathbb{R}$ нормы $E_{m-1, k, [\mu, -\mu]}(S(\theta)u)$ эквивалентны, причем константы эквивалентности ограничены, если θ меняется на конечном интервале.

6.3. Доказательство теоремы 6.2 в случае $l = 1$. Прежде всего заметим, что для любой функции $u(t, x)$, удовлетворяющей включениям (5.10), и любых начальных данных $[v_0, \dots, v_{m_c-1}] \in \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h}$ задача (5.19), (5.20) имеет, притом единственное, решение $v(y) \in \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu, -\mu]}$. Это утверждение легко доказывается с помощью рассуждений из п. 6.2. Обозначим через

$$\mathcal{G}_1(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}): \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h} \rightarrow \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu, -\mu]}$$

линейный ограниченный оператор, переводящий вектор $[v_0, \dots, v_{m_c-1}]$ в решение $v \in \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu, -\mu]}$ задачи (5.19), (5.20), в которой $u = \mathcal{G}(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1})$. В дальнейшем для простоты будем считать, что $\theta = 0$, причем в обозначениях операторов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_1$ параметр θ будем опускать.

В силу обратной теоремы Тейлора (см. [13] или [11, п. 1.2.5]) существование производной оператора

$$\mathcal{G}(\varepsilon; \cdot) : \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h} \rightarrow \mathbb{E}_{m-1, k, [\mu', -\mu']}, \quad \mu' = \mu + \gamma,$$

ее гёльдеровость и равномерная ограниченность полунормы $|\mathcal{G}|_{C^{1, \gamma}}$ будут доказаны, если мы покажем, что

$$\mathcal{G}(\varepsilon; U_0 + V_0) = \mathcal{G}(\varepsilon; U_0) + \mathcal{G}_1(\varepsilon; U_0)V_0 + \mathcal{F}_1(\varepsilon; U_0, V_0), \quad (6.9)$$

где $U_0 = [u_0, \dots, u_{m_c-1}]$, $V_0 = [v_0, \dots, v_{m_c-1}]$, причем оператор $\mathcal{F}_1$ допускает оценку

$$E_{0, k, [\mu', -\mu']}(\mathcal{F}_1(\varepsilon; U_0, V_0)) \leq \text{const} \|V_0\|_{m_c-1, k+m_h}^{1+\gamma}. \quad (6.10)$$

Положим

$$\tilde{u}(y) = \mathcal{G}(\varepsilon; U_0 + V_0), \quad u(y) = \mathcal{G}(\varepsilon; U_0), \quad v^{(1)}(y) = \mathcal{G}_1(\varepsilon; U_0)V_0.$$

Непосредственная проверка показывает, что функция $w := \tilde{u} - u - v^{(1)} = \mathcal{F}_1(\varepsilon; U_0, V_0)$ является решением задачи

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)w(t, x) = -\varepsilon h(t, x), \quad (6.11)$$

$$\partial_t^j w(0, x) = 0, \quad j = 0, \dots, m_c - 1, \quad (6.12)$$

где

$$h(t, x) = h_1(t, x) + h_2(t, x),$$

$$h_1(t, x) = Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)\tilde{u}) - Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u) - (DQ_\rho)(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u)\mathcal{D}(t)(\tilde{u} - u),$$

$$h_2(t, x) = (DQ_\rho)(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u)\mathcal{D}(t)w.$$

В силу неравенства (6.2), в котором $\theta = 0$ и $\mu = \mu'$, имеем

$$E_{m-1, k, [\mu', -\mu']}(w) \leq C |\varepsilon| E_{0, k, [\mu', -\mu']}(h). \quad (6.13)$$

Оценим правую часть (6.13). Согласно лемме 8.1 для h_1 справедлива оценка

$$\|h_1(t, \cdot)\|_{(k)} \leq C_1 \|\mathcal{D}(t)(\tilde{u} - u)\|_{m-1, k}^{1+\gamma}.$$

Отсюда и из неравенства (6.1) с $\theta_1 = \theta_2 = 0$ следует, что

$$E_{0, k, [\mu', -\mu']}(h_1) \leq C_2 \sum_{j=0}^{m_c-1} \|v_j\|_{(m-1+k-j)}^{1+\gamma}. \quad (6.14)$$

Далее, в силу равномерной ограниченности производных функции Q_ρ имеем

$$E_{0, k, [\mu', -\mu']}(h_2) \leq C_3 E_{m-1, k, [\mu', -\mu']}(w). \quad (6.15)$$

Подставляя (6.14) и (6.15) в неравенство (6.13), в котором $h = h_1 + h_2$, получим

$$E_{m-1, k, [\mu', -\mu']}(w) \leq C_4 \sum_{j=0}^{m_c-1} \|v_j\|_{(m-1+k-j)}^{1+\gamma},$$

что равносильно неравенству (6.10).

6.4. Доказательство теоремы 6.2 в случае $l \geq 2$. Несмотря на название пункта, мы ограничимся случаем $l = 2$. Доказательство теоремы для произвольного $l \geq 3$ технически довольно сложно, однако не содержит принципиально новых идей. Подробное доказательство аналогичного утверждения в случае обыкновенных дифференциальных уравнений и абстрактных уравнений в банаховом пространстве можно найти в [16], [33].

Как и в п. 6.3, будем считать, что $\theta = 0$. Мы хотим показать, что оператор

$$\mathcal{G}(\varepsilon; \cdot): \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h} \rightarrow \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu', -\mu]}, \quad \mu' = 2\mu + \gamma,$$

дважды непрерывно дифференцируем по Фреше, причем вторая производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем γ , а полунорма $|\mathcal{G}|_{C^{2, \gamma}}$ равномерно ограничена.

Прежде всего заметим, что для любой функции $u(t, x)$, удовлетворяющей включениям (5.10), задача (5.21), (5.22) (в которой $U(t) = \mathcal{D}(t)u$, $V(t) = \mathcal{D}(t)v$, $V_1(t) = \mathcal{D}(t)v^{(1)}$) имеет, притом единственное, решение $v(y) \in \mathbb{F}_{m-1, k, [2\mu, -2\mu]}$ (ср. п. 6.3). Обозначим через

$$\mathcal{G}_2(\varepsilon; u_0, \dots, u_{m_c-1}): \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h} \rightarrow \mathbb{F}_{m-1, k, [2\mu, -2\mu]}$$

ограниченный квадратичный оператор, переводящий $[v_0, \dots, v_{m_c-1}]$ в решение $v \in \mathbb{F}_{m-1, k, [2\mu, -2\mu]}$ задачи (5.21), (5.22), в которой $u = \mathcal{G}(\varepsilon; u_0, \dots, u_{m_c-1})$.

В силу обратной теоремы Тейлора нам надо проверить, что

$$\mathcal{G}(\varepsilon; U_0 + V_0) = \mathcal{G}(\varepsilon; U_0) + \mathcal{G}_1(\varepsilon; U_0)V_0 + \frac{1}{2}\mathcal{G}_2(\varepsilon; U_0)[V_0, V_0] + \mathcal{F}_2(\varepsilon; U_0, V_0),$$

где $U_0 = [u_0, \dots, u_{m_c-1}]$, $V_0 = [v_0, \dots, v_{m_c-1}]$, а оператор $\mathcal{F}_2$ допускает оценку

$$E_{0, k, [\mu', -\mu]}(\mathcal{F}_2(\varepsilon; U_0, V_0)) \leq \text{const} \|V_0\|_{m_c-1, k+m_h}^{2+\gamma}. \quad (6.16)$$

Положим $v^{(2)}(y) = \mathcal{G}_2(\varepsilon; U_0)[V_0, V_0]$. Тогда функция

$$w := \tilde{u} - u - v^{(1)} - \frac{1}{2}v^{(2)} = \mathcal{F}_2(\varepsilon; U_0, V_0)$$

является решением задачи (6.11), (6.12), где⁹ $h = h_1 + h_2 + h_3$,

$$\begin{aligned} h_1(t, x) &= Q_\rho(\varepsilon, t, \tilde{u}) - Q_\rho(\varepsilon, t, u) - (DQ_\rho)(\varepsilon, t, u)(\tilde{u} - u) \\ &\quad - \frac{1}{2}(D^2Q_\rho)(\varepsilon, t, u)[\tilde{u} - u, \tilde{u} - u], \\ h_2(t, x) &= (DQ_\rho)(\varepsilon, t, u)w, \\ h_3(t, x) &= \frac{1}{2}((D^2Q_\rho)(\varepsilon, t, u)[\tilde{u} - u, \tilde{u} - u] - (D^2Q_\rho)(\varepsilon, t, u)[v^{(1)}, v^{(1)}]). \end{aligned}$$

⁹ Для простоты формул до конца настоящего параграфа оператор $\mathcal{D}(t)$ будем опускать. Из контекста всегда будет ясно, где он должен присутствовать.

Поэтому в силу (6.2) для $w(y)$ справедливо неравенство (6.13) с $\mu' = 2\mu + \gamma$. Оценим правую часть (6.13). Пользуясь леммой 8.1 и неравенством (6.1), легко показать, что (ср. вывод (6.14))

$$E_{0,k,[\mu',-\mu']}(h_1) \leq C_1 \sum_{j=0}^{m_c-1} \|v_j\|_{(m-1+k-j)}^{2+\gamma}. \quad (6.17)$$

Функция $h_2(t, x)$ удовлетворяет неравенству (6.15) с $\mu' = 2\mu + \gamma$. Для оценки нормы h_3 заметим, что

$$h_3(t, x) = \frac{1}{2}(D^2 Q_\rho)(\varepsilon, t, u)[\tilde{u} - u - v^{(1)}, \tilde{u} - u + v^{(1)}].$$

Сопоставляя это соотношение с (6.9) и (6.10), получим, что для h_3 справедлива оценка вида (6.17). Отсюда и из (6.13) следует требуемое неравенство (6.16). Подробности мы оставляем читателю.

§ 7. Доказательство основных результатов

Настоящий параграф посвящен доказательству теорем 5.1 – 5.3. Мы сначала покажем (см. теорему 7.1), что для уравнения со срезанной нелинейностью (5.9) справедливы глобальные варианты утверждений теорем 5.1 и 5.2. В качестве простого следствия мы получим теоремы 5.1 и 5.2. Затем, пользуясь установленными результатами и единственностью решения задачи Коши для строго гиперболических уравнений с липшицевой нелинейностью, мы докажем теорему 5.3.

7.1. Центральное многообразие для уравнения со срезанной нелинейностью. Напомним, что через $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0)$ обозначается разрешающий оператор задачи Коши (5.9), (5.10), (1.1). В силу предложения 4.2 при $|\varepsilon| \ll 1$ этот оператор определен для всех $t, \theta \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполнены условия (P), (Q), (H_c) и неравенства (5.1), где $l \geq 1$ – целое число. Тогда для любых $\rho > 0$, $\mu \in (\nu, \delta/l)$ и целого числа $k > n/2$ найдется константа $\varepsilon_0 > 0$ и семейство непрерывных операторов

$$\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}): \mathbb{R} \times \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h} \rightarrow H^{(m-1+k-j)}, \quad (7.1)$$

$$j = m_c, \dots, m-1,$$

таких, что $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, 0) = 0$, и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие утверждения.

(i) Семейство многообразий $\mathcal{M}(\theta)$, определенных по формуле (5.14), согласовано с действием разрешающего оператора $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, \cdot)$ в том смысле, что если $U_0 \in \mathcal{M}(\theta)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(t, \theta, U_0) \in \mathcal{M}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Если функция $u(t, x) \in \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu, -\mu]}$ удовлетворяет уравнению (5.9), то $\mathcal{D}(t)u \in \mathcal{M}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Если энергия $E_{m-1, k}(u, t)$ некоторого решения $u(t, x)$ задачи (5.9), (5.10) растет при $t \rightarrow +\infty$ не быстрее $e^{\mu t}$, то найдется такое решение $v(t, x) \in \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu, -\mu]}$ уравнения (5.9), что $\mathcal{D}(t)v \in \mathcal{M}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и

$$E_{m-1, k}(u - v, t) \leq C e^{-\mu(t-\theta)} E_{m-1, k}(u, \theta), \quad t \geq \theta, \quad (7.2)$$

где константа $C > 0$ не зависит от t, θ и $u(y)$. Аналогичное утверждение справедливо для решений, энергия которых растет при $t \rightarrow -\infty$ не быстрее $e^{-\mu t}$.

(iv) Для любых фиксированных ε и θ оператор $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, \cdot)$ принадлежит классу $C^{l, \gamma}(\mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h}, H^{(m-1+k-j)})$, причем полунорма $|\mathcal{R}_j|_{C^{l, \gamma}}$ ограничена равномерно по (ε, θ) .

(v) Найдутся непрерывные нелинейные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}) &: \mathbb{R}_\theta \times \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h} \rightarrow H^{(m-1+k-j)}, \\ j &= m_c, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (7.3)$$

такие, что $\mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, 0) = 0$, и имеет место представление (5.5). Более того, при фиксированном $\theta \in \mathbb{R}$ операторы $\mathcal{B}_j$ удовлетворяют глобальному условию Липшица:

$$\|\mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, U_0) - \mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, V_0)\|_{(m-1+k-j)} \leq \text{const} \|U_0 - V_0\|_{m_c-1, k+m_h}, \quad (7.4)$$

где $U_0, V_0 \in \mathbb{E}_{m_c-1, k+m_h}$.

(vi) Если нелинейный член $q(\varepsilon, t, x, \partial^{m-1}u)$ в формуле (0.5) не зависит от производных порядка $m-1$, то справедливо утверждение (v), в котором пространство $H^{(m-1+k-j)}$ (см. (7.3) и (7.4)) заменено на $H^{(m+k-j)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $\mathcal{R}_j$ по формуле (5.13), где $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, U_0)$ – разрешающий оператор задачи (5.9)–(5.11) (см. (5.12)). Тогда в силу единственности имеем $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, 0) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, 0) = 0$. Более того, из неравенства (6.1) вытекает, что $\mathcal{G}$ непрерывен по совокупности переменных (θ, U_0) , и поэтому оператор $\mathcal{R}_j$ также обладает этим свойством. Докажем теперь утверждения (i)–(vi).

(i) Предположим, что $U_0 \in \mathcal{M}(\theta)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$, и положим $u = \mathcal{G}(\varepsilon; \theta, U_0)$. Нам надо показать, что

$$\partial_t^j u(t, \cdot) = \mathcal{R}_j(\varepsilon; t, \mathcal{D}_c(t)u) \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

Легко видеть, что (7.5) вытекает из соотношения

$$u(t, x) = \mathcal{G}(\varepsilon; t, \mathcal{D}_c(t)u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7.6)$$

которое является следствием единственности решения задачи (5.9)–(5.11).

(ii) Пусть функция $u \in \mathbb{F}_{m-1, k, [\mu, -\mu]}$ является решением уравнения (5.9). Тогда выполнено (7.6), откуда следует требуемое утверждение.

(iii) Предположим, что для некоторого решения $u(y)$ задачи (5.9), (5.10) выполнено неравенство

$$E_{m-1, k}(u, t) \leq \text{const} e^{\mu t}, \quad t \geq 0. \quad (7.7)$$

Аппроксимирующее решение $v(y)$ ищется в виде (5.16). После подстановки $v(y)$ в (5.9) для неизвестной функции $w(y)$ получим уравнение (5.17), в котором $U(t) = \mathcal{D}(t)u$, $V(t) = \mathcal{D}(t)v$, а функция $g(t, x)$ имеет вид (5.18). Покажем, что это уравнение однозначно разрешимо в пространстве $\mathbb{F}_{m-1, k, [\mu]}$, причем решение $w(y)$ удовлетворяет неравенству

$$E_{m-1, k, [\mu]}(w) := \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{\mu t} E_{m-1, k}(w, t) \leq \text{const} E_{m-1, k}(u, \theta).$$

Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которое является следствием теоремы 2.6 из [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. В условиях теоремы 7.1 для любого $\mu \in (\nu, \delta)$ и целого числа $k \geq 0$ найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ уравнение (5.15) с правой частью $h \in \mathbb{F}_{0,k,[\mu]}$ имеет, притом единственное, решение $u(y) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$. Это решение удовлетворяет неравенству

$$E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)u) \leq E_{0,k,[\mu]}(S(\theta)h) \quad \text{для любого } \theta \in \mathbb{R}. \quad (7.8)$$

Рассмотрим оператор A , переводящий функцию $z \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$ в решение $w \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$ уравнения

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)w(t, x) = g(t, x) - \varepsilon g_1(t, x), \quad (7.9)$$

где

$$g_1(t, x) = Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)(\zeta u + z)) - \zeta(t)Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u).$$

Мы покажем, что при $|\varepsilon| \ll 1$ оператор A корректно определен и является сжимающим в пространстве $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$. Отсюда будет следовать, что A имеет неподвижную точку $w(y)$, которая и есть искомое решение.

Прежде всего заметим, что для любой функции $u(t, x)$, удовлетворяющей включениям (5.10), правая часть уравнения (7.9) принадлежит пространству $\mathbb{F}_{0,k,[\mu]}$ и удовлетворяет неравенству

$$E_{0,k,[\mu]}(S(\theta)(g - \varepsilon g_1)) \leq C_1(E_{m-1,k}(u, \theta) + |\varepsilon| E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)z)), \quad (7.10)$$

где $C_1 > 0$ – некоторая константа. В самом деле, легко видеть, что g и g_1 – непрерывные функции на $\mathbb{R}$ со значениями в $H^{(k)}$. Поэтому достаточно установить (7.10). В силу предложения 4.3 имеем

$$E_{m-1,k}(u, t) \leq C_2 e^{\varkappa|t-\theta|} E_{m-1,k}(u, \theta), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7.11)$$

где C_2 и $\varkappa$ – положительные константы. Отсюда и из (5.18) следует, что на отрезке $[\theta, \theta + 1]$ для функции $g(t, x)$ выполнено неравенство

$$\|g(t, \cdot)\|_{(k)} \leq C_3 E_{m-1,k}(u, \theta), \quad \theta \leq t \leq \theta + 1, \quad (7.12)$$

а вне отрезка $[\theta, \theta + 1]$ она обращается в нуль. Для оценки $g_1(t, x)$ воспользуемся теоремой о среднем значении, равномерной ограниченностью производных функции Q_ρ и неравенством (7.11). В результате получим

$$E_{0,k,[\mu]}(S(\theta)g_1) \leq C_4(E_{m-1,k}(u, \theta) + E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)z)). \quad (7.13)$$

Сопоставляя (7.12) и (7.13), приходим к (7.10).

Таким образом, для любой функции $z \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$ правая часть (7.9) принадлежит пространству $\mathbb{F}_{0,k,[\mu]}$. Поэтому в силу предложения 7.2 при $|\varepsilon| \ll 1$ уравнение (7.9) имеет, притом единственное, решение $w = A(z) \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$, для которого справедлива оценка

$$\begin{aligned} E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)A(z)) &\leq C E_{0,k,[\mu]}(S(\theta)(g - \varepsilon g_1)) \\ &\leq C_5(E_{m-1,k}(u, \theta) + |\varepsilon| E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)z)). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Покажем теперь, что A – сжимающий оператор. Для этого возьмем две произвольные функции $z_1, z_2 \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$, положим $w_i = A(z_i)$ и рассмотрим разность $w = w_1 - w_2$. Легко видеть, что она является решением уравнения (5.15) с правой частью

$$h(t, x) = \varepsilon(Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)(\zeta u - z_2)) - Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)(\zeta u - z_1))).$$

С помощью теоремы о среднем значении без труда устанавливается неравенство

$$\|h(t, \cdot)\|_{(k)} \leq C_6 |\varepsilon| E_{m-1,k}(z_1 - z_2, t),$$

откуда следует, что

$$E_{0,k,[\mu]}(S(\theta)h) \leq C_6 |\varepsilon| E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)(z_1 - z_2)). \quad (7.15)$$

В силу (7.8) для решения $w \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$ уравнения (5.15) справедлива оценка

$$E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)w) \leq C E_{0,k,[\mu]}(S(\theta)h).$$

Сравнивая это неравенство с (7.15), получим, что при $|\varepsilon| \ll 1$ оператор A является сжимающим.

Обозначим через $w \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$ неподвижную точку оператора A : $A(w) = w$. Из (7.14) следует, что она удовлетворяет неравенству

$$E_{m-1,k,[\mu]}(S(\theta)w) \leq C_7 E_{m-1,k}(u, \theta). \quad (7.16)$$

Покажем, что для функции $v(t, x)$, определенной по формуле (5.16), выполнены все требуемые утверждения.

В самом деле, по построению $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению (5.9). Так как $\zeta(t) = 0$ при $t \leq \theta$, то из (5.16), (7.7) и (7.16) получим, что $v \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$. Поэтому согласно утверждению (ii) $\mathcal{D}(t)v \in \mathcal{M}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Далее, из (5.16) и (7.16) следует, что

$$E_{m-1,k}(u - v, t) = E_{m-1,k}(w, t) \leq C_7 e^{-\mu(t-\theta)} E_{m-1,k}(u, \theta) \quad \text{при } t \geq \theta + 1.$$

Сопоставляя это неравенство с (7.11) и (7.16), приходим к (7.2).

Таким образом, мы установили, что для любого $\theta \in \mathbb{R}$ найдется решение $v = v_\theta \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$, удовлетворяющее (7.2). Остается показать, что $v_{\theta_1} \equiv v_{\theta_2}$ при любых $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Непосредственная проверка показывает, что разность $w := v_{\theta_1} - v_{\theta_2}$ принадлежит пространству $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ и является решением уравнения (5.15) с правой частью

$$h(t, x) = \varepsilon(Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)v_{\theta_1}) - Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)v_{\theta_2})).$$

Из неравенства (7.2) с $v = v_{\theta_i}$ следует, что

$$E_{m-1,k}(v_{\theta_1} - v_{\theta_2}, t) \leq C_8 e^{-\mu t} E_{m-1,k}(u, \theta).$$

Поэтому $w \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu]}$. Далее, легко показать, что функция h принадлежит пространству $\mathbb{F}_{0,k,[\mu]}$ и удовлетворяет неравенству

$$E_{0,k,[\mu]}(h) \leq C_9 |\varepsilon| E_{m-1,k,[\mu]}(w).$$

В силу (7.8) имеем

$$E_{m-1,k,[\mu]}(w) \leq C E_{0,k,[\mu]}(h) \leq C C_9 |\varepsilon| E_{m-1,k,[\mu]}(w),$$

откуда следует, что $w \equiv 0$ при $|\varepsilon| \ll 1$.

(iv) Это утверждение является очевидным следствием гладкости оператора $\mathcal{G}(\varepsilon; \theta, \cdot)$ и формулы (5.13).

(v) Как было показано в § 5, оператор $\mathcal{R}_j$ представим в виде (5.25). Теперь заметим, что первое слагаемое в правой части (5.25) является аналогом оператора $\mathcal{R}_j$ для линейного уравнения

$$P_\varepsilon(t, x, \partial)u(t, x) = 0.$$

Согласно [3, теорема 6.4] в случае линейных уравнений имеет место представление

$$\partial_t^j (G(\varepsilon, \theta) U_0) \Big|_{t=\theta} = \sum_{i=0}^{m_c-1} (r_{ij}(\varepsilon, \theta, x, \partial_x) + \varepsilon d_{ij}(\varepsilon, \theta)) u_i(x), \quad (7.17)$$

где $U_0 = [u_0, \dots, u_{m_c-1}]$, операторы

$$d_{ij}(\varepsilon, \theta): H^{(m-1+k-i)} \rightarrow H^{(m+k-j)} \quad (7.18)$$

непрерывно зависят от θ в сильной операторной топологии, а их нормы ограничены равномерно по (ε, θ) . Положим

$$\mathcal{B}_j(\varepsilon; \theta, U_0) = \sum_{i=0}^{m_c-1} d_{ij}(\varepsilon, \theta) u_i + \partial_t^j (G(\varepsilon, \theta) [0, \dots, 0, f]) \Big|_{t=\theta}, \quad (7.19)$$

где функция f определяется по формуле (5.24). Представление (5.5) является тривиальным следствием (5.25), (7.17) и (7.19). Непрерывность оператора $\mathcal{B}_j$ по $[\theta, U_0]$ и равномерная липшицевость по U_0 вытекают из аналогичных свойств операторов, входящих в правую часть (7.19). Подробности мы оставляем читателю.

(vi) Воспользуемся формулой (7.19). Так как операторы $d_{ij}(\varepsilon, \theta)$ действуют непрерывно из $H^{(m-1+k-i)}$ в $H^{(m+k-j)}$ (см. (7.18)), то достаточно рассмотреть второе слагаемое в правой части (7.19). Прежде всего заметим, что если функция q не зависит от производных порядка $m-1$, то оператор Q_ρ является гладким из $\mathbb{R}_t \times \mathbb{E}_{m-1,k}$ в $H^{(k+1)}$, причем все его производные равномерно ограничены. Отсюда и из теоремы 6.1 следует, что при $|\varepsilon| \ll 1$ оператор

$$[\theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}] \mapsto f(t, x) = Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t) \mathcal{G}(\varepsilon; \theta, u_0, \dots, u_{m_c-1}))$$

непрерывен из $\mathbb{R}_\theta \times \mathbb{E}_{m-1,k}$ в $\mathbb{F}_{0,k+1,[\mu,-\mu]}$, а при любом фиксированном θ удовлетворяет условию Липшица, причем константа Липшица ограничена равномерно по (ε, θ) . Далее, при достаточно малых ε линейный оператор

$$f \mapsto G(\varepsilon, \theta) [0, \dots, 0, f]$$

действует непрерывно из $\mathbb{F}_{0,k+1,[\mu,-\mu]}$ в $\mathbb{F}_{m-1,k+1,[\mu,-\mu]}$. При этом он непрерывно зависит от θ в сильной операторной топологии, а его норма ограничена равномерно по (ε, θ) . Из вышесказанного следует, что второе слагаемое в правой части (7.19) также удовлетворяет всем требуемым свойствам.

7.2. Доказательство теорем 5.1 и 5.2. Зафиксируем произвольное $\rho > 0$ и определим искомые операторы $\mathcal{R}_j$ как сужение операторов (7.1), построенных в теореме 7.1, на цилиндр $\mathbb{R} \times \mathbb{B}_{m_c-1, k+m_h}(\rho)$. Все утверждения теорем 5.1 и 5.2 легко выводятся из теоремы 7.1. Докажем, например, притягивающее свойство.

Пусть решение $u(t, x)$ задачи (0.3), (1.2) определено на всей временной оси, а его фазовая траектория $\mathcal{D}(t)u$ целиком содержится в шаре $\mathbb{B}_{m-1, k}(\rho)$. Тогда $u(t, x)$ является решением задачи (5.9), (5.10) и принадлежит пространству $\mathbb{F}_{m-1, k, [\mu, -\mu]}$. Поэтому согласно утверждению (ii) теоремы 7.1 $\mathcal{D}(t)u \in \mathcal{M}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Остается заметить, что многообразие $\mathcal{M}(t, \rho)$, определенное в (5.2), является пересечением $\mathcal{M}(t)$ (см. (5.14)) и шара $\mathbb{B}_{m-1, k}(\rho)$.

Предположим теперь, что $u(t, x)$ – решение задачи (0.3), (1.2) с $J = [\theta, +\infty)$, причем $\mathcal{D}(t)u \in \mathbb{B}_{m-1, k}(\rho_1)$ при $t \geq \theta$ для некоторого $\rho_1 < \rho$. Продолжим функцию $u(t, x)$ на всю временную ось $\mathbb{R}$ как решение задачи (5.9), (5.10), (1.1) с данными Коши

$$u_j(x) = \partial_t^j u(\theta + 0, x), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Очевидно, что продолженная функция $u(t, x)$ удовлетворяет всем условиям утверждения (iii) теоремы 7.1. Следовательно, найдется такое решение $v(t, x)$ задачи (5.9), (5.10), что $\mathcal{D}(t)v \in \mathcal{M}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и выполнено (7.2). Теперь заметим, что фазовая траектория $\mathcal{D}(t)v$ содержится в шаре $\mathbb{B}_{m-1, k}(\rho)$ при $t \geq T \gg 1$, так как она экспоненциально притягивается к $\mathcal{D}(t)u$ при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому при $t \geq T$ функция $v(t, x)$ удовлетворяет также уравнению (0.3). Полагая $V_0 = \mathcal{D}(T)v$, из (7.2) получим (5.3).

Доказательство остальных утверждений мы оставляем читателю.

7.3. Доказательство теоремы 5.3. (i) В силу (5.2), если $\mathcal{D}(t)u \in \mathcal{M}(t, \rho)$ при $t \in J$, имеем

$$\partial_t^{m_c} u = \mathcal{R}_{m_c}(\varepsilon; t, u, \partial_t u, \dots, \partial_t^{m_c-1} u), \quad t \in J. \quad (7.20)$$

Заметим, что остаток $R_{m_c}(\varepsilon, y, \tau, \xi)$ от деления полинома τ^{m_c} на $P_c(\varepsilon, y, \tau, \xi)$ равен $P_c(\varepsilon, y, \tau, \xi) - \tau^{m_c}$. Поэтому согласно (5.5) имеем

$$\mathcal{R}_{m_c}(\varepsilon; t, u, \partial_t u, \dots, \partial_t^{m_c-1} u) = \partial_t^{m_c} u - P_c(\varepsilon, t, x, \partial)u + \varepsilon \mathcal{B}_{m_c}(\varepsilon; t, u, \dots, \partial_t^{m_c-1} u).$$

Подставляя эту формулу в (7.20), получим (5.7).

(ii) Прежде всего заметим, что решение задачи (5.7), (5.8) однозначно определяется данными Коши до порядка $m_c - 1$ в произвольной точке $\theta \in I$.

В самом деле, пусть u_1, u_2 – два решения задачи (5.7), (5.8), причем $\mathcal{D}_c(\theta)u_1 = \mathcal{D}_c(\theta)u_2$. Тогда разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет включениям (5.8), начальным условиям

$$\partial_t^j w(\theta, x) = 0, \quad j = 0, \dots, m_c - 1,$$

и уравнению

$$P_c(\varepsilon, t, x, \partial)w(t, x) = h(t, x),$$

где $h(t, x) = \varepsilon(\mathcal{B}_{m_c}(\varepsilon; t, u_1, \dots, \partial_t^{m_c-1} u_1) - \mathcal{B}_{m_c}(\varepsilon; t, u_2, \dots, \partial_t^{m_c-1} u_2))$.

В силу утверждения (ii) теоремы 5.2 правая часть $h(y)$ принадлежит пространству¹⁰ $C(I, H^{(k+m_h)})$, причем

$$\|h(t, \cdot)\|_{(k+m_h)} \leq C_1 |\varepsilon| E_{m_c-1, k+m_h}(u_1 - u_2, t), \quad t \in I, \quad (7.21)$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от ε и t . Воспользуемся оценкой нормы решения задачи Коши для строго гиперболических уравнений (см. [12, лемма 23.2.1]):

$$E_{m_c-1, k+m_h}(w, t) \leq C_2 \int_{[\theta, t]} \|h(r, \cdot)\|_{(k+m_h)} dr, \quad t \in I. \quad (7.22)$$

Сопоставляя (7.21) и (7.22), получим, что $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$ при $|\varepsilon| \ll 1$.

Предположим теперь, что интервал $I_1 \subset I$ удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме 5.3, (ii). Зафиксируем произвольное $\theta \in I_1$ и рассмотрим решение $v(t, x)$ задачи (0.3), (1.1), (1.2), где

$$u_j(x) = \begin{cases} \partial_t^j u(\theta, x), & j = 0, \dots, m_c - 1, \\ \mathcal{R}_j(\varepsilon; \theta, u(\theta, \cdot), \dots, \partial_t^{m_c-1} u(\theta, x)), & j = m_c, \dots, m - 1. \end{cases}$$

По построению начальная вектор-функция $[u_0, \dots, u_{m-1}]$ лежит на многообразии $\mathcal{M}(\theta, \rho)$. Поэтому в силу локальной инвариантности (см. теорему 5.1) фазовая траектория $\mathcal{D}(t)v$ принадлежит $\mathcal{M}(t, \rho)$ до тех пор, пока она находится в шаре $\mathbb{B}_{m-1, k}(\rho)$. Следовательно, согласно утверждению (i) функция $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению (5.7). Более того, в начальный момент времени $t = \theta$ ее данные Коши до порядка $m_c - 1$ совпадают с данными Коши функции $u(t, x)$. Так как решение задачи (5.7), (5.8), (5.11) единственно, то $u(t, x)$ и $v(t, x)$ совпадают на общей области определения. Отсюда следует, что максимальный интервал J , на котором определено решение $v(t, x)$, содержит I_1 и что $u(t, x) = v(t, x)$ при $t \in I_1$. Теорема доказана.

§ 8. Приложение

В настоящем параграфе собраны некоторые вспомогательные утверждения, использованные в основном тексте.

ЛЕММА 8.1. Пусть $\rho > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, а $k > n/2$ и $l \geq 0$ – целые числа. Тогда найдется такая константа $C = C(\rho, \gamma, k, l) > 0$, что

$$\left\| Q_\rho(\varepsilon, t, U + V) - \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} (D^j Q_\rho)(\varepsilon, t, U)[V, \dots, V] \right\|_{(k)} \leq C \|V\|_{m-1, k}^{l+\gamma}, \quad (8.1)$$

где $U, V \in \mathbb{E}_{m-1, k}$, а через $D^j Q_\rho$ обозначается j -я производная функции Q_ρ по U .

¹⁰Именно здесь используется тот факт, что функция q не содержит производных порядка $m - 1$, и поэтому согласно теореме 5.2, (ii) областью значений оператора $\mathcal{B}_{m_c}$ является пространство $H^{(k+m_h)}$, а не $H^{(k+m_h-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 4.1 оператор

$$Q_\rho(\varepsilon, t, U): \mathbb{R}_t \times \mathbb{E}_{m-1,k} \rightarrow H^{(k)} \quad (8.2)$$

бесконечно дифференцируем по Фреше, причем все его производные равномерно ограничены. Поэтому при $\gamma = 1$ неравенство (8.1) является очевидным следствием формулы Тейлора. Покажем, что в качестве γ можно выбрать любое число из интервала $(0, 1)$.

Так как $Q_\rho(\varepsilon, t, U) = 0$ при $\|U\|_{m-1,k} \geq \rho$, то можно считать, что $\|U\|_{m-1,k} < \rho$. Предположим сначала, что $\|V\|_{m-1,k} \geq 2\rho$. Тогда $\|U + V\|_{m-1,k} \geq \rho$ и неравенство (8.1) следует из равномерной ограниченности производных $D^j Q_\rho$:

$$\| (D^j Q_\rho)(\varepsilon, t, U)[V, \dots, V] \|_{(k)} \leq \text{const} \|V\|_{m-1,k}^j.$$

Пусть теперь $\|V\|_{m-1,k} \leq 2\rho$. В силу формулы Тейлора левая часть (8.1) оценивается сверху через $\text{const} \|V\|_{m-1,k}^{l+1}$. Остается заметить, что

$$\|V\|_{m-1,k}^{l+1} \leq (2\rho)^{1-\gamma} \|V\|_{m-1,k}^{l+\gamma} \quad \text{при} \quad \|V\|_{m-1,k} \leq 2\rho.$$

Напомним, что для функции $w(t, x)$ мы полагаем $S(\theta)w(t, x) = w(t + \theta, x)$.

ЛЕММА 8.2. Для любых $\rho > 0$, $\mu \geq 0$ и целого числа $k > n/2$ оператор композиции

$$\mathcal{C}: u(y) \mapsto Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u)$$

действует непрерывно из $\mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$ в $\mathbb{F}_{0,k,[\mu,-\mu]}$ и удовлетворяет глобальному условию Липшица. Более того, если $u, v \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$, то

$$E_{0,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)(\mathcal{C}u - \mathcal{C}v)) \leq C E_{m-1,k,[\mu,-\mu]}(S(\theta)(u - v)) \quad (8.3)$$

для любого $\theta \in \mathbb{R}$, причем константа $C = C(k, \rho) > 0$ не зависит от u, v, θ и μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из бесконечной гладкости оператора (8.2) и ограниченности его производных следует, что если $u \in \mathbb{F}_{m-1,k,[\mu,-\mu]}$, то $\mathcal{C}u \in \mathbb{F}_{0,k,[\mu,-\mu]}$. Кроме того, в силу формулы о среднем значении,

$$\|Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)u) - Q_\rho(\varepsilon, t, \mathcal{D}(t)v)\|_{(k)} \leq \text{const} E_{m-1,k}(u - v, t),$$

откуда получаем (8.3).

Список литературы

1. Бабин А. В. Дробные степени нелинейного аналитического дифференциального оператора // Матем. сб. 1979. Т. 109. № 1. С. 12–45.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Е., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966.
3. Волевич Л. Р., Широкан А. Р. Экспоненциальная дихотомия и экспоненциальное расщепление для гиперболических уравнений // Тр. ММО. 1998. Т. 59. С. 106–149.
4. Гробман Д. М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128. № 5. С. 880–881.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
6. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
8. Николенко Н. В. Метод нормальных форм Пуанкаре в задачах интегрируемости уравнений эволюционного типа // УМН. 1986. Т. 41. № 5. С. 109–152.
9. Нитццки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
11. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
12. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.
13. Albrecht F., Diamond H. G. The converse Taylor theorem // Indiana Math. J. 1971. V. 21. P. 347–350.
14. Bates P., Jones C. K. Invariant manifolds for semilinear partial differential equations // Dynamics Reported. 1989. V. 2. P. 1–38.
15. Carr J. Applications of Center Manifold Theory // Appl. Math. Sci. V. 35. Heidelberg–Berlin–New York: Springer-Verlag, 1981.
16. Chicone C., Latushkin Y. Center manifolds for infinite dimensional nonautonomous differential equations // J. Diff. Eq. 1997. V. 141. P. 356–399.
17. Chow S.-N., Lu K., Shen Y.-Q. Normal forms for quasiperiodic evolutionary equations // Discrete Contin. Dynam. Systems. 1996. V. 2. № 1. P. 65–94.
18. Foias C., Saut J.-C. Linearization and normal form of the Navier–Stokes equations with potential forces // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1987. V. 4. P. 1–47.
19. Haraux A. Semi-Linear Hyperbolic Problems in Bounded Domains. Chur–London–Paris–New York–Melbourne: Harwood Acad. Publ., 1987.
20. Hartman P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 610–620.
21. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // J. Diff. Eq. 1967. V. 3. P. 547–570.
22. Kirchgässner K. Wave solutions of reversible systems and applications // J. Diff. Eq. 1982. V. 45. P. 113–127.
23. McKean H. P., Shatah J. The nonlinear Schrödinger equation and nonlinear heat equation. Reduction to linear form // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. XLIV. P. 1067–1080.
24. Mielke A. A reduction principle for nonautonomous systems in infinite-dimensional spaces // J. Diff. Eq. 1986. V. 65. № 2. P. 322–355.
25. Mielke A. Locally invariant manifolds for quasilinear parabolic equations // Rocky Mountain J. Math. 1991. V. 21. № 2. P. 707–714.
26. Mielke A. Essential manifolds for an elliptic problem in an infinite strip // J. Diff. Eq. 1994. V. 110. № 2. P. 322–355.
27. Mora X., Solà-Morales J. Existence and non-existence of finite-dimensional globally attracting invariant manifolds in semilinear damped wave equations // Dynamics of Infinite-Dimensional Systems / Eds. S.-N. Chow and J. K. Hale. NATO ASI. Ser. F. V. 37. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1987. P. 187–210.

28. *Palmer K. J.* A generalization of Hartman's linearization theorem // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 41. № 3. P. 243–255.
29. *Palmer K. J.* Linearization near an integral manifold // J. Math. Anal. Appl. 1975. V. 51. P. 243–255.
30. *Pugh C. C.* On a theorem of P. Hartman // Amer. J. Math. 1969. V. 91. № 2. P. 363–367.
31. *Scarpelini A.* Center manifolds of infinite dimensions I. Main results and applications; II. Proofs of the main results // Z. Angew. Math. Phys. 1991. V. 42. № 1. P. 1–31; № 2. P. 280–314.
32. *Shirikyan A. R., Volevich L. R.* Bounded and almost periodic solutions to linear high-order hyperbolic equations // Math. Nachr. 1998. V. 193. P. 137–197.
33. *Vanderbauwhede A.* Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations // Dynamics Reported. 1989. V. 2. P. 89–169.
34. *Vanderbauwhede A., Iooss G.* Center manifold theory in infinite dimensions // Dynamics Reported. 1992. V. 1 (new series). P. 125–163.

Поступило в редакцию
19.X.1998