Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, Системы резонаторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 3, 51–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/im289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:26:15

УДК 517.956

Р. Р. Гадыльшин

Системы резонаторов

Рассматриваются система вложенных резонаторов и цепочка из двух резонаторов. Доказано существование полюсов с малой мнимой частью у функций Грина соответствующих краевых задач Неймана. Методом согласования асимптотических разложений построены полные асимптотики этих полюсов и соответствующих собственных функций. Рассмотрены случаи, когда предельное значение полюса является либо собственной частотой только одного из предельных объемов, либо одновременно обоих. Показано, что порядки малости мнимых частей полюсов для систем существенно отличаются от аналогичных характеристик для классического резонатора Гельмгольца. Даны приложения построенных асимптотик к задаче рассеяния.

Библиография: 32 наименования.

Введение

Классический резонатор Гельмгольца представляет собой границу ограниченной области в $\mathbb{R}^3$, в которой прорезано малое отверстие, соединяющее внешность и внутренность резонатора [1]–[3]. Соответствующая математическая модель описывается задачей Неймана для уравнения Гельмгольца. Резонансные явления для этой задачи объясняются существованием у аналитических продолжений ее решений полюсов с малой мнимой частью, которые при уменьшении отверстия сходятся к собственным частотам (к корням из собственных значений) предельной внутренней задачи (т.е. задачи Неймана внутри “закрытого” резонатора). Для резонаторов со стенками конечной толщины и с различными типами граничных условий на них существование таких полюсов было доказано в [4], [5], а оценки их скорости сходимости были даны в [4], [6]–[10]. Заметим, что исследование сходимости по существу содержит две задачи. Первая из них – это доказательство существования аналитических продолжений решений, которое для рассеивателей конечного объема дается различными способами (см., например, [4], [11]–[13]). Анализ же сходимости по малому параметру (диаметру канала связи) фактически является задачей, достаточно независимой от первой (за исключением работ [4], [6]). Для классического резонатора с идеально тонкими стенками, исследовавшегося в [14], [15], доказательство существования как аналитического продолжения, так полюсов с малой мнимой частью было дано на основе представления решения в

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 99-01-00139.

виде потенциала двойного слоя. Однако для оценки реального влияния этих полюсов на решение исходной задачи рассеяния (рассматривающейся при *вещественных* частотах) потребовалось определить порядки малости их мнимых частей и соответствующих вычетов во внешности резонатора (вне ловушки). Асимптотический анализ, применявшийся в [14]–[18], показал, что порядки мнимых частей и вычетов существенно зависят от параметров предельной внутренней задачи. В частности, в [15] было показано, что к двухкратной собственной частоте предельной задачи сходятся два полюса, причем мнимая часть одного из них имеет тот же порядок, что и мнимая часть полюса, сходящегося к простой собственной частоте в случае наиболее общего положения, а мнимая часть второго – на порядки меньше. Наличие двух полюсов влекло существование двух пиков у решения задачи рассеяния, наблюдающихся при частотах, равных вещественным частям полюсов, а различие порядков их мнимых частей (и соответствующих вычетов вне резонатора) приводило и к разным порядкам роста этих пиков. С учетом последнего наблюдения представляется интересным провести асимптотический анализ системы, состоящей из двух соединенных между собой резонаторов. Для системы вложенных резонаторов вопрос о существовании полюсов может быть решен на основе подхода, использовавшегося в [14]. Однако для цепочки из двух резонаторов, также рассматриваемой в настоящей работе, этот подход, основанный на анализе поверхностных потенциалов как псевдодифференциальных операторов, неприменим.

С другой стороны, как из физических соображений, так и с точки зрения асимптотического анализа ясно, что обе эти системы по существу одинаковы. По этой причине вопросы существования аналитического продолжения решения и полюсов с малой мнимой частью решаются ниже одновременно для обоих типов систем принципиально иными способами. Существование аналитического продолжения при фиксированных отверстиях доказывается с использованием техники, описанной в [12] при решении аналогичного вопроса для задачи рассеяния на ограниченном теле ненулевого объема. Идея этого метода заключается в представлении решения в виде суперпозиции ньютонова потенциала и решения краевой задачи в ограниченной области при фиксированной частоте и при граничных условиях, индуцированных плотностью объемного потенциала. В свою очередь, для плотности ньютонова потенциала предъявляется уравнение Фредгольма второго рода, аналитически зависящее от частоты, что вместе с упомянутой выше суперпозицией и влечет существование аналитического продолжения решения.

В § 2 (в § 1 дана постановка задачи) показано, что эта конструкция применима и к рассматриваемым системам резонаторов с идеально тонкими стенками. Более того, предложенная конструкция оказывается удобной и для анализа сходимости полюсов по малому параметру (проводимому в § 3), так как он сводится к исследованию краевой задачи в *ограниченной* области и при *фиксированной* частоте, что заметно проще техники, использовавшейся в [5] для резонатора со стенками конечной толщины и основанной на анализе исходной краевой задачи в неограниченной области. Более существенным ограничением подхода [5] является то, что он не дает ответа на интуитивно очевидный вопрос о соответствии числа сходящихся-

ся полюсов кратности предельной собственной частоты. Решению этого вопроса (опять же на основе прямого анализа конструкции аналитического продолжения) в случаях простой и двухкратной предельных частот посвящен § 4. Заметим, что в [19] для резонатора со стенками конечной толщины в случае простой предельной частоты подобная проблема решалась иным, менее рациональным способом, для которого простота предельной собственной частоты являлась существенным элементом доказательства. Подчеркнем, что результаты первых трех параграфов, помимо самостоятельного интереса, являются необходимыми для строгого обоснования асимптотических разложений полюсов и соответствующих вычетов, строящихся в следующих трех параграфах и приводящих к достаточно любопытным и несколько неожиданным фактам.

Назовем резонатор, который непосредственно сообщается с внешностью системы резонаторов, *внешним резонатором*, а другой – *внутренним*. В § 5 строится асимптотика полюса, сходящегося к простой собственной частоте k_0 предельного внутреннего резонатора, в предположении, что k_0 не является собственной частотой предельного внешнего резонатора. Казалось бы, что в такой ситуации мнимая часть полюса и пики решения задачи рассеяния должны иметь тот же порядок, что и в случае одного резонатора [16]. Однако оказывается, что мнимая часть полюса системы резонаторов на порядки меньше, а пик решения задачи рассеяния также на порядки больше. В § 6 рассмотрен случай, когда полюс сходится к предельной собственной частоте внешнего резонатора, не являющейся, наоборот, собственной частотой внутреннего резонатора. В этой ситуации мнимая часть полюса и пик решения задачи рассеяния имеют те же порядки, что и в случае одного резонатора [16]. И, наконец, в § 7 рассматривается случай, когда $k_0 \neq 0$ является простой собственной частотой как внутреннего, так и внешнего резонаторов. С учетом результатов § 5 и упомянутой выше работы [15] о расщеплении полюсов для одного резонатора естественно было бы ожидать, что мнимая часть хотя бы одного полюса должна иметь больший порядок малости, чем в случае, рассмотренном в § 5. Однако ничего подобного не происходит. Более того, оказывается, что оба полюса, сходящиеся к k_0 , имеют одинаковый порядок мнимых частей, равный порядку мнимой части полюса, сходящегося к простой предельной собственной частоте в случае одного резонатора. В результате вместо ожидаемого роста пиков решения задачи рассеяния происходит их уменьшение по сравнению с пиком решения, соответствующим ситуации, рассмотренной в § 5. В заключающих работу двух приложениях рассмотрен вспомогательный вопрос об эквивалентности определенных пространств Соболева для областей с экранами и проведен функциональный анализ для системы резонаторов в квазистационарном режиме (не подвергаемом асимптотическому анализу в настоящей работе).

§ 1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{D}$ – произвольное взаимно однозначное диффеоморфное отображение $\mathbb{R}^3$ на себя, являющееся тождественным при $r = |x| > R_0 > 0$, $S(R)$ – шар радиуса R с центром в начале координат, $\mathbb{R}_+^3 = \{x: x_3 > 0\}$, $S_+(R) = S(R) \cap \mathbb{R}_+^3$. Обо-

значим через Ω образ $S(R)$ при отображении $\mathcal{P}$ и положим $\Omega^{(3)} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Так как ниже одновременно рассматриваются как система вложенных резонаторов, так и цепочка резонаторов, то под $\Omega^{(1)}$ понимается соответственно либо

а) образ $S(T)$ при $T < R$,

либо

б) образ $S_+(R)$.

В обоих случаях $\Omega^{(2)} = \Omega \setminus \overline{\Omega^{(1)}}$. Пусть $\omega_\varepsilon^{(2)}$ ($\omega_\varepsilon^{(1)}$) – открытое подмножество на границе между $\Omega^{(2)}$ и $\Omega^{(3)}$ (и $\Omega^{(1)}$), лежащее в шаре радиуса $\varepsilon \ll 1$ с центром в некоторой фиксированной точке $x_0^{(1)}$ ($x_0^{(2)}$) этой общей части границ. В случае б) предполагается, что центры сжатия $\omega_\varepsilon^{(1)}$ и $\omega_\varepsilon^{(2)}$ отделены от границ областей $\Omega^{(3)}$ и $\Omega^{(1)}$ соответственно. Будем также считать границы многообразий $\omega_\varepsilon^{(i)}$ бесконечно дифференцируемые. Обозначим $\gamma_0 = \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} \cap \partial\Omega^{(3)}$, $\gamma_\varepsilon = \gamma_0 \cup \partial\omega_\varepsilon^{(1)} \cup \partial\omega_\varepsilon^{(2)}$, $\Gamma_0 = (\partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(3)}) \setminus \gamma_0$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_0 \setminus \left(\overline{\omega_\varepsilon^{(1)} \cup \omega_\varepsilon^{(2)}} \right)$, $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma_\varepsilon}$. Заметим, что для системы вложенных резонаторов (случай а)) $\gamma_0 = \emptyset$ и, следовательно, $\gamma_\varepsilon = \partial\omega_\varepsilon^{(1)} \cup \partial\omega_\varepsilon^{(2)}$. В этих обозначениях краевая задача, соответствующая как системе вложенных резонаторов, так и цепочке резонаторов, имеет вид

$$(\Delta + k^2)u_\varepsilon = F, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1.1)$$

$$u = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - iku_\varepsilon = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где ν – нормаль, $\text{Im } k \geq 0$, а F – функция из $L_2(\mathbb{R}^3)$ с ограниченным носителем. Решение краевой задачи (1.1), (1.2) рассматривается в классе функций, принадлежащих $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap W_2^2(Q)$ для любой области $Q \subset \Omega_\varepsilon$, отделенной от γ_ε . Здесь и всюду далее $L_2(Q)$ и $W_2^m(Q)$ – пространства Соболева с нормами $\|\cdot\|_{L_2(Q)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^m(Q)}$ соответственно, определяемые как замыкание в указанных нормах множества бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\overline{Q})$ в случае ограниченной области Q и подмножества функций из $C^\infty(\overline{Q})$ с конечными носителями в случае неограниченной Q . Подчеркнем, что при замыкании областей с экранами (типа Ω_ε) поверхность Γ_ε понимается как двухсторонняя. Если X – символ какого-либо банахова пространства, то

$$X_{\text{loc}}(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{u: u \in X(D \cap S(R)) \quad \forall R\}.$$

Будем говорить, что *последовательность сходится в $X_{\text{loc}}(D)$* , если она сходится в $X(D \cap S(R))$ для любого R .

Как уже было сказано во введении, основными целями настоящей работы являются доказательства разрешимости краевой задачи (1.1), (1.2) при $\text{Im } k \geq 0$, существования у ее решений аналитических продолжений на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, сходимости части полюсов аналитических продолжений к собственным частотам предельных задач в $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ и построение полных асимптотик этих полюсов и соответствующих вычетов при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В заключение раздела приведем используемые в дальнейшем определения. Обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y ; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [12]. Функция $u(z)$, определенная в области $K \subset \mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве X называется *голоморфной* в K , если она дифференцируема (в смысле нормы) в каждой точке K .

Операторнозначная функция $\mathcal{A}(z) \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется *голоморфной* в области $K \subset \mathbb{C}$, если она дифференцируема по норме в каждой точке K .

Операторнозначная функция $\mathcal{A}(z) \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется *мероморфной* в области $K \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна в K , за исключением некоторых изолированных точек, которые являются полюсами для $\mathcal{A}(z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Так как в работе рассматриваются аналитические свойства только ограниченных операторов, то для краткости вместо обычно используемого термина “ограниченно-голоморфный оператор” будем говорить “голоморфный оператор” (как в определении 1.1).

Обозначим через $\mathcal{B}(Y(Q), X_{\text{loc}}(D))$ множество отображений $\mathcal{A}: Y(Q) \rightarrow X_{\text{loc}}(D)$ таких, что $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(Y(Q), X(D \cap S(R)))$ для любого R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функцию $u(z) \in X_{\text{loc}}(D)$ будем называть *непрерывной* (*голоморфной*, *мероморфной*), если она непрерывна (голоморфна, мероморфна) как элемент $X(D \cap S(R))$ для любого R .

Отображение $\mathcal{A}(z) \in \mathcal{B}(Y(Q), X_{\text{loc}}(D))$ будем называть *непрерывным* (*голоморфным*, *мероморфным*), если оно непрерывно (голоморфно, мероморфно) как элемент $\mathcal{B}(Y(Q), X(D \cap S(R)))$ для любого R .

§ 2. Конструкция аналитического продолжения

Всюду далее задача Неймана в $\Omega^{(i)}$ называется *предельной задачей* в $\Omega^{(i)}$, а под термином “предельная задача” понимается совокупность предельных задач в $\Omega^{(i)}$ для всех i . Обозначим через $\Sigma^{(1)}$ ($\Sigma^{(2)}$) множество собственных частот (корней из собственных значений) предельной задачи в $\Omega^{(1)}$ ($\Omega^{(2)}$) соответственно.

ЛЕММА 2.1. При $\text{Im } k \geq 0$ решения краевой задачи (1.1), (1.2) и предельной задачи в $\Omega^{(3)}$ единственны. При $k \notin \Sigma^{(1)}$ ($k \notin \Sigma^{(2)}$) решение предельной задачи в $\Omega^{(1)}$ (в $\Omega^{(2)}$) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждений леммы для предельных задач хорошо известна. Пусть D – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей из C^2 такая, что $\bar{\Gamma}_\varepsilon \subset D$. Обозначим $D_\varepsilon = D \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon$. Так как подмножество функций из $C_0^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon)$, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\omega_\varepsilon^{(i)}$, плотно в $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ (см. приложение А), то для решения краевой задачи (1.1), (1.2) справедлива первая формула Грина (т.е. оно допускает интегрирование по частям)

$$-\sum_{i=1}^3 \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}_\varepsilon}{\partial x_i} dx + k^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon \bar{v}_\varepsilon dx + \int_{\partial D} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \bar{v}_\varepsilon ds = \int_{D_\varepsilon} F^{(D)} \bar{v}_\varepsilon dx \quad (2.1)$$

для любого $v_\varepsilon \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$. Здесь $F^{(D)}$ – сужение F на D , а ν – внешняя нормаль к D . С учетом равенства (2.1) доказательство единственности решения (1.1), (1.2) при $\text{Im } k \geq 0$ повторяет стандартное доказательство единственности решения для краевых задач во внешности ограниченной области с гладкой границей (см., например, [20]). Действительно, подставляя $v_\varepsilon = \bar{k}u_\varepsilon$ в (2.1) и учитывая, что $F = 0$, получаем равенство

$$k \int_{\partial D} u_\varepsilon \frac{\partial \bar{u}_\varepsilon}{\partial \nu} ds = -\bar{k}|k|^2 \int_{D_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 dx + k \int_{D_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx.$$

Взяв мнимую часть от этого равенства, получаем

$$\text{Im} \left(k \int_{\partial D} u_\varepsilon \frac{\partial \bar{u}_\varepsilon}{\partial \nu} ds \right) \geq 0.$$

Так как, очевидно, $u_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ – решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, удовлетворяющее условию Зоммерфельда (1.2), то из последнего неравенства и [20, теорема 3.12] следует, что $u_\varepsilon = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus D$. Отсюда в силу произвола в выборе D вытекает, что $u_\varepsilon = 0$ в Ω_ε . Лемма доказана.

Как уже отмечалось выше, приводимое в настоящей работе доказательство существования как решения краевой задачи (1.1), (1.2), так и его аналитического продолжения основано на подходе, примененном в [12] к задаче рассеяния на конечном теле ненулевого объема. Пусть L – любое достаточно большое число такое, что $\bar{\Omega} \subset S(L/2)$, $F \in L_2(S(L))$. Обозначим $\Omega_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Gamma}_0$, $\Omega_{\delta,t} = \Omega_\delta \cap S(t)$ при $\delta \geq 0$. Рассмотрим следующее семейство краевых задач в ограниченных областях $\Omega_{\delta,L}$:

$$(\Delta - 1)u_\delta = F, \quad x \in \Omega_{\delta,L}, \quad \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\delta, \quad (2.2)$$

$$u_\delta = 0, \quad x \in \partial S(L). \quad (2.3)$$

Обозначим через $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$ подпространство функций из $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$, равных нулю на $\partial S(L)$. Под решением краевой задачи (2.2), (2.3) будем понимать функцию $u_\delta \in W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{\delta,L}} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}_\delta}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_{\delta,L}} u_\delta \bar{v}_\delta dx = \int_{\Omega_{\delta,L}} F \bar{v}_\delta dx \quad (2.4)$$

для любого $v_\delta \in W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$. Так как из определения $\Omega_{\delta,L}$ следует, что $L_2(\Omega_{\delta,L}) = L_2(S(L))$ и область интегрирования в первом интеграле можно заменить на $\Omega_{0,L}$, то (2.4) можно переписать в виде

$$-\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{0,L}} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}_\delta}{\partial x_i} dx - \int_{S(L)} u_\delta \bar{v}_\delta dx = \int_{S(L)} F \bar{v}_\delta dx.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Краевая задача (2.2), (2.3) однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$ и для ее решений справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u_\delta\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} &\leq \|F\|_{L_2(S(L))}, \\ \|u_\delta\|_{W_2^2(Q)} &\leq C_\delta(Q) \|F\|_{L_2(S(L))}, \end{aligned}$$

где Q – произвольная подобласть $\Omega_{\delta,L}$, отделенная от γ_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая априорная оценка получается из (2.4) подстановкой $v_\delta = u_\delta$ с учетом последнего интегрального тождества. Так как определения $W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ как замыкания пространства гладких функций и как пространства функций, квадратично интегрируемых вместе с обобщенными производными, эквивалентны, то однозначная разрешимость краевой задачи (2.2), (2.3) в $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$ доказывалась аналогично [21], [22]. Вторая оценка вытекает из хорошо известных априорных оценок (см., например, [22]).

Наряду с однородным граничным условием (2.3) рассмотрим при $w \in W_2^2(S(L))$ и неоднородное граничное условие

$$u_\delta = w, \quad x \in \partial S(L). \quad (2.5)$$

Обозначим через $t_{\delta,L}$ оператор, ставящий в соответствие функции w решение краевой задачи (2.2), (2.5) при $F = (\Delta - 1)w$. Из очевидного сведения краевой задачи (2.2), (2.5) к (2.2), (2.3) и утверждения 2.1 вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Оператор $t_{\delta,L}$ принадлежит $\mathcal{B}(W_2^2(S(L)), W_2^1(\Omega_{\delta,L}))$ и $\mathcal{B}(W_2^2(S(L)), W_2^2(Q))$ для произвольной области $Q \subset \Omega_{\delta,L}$, отделенной от γ_δ .

Далее, известно (см., например, [12])

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Для функции $g \in L_2(S(L))$ отображение

$$(\Delta + k^2)^{-1}g = \frac{1}{4\pi} \int_{S(L)} \frac{\exp\{ik|x-y|\}g(y)}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

является голоморфной функцией из $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3))$.

Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 2/3$ и нулю при $t > 5/6$. Обозначим через $p(Q)$ оператор сужения на Q . Из утверждений 2.2 и 2.3 вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Оператор

$$A_\delta(k) = (1 - \chi(rL^{-1}))(\Delta + k^2)^{-1} + \chi(rL^{-1})t_{\delta,L}p(S(L))(\Delta + k^2)^{-1}$$

является голоморфной функцией из $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta))$ и $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^2(Q))$ для любой подобласти $Q \subset \Omega_\delta$, отделенной от γ_δ .

Решения краевой задачи (1.1), (1.2) и предельной задачи и их аналитические продолжения будем искать в виде $u_\delta = A_\delta(k)g$, где $g \in L_2(S(L))$. Из утверждений 2.4 и определения оператора $A_\delta(k)$ следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Если $g \in L_2(S(L))$, то функция $u_\delta = A_\delta(k)g$

а) является голоморфной функцией из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ и $W_{2,\text{loc}}^2(Q)$ для любой области $Q \subset \Omega_\delta$, отделенной от γ_δ ;

б) удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на Γ_δ и уравнению $(\Delta + k^2)u_\delta = F$ в Ω_δ при $F = (I - T_\delta(k))g$, где I – единичный оператор, а

$$T_\delta(k)g = (\Delta + (k^2 + 1)) (\chi(rL^{-1})) ((\Delta + k^2)^{-1} - t_{\delta,L} p(S(L))(\Delta + k^2)^{-1})g \\ + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\chi(rL^{-1})) \frac{\partial}{\partial x_i} (((\Delta + k^2)^{-1} - t_{\delta,L} p(S(L))(\Delta + k^2)^{-1})g), \quad (2.6)$$

а при $\text{Im } k \geq 0$ и условию излучения (1.2).

Из (2.6) и утверждений 2.2 и 2.3 вытекает, что при любой $g \in L_2(S(L))$ и $k \in \mathbb{C}$ функция $T_\delta(k)g$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^3)$ и $\text{supp } T_\delta(k)g \subset \overline{S(L)}$. Поэтому отображение $B_\delta(k) = I - T_\delta(k)$ можно рассматривать как оператор из $L_2(S(L))$ в $L_2(S(L))$. В такой трактовке оператора B_δ из (2.6) и утверждений 2.2 и 2.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Операторы $B_\delta(k)$, $T_\delta(k)$ – голоморфные функции из $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$. Оператор $T_\delta(k)$ компактен в $L_2(S(L))$.

ЛЕММА 2.2. Если $g \neq 0$, то и $A_\delta(k)g \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B_\delta(k)g \neq 0$, то справедливость леммы очевидна. Пусть $B_\delta(k)g = 0$, и предположим, что $u_\delta = A_\delta(k)g = 0$. Из определения $A_\delta(k)$ следует, что

$$u_\delta(x) = w(x) - \chi(rL^{-1})(w(x) - v_\delta(x)),$$

где $w = (\Delta + k^2)^{-1}g$, $v_\delta = t_{\delta,L} p(S(L))w$. В силу сделанного предположения

$$0 = w(x) - \chi(rL^{-1})(w(x) - v_\delta(x)), \quad (2.7)$$

и, следовательно, $w = 0$ вне $S(5L/6)$, а $v_\delta = 0$ в $S(2L/3)$. Но тогда функция $U_\delta = w - v_\delta$ принадлежит $W_2^2(S(L))$ и является решением краевой задачи

$$(\Delta - 1)U_\delta = 0, \quad x \in S(L), \quad U_\delta = 0, \quad x \in \partial S(L). \quad (2.8)$$

Так как решение (2.8), очевидно, равно нулю, то из (2.7) следует, что $w = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Из определения w вытекает, что $g = 0$. Противоречие. Доказательство леммы завершено.

Из лемм 2.1 и 2.2 и следствия 2.1, в частности, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $\text{Im } k > 0$, то существует оператор $B_\delta^{-1}(k) \in \mathcal{B}(L_2(S(L)))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если в определении оператора $t_{\delta,L}$ полагать граничное условие на $\partial S(L)$ однородным, то легко убедиться, что такое определение никак не отразится на доказательстве утверждений этого параграфа вплоть до леммы 2.2. Однако доказательство леммы 2.2 (желание получить однородное граничное условие в (2.8)) влечет необходимость данного в тексте определения оператора $t_{\delta,L}$.

Из следствий 2.1, 2.2 и [12, гл. XV, теорема 7.1] следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. *Оператор $B_{\delta}^{-1}(k)$ является мероморфной функцией из $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$.*

Обозначим $\mathcal{A}_{\delta}(k) = A_{\delta}(k)B_{\delta}^{-1}(k)$. Из утверждений 2.4 и 2.6 вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. *Оператор $\mathcal{A}_{\delta}(k)$ является мероморфной функцией из $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_{\delta}))$ и $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^2(Q))$ для любой области $Q \subset \Omega_{\delta}$, отделенной от γ_{δ} . Для любого $F \in L_2(S(L))$ функция $u_{\delta} = \mathcal{A}_{\delta}(k)F$ является мероморфной функцией из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_{\delta})$ и $W_{2,\text{loc}}^2(Q)$ для любого Q , отделенного от γ_{δ} . Функция u_{δ} удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)u_{\delta} = F$ в Ω_{δ} , однородному граничному условию Неймана на Γ_{δ} , а при $\text{Im } k \geq 0$ – и условию излучения (1.2).*

Таким образом, решения краевой задачи (1.1), (1.2), предельной задачи и их аналитические продолжения определяются по единой формуле

$$u_{\delta} = \mathcal{A}_{\delta}(k)F, \quad (2.9)$$

где $\delta = \varepsilon > 0$ соответствует возмущенной задаче, а $\delta = 0$ – предельной.

ЛЕММА 2.3. *Если $\text{supp } F \subset S(T)$, то функции (2.9) не зависят от $L \geq T$. Множества полюсов операторов $B_{\delta}^{-1}(k)$ и $\mathcal{A}_{\delta}(k)$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость первого утверждения вытекает из утверждения 2.7 и леммы 2.1, а второго – из леммы 2.2.

Так как в силу леммы 2.3 при фиксированном F решения и их аналитические продолжения, определяемые равенством (2.9), не зависят от L , то всюду в дальнейшем для краткости изложения под решениями краевой задачи (1.1), (1.2) и предельных задач будем понимать как их решения при $\text{Im } k \geq 0$, так и соответствующие аналитические продолжения при $\text{Im } k < 0$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Множество полюсов Σ_{δ} оператора $\mathcal{A}_{\delta}(k)$ не зависит от L . При любом фиксированном $\delta \geq 0$ множество Σ_{δ} дискретно и не имеет конечных точек сгущения.*

Множество Σ_{ε} лежит в полуплоскости $\text{Im } k < 0$.

Множество Σ_0 представимо в виде $\Sigma_0 = \bigcup_{i=1}^3 \Sigma^{(i)}$, где $\Sigma^{(3)}$ – множество полюсов решений предельной задачи в $\Omega^{(3)}$, лежащее в полуплоскости $\text{Im } k < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение теоремы. Обозначим (временно) через $\mathcal{A}_{\delta,t}$ оператор $\mathcal{A}_\delta$, определенный для $L = t$. Пусть $a > b$. В силу первого утверждения леммы 2.3 множество полюсов $\mathcal{A}_{\delta,b}$ является подмножеством множества полюсов $\mathcal{A}_{\delta,a}$. Покажем обратное включение. Пусть $\text{supp } F \subset S(a)$. Положим

$$W = (1 - \chi(rb^{-1}))(\Delta + k^2)^{-1}F.$$

Так как $\text{supp}(F - (\Delta + k^2)W) \subset \overline{S(b)}$, то в силу леммы 2.1 и утверждения 2.7 решение возмущенной и предельной задачи можно определить любой из двух следующих формул:

$$u_\delta = \mathcal{A}_{\delta,a}(k)F, \quad u_\delta = \mathcal{A}_{\delta,b}(k)(F - (\Delta + k^2)W) + W. \quad (2.10)$$

В силу очевидной голоморфности второго слагаемого в правой части второго равенства (2.10) множество полюсов $\mathcal{A}_{\delta,a}$ является подмножеством множества полюсов $\mathcal{A}_{\delta,b}$.

Справедливость второго утверждения вытекает из леммы 2.3 и следствия 2.1, а остальных – из леммы 2.1.

Обозначим через $G_\delta(x, y, k)$ функцию Грина, определяемую по формуле

$$\begin{aligned} G_\delta(x, y, k) = & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\exp\{ik|x-y|\}}{|x-y|} \chi(|x-y|T^{-1}) \right. \\ & - \mathcal{A}_\delta(k) \left(2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\exp\{ik|x-y|\}}{|x-y|} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\chi(|x-y|T^{-1})) \right) \\ & \left. + \frac{\exp\{ik|x-y|\}}{|x-y|} \Delta \chi(|x-y|T^{-1}) \right), \end{aligned}$$

где T – достаточно малое число такое, что шар радиуса T с центром в точке y лежит в Ω_δ .

ТЕОРЕМА 2.2. *Функция Грина является мероморфной в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \times L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Для функции Грина и решений краевой задачи (1.1), (1.2) и предельной задачи справедливы следующие равенства:*

$$u_\delta(x, k) = - \int_{\mathbb{R}^3} G_\delta(x, y, k) F(y) dy, \quad (2.11)$$

$$G_\delta(x, y, k) = G_\delta(y, x, k). \quad (2.12)$$

Множество полюсов функции G_δ совпадает с Σ_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 2.7 и определения функции Грина при любом фиксированном y функция G_δ является мероморфной функцией из $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. При $\text{Im } k \geq 0$ справедливость (2.11), (2.12) для $\delta = 0$ известна, а для $\delta = \varepsilon > 0$ в силу возможности интегрирования по частям (2.1) доказывается стандартным способом (см., например, [23]). Так как правые и левые части в (2.11) и (2.12) – мероморфные функции, то эти равенства сохраняются и для $k \in \mathbb{C}$. Следовательно, G_δ является мероморфной функцией из $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \times L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Из (2.11) следует, что Σ_δ является подмножеством полюсов функции G_δ . Обратное включение следует из определения G_δ . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу последнего утверждения множество Σ_δ можно определить как множество полюсов функции G_δ . Такое определение представляется более естественным, так как в силу леммы 2.3 функция G_δ не зависит от L , а операторы $\mathcal{A}_\delta(k)$ и $B_\delta(k)$ зависят.

§ 3. Существование полюсов с малой мнимой частью

Обозначим через V'_δ пространство, дуальное пространству $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$. Так как соотношение двойственности между $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$ и V'_δ совпадает со скалярным произведением в $L_2(\Omega_{\delta,L}) = L_2(S(L))$, то в соответствии с (2.4) обобщенное решение краевой задачи (2.2), (2.3) можно рассматривать и для $F \in V'_\delta$. В силу теоремы Лакса–Мильграма краевая задача (2.2), (2.3) однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$ для любых $F \in V'_\delta$. Далее, из определения пространств $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$ следует, что

$$W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L}) \subset W_2^1(\Omega_{\mu,L}) \subset L_2(S(L)) \subset V'_\mu \subset V'_\varepsilon, \quad \varepsilon > \mu \geq 0. \quad (3.1)$$

Более того, из плотности вложения функций из $C^\infty(\overline{\Omega_{\varepsilon,L}})$, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\omega_\varepsilon^{(i)}$, в $W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ и из плотности вложения функций из $C^\infty(\overline{\Omega_{0,L}})$, обращающихся в нуль в окрестности центров сжатия $x_0^{(i)}$ отверстий $\omega_\varepsilon^{(i)}$, в $W_2^1(\Omega_{0,L})$ следует, что

$$\forall w \in W_2^1(\Omega_{\mu,L}) \Rightarrow \inf_{\substack{v \in W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L}) \\ \varepsilon > \mu}} \|v - w\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\delta$ оператор, ставящий в соответствие функции F решение краевой задачи (2.2), (2.3).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Для достаточно малого $\delta_0 > 0$

а) и любого $F \in V'_0$ функция $\mathcal{L}_\delta F$ непрерывна по норме $W_2^1(\Omega_{0,L})$ при $\delta \in [0, \delta_0]$;

б) оператор $\mathcal{L}_\delta$ непрерывен по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_2^1(\Omega_{0,L}))$ при $\delta \in [0, \delta_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать схему доказательства из [12, гл. IX, теорема 6.1], где для абстрактных пространств, обладающих свойствами (3.1) и (3.2), и операторов, порождаемых полуторалинейными формами, была исследована непрерывность решений по параметру в несколько более слабых нормах.

Вначале покажем справедливость п. а). Так как при $\varepsilon > 0$ область $\Omega_{\varepsilon,L}$ является регулярно возмущенной, то функция $\mathcal{L}_\varepsilon F$ непрерывна по норме $W_2^1(\Omega_{0,L})$ при $\varepsilon \in (0, \delta_0]$ для некоторого достаточно малого $\delta_0 > 0$ (см., например, [24]). Поэтому достаточно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } W_2^1(\Omega_{0,L}). \quad (3.3)$$

Из (2.4) для решения краевой задачи (2.2), (2.3) следует равномерная оценка

$$\|u_\delta\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} \leq C \|F\|_{V'_0}. \quad (3.4)$$

Поэтому множество u_ε слабо компактно в $W_2^1(\Omega_{0,L})$ и, следовательно, из любой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность такую, что на ней

$$u_\varepsilon \rightarrow u_* \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega_{0,L}). \quad (3.5)$$

Для каждого $v_0 \in W_2^1(\Omega_{0,L})$ в силу (3.2) мы можем выбрать последовательность $v_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ такую, что

$$v_\varepsilon \rightarrow v_0 \quad \text{сильно в } W_2^1(\Omega_{0,L}).$$

Переходя к пределу в (2.4) при $\delta = \varepsilon \rightarrow 0$, получаем соотношение

$$-\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{0,L}} \frac{\partial u_*}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x_i} dx - \int_{S(L)} u_* \bar{v}_0 dx = \int_{S(L)} F \bar{v}_0 dx \quad \forall v_0 \in W_2^1(\Omega_{0,L}).$$

Следовательно, $u_* = u_0$ и имеет место слабая сходимость $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в $W_2^1(\Omega_{0,L})$. Чтобы доказать сильную сходимость, построим (это возможно в силу (3.2)) последовательность $v_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ такую, что

$$v_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } W_2^1(\Omega_{0,L}). \quad (3.6)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{0,L}} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_\delta}{\partial x_i} dx - \int_{S(L)} u_\delta \bar{u}_\delta dx = \int_{S(L)} F \bar{u}_\delta dx, \quad \delta \geq 0, \\ & -\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{0,L}} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_\varepsilon}{\partial x_i} dx - \int_{S(L)} u_0 \bar{u}_\varepsilon dx = \int_{S(L)} F \bar{u}_\varepsilon dx, \\ & -\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{0,L}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_i} dx - \int_{S(L)} u_\varepsilon \bar{u}_0 dx = \int_{S(L)} F \bar{v}_\varepsilon dx \\ & \quad + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{0,L}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{(v_\varepsilon - u_0)}}{\partial x_i} dx + \int_{S(L)} u_\varepsilon \overline{(v_\varepsilon - u_0)} dx. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо равенство

$$\begin{aligned} -\|u_\varepsilon - u_0\|_{\Omega_{0,L}}^2 &= \int_{S(L)} F(\overline{u_0 - v_\varepsilon}) dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{0,L}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial(\overline{v_\varepsilon - u_0})}{\partial x_i} dx \\ &\quad + \int_{S(L)} u_\varepsilon \overline{(v_\varepsilon - u_0)} dx, \end{aligned}$$

правая часть которого стремится к нулю согласно (3.5) и (3.6). Справедливость (3.3), а следовательно, и п. а) доказана.

Покажем справедливость п. б). Для этого из тех же соображений, что и при доказательстве п. а), достаточно показать при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходимость

$$\mathcal{L}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{L}_0 \text{ по норме } \mathcal{B}(L_2(S(L)), W_2^1(\Omega_{0,L})). \quad (3.7)$$

Если (3.7) неверно, то существуют постоянная $c > 0$, последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $F_i \in L_2(S(L))$ такие, что $\|F_i\|_{L_2(S(L))} = 1$ и

$$\|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i} - \mathcal{L}_0)F_i\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} > c. \quad (3.8)$$

Так как $\|F_i\|_{L_2(S(L))} = 1$, то можно выбрать подпоследовательность F_i , сходящуюся в $L_2(S(L))$ слабо и в V'_0 сильно:

$$F_i \rightarrow F_0 \text{ сильно в } V'_0. \quad (3.9)$$

Тогда в силу (3.4) имеем

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i} - \mathcal{L}_0)F_i\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} \\ &= \|\mathcal{L}_{\varepsilon_i}(F_i - F_0) + (\mathcal{L}_{\varepsilon_i} - \mathcal{L}_0)F_0 + \mathcal{L}_0(F_0 - F_i)\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} \\ &\leq C\|F_i - F_0\|_{V'_0} + \|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i} - \mathcal{L}_0)F_0\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю в силу (3.9), а второе – в силу (3.3), это противоречит (3.8), что доказывает (3.7). Утверждение доказано полностью.

Из определения $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ следует, что $W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L}) \subset W_2^1(\Omega_{0,L})$, $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \subset W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$. Поэтому ранее введенные операторы с областью значений в $W_2^1(\Omega_{\delta,L})$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ можно рассматривать как операторы с областью значений в $W_2^1(\Omega_{0,L})$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ соответственно. Из п. б) утверждения 3.1 и определения оператора $t_{\delta,L}$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Оператор $t_{\delta,L}$ – непрерывная функция из $\mathcal{B}(W_2^2(S(L), W_2^1(\Omega_{0,L})))$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ для достаточно малого $\delta_0 > 0$.

Из определения $A_\delta(k)$, утверждения 2.3 и следствия 3.1 получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$. Тогда для достаточно малого $\delta_0 > 0$ функция $A_\delta(k)$ непрерывна в $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0))$ по совокупности переменных $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times K$.

Из следствия 3.1 и определения (2.6) оператора $T_\delta(k)$ вытекает также

ЛЕММА 3.2. Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$. Тогда для достаточно малого $\delta_0 > 0$ функция $T_\delta(k)$ непрерывна в норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ по совокупности переменных $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times K$.

В свою очередь, с учетом леммы 3.2 и следствия 2.2, в наших обозначениях пп. б) и с) теоремы 7.2 из [12, гл. XV] принимают следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если компакт $K \in \mathbb{C}$ не содержит полюсов $(I + T_0(k))^{-1}$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что оператор-функция $(I + T_\delta(k))^{-1}$ непрерывна по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ в $[0, \delta_0] \times K$. Если k_0 является полюсом оператора $(I + T_0(k))^{-1}$, то существует полюс оператора $(I + T_\varepsilon(k))^{-1}$, сходящийся к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

И, наконец, из предложения 3.1 и леммы 3.1 вытекает следующее, основное утверждение настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. Если компакт $K \in \mathbb{C}$ отделен от Σ_0 , то существует $\delta_0 > 0$ такое, что функция $\mathcal{A}_\delta(k)$ непрерывна в $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0))$ при $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times K$. Если $k_0 \in \Sigma_0$, то существует полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, непрерывный по $\varepsilon \in (0, \delta_0]$ и сходящийся к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§ 4. Представление аналитического продолжения в окрестности полюсов

Обозначим через $S(b, a)$ открытый круг радиуса a на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в точке b . Из леммы 3.2 и утверждения 2.6 вытекает

ЛЕММА 4.1. Для любого сколь угодно малого $a > 0$ существуют $\delta_a > 0$ и b_a такие, что проектор

$$P_\delta(k) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial S(0,a)} (B_\delta(k) - \zeta)^{-1} d\zeta$$

и приведенная резольвента

$$\tilde{R}_\delta(k) = (I - P_\delta(k))B_\delta^{-1}(k)$$

непрерывны по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ при $(\delta, k) \in [0, \delta_a] \times \overline{S(k_0, b_a)}$. При любом фиксированном δ операторы $P_\delta(k)$ и $\tilde{R}_\delta(k)$ являются голоморфными функциями из $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ в $S(k_0, b_a)$.

Если $\tau_0 \in \Sigma^{(1)} \setminus \Sigma^{(2)}$ ($\tau_0 \in \Sigma^{(2)} \setminus \Sigma^{(1)}$), то под собственной функцией предельной задачи будем понимать собственную функцию предельной задачи в $\Omega^{(1)}$

(в $\Omega^{(2)}$), продолженную нулем вне $\overline{\Omega^{(1)}}$ (вне $\overline{\Omega^{(2)}}$). Если же $\tau_0 \in \Sigma^{(1)} \cap \Sigma^{(2)}$, то любую линейную комбинацию соответствующих собственных функций в $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, продолженную нулем в $\Omega^{(3)}$, будем также называть *собственной функцией*.

Обозначим через Σ_n^{in} подмножество собственных частот из $\Sigma^{\text{in}} = \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}$, суммарная кратность которых как собственных частот предельных задач в $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ равна n . Если $\tau_\delta \in \Sigma_\delta$, а g_δ – нетривиальное решение уравнения $B(\tau_\delta)g_\delta = 0$, то, очевидно, функция $\Psi_\delta = A_\delta(\tau_\delta)g_\delta$ удовлетворяет уравнению $(\Delta + \tau_\delta^2)\Psi_\delta = 0$ в Ω_δ , граничному условию $\partial\Psi_\delta/\partial\nu = 0$ на Γ_δ и в силу леммы 2.2 не равна тождественно нулю. Ясно также, что если $\tau_0 \in \Sigma^{\text{in}}$, то Ψ_0 является собственной функцией предельной задачи. Для единообразия терминологии функции Ψ_δ при любых δ также будем называть собственными функциями (хотя они и неограниченно растут на бесконечности при $\delta > 0$ и при $\tau_0 \in \Sigma^{(3)}$).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\tau_0 \in \Sigma_1^{\text{in}}$. Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $b > 0$ такие, что при $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times S(\tau_0, b)$:

а) для функций Грина и решений предельной краевой задачи (при $\delta = 0$) и возмущенной краевой задачи (1.1), (1.2) (при $\delta = \varepsilon > 0$) справедливы представления

$$\begin{aligned} G_\delta(x, y, k) &= \frac{\psi_\delta(x)\psi_\delta(y)}{\tau_\delta^2 - k^2} + \tilde{G}_\delta(x, y, k), \\ u_\delta(x, k) &= \frac{\psi_\delta(x)}{k^2 - \tau_\delta^2} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\delta(y) F dy + \tilde{u}_\delta(x, k), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\tilde{G}_\delta$ и $\tilde{u}_\delta$ при фиксированном δ являются голоморфными в $S(\tau_0, b)$ функциями из $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \times L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ соответственно;

б) полюс $\tau_\delta \in \Sigma_\delta$ непрерывен по параметру $\delta \in [0, \delta_0]$, соответствующая собственная функция ψ_δ (нормированная в $L_2(\mathbb{R}^3)$ при $\delta = 0$) и функция $\tilde{u}_\delta$ непрерывны в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ и $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \overline{S(\tau_0, b)}$ соответственно;

в) для любого $R > 0$ справедлива равномерная оценка

$$\|\tilde{u}_\delta\|_{W_2^1(\Omega_{0,R})} \leq C(R, L)\|F\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \quad (4.2)$$

где L – радиус шара, содержащего носитель функции F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для предельной задачи ($\delta = 0$) справедливость п. а) известна. Так как $\tau_0 \in \Sigma_1^{\text{in}}$, то $\lambda_0(\tau_0) = 0$ является простым собственным значением оператора $B_0(\tau_0)$ и в силу леммы 4.1 существуют положительные числа a , b и δ_0 такие, что в круге $S(0, a)$ лежит единственное (при фиксированных $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times S(\tau_0, b)$) и к тому же простое собственное значение $\lambda_\delta(k)$ оператора $B_\delta(k)$, являющееся голоморфной функцией по k при фиксированном δ и непрерывной функцией по совокупности переменных $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times S(\tau_0, b)$. Следовательно, для $B_\delta^{-1}(k)$ справедливо представление

$$B_\delta^{-1}(k) = \frac{P_\delta(k)}{\lambda_\delta(k)} + \tilde{R}_\delta(k). \quad (4.3)$$

Так как при $k = \tau_0$ решение предельной задачи может иметь полюс только первого порядка, то из определения $\mathcal{A}_0(k)$, представления (4.3), утверждения 2.5 и леммы 2.2 следует, что

$$\left. \frac{d\lambda_0(k)}{dk} \right|_{k=\tau_0} \neq 0. \quad (4.4)$$

В силу (4.4) и теоремы Руше

$$\lambda_\delta(k) = (k - \tau_\delta) \tilde{\lambda}_\delta(k), \quad \tilde{\lambda}_\delta(k) > q > 0, \quad (4.5)$$

где $\tau_\delta \in C([0, \delta_0])$. Из равенств (4.3), (4.5), лемм 4.1, 2.2, утверждения 2.5 и теоремы 2.2 вытекает справедливость п. а).

Так как в силу теоремы 3.1 и равенства (4.1) функция

$$\frac{i\pi}{\tau_0} \psi_\delta(x) \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\delta(y) F dy = \int_{\partial S(\tau_0, b)} u_\delta(x, k) dk$$

непрерывна в $W_{2, \text{loc}}(\Omega_0)$ при $\delta \in [0, \delta_0]$, то, очевидно, и ψ_δ непрерывна. Но тогда опять же в силу теоремы 3.1 и равенства (4.1) функция $\tilde{u}_\delta$ непрерывна в $W_{2, \text{loc}}(\Omega_0)$ при $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \partial S(\tau_0, b)$. Так как к тому же при фиксированном δ функция $\tilde{u}_\delta$ голоморфна в круге $S(\tau_0, b)$, то, следовательно, она непрерывна в $W_{2, \text{loc}}(\Omega_0)$ по переменным $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times S(\tau_0, b)$.

Справедливость оценки (4.2) вытекает из определения $\mathcal{A}_\delta(k)$, равенств (4.3), (4.5) и лемм 3.1 и 4.1. Теорема доказана.

Так как $\dim P_0(\tau_0) = n$ при $\tau_0 \in \Sigma_n$, то для случая $n > 1$ ключевое для доказательства теоремы 4.1 представление (4.3) не имеет места. По этой причине доказательство аналога теоремы 4.1 несколько видоизменяется. Так как в следующих параграфах асимптотики полюсов строятся лишь для случаев $n \leq 2$, то для краткости изложения ограничимся доказательством обобщения теоремы 4.1 для $n = 2$. Очевидна

ЛЕММА 4.2. *Если (2×2) -матрица $H_0(k)$ голоморфна в $S(\tau_0, b)$ и для нее имеет место равенство*

$$H_0^{-1}(k) = \frac{D_0}{k - \tau_0} + \tilde{D}_0(k),$$

где D_0 – невырожденная матрица, а $\tilde{D}_0(k)$ – голоморфная матрица, то

$$\det H_0(k) = (k - \tau_0)^2 h_0(k),$$

где голоморфная функция $h_0(k)$ не равна нулю в $S(\tau_0, b)$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $H_\delta(k)$ – (2×2) -матрица, непрерывная по $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \overline{S(\tau_0, b)}$, голоморфная в $S(\tau_0, b)$ при фиксированном $\delta \in [0, \delta_0]$, и матрица $H_0(k)$ удовлетворяет условиям леммы 4.2. Тогда

$$\det H_\delta(k) = (k - \tau_\delta^{(1)})(k - \tau_\delta^{(2)})d_\delta(k), \quad (4.6)$$

$$|||H_\delta^{-1}(k)||| \leq \frac{C}{|(k - \tau_\delta^{(1)})(k - \tau_\delta^{(2)})|}, \quad (4.7)$$

где $\tau_\delta^{(i)} \in C([0, \delta_0])$, а голоморфная функция $h_\delta(k)$ не равна нулю в $S(\tau_0, b)$.

Если к тому же $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$ при $\varepsilon > 0$, то

$$H_\varepsilon^{-1}(k) = \frac{D_\varepsilon^{(1)}}{k - \tau_\varepsilon^{(1)}} + \frac{D_\varepsilon^{(2)}}{k - \tau_\varepsilon^{(2)}} + \tilde{D}_\varepsilon(k), \quad (4.8)$$

$$\text{rank } D_\varepsilon^{(i)} = 1, \quad (4.9)$$

$$|||D_\varepsilon^{(i)}||| \leq \frac{C_1}{|\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|}, \quad (4.10)$$

где $\tilde{D}_\varepsilon(k)$ – голоморфная матрица (при фиксированном ε), для которой справедлива равномерная оценка

$$|||D_\varepsilon(k)||| \leq \frac{C_2}{|\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|}. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4.6) и непрерывность $\tau_\delta^{(i)}$ вытекают из леммы 4.2 и теоремы Руше. Пусть $h_{i,j}(k, \delta)$ – компоненты матрицы $H_\delta(k)$. Тогда

$$H_\delta^{-1}(k) = \frac{1}{\det H_\delta(k)} \tilde{H}_\delta(k), \quad \tilde{H}_\delta(k) = ((-1)^{i+j} h_{i,j}(k, \delta))_{i,j=1}^2. \quad (4.12)$$

Из (4.6) и (4.12) следует (4.7).

Пусть $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$ при $\varepsilon > 0$. Тогда (4.12) можно переписать в виде

$$H_\varepsilon^{-1}(k) = \frac{1}{d_\varepsilon(k)(\tau_\varepsilon^{(2)} - \tau_\varepsilon^{(1)})} \left(\frac{\tilde{H}_\varepsilon(k)}{k - \tau_\varepsilon^{(1)}} - \frac{\tilde{H}_\varepsilon(k)}{k - \tau_\varepsilon^{(2)}} \right).$$

Из последнего равенства следует справедливость представления (4.8), где

$$D_\varepsilon^{(i)} = \frac{\tilde{H}_\varepsilon(\tau_\varepsilon^{(i)})}{d_\varepsilon(\tau_\varepsilon^{(i)})(\tau_\varepsilon^{(2)} - \tau_\varepsilon^{(1)})}. \quad (4.13)$$

Так как $\det \tilde{H}_\varepsilon(k) = \det H_\varepsilon(k)$, то из (4.13) вытекают неравенства (4.10) и

$$\text{rank } D_\varepsilon^{(i)} < 2. \quad (4.14)$$

С другой стороны,

$$\int_{\partial S(\tau_0, b)} H_\delta^{-1}(k) dk$$

– непрерывная матрица-функция, и, следовательно, при любых достаточно малых ε

$$\text{rank}(D_\varepsilon^{(1)} + D_\varepsilon^{(2)}) = \text{rank } D_0 = 2. \quad (4.15)$$

Из (4.14) и (4.15) следует (4.9). И наконец, из (4.8) и (4.10) вытекает оценка (4.11) при $k \in \partial S(\tau_0, b)$, что вместе с голоморфностью $D_\varepsilon(k)$ влечет (4.11) и для $k \in S(\tau_0, b)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. *Если $\tau_0 \in \Sigma_n^{\text{in}}$ и $\tau_0 \neq 0$, то в некоторой окрестности точки τ_0 справедливо представление*

$$B_0^{-1}(k) = \frac{D}{k - \tau_0} + \tilde{D}(k),$$

где D – n -мерный невырожденный оператор, а $\tilde{D}(k)$ – голоморфная оператор-функция из $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция Грина предельной задачи в Ω_0 имеет в точке τ_0 полюс первого порядка с n -мерным вычетом, то справедливость утверждений доказываемой леммы вытекает из леммы 2.2 и определений функции Грина и оператора $\mathcal{A}_0(k)$.

ЛЕММА 4.5. *Если $\tau_0 \in \Sigma_2^{\text{in}}$ и $\tau_0 \neq 0$, то при k , близких к τ_0 ,*

$$\|B_\delta^{-1}(k)\| = \frac{C}{|(k - \tau_\delta^{(1)})(k - \tau_\delta^{(2)})|}, \quad \tau_0^{(1)} = \tau_0^{(2)} = \tau_0,$$

где $\tau_\delta^{(i)} \in C([0, \delta_0])$. Если к тому же $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$ при $\varepsilon > 0$, то

$$B_\varepsilon^{-1}(k) = \frac{D_\varepsilon^{(1)}}{k - \tau_\varepsilon^{(1)}} + \frac{D_\varepsilon^{(2)}}{k - \tau_\varepsilon^{(2)}} + \tilde{D}_\varepsilon(k),$$

$$\dim D_\varepsilon^{(i)} = 1,$$

$$\|D_\varepsilon^{(i)}\| \leq \frac{C_1}{|\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|}, \quad \|D_\varepsilon(k)\| \leq \frac{C_2}{|\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|},$$

где $\tilde{D}_\varepsilon(k)$ – голоморфная функция из $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ при любом фиксированном ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_\delta^{(1)}(k) = P_\delta(k)L_2(S(L))$, $M_\delta^{(2)}(k) = (I - P_\delta(k)) \times L_2(S(L))$, а $b_\delta^{(i)}(k)$ – сужения $B_\delta(k)$ на $M_\delta^{(i)}(k)$. Известно (см., например, [24]), что $b_\delta^{(i)}(k) \in \mathcal{B}(M_\delta^{(i)}(k))$ и, следовательно, задача об обращении оператора $B_\delta(k)$ сводится к обращению операторов $b_\delta^{(i)}(k)$, причем в силу леммы 4.1 оператор $b_\delta^{(2)}(k)$ обратим и равномерно ограничен по δ и k .

Из леммы 4.1 также следует, что при достаточно малых δ и k , близких к τ_0 , $\|P_\delta(k) - P_0(\tau_0)\| < q < 1$ и, следовательно,

$$U_\delta(k) = (I - (P_\delta(k) - P_0(\tau_0))^{-1/2})^2 (P_\delta(k)P_0(\tau_0) + (I - P_\delta(k))(I - P_0(\tau_0))) \quad (4.16)$$

является трансформирующей функцией, обладающей следующими свойствами [24, с. 133]: $U_\delta(k) \in \mathcal{B}(L_2(S(L)))$, $U_\delta^{-1}(k) \in \mathcal{B}(L_2(S(L)))$, проектор $\hat{P}_\delta(k)$ оператора

$$\hat{B}_\delta(k) = U_\delta^{-1}(k)B_\delta(k)U_\delta(k) \quad (4.17)$$

не зависит от δ и k и совпадает с $P_0(\tau_0)$, а задача на собственные значения для $b_\delta^{(1)}(k)$ в $M_\delta^{(1)}(k)$ эквивалентна задаче на собственные значения для сужения $\hat{b}_\delta(k)$ оператора $\hat{B}_\delta(k)$ в $M_0^{(1)}(\tau_0)$.

Так как из (4.16) и леммы 4.1 следует, что функции $U_\delta(k)$ и $U_\delta^{-1}(k)$ голоморфны при фиксированном δ и непрерывны по совокупности переменных (δ, k) , то в силу равенства (4.17) и утверждения леммы 4.4 $\hat{b}_\delta(k)$ является двумерным оператором, непрерывным по совокупности переменных (δ, k) , голоморфным при любом фиксированном δ , а $\hat{b}_\delta(k)$ удовлетворяет условию леммы 4.2. Но тогда справедливость всех утверждений доказываемой леммы вытекает из леммы 4.3 и равенства (4.17).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\tau_0 \in \Sigma_2^{\text{in}}$ и $\tau_0 \neq 0$. Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $b > 0$ такие, что при $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times S(\tau_0, b)$ справедливы следующие утверждения.

А. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \delta_0]$ существует не более двух полюсов $\tau_\varepsilon^{(i)} \in \Sigma_\varepsilon$, лежащих в $S(\tau_0, b)$, и при $\varepsilon \rightarrow 0$ они сходятся к τ_0 . Справедливо представление

$$\mathcal{A}_\delta(k) = \frac{\hat{\mathcal{A}}_\delta(k)}{(k - \tau_\delta^{(1)})(k - \tau_\delta^{(2)})}, \quad (4.18)$$

где $\tau_0^{(1)} = \tau_0^{(2)} = \tau_0$, а $\hat{\mathcal{A}}_\delta(k)$ – непрерывная по совокупности переменных (δ, k) и голоморфная при любом фиксированном δ функция из $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2, \text{loc}}^1(\Omega_0))$.

Б. Если к тому же $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$ при $\varepsilon > 0$, то для функций Грина и решений краевой задачи (1.1), (1.2) и предельной задачи справедливы представления

$$\begin{aligned} G_\delta(x, y, k) &= \sum_{i=1}^2 \beta_\delta^{(i)} \frac{\psi_\delta^{(i)}(x)\psi_\delta^{(i)}(y)}{(\tau_\delta^{(i)})^2 - k^2} + \tilde{G}_\delta(x, y, k), \\ u_\delta(x, k) &= \sum_{i=1}^2 \beta_\delta^{(i)} \frac{\psi_\delta^{(i)}(x)}{k^2 - (\tau_\delta^{(i)})^2} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\delta^{(i)}(y) F dy + \tilde{u}_\delta(x, k), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\psi_\delta^{(i)}$ – соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, G_δ и $\tilde{y}_\delta$ при фиксированном δ являются голоморфными функциями из $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \times L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ соответственно и

$$|\beta_\varepsilon^{(i)}| \leq \frac{C}{|\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|}, \quad \beta_0^{(i)} = 1,$$

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_{0,R})} \leq \frac{C(R, L)}{|\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|} \|F\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

для любого $R > 0$ и F такого, что $\text{supp } F \subset S(L)$.

В. Если к тому же при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\psi_\varepsilon^{(i)} \rightarrow \psi_0^{(i)} \quad (4.20)$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ и

$$\int_\Omega \psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)} dx = 0, \quad (4.21)$$

то

$$\beta_\varepsilon^{(i)} \rightarrow 1, \quad (4.22)$$

а функция $\tilde{y}_\delta(x, k)$ непрерывна в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ по совокупности переменных (δ, k) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждений пп. А и Б вытекает непосредственно из леммы 4.5 и теорем 2.2 и 3.1.

Покажем справедливость утверждений п. В. Так как для достаточно малого b функция

$$\int_{\partial S(\tau_0, b)} u_\delta dk$$

непрерывна в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ в силу теоремы 3.1, то из (4.19)–(4.21) вытекает (4.22). В свою очередь, из (4.19)–(4.22) и теоремы 3.1 следует непрерывность $\tilde{y}_\delta$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ по совокупности переменных $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \partial S(\tau_0, b)$. Так как к тому же согласно п. А функция $\tilde{y}_\delta$ голоморфна в $S(\tau_0, b)$ при любом фиксированном $\delta \geq 0$, то отсюда вытекает и справедливость последнего утверждения п. В.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Утверждения пп. Б и В с точки зрения функционального анализа выглядят довольно условными и тяжеловесными. Однако для строгого обоснования асимптотик собственных функций (строящихся ниже, в § 7) и решения задачи рассеяния они являются ключевыми. Более того, асимптотические построения снимут всю “условность” пп. Б и В. Действительно, утверждение п. А (а точнее, оценка (4.18)) позволяет обосновать лишь асимптотики полюсов. Но явный вид главных членов асимптотик полюсов покажет, что условия п. Б выполняются. В свою очередь, утверждения п. Б позволяют обосновывать асимптотики собственных функций, которые, как оказывается, удовлетворяют условиям п. В. Подчеркнем, что лишь утверждения п. В (вместе с главными членами асимптотик полюсов и собственных функций) делают представление (4.19) конструктивным для эффективного исследования решения задачи рассеяния в окрестности предельной собственной частоты.

§ 5. Асимптотики в случае $k_0 \in \Sigma^{(1)} \setminus \Sigma^{(2)}$

Настоящий параграф посвящен построению асимптотик в случае, когда k_0^2 является простым собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в $\Omega^{(1)}$ и не является собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в $\Omega^{(2)}$. Всюду далее предполагается, что в окрестности отверстий поверхность Γ_0 уплощена, а сами отверстия получаются из фиксированных двумерных областей сжатием с коэффициентом ε^{-1} , т.е. будем считать, что Γ_0 в окрестности отверстий $\omega_\varepsilon^{(i)}$ совпадает с плоскостями $T^{(i)}$, а $\omega_\varepsilon^{(i)} = \{x: (x - x_0^{(i)})\varepsilon^{-1} \in \omega^{(i)}\}$, где $x_0^{(i)} \in T^{(i)} \cap \Gamma_0$, а $\omega^{(i)}$ – двумерные односвязные области на плоскостях $T^{(i)}$.

Асимптотики полюса τ_ε , сходящегося к k_0 , и соответствующей собственной функции строятся методом согласования асимптотических разложений [25]–[28]. Главные члены асимптотик зависят от некоторых модельных констант и функций, определяемых ниже.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, “диск” ω лежит на плоскости $\xi_3 = 0$, $\Gamma = \{\xi: \xi = (\xi_1, \xi_2, 0), \xi \notin \bar{\omega}\}$, $\mathbb{R}_\Gamma^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Gamma}$. Далее, пусть $\tilde{X} \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}_\omega^3)$ – гармоническая вне $\bar{\omega}$ функция, удовлетворяющая граничному условию $\tilde{X} = 1$ на ω и убывающая на бесконечности. Существование такой функции известно (см., например, [29]). Она имеет асимптотику

$$\tilde{X}(\xi) = c_\omega \rho^{-1} + O(\rho^{-2})$$

при $\rho = |\xi| \rightarrow \infty$ и четна по переменной ξ_3 (и, следовательно, $\partial \tilde{X} / \partial \xi_3 = 0$ на Γ). Постоянная $c_\omega > 0$ есть емкость диска ω (см. [30], [31]). Если ω – единичный круг, то $c_\omega = 2\pi^{-1}$ [31]. Положим

$$X(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\tilde{X}(\xi), \quad \xi_3 \geq 0, \quad X(\xi) = \frac{1}{2}\tilde{X}(\xi), \quad \xi_3 \leq 0.$$

По определению функция X принадлежит $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_\Gamma^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}_\Gamma^3)$, является гармонической в $\mathbb{R}_\Gamma^3$ и удовлетворяет граничному условию $\partial X / \partial \xi_3 = 0$ на Γ .

Обозначим через $G^{(j)}(x, y, k)$ функции Грина задач Неймана для оператора Гельмгольца в $\Omega^{(j)}$ и положим

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r=R} |G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k_0)|^2 ds.$$

Положительную постоянную σ в приложениях обычно называют *поперечником рассеяния* (см., например, [20]).

Далее, пусть $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ – система координат, полученная из x ортогональным преобразованием так, что в этой системе $x_0^{(i)}$ совпадает с началом координат, а область $\Omega^{(i)}$ в окрестности $x_0^{(i)}$ совпадает с полупространством $x_3^{(i)} > 0$. Функция $X(\xi; \omega^{(i)})$ и $c(\omega^{(i)})$ будут обозначать ранее введенные функцию $X(\xi)$ и постоянную c_ω в случае $\omega = \omega^{(i)}$. Обозначим $S^0(R) = S_1(R) \cap S_2(R)$, где $S_i(R)$ – шар радиуса R с центром в $x_0^{(i)}$.

Основным содержанием параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть число k_0^2 является простым собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в $\Omega^{(1)}$ и не является собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в $\Omega^{(2)}$, ψ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{(1)})$ собственная функция (продолженная нулем вне $\overline{\Omega^{(1)}}$) и

$$\psi(x^{(1)}) \neq 0, \quad G^{(2)}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, k_0) \neq 0.$$

Тогда асимптотики полюса $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящегося при $\varepsilon \rightarrow 0$ к k_0 , и соответствующей собственной функции, нормированной в $L_2(\Omega)$, имеют вид

$$\tau_\varepsilon = k_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \tau_i, \quad (5.1)$$

$$\tau_1 = \frac{\pi \psi^2(x^{(1)}) c(\omega^{(1)})}{2k_0}, \quad \text{Im } \tau_2 = \text{Im } \tau_3 = 0, \quad (5.2)$$

$$\text{Im } \tau_4 = -\frac{1}{2} \left(\pi^2 \psi(x^{(1)}) c(\omega^{(1)}) c(\omega^{(2)}) G^{(2)}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, k_0) \right)^2 \sigma, \quad (5.3)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi(x)(1 + o(1)), \quad x \in \Omega^{(1)} \setminus S_1(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon 2k_0 \tau_1 \psi^{-1}(x_0^{(1)}) G^{(2)}(x, x_0^{(1)}, k_0)(1 + o(1)), \quad x \in \Omega^{(2)} \setminus S^0(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 2\pi k_0 \tau_1 \psi^{-1}(x_0^{(1)}) c(\omega^{(2)}) G^{(2)}(x_0^{(2)}, x_0^{(1)}, k_0) G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k_0)(1 + o(1)), \\ x \in \Omega^{(3)} \setminus S_2(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi(x_0^{(1)}) X\left(\frac{x^{(1)}}{\varepsilon}; \omega^{(1)}\right)(1 + o(1)), \quad x \in S_1(2\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon 2\psi^{-1}(x_0^{(1)}) \tau_1 k_0 G^{(2)}(x_0^{(2)}, x_0^{(1)}, k_0) X\left(\frac{x^{(2)}}{\varepsilon}; \omega^{(2)}\right)(1 + o(1)), \\ x \in S_2(2\varepsilon^{1/2}),$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$.

Заметим, что объединение областей, в которых приведены асимптотики для ψ_ε , совпадает с Ω_0 . Если пересечение пары областей непусто, то в этом пересечении справедлива любая из соответствующих двух формул.

Прежде чем перейти к построению асимптотик полюса и соответствующей собственной функции, остановимся на следствиях теорем 4.1 и 5.1 для задачи рассеяния на системе резонаторов Γ_ε , которая описывается решением краевой задачи (1.1), (1.2) при вещественных k и функции F с носителем в $\Omega^{(3)}$. Из утверждений теоремы 4.1 следует, что для вещественных k максимумы пиков решения наблюдаются в ситуации, когда

$$k = k(\varepsilon) = \text{Re } \tau_\varepsilon + O(\text{Im } \tau_\varepsilon),$$

называемой в дальнейшем *пиковым режимом*. В силу (5.1)–(5.3) он имеет вид

$$k = k(\varepsilon) = k_0 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \tau_i + \varepsilon^4(t + o(1)),$$

где t – любое действительное число. Подставляя асимптотики τ_ε и ψ_ε , предъявляемые в теореме 5.1, в формулу (4.1), получаем в силу теоремы 4.1, что решение задачи рассеяния в пиковом режиме имеет следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-2} T(t, F) \psi(x), \quad x \in \Omega^{(1)} \setminus S_1(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} T(t, F) 2k_0 \tau_1 R_0^{(1)} G^{(2)}(x, x_0^{(1)}, k_0), \quad x \in \Omega^{(2)} \setminus S^0(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim T(t, F) 2k_0 \tau_1 R_0^{(2)} G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k_0) + U(x, k_0), \quad x \in \Omega^{(3)} \setminus S_2(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-2} T(t, F) v_0^{(1)} \left(\frac{x^{(1)}}{\varepsilon} \right), \quad x \in S_1(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} T(t, F) v_1^{(2)} \left(\frac{x^{(2)}}{\varepsilon} \right), \quad x \in S_2(2\varepsilon^{1/2}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$, где $U(x, k)$ – решение предельной задачи в $\Omega^{(3)}$,

$$\begin{aligned} T(t, F) &= \frac{\tau_1 R_0^{(2)} U(x_0^{(2)}, k_0)}{\tau_4 - t}, \\ R_0^{(1)} &= \psi^{-1}(x_0^{(1)}), \quad v_0^{(1)}(\xi) = R_0^{(1)} \psi^2(x_0^{(1)}) X(\xi; \omega^{(1)}), \\ v_1^{(2)}(\xi) &= 2k_0 \tau_1 R_0^{(1)} G^{(2)}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, k_0) X(\xi; \omega^{(2)}), \\ R_0^{(2)} &= \pi R_0^{(1)} c(\omega^{(2)}) G^{(2)}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, k_0). \end{aligned} \quad (5.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В [16] было показано, что при рассеянии внешнего поля на одном резонаторе пики решения имеют внутри резонатора максимальный порядок роста, равный ε^{-1} . Как следует из (5.4), для системы резонаторов пики решения возрастают на порядок, хотя казалось бы, что добавление к одному резонатору “нерезонирующего” объема не должно было бы существенно влиять на решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Приведенные выше формулы остаются справедливыми и для классической задачи рассеяния плоской волны u^{ext} на Γ_ε . Напомним, что полные решения u^ε и u^0 задач рассеяния плоской волны на Γ_ε и $\partial\Omega^{(3)}$ – это функции

$$u^\delta = u^{\text{ext}} + u_\delta^{\text{out}}, \quad \delta \geq 0,$$

где $u_\varepsilon^{\text{out}}$ и u_0^{out} – решения уравнения Гельмгольца в Ω_ε и $\Omega^{(3)}$, удовлетворяющие условию излучения (1.2) и граничному условию $\partial u_\varepsilon^{\text{out}} / \partial \nu = -\partial u^{\text{ext}} / \partial \nu$ и

$\partial u_0^{\text{out}}/\partial \nu = -\partial u^{\text{ext}}/\partial \nu$ на Γ_ε и $\partial \Omega^{(3)}$ соответственно. С другой стороны, очевидно, что функции u^δ можно представить в виде

$$u^\delta(x, k) = u^{\text{ext}}(x, k)(1 - \chi(rL^{-1})) + u_\delta(x, k),$$

где u_ε – решение (1.1), (1.2), а u_0 – решение предельной задачи в $\Omega^{(3)}$ при

$$F = u^{\text{ext}} \Delta \chi + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial u^{\text{ext}}}{\partial x_i}.$$

Так как $\text{supp } F \subset S(L) \setminus \overline{\Omega^{(3)}}$, то для u_ε справедливы все вышеприведенные формулы ((5.4), (5.5)), где $U = u_0$. Для полной конструктивности этих формул осталось предъявить значение $u_0(x_0^{(2)}, k_0)$. Так как $x_0^{(2)} \in \partial \Omega^{(3)}$ и по определению $u_0 = u^0$ в окрестности $\partial \Omega^{(3)}$, то, очевидно, это значение равно $u^0(x_0^{(2)}, k_0)$, т.е. значению решения полной задачи рассеяния плоской волны на $\partial \Omega^{(3)}$ (на закрытом резонаторе) в граничной точке $x_0^{(2)}$ при частоте $k = k_0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{(1)}(x, k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (k_0^2 - k^2) R_i^{(1)}(D_y) G^{(1)}(x, x_0^{(1)}, k), \\ \psi_\varepsilon^{(2)}(x, k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=1}^2 \varepsilon^{i+m-1} (-1)^m (k_0^2 - k^2) R_i^{(m)}(D_y) G^{(2)}(x, x_0^{(m)}, k), \\ \psi_\varepsilon^{(3)}(x, k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} (k^2 - k_0^2) R_i^{(2)}(D_y) G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k), \end{aligned}$$

где

$$R_j^{(q)}(D_y) = P_i^{(q,j)}(D_y), \quad P_i^{(q,j)}(D_x) = \sum_{n=0}^i a_{i,n}^{(q,j)} \frac{\partial^i}{\partial t_1^n \partial t_2^{i-n}}, \quad (5.6)$$

$a_{i,n}^{(q,j)}$ – постоянные, $t_j = x_j^{(q)}$.

По определению коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{(q)}(x, k)$ аналитичны в некоторой комплексной окрестности точки k_0 и удовлетворяют однородному граничному условию Неймана на $\partial \Omega^{(q)}$ вне $x_0^{(i)}$. Очевидно, что они являются решениями уравнения Гельмгольца в $\Omega^{(q)}$, а коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{(3)}(x, k)$ при $\text{Im } k \geq 0$ удовлетворяют и условию излучения (1.2). Поэтому асимптотику собственной функции Ψ_ε вне окрестностей отверстий удобно искать в виде $\psi_\varepsilon^{(q)}(x, \tau_\varepsilon)$ в $\Omega^{(q)}$ (более точно, в $\Omega^{(1)} \setminus S_1(\varepsilon^{1/2})$, в $\Omega^{(2)} \setminus S^0(\varepsilon^{1/2})$ и в $\Omega^{(3)} \setminus S_2(\varepsilon^{1/2})$ при $q = 1, 2, 3$ соответственно). Заметим, что ниже будут строиться полные асимптотики собственной функции Ψ_ε , для которой можно будет утверждать лишь то, что она совпадает с собственной функцией ψ_ε из теорем 4.1 и 5.1 с точностью до скалярного множителя $\alpha_\varepsilon = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Очевидно, что этого вполне достаточно для определения главных членов асимптотик как собственной функции ψ_ε , так и решения задачи рассеяния.

В окрестности отверстий $\omega_\varepsilon^{(q)}$ асимптотика Ψ_ε строится в другой форме:

$$\Psi_\varepsilon(x) \equiv V_\varepsilon^{(q)}\left(\frac{x^{(q)}}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=q-1}^{\infty} \varepsilon^i v_i^{(q)}\left(\frac{x^{(q)}}{\varepsilon}\right), \quad x \in S_q(2\varepsilon^{1/2}). \quad (5.7)$$

Краевые задачи для коэффициентов ряда (5.7) получаются стандартным для метода согласования способом. В (1.1) полагаем $F = 0$, подставляем (5.1) и (5.7) вместо k и u_ε соответственно и переходим к переменным $\xi = x^{(q)}\varepsilon^{-1}$. Затем выписываем отдельно равенства при одинаковых степенях ε и переходим к формальному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получаем следующую рекуррентную систему краевых задач в переменных ξ :

$$\Delta v_j^{(q)} = -k_0^2 v_{j-2}^{(q)} - \sum_{i=1}^{j-q-1} \lambda_i v_{j-i-2}^{(q)}, \quad \xi \notin \overline{\Gamma^{(q)}}, \quad \frac{\partial v_j^{(q)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma^{(q)}, \quad (5.8)$$

где λ_i – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2 - k_0^2$, $\Gamma^{(q)} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, 0) : \xi \notin \overline{\omega^{(q)}}\}$.

Задача согласования заключается в доказательстве существования рядов $\psi_\varepsilon^{(q)}(x, \tau_\varepsilon)$ и $V_\varepsilon^{(m)}(\xi)$ таких, что коэффициенты рядов (5.7) являлись бы решениями краевых задач (5.8) и при $\xi \rightarrow \infty$, грубо говоря, переходили в асимптотики рядов $\psi_\varepsilon^{(q)}(x, \tau_\varepsilon)$ в окрестности соответствующего отверстия. Для этого, в первую очередь, необходимо уточнить асимптотики коэффициентов рядов $\psi_\varepsilon^{(q)}(x, k)$ в окрестности точек сжатия отверстий. Обозначим через $P_j(D_y)$ однородный дифференциальный полином степени j вида (5.6), где $t_i = x_i$.

ЛЕММА 5.1. Пусть Ω^{in} – область, диффеоморфная шару или полушару и совпадающая в начале координат с полупространством $x_3 > 0$, $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^{\text{in}}}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

А. Если k_0^2 не является собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в Ω^{in} , то для функции Грина $G(x, y, k)$ и ее производных при k , близких к k_0 , справедливо представление

$$P_j(D_y)G(x, 0, k) = \frac{1}{2\pi}(-1)^j P_j(D_x) \left(\frac{\cos(kr)}{r} \right) + g_j(x, k), \quad (5.9)$$

где g_j являются голоморфными функциями из $C^m(\overline{S_+(t)})$ для любого m и достаточно малого $t > 0$ и удовлетворяют граничному условию $\partial g_j / \partial x_3 = 0$ при $x_3 = 0$ в окрестности начала координат.

Б. Если k_0^2 – является простым собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в Ω^{in} и ϕ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственная функция, то для функции Грина и ее производных при k , близких к k_0 , справедливо представление

$$P_j(D_y)G(x, 0, k) = \frac{\phi(x)}{k_0^2 - k^2} P_j(D_x)\phi(0) + \frac{1}{2\pi}(-1)^j P_j(D_x) \left(\frac{\cos(kr)}{r} \right) + g_j(x, k),$$

где g_j удовлетворяют утверждениям п. А.

В. В окрестности любого вещественного k_0 для функции Грина $G(x, y, k)$ задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в Ω^{ex} и ее производных справедливо представление (5.9), где g_j являются голоморфными функциями из $C^m(\overline{S_-(t)})$ для любого m и достаточно малого $t > 0$ и удовлетворяют граничному условию $\partial g_j / \partial x_3 = 0$ при $x_3 = 0$ в окрестности начала координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость п. Б. Известно, что при k , близких к k_0 , для функции Грина справедливо представление

$$G(x, y, k) = \frac{\phi(x)\phi(y)}{k_0^2 - k^2} + \frac{\cos(k|x - y|)}{4\pi|x - y|} + g(x, y, k), \quad (5.10)$$

где функция g не имеет особенностей по переменным x и k . По условию существует $a > 0$ такое, что $S_+(a) \subset \Omega^{\text{in}}$ и $S_-(a) \cap \Omega^{\text{in}} = \emptyset$. Обозначим $x_* = (x_1, x_2, -x_3)$ и для $y \in S_+(a/2)$ представим функцию Грина в виде

$$G(x, y, k) = \frac{\phi(x)\phi(y)}{k_0^2 - k^2} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\cos(k|x - y|)}{|x - y|} + \frac{\cos(k|x - y_*|)}{|x - y_*|} \right) \chi\left(\frac{r}{a}\right) + \tilde{G}(x, y, k), \quad (5.11)$$

где (напомним) $\chi(s)$ – срезающая функция. Так как функция $\phi \in W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \cap C^\infty(\overline{Q})$ для любой области $Q \subset \Omega^{\text{in}}$, отделенной от ребра γ_{in} области Ω^{in} (в случае, если оно есть), то из (5.10) и (5.11) следует, что функция $\tilde{G}_j(x, k) = P_j(D_y)\tilde{G}(x, 0, k)$ является решением краевой задачи

$$-\Delta \tilde{G}_j = k^2 \tilde{G}_j + F_j, \quad x \in \Omega^{\text{in}}, \quad \frac{\partial \tilde{G}_j}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega^{\text{in}},$$

где $F_j(x, k)$ – голоморфная функция из $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \cap W_2^m(Q)$ для любого m . В силу утверждения 2.7 и отсутствия полюса у функции $\tilde{G}_j$ она является голоморфной функцией из $W_2^2(Q)$. Обозначим через $\chi_n(r)$ бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную единице при $r < \frac{n-2}{n}$ и нулю при $r > \frac{n-1}{n}$. Тогда функция $\hat{G}_j = \chi_n(ra^{-1})\tilde{G}_j$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{G}_j &= k^2 \hat{G}_j + \hat{F}_j + \chi F_j, \quad x \in S_+(a), \\ \frac{\partial \hat{G}_j}{\partial \nu} &= 0, \quad x_3 = 0, \quad \hat{G}_j = 0, \quad r = a, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $\hat{F}_j$ – голоморфная функция из $W_2^1(S_+(a))$. Будем считать, что a выбрано таким, что k_0^2 не является собственным значением краевой задачи (5.12). Представляя резольвенту для задачи (5.12) в виде ряда Неймана и учитывая теоремы о повышении гладкости, получаем, что $\tilde{G}_j$ – голоморфная функция из $W_2^3(S_+((n-2)a/n))$. Применяя те же рассуждения к функции $\chi_n(\frac{rn}{(n-2)a})\tilde{G}_j$ и т.д., в силу произвола в выборе n легко получить, что $\tilde{G}_j$ – голоморфная функция из $W_2^{m+2}(S_+(2t))$ для некоторого t . В силу произвола в выборе m и теорем вложения функция $\tilde{G}_j(x, k)$

является голоморфной функцией из $C^m(\overline{S(t)})$ для любого m . Из (5.11) и определения $\tilde{G}_j(x, k)$ вытекает справедливость утверждения Б.

Справедливость пп. А и В доказывается по этой же схеме с очевидными упрощениями, связанными с отсутствием полюса.

Обозначим через $T_j(\xi)$ однородные функции степени j , являющиеся либо однородными полиномами степени j , либо однородными полиномами степени $j + 2q + 1$, умноженными на ρ^{-2q-1} , для какого-нибудь целого $q > 1$ и удовлетворяющие граничному условию $\partial T_j / \partial \xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$, $\xi \neq 0$. Обозначим посредством $\mathcal{H}_j$ множество рядов вида

$$T(\xi) = \sum_{q=-\infty}^j T_q(\xi).$$

Пусть $\xi_* = (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$. Будем называть два ряда $T^{(1)}(\xi)$ и $T^{(2)}(\xi)$ *сопряженными*, если сумма $T^{(1)}(\xi) + T^{(2)}(\xi_*)$ равна полиному.

На рядах $U(x, \varepsilon)$ вида $\psi_\varepsilon^{(q)}(x, \tau_\varepsilon)$, где τ_ε – любая функция, имеющая асимптотику (5.1), определим операторы переразложения $K_m^{(t)}$ в следующей стандартной для метода согласования форме. Коэффициенты ряда $U(x, \varepsilon)$ заменяем на их асимптотики при $x^{(t)} \rightarrow 0$, функцию τ_ε – на ее асимптотику и переходим к переменной $\xi = x^{(t)} \varepsilon^{-1}$. В полученном двойном ряду оставляем только сумму членов вида $\varepsilon^j \Phi(\xi)$ при $j \leq m$, которую и обозначаем как $K_m^{(t)}(U(x, \varepsilon))$. Непосредственно из леммы 5.1 следует

ЛЕММА 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и произвольная функция τ_ε имеет асимптотику (5.1). Тогда для любого целого $N \geq 0$ справедливы равенства*

$$K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m+j)}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{i=m-1}^N \varepsilon^i V_i^{(m, m+j)}(\xi), \quad m = 1, 2, \quad j = 0, 1.$$

Ряды $V_i^{(m, m+j)} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{i-m+2}$ попарно сопряжены при любых фиксированных i и m , являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (5.8) при $\rho \rightarrow \infty$, где функции $v_i^{(m)}$ заменены на $V_i^{(m, m+j)}$ и для них справедливы представления

$$V_0^{(1,1)}(\xi) = R_0^{(1)} \psi^2(x_0^{(1)}) - \frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 (R_0^{(1)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(1)}),$$

$$V_0^{(1,2)}(\xi) = \frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 (R_0^{(1)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(1)}),$$

$$V_1^{(2,2)}(\xi) = k_0 \tau_1 \left(2R_0^{(1)} G_2(x_0^{(2)}, x_0^{(1)}, k_0) - \frac{1}{\pi} (R_0^{(2)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(2)}) \right),$$

$$V_1^{(2,3)}(\xi) = \frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 (R_0^{(2)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(2)}),$$

$$V_{s+m}^{(m, m+j)}(\xi) = \tilde{V}_{s+m}^{(m, m+j)}(\xi) - \frac{(-1)^j}{\pi} k_0 \tau_{s+2} (R_0^{(m)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(m)})$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{m+j}^1 P_0^{(1,s+1)} \psi^2(x_0^{(1)}) \\
& - \frac{(-1)^j}{\pi} k_0 \tau_1 (P_0^{(m,s+1)} \rho^{-1} + \Pi_{s+1}^{(m)}), \quad s \geq 0, \\
\Pi_t^{(m)} & = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i P_i^{(m,i+t)} (D_\xi) \rho^{-1},
\end{aligned}$$

где ряды $\tilde{V}_{s+m}^{(m,m+j)}$ не зависят от τ_{q+2} и $P_i^{(m,i+q)}$ при $q \geq s$, а δ_j^i — символ Кронекера.

Если мнимые части τ_1 и $R_0^{(2)}$ равны нулю, то

$$\operatorname{Im} \tilde{V}_2^{(2,3)} = 2k_0 \tau_1 R_0^{(2)} \operatorname{Im} G^{(3)}(x_0^{(2)}, x_0^{(2)}, k_0).$$

Пусть $\mathcal{H}_j$ — множество функций v из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_\Gamma^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}_\Gamma^3)$ таких, что сумма $v(\xi) + v(\xi_*)$ есть многочлен q -го порядка, $\partial v / \partial \xi_3 = 0$ при $\xi \in \Gamma$, а их дифференцируемые на бесконечности асимптотики принадлежат $\mathcal{H}_j$. Из определения $\mathcal{H}_j$ следует, что асимптотики функции $v \in \mathcal{H}_j$ на бесконечности сопряжены. Заметим также, что $X \in \mathcal{H}_0$. При $\Gamma = \Gamma^{(m)}$ будем обозначать $\mathcal{H}_j$ через $\mathcal{H}_j^{(m)}$.

Обозначим через $Z_j(\xi)$ однородные гармонические полиномы порядка j , удовлетворяющие условию $\partial Z / \partial \xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$. При согласовании асимптотических разложений будут использоваться следующие два утверждения, из которых доказательство первого имеется в [14], [15], а справедливость второго очевидна.

ЛЕММА 5.3. Пусть $F \in \mathcal{H}_j$ и сопряженные ряды $V^{\text{in}}, V^{\text{ex}} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{j+2}$ являются формальными асимптотическими решениями при $\rho \rightarrow \infty$ уравнения $\Delta V^{\text{in(ex)}} = F$ при $\xi_3 > 0$ ($\xi_3 < 0$). Тогда существует единственное решение краевой задачи

$$\Delta v = F, \quad \xi \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma,$$

которое принадлежит $\mathcal{H}_{j+2}$ и (одновременно) имеет на бесконечности дифференцируемые асимптотики

$$v(\xi) = V^{\text{in(ex)}}(\xi) + (-1) \sum_{q=0}^{\infty} Z_q(\xi) \rho^{-2q-1}, \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

Если $F, V^{\text{in}}, V^{\text{ex}}$ вещественные, то полиномы Z_q также вещественные.

ЛЕММА 5.4. Для любого $Z_q(\xi)$ существует $P_q(D_\xi)$ такой, что

$$Z_q(\xi) \rho^{-2q-1} = P_q(D_\xi) \rho^{-1}.$$

Если $\operatorname{Im} Z_q = 0$, то $\operatorname{Im} P_q = 0$.

Обозначим через $v_{\varepsilon,n}^{(m)}(\xi)$ частичные суммы ряда $V_\varepsilon^{(m)}(\xi)$ из (5.7).

ТЕОРЕМА 5.2. *Существуют функция τ_ε , имеющая асимптотику (5.1), и ряды $\psi_\varepsilon^{(q)}$, $V_\varepsilon^{(m)}$ такие, что $v_i^{(m)} \in \mathcal{H}_{i-m+1}^{(m)}$ являются решениями краевых задач (5.8) и для любого $N \geq 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,N}^{(m)}(\xi) &= K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m)}(x, \tau_\varepsilon)), & \xi_3 \geq 0, \\ v_{\varepsilon,N}^{(m)}(\xi) &= K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m+1)}(x, \tau_\varepsilon)), & \xi_3 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Для коэффициентов этих рядов имеют место соотношения (5.2), (5.3), (5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4.1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственная функция ψ_ε сходится к собственной функции ψ (продолженной нулем вне $\overline{\Omega^{(1)}}$). С другой стороны, $\psi_\varepsilon^{(1)}(x, k) \rightarrow R_0^{(1)}\psi(x)$, $\psi_\varepsilon^{(1+m)}(x, k) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $k \rightarrow k_0$ на формальном уровне (т.е. при почленном переходе к пределу в указанных рядах для фиксированных x , принадлежащих соответствующим областям). Поэтому $R_0^{(1)}$ естественно выбрать в виде (5.5).

Краевая задача (5.8) для $v_0^{(1)}$ имеет вид

$$\Delta v_0^{(1)} = 0, \quad \xi \notin \overline{\Gamma^{(1)}}, \quad \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma^{(1)}. \quad (5.14)$$

В силу определения X на бесконечности имеет асимптотики

$$\begin{aligned} X(\xi; \omega^{(1)}) &= 1 - \frac{1}{2}c(\omega^{(1)})\rho^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi)\rho^{-2i-1}, & \xi_3 \geq 0, \\ X(\xi; \omega^{(1)}) &= \frac{1}{2}c(\omega^{(1)})\rho^{-1} - \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi)\rho^{-2i-1}, & \xi_3 \leq 0. \end{aligned}$$

Пусть $v_0^{(1)}$ имеет вид (5.5) и τ_ε — произвольная функция, имеющая асимптотику (5.1). Тогда $v_0^{(1)} \in \mathcal{H}_0^{(1)}$ является решением (5.14) и в силу леммы 5.2 при $\rho \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} v_0^{(1)}(\xi) - V_0^{(1,m)}(\xi) &= (-1)^{m+1} \left(R_0^{(1)} \left(\frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 - \frac{1}{2} \psi^2(x_0^{(1)}) c(\omega^{(1)}) \right) \rho^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi) \rho^{-2i-1} + \Pi_0^{(1)} \right), \quad (-1)^{m+1} \leq 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Полагая в (5.15) коэффициенты при ρ^{-1} равными нулю, получаем значение (5.2) для τ_1 . Далее, приравняв к нулю в (5.15) коэффициенты при остальных степенях ρ , в силу леммы 5.4 определяем $P_i^{(1,i)}$ и получаем справедливость (5.13) при $N = 0$ (очевидно, что для $m = 2$ обе части в (5.13) равны нулю при $N = 0$).

Далее, определив $v_1^{(2)}$ и $R_0^{(2)}$ в соответствии с (5.5) и подобрав соответствующим образом дифференциальные полиномы $P_i^{(2,i)}$, добиваемся равенства (5.13) при $N = 1$ для $m = 2$.

Так как при $j = 1, 2$ в силу леммы 5.2 ряды $V_1^{(1,j)} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$ (а следовательно, и ряды $\tilde{V}_1^{(1,j)} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$) являются формальными асимптотическими решениями (5.8) и к тому же сопряжены, то в силу леммы 5.3 существует решение $v_1^{(1)} \in \mathcal{H}_1^{(1)}$ задачи (5.8) такое, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$v_1^{(1)}(\xi) - V_1^{(1,j)}(\xi) = O(\rho^{-1}), \quad (-1)^{j+1} \xi_3 \geq 0.$$

Приравнявая эту разность к нулю и полагая для определенности $P_0^{(1,1)} = 0$, находим τ_2 и $P_i^{(1,i+1)}$ и получаем (5.13) для $N = 1$ и $m = 1$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции с дополнительным требованием $P_0^{(1,s)} = 0$ на каждом шаге.

Вещественность τ_2 и τ_3 легко проследить непосредственно из приведенного алгоритма и вещественности функций $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ и их производных при $k = k_0$. С учетом известного равенства (см., например, [14], [15])

$$\lim_{x \rightarrow x_0^{(2)}} \operatorname{Im} G^{(3)}(x_0^{(2)}, x, k_0) = k_0 \sigma$$

справедливость (5.3) получаем по следующей цепочке (см. лемму 5.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tilde{V}_2^{(2,2)}(\xi) &= 0, \quad \operatorname{Im} \tilde{V}_2^{(2,3)}(\xi) = 2k_0^2 \tau_1 R_0^{(2)} \sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} v_2^{(2)}(\xi) = 2k_0^2 \tau_1 R_0^{(2)} \sigma X(\xi_*; \omega^{(2)}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} R_1^{(2)} = \operatorname{Im} P_0^{(2,1)} = -\pi k_0 R_0^{(2)} \sigma c(\omega^{(2)}) \Rightarrow \operatorname{Im} \tilde{V}_3^{(1,1)}(\xi) = 0, \\ \operatorname{Im} \tilde{V}_3^{(1,2)}(\xi) &= 2k_0^2 \pi \tau_1 R_0^{(2)} \sigma c(\omega^{(2)}) G^{(2)}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, k_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} v_3^{(1)}(\xi) = 2k_0^2 \pi \tau_1 R_0^{(2)} \sigma c(\omega^{(2)}) G^{(2)}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, k_0) X(\xi_*; \omega^{(1)}). \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при ρ^{-1} у ряда $\operatorname{Im} V_3^{(1,1)}$ и асимптотики на бесконечности функции $\operatorname{Im} v_3^{(1)}$ и учитывая значение $R_0^{(m)}$ и τ_1 , получаем (5.3). Теорема доказана.

Пусть $\psi_{\varepsilon, N}^{(i)}(x, k)$ – частичные суммы рядов $\psi_{\varepsilon}^{(i)}(x, k)$, продолженные нулем вне $\overline{\Omega^{(i)}}$, $r_m = |x^{(m)}|$,

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon, N}(x, k) &= (1 - \chi(r_1 \varepsilon^{-1/2})) \psi_{\varepsilon, N}^{(1)}(x, k) \\ &\quad + (1 - \chi(r_1 \varepsilon^{-1/2})) (1 - \chi(r_2 \varepsilon^{-1/2})) \psi_{\varepsilon, N}^{(2)}(x, k) \\ &\quad + (1 - \chi(r_2 \varepsilon^{-1/2})) \psi_{\varepsilon, N}^{(3)}(x, k) + \sum_{m=1}^2 (\chi(r_m \varepsilon^{-1/2})) v_{\varepsilon, N}^{(m)} \left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.5. Пусть функция τ_ε и ряды $\psi_\varepsilon^{(i)}$ и $V_\varepsilon^{(m)}$ удовлетворяют утверждениям теоремы 5.2. Тогда:

а) $\psi_{\varepsilon,N}(x, k)$ есть голоморфная функция из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$ и $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ для любой области $Q \subset \Omega_\varepsilon$, отделенной от γ_ε , и при $\text{Im } k \geq 0$ удовлетворяет условию излучения (1.2);

б) $\psi_{\varepsilon,N}(x, \tau_\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к ψ в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$;

в) $\psi_{\varepsilon,N}(x, k)$ является решением краевой задачи

$$(\Delta + k^2)u_\varepsilon = F, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon;$$

г) $F(x, k) = F_{\varepsilon,N}(x, k)$ – голоморфная функция из $L_2(\mathbb{R}^3)$ с носителем из $S^0(2\varepsilon^{1/2})$;

д) $\|F_{\varepsilon,N}(\circ, \tau_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leq C_N \varepsilon^{N/2-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждений а) и в) вытекает из того, что коэффициенты рядов $\psi_\varepsilon^{(i)}(x, k)$, фигурирующих в определении $\psi_{\varepsilon,N}$, голоморфны, являются решениями уравнения Гельмгольца, удовлетворяют однородным граничным условиям Неймана на $\partial\Omega^{(i)}$ и имеют требуемую гладкость (вне центров сжатия отверстий), а коэффициенты рядов (5.7) удовлетворяют однородным граничным условиям Неймана на $\Gamma^{(q)}$, обладают требуемой гладкостью и не зависят от k .

Справедливость б) является следствием “правильно” подобранного множителя $R_0^{(1)}$ (см. начало доказательства теоремы 5.2).

Действуя на $\psi_{\varepsilon,N}(x, k)$ оператором $(\Delta + k^2)$, получаем, что для $F_{\varepsilon,N}$ справедливо представление

$$F_{\varepsilon,N} = F_{\varepsilon,N}^{(1)} + F_{\varepsilon,N}^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon,N}^{(1)}(x, k) &= \sum_{m=1}^2 \chi(r_m \varepsilon^{-1/2}) (\Delta + k^2) v_{\varepsilon,N}^{(m)} \left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon} \right), \\ F_{\varepsilon,N}^{(2)}(x, k) &= - \sum_{m=1}^2 \left(\psi_{\varepsilon,N}^{(m)}(x, k) + \psi_{\varepsilon,N}^{(m+1)}(x, k) - v_{\varepsilon,N}^{(m)} \left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon} \right) \right) \Delta \chi(r_m \varepsilon^{-1/2}) \\ &\quad - 2 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi_{\varepsilon,N}^{(m)}(x, k) \right. \\ &\quad \left. + \psi_{\varepsilon,N}^{(m+1)}(x, k) - v_{\varepsilon,N}^{(m)} \left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \chi(r_m \varepsilon^{-1/2}). \end{aligned}$$

Из приведенных формул видно, что $\text{supp } F_{\varepsilon,N} \subset S^0(2\varepsilon^{1/2})$, а $\chi(r_m \varepsilon^{-1/2}) v_{\varepsilon,N}^{(m)}$ и $F_{\varepsilon,N}^{(2)}$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^3)$ и аналитичны по k в некоторой окрестности точки k_0 . В силу равенств (5.8) функция $\chi(r_m \varepsilon^{-1/2}) \Delta v_{\varepsilon,N}^{(m)}$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^3)$. Следовательно, верно г).

Более того, из (5.8) следует, что

$$(\Delta + \tau_\varepsilon^2)v_{\varepsilon,N}^{(m)} = \sum_{j=0}^N \beta_j^{(m)}(\varepsilon)v_j^{(m)}\left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon}\right), \quad |\beta_j^{(m)}(\varepsilon)| \leq C_N \varepsilon^{N-1}. \quad (5.16)$$

Учитывая, что $v_j^{(m)} \in \mathcal{H}_j^{(m)}$, а $\text{supp } F_{\varepsilon,N}^{(1)} \subset S^0(2\varepsilon^{1/2})$, из (5.16) получаем оценку

$$\|F_{\varepsilon,N}^{(1)}(\cdot, \tau_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leq C_N \varepsilon^{N/2-1}. \quad (5.17)$$

Отметим, что пока наши рассуждения никак не были связаны с согласованием рядов. Из условия согласования рядов (5.13) следует, что

$$\begin{aligned} & \psi_{\varepsilon,N}^{(m)}(x, \tau_\varepsilon) + \psi_{\varepsilon,N}^{(m+1)}(x, \tau_\varepsilon) - v_{\varepsilon,N}^{(m)}\left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon}\right) \\ &= O(r_m^{N+1} + \varepsilon^{2N+2}r_m^{-N-1} + \rho_m^{-N-2} + \varepsilon^N \rho_m^{-2}), \\ & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi_{\varepsilon,N}^{(m)}(x, \tau_\varepsilon) + \psi_{\varepsilon,N}^{(m+1)}(x, \tau_\varepsilon) - v_{\varepsilon,N}^{(m)}\left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon}\right) \right) \\ &= O(r_m^N + \varepsilon^{2N+2}r_m^{-N-2} + \varepsilon^{-1} \rho_m^{-N-3} + \varepsilon^{N-1} \rho_m^{-3}) \end{aligned}$$

при $\varepsilon^{1/2} < r_m < 2\varepsilon^{1/2}$, или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho_m < 2\varepsilon^{-1/2}$ (для определенности в этих формулах используется обозначение $\rho_m = r_m \varepsilon^{-1}$). Следовательно, в силу того, что $\text{supp } F_{\varepsilon,N}^{(2)} \subset S^0(2\varepsilon^{1/2}) \setminus S^0(\varepsilon^{1/2})$, имеем

$$\|F_{\varepsilon,N}^{(2)}(\cdot, \tau_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leq C_N \varepsilon^{N/2-1}. \quad (5.18)$$

Из оценок (5.17) и (5.18) следует д).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть τ_ε и ряды $\psi_\varepsilon^{(q)}$ и $V_\varepsilon^{(m)}$ удовлетворяют утверждениям теоремы 5.2. Тогда из утверждений леммы 5.5, теоремы 4.1 и произвола в выборе N следует, что асимптотика полюса, сходящегося к k_0 , совпадает с асимптотикой построенной функции τ_ε , а

$$\psi_{\varepsilon,N}(x, \tau_\varepsilon) = \alpha_{\varepsilon,N} \psi_\varepsilon(x) + g_{\varepsilon,N}(x), \quad (5.19)$$

где $\alpha_{\varepsilon,N} = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и

$$\|g_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(\Omega_{0,R})} \leq C(R, N) \varepsilon^{N/2-1}. \quad (5.20)$$

В свою очередь, из соотношений (5.19), (5.20) и (5.5) и голоморфности функций $G^{(2)}(x, 0, k)$ и $G^{(3)}(x, 0, k)$ в окрестности точки k_0 вытекает справедливость утверждений теоремы 5.1 и для ψ_ε . Теорема доказана.

§6. Асимптотики в случае $k_0 \in \Sigma^{(2)} \setminus \Sigma^{(1)}$

Основное утверждение настоящего параграфа имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть число k_0^2 является простым собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в $\Omega^{(2)}$ и не является собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в $\Omega^{(1)}$, ψ — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{(2)})$ собственная функция и $\psi(x_0^{(2)}) \neq 0$.

Тогда асимптотика полюса $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящегося при $\varepsilon \rightarrow 0$ к k_0 , имеет вид (5.1), где

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2k_0} \sum_{i=1}^2 \psi^2(x_0^{(i)}) c(\omega^{(i)}), \quad (6.1)$$

$$\operatorname{Im} \tau_2 = -\frac{1}{2} \left(\pi \psi(x^{(2)}) c(\omega^{(2)}) \right)^2 \sigma, \quad (6.2)$$

а асимптотика соответствующей собственной функции имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) &= \psi(x)(1 + o(1)), & x \in \Omega^{(2)} \setminus S^0(\varepsilon^{1/2}), \\ \psi_\varepsilon(x) &= \varepsilon 2k_0 \tau_1 R_0^{(1)} G^{(1)}(x, x_0^{(1)}, k_0)(1 + o(1)), & x \in \Omega^{(1)} \setminus S_1(\varepsilon^{1/2}), \\ \psi_\varepsilon(x) &= \varepsilon 2k_0 \tau_1 R_0^{(2)} G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k_0)(1 + o(1)), & x \in \Omega^{(3)} \setminus S_2(\varepsilon^{1/2}), \\ \psi_\varepsilon(x) &= \psi(x_0^{(m)}) X\left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon}; \omega^{(m)}\right)(1 + o(1)), & x \in S_m(2\varepsilon^{1/2}), \quad m = 1, 2, \end{aligned}$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$, где

$$R_0^{(m)} = \psi(x_0^{(m)}) c(\omega^{(m)}) \left(\sum_{i=1}^2 \psi^2(x_0^{(i)}) c(\omega^{(i)}) \right)^{-1}. \quad (6.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из утверждений теорем 4.1 и 6.1 следует, что в рассматриваемом случае пиковому режиму соответствуют вещественные частоты, представимые в виде

$$k = k(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2(t + o(1)),$$

где t — любое действительное число, а решение задачи рассеяния в этом режиме имеет асимптотики

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} T(t, F) \psi(x), & x \in \Omega^{(2)} \setminus S^0(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim 2k_0 \tau_1 T(t, F) R_0^{(1)} G^{(1)}(x, x_0^{(1)}, k_0), & x \in \Omega^{(1)} \setminus S_1(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim 2k_0 \tau_1 T(t, F) R_0^{(2)} G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k_0) + U(x, k_0), & x \in \Omega^{(3)} \setminus S_2(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} T(t, F) v_0^{(m)} \left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon} \right), & x \in S_m(2\varepsilon^{1/2}), \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$, где $U(x, k)$ – решение предельной задачи в $\Omega^{(3)}$,

$$\begin{aligned} T(t, F) &= \frac{\tau_1 R_0^{(2)} U(x_0^{(2)}, k_0)}{\tau_2 - t}, \\ v_0^{(m)}(\xi) &= \psi(x_0^{(m)}) X(\xi; \omega^{(m)}). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Сравнение пиков решений (5.4) и (6.4) показывает, что в рассматриваемой ситуации пик на порядок меньше, чем в случае из предыдущего параграфа.

Перейдем к построению асимптотик. Ряды $\psi_\varepsilon^{(q)}$ на этот раз строятся в виде

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{(1)}(x, k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (k^2 - k_0^2) R_i^{(1)}(D_y) G^{(1)}(x, x_0^{(1)}, k), \\ \psi_\varepsilon^{(2)}(x, k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=1}^2 \varepsilon^i (k_0^2 - k^2) R_i^{(m)}(D_y) G^{(2)}(x, x_0^{(m)}, k), \\ \psi_\varepsilon^{(3)}(x, k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (k^2 - k_0^2) R_i^{(2)}(D_y) G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k). \end{aligned}$$

В окрестности отверстий $\omega_\varepsilon^{(m)}$ асимптотики Ψ_ε строятся в виде

$$\Psi_\varepsilon(x) \equiv V_\varepsilon^{(m)}\left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i^{(m)}\left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon}\right), \quad x \in S_m(2\varepsilon^{1/2}). \quad (6.6)$$

Краевые задачи для коэффициентов ряда (6.6) имеют вид

$$\Delta v_j^{(m)} = -k_0^2 v_{j-2}^{(m)} - \sum_{i=1}^{j-2} \lambda_i v_{j-i-2}^{(m)}, \quad \xi \notin \overline{\Gamma^{(m)}}, \quad \frac{\partial v_j^{(m)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma^{(q)}, \quad (6.7)$$

где λ_i – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2 - k_0^2$.

Аналогом леммы 5.2 в рассматриваемой ситуации служит непосредственно проверяемая

ЛЕММА 6.1. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и произвольная функция τ_ε имеет асимптотику (5.1). Тогда:*

а) для любого целого $N \geq 0$ справедливы равенства

$$K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m+j)}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i V_i^{(m, m+j)}(\xi), \quad m = 1, 2, \quad j = 0, 1;$$

ряды $V_i^{(m, m+j)} \in \widetilde{\mathcal{H}}_i$ попарно сопряжены при любых фиксированных i и m , являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (6.7) при $\rho \rightarrow \infty$, где функции $v_i^{(m)}$ заменены на $V_i^{(m, m+j)}$.

б) если к тому же в (5.6) постоянные $P_0^{(1,t)} = 0$ при $t \geq 1$, то справедливы представления

$$\begin{aligned} V_0^{(m,2m-1)}(\xi) &= \frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 (R_0^{(m)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(m)}), \\ V_0^{(m,2)}(\xi) &= \psi(x_0^{(m)}) (R_0^{(1)} \psi(x_0^{(1)}) + R_0^{(2)} \psi(x_0^{(2)})) - \frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 (R_0^{(m)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(m)}), \\ V_s^{(m,m+j)}(\xi) &= \tilde{V}_s^{(m,m+j)}(\xi) + \delta_{m+j}^2 P_0^{(2,s)} \psi(x_0^{(2)}) \psi(x_0^{(m)}) \\ &\quad - \frac{(-1)^{m+j}}{\pi} k_0 \left(\tau_{s+1} (R_0^{(m)} \rho^{-1} + \Pi_0^{(m)}) \right. \\ &\quad \left. + \tau_1 (\delta_m^2 P_0^{(2,s)} \rho^{-1} + \Pi_s^{(m)}) \right), \end{aligned}$$

где $s \geq 1$, а ряды $\tilde{V}_s^{(m,m+j)}$ не зависят от τ_{q+1} и $P_i^{(m,i+q)}$ при $q \geq s$; если мнимые части τ_1 и $R_0^{(2)}$ равны нулю, то

$$\operatorname{Im} \tilde{V}_1^{(2,3)} = 2k_0^2 \tau_1 R_0^{(2)} \sigma.$$

Для частичных сумм рядов (6.6) сохраним прежние обозначения $v_{\varepsilon,N}^{(m)}$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Существуют функции τ_ε , имеющие асимптотику (5.1), (6.1), (6.2), и ряды $\psi_\varepsilon^{(q)}$ и $V_\varepsilon^{(m)}$ такие, что $v_i^{(m)} \in \mathcal{H}_i^{(m)}$ являются решениями краевых задач (6.7) и для любого $N > 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства*

$$v_{\varepsilon,N}^{(m)}(\xi) = K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m+j)}(x, \tau_\varepsilon)), \quad (-1)^j \xi_3 \geq 0, \quad m = 1, 2, \quad j = 0, 1. \quad (6.8)$$

Для коэффициентов этих рядов имеют место соотношения (6.3), (6.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требование формальной сходимости при $\tau_\varepsilon \rightarrow k_0$ ряда $\psi_\varepsilon^{(2)}(x, \tau_\varepsilon)$ к нормированной собственной функции предельной задачи влечет необходимость выполнения равенства

$$R_0^{(1)} \psi(x_0^{(1)}) + R_0^{(2)} \psi(x_0^{(2)}) = 1. \quad (6.9)$$

Выбрав $v_0^{(m)} \in \mathcal{H}_0^{(m)}$ в соответствии с (6.5), получаем, что эти функции являются решениями (6.7) и в силу леммы 6.1 и (6.9) при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_0^{(m)}(\xi) - V_0^{(m,m+j)}(\xi) &= (-1)^{m+j} \left(\left(\frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 R_0^{(m)} - \frac{1}{2} \psi(x_0^{(m)}) c(\omega^{(m)}) \right) \rho^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi) \rho^{-2i-1} + \Pi_0^{(m)} \right), \quad (-1)^j \xi_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Приравнивая в правой части (6.10) к нулю коэффициенты при ρ^{-1} , получаем еще два уравнения

$$\frac{1}{\pi} k_0 \tau_1 R_0^{(m)} = \frac{1}{2} \psi(x_0^{(m)}) c(\omega^{(m)}), \quad m = 1, 2. \quad (6.11)$$

Разрешая систему трех уравнений (6.9)–(6.11) на $R_0^{(m)}$ и τ_1 , получаем значения (6.1) и (6.3) этих величин. Приравнивая к нулю остальные коэффициенты в (6.10), определяем полиномы $P_0^{(m,i)}$ и получаем справедливость равенства (6.8) при $N = 0$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции. На N -м шаге по рядам $\tilde{V}_N^{(m,m+j)}$ определяем функции $\tilde{v}_N^{(m)} \in \mathcal{H}_N^{(m)}$, являющиеся решениями (6.7) и имеющие при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики

$$\tilde{v}_N^{(m)}(\xi) = \tilde{V}_N^{(m,m+j)}(\xi) + (-1)^j \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^{(m)}(\xi) \rho^{-2i-1}, \quad (-1)^j \xi_3 \geq 0.$$

Далее, полагаем

$$\begin{aligned} v_N^{(1)}(\xi) &= \tilde{v}_N^{(1)}(\xi) + P_0^{(2,N)} \psi(x_0^{(2)}) \psi(x_0^{(1)}) X_0(\xi_*; \omega^{(1)}), \\ v_N^{(2)}(\xi) &= \tilde{v}_N^{(2)}(\xi) + P_0^{(2,N)} \psi^2(x_0^{(2)}) X_0(\xi; \omega^{(2)}), \end{aligned}$$

где $P_0^{(2,N)}$ – пока неопределенные постоянные. Полагая $P_0^{(1,N)} = 0$ и приравнивая коэффициенты при степенях ρ^{-1} у асимптотик функций $v_N^{(m)}$ и рядов $V_N^{(m,m)}$ (или рядов $V_N^{(m,m+1)}$), получаем систему уравнений на $P_0^{(2,N)}$ и τ_{N+1} :

$$\begin{aligned} Z_0^{(1)} + \frac{1}{2} \psi(x_0^{(1)}) \psi(x_0^{(2)}) c(\omega^{(1)}) P_0^{(2,N)} &= k_0 \tau_{N+1} \pi^{-1} R_0^{(1)}, \\ Z_0^{(2)} - \frac{1}{2} \psi^2(x_0^{(2)}) c(\omega^{(2)}) P_0^{(2,N)} &= -k_0 \tau_{N+1} \pi^{-1} R_0^{(2)} - k_0 \tau_1 \pi^{-1} P_0^{(2,N)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Из системы (6.12) определяем $P_0^{(2,N)}$ и

$$\tau_{N+1} = \frac{\pi}{k_0} \left(Z_0^{(1)} \psi(x_0^{(1)}) - Z_0^{(2)} \psi(x_0^{(2)}) \right). \quad (6.13)$$

Приравнивая коэффициенты при остальных степенях ρ у асимптотик функций $v_N^{(m)}$ и рядов $V_N^{(m,m)}$, находим остальные $P_i^{(m,N+i)}$.

Главный член асимптотики мнимой части τ_2 определяется по следующей цепочке (см. лемму 6.1):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tilde{V}_1^{(m,m)} &= \operatorname{Im} V_1^{(1,2)} = 0, \\ \operatorname{Im} \tilde{V}_1^{(2,3)} &= 2R_0^{(2)} k_0^2 \tau_1 \sigma \Rightarrow \operatorname{Im} \tilde{v}_1^{(2)} = 2R_0^{(2)} k_0^2 \tau_1 \sigma X(\xi_*; \omega^{(2)}), \\ \operatorname{Im} \tilde{v}_1^{(1)} &= 0 \Rightarrow \operatorname{Im} Z_0^{(1)} = 0, \\ \operatorname{Im} Z_0^{(2)} &= R_0^{(2)} k_0^2 \tau_1 \sigma c(\omega^{(2)}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Из (6.13) и (6.14) вытекает (6.2). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Легко видеть, что для функции $\psi_{\varepsilon,N}$, определенной по рядам, построенным в теореме 6.2, остаются справедливыми все утверждения леммы 5.5, и поэтому доказательство теоремы 6.1 повторяет дословно доказательство теоремы 5.1.

§ 7. Система резонаторов в случае обоих резонансных объемов

В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда $k_0^2 \neq 0$ является простым собственным значением задач Неймана как в $\Omega^{(1)}$, так и в $\Omega^{(2)}$. Напомним, что интерес к этому случаю вызван следующим. Как это было показано в предыдущих двух параграфах, порядок малости мнимой части полюса, сходящегося к простой собственной частоте предельной задачи, не меньше, чем порядок мнимой части аналогичного полюса для одного резонатора [16]. С другой стороны, в [15] было показано, что у простого резонатора в окрестности двукратной собственной частоты предельной внутренней задачи существуют два полюса, причем мнимая часть одного из них имеет больший порядок малости, чем в случае простого собственного значения предельной внутренней задачи. Сопоставляя эти два факта, казалось бы, естественно было ожидать, что в ситуации, рассматриваемой в настоящем параграфе, должен существовать полюс, сходящийся к k_0 и имеющий порядок малости мнимой части, по крайней мере, не меньший, чем в упомянутых выше случаях (и, следовательно, влекущий увеличение порядка роста решения в соответствующем пиковом режиме). Однако, как это будет показано ниже, никакого увеличения порядка малости мнимой части полюсов не происходит, что, естественно, не влечет никаких увеличений порядков роста решений по сравнению даже со случаем из предыдущего параграфа, т.е. в рассматриваемой ситуации существуют два полюса первого порядка, сходящиеся к k_0 , но их мнимые части имеют порядок ε^2 для обоих полюсов.

Пусть $\psi^{(m)}$ – соответствующие нормированные собственные функции предельных задач в $\Omega^{(m)}$. Обозначим

$$\psi_1 = \psi^{(1)}(x_0^{(1)}), \quad \psi_2 = \psi^{(2)}(x_0^{(1)}), \quad \psi_3 = \psi^{(2)}(x_0^{(2)}).$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$\psi_1 \psi_2 \psi_3 \neq 0. \quad (7.1)$$

Непосредственно проверяется

ЛЕММА 7.1. *При выполнении условия (7.1) система уравнений на τ_1 , $R_0^{(1)}$ и $R_0^{(2)}$:*

$$(R_0^{(1)} \psi_1)^2 + (R_0^{(1)} \psi_2 + R_0^{(2)} \psi_3)^2 = 1, \quad (7.2)$$

$$R_0^{(1)} (c(\omega^{(1)}) (\psi_1^2 + \psi_2^2) - 2k_0 \tau_1 \pi^{-1}) + R_0^{(2)} c(\omega^{(1)}) \psi_2 \psi_3 = 0, \quad (7.3)$$

$$R_0^{(1)} c(\omega^{(2)}) \psi_2 \psi_3 + R_0^{(2)} (c(\omega^{(2)}) \psi_3^2 - 2k_0 \tau_1 \pi^{-1}) = 0, \quad (7.4)$$

имеет два набора вещественных решений, соответствующих $n = 1, 2$: $R_0^{(m)} = \pm R_0^{(m,n)} \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau_1^{(n)} = & \frac{\pi}{4k_0} \left(c(\omega^{(2)}) (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right. \\ & \left. - (-1)^n \left((c(\omega^{(1)}) (\psi_1^2 + \psi_2^2) + c(\omega^{(2)}) \psi_3^2)^2 - 4c(\omega^{(1)}) c(\omega^{(2)}) \psi_1^2 \psi_2^2 \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Причем $k_0\tau_1^{(1)} > k_0\tau_1^{(2)} > 0$, $R_0^{(m,1)} \neq R_0^{(m,2)}$.

Сформулируем основное утверждение параграфа.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $k_0^2 \neq 0$ является простым собственным значением задач Неймана для $-\Delta$ как в $\Omega^{(1)}$, так и в $\Omega^{(2)}$. Тогда существуют два полюса $\tau_\varepsilon^{(n)}$ первого порядка функции Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$, сходящихся к k_0 . Асимптотики этих полюсов и соответствующих им собственных функций $\psi_\varepsilon^{(n)}$ имеют вид

$$\tau_\varepsilon^{(n)} = k_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \tau_i^{(n)}, \quad (7.5)$$

$$\operatorname{Im} \tau_2^{(n)} = -\pi k_0 \sigma c(\omega^{(1)}) c(\omega^{(2)}) \tau_1^{(n)} (R_0^{(2,n)})^2 \left(\sum_{m=1}^2 (R_0^{(m,n)})^2 c(\omega^{(m)}) \right)^{-1}, \quad (7.6)$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = -R_0^{(1,n)} \psi_1 \psi^{(1)}(x) (1 + o(1)), \quad x \in \Omega^{(1)} \setminus S_1(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^2 R_0^{(j,n)} \psi_{j+1} \psi^{(2)}(x) (1 + o(1)), \quad x \in \Omega^{(2)} \setminus S^0(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \varepsilon 2k_0 \tau_1^{(n)} R_0^{(2,n)} G^{(3)}(x, x_0^{(2)}, k_0) (1 + o(1)), \quad x \in \Omega^{(3)} \setminus S_2(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = v_0^{(m,n)} \left(\frac{x^{(m)}}{\varepsilon} \right) (1 + o(1)), \quad x \in S_m(2\varepsilon^{1/2}), \quad m = 1, 2,$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$, где коэффициенты $R_0^{(m,n)}$ и $\tau_1^{(n)}$ являются решениями системы (7.2)–(7.4),

$$v_0^{(1,n)}(\xi) = -R_0^{(1,n)} \psi_1^2 X(\xi; \omega^{(1)}) + (R_0^{(1,n)} \psi_2^2 + R_0^{(2,n)} \psi_2 \psi_3) X(\xi_*; \omega^{(1)}), \quad (7.7)$$

$$v_0^{(2,n)}(\xi) = (R_0^{(1,n)} \psi_2 \psi_3 + R_0^{(2,n)} \psi_3^2) X(\xi; \omega^{(2)}). \quad (7.8)$$

Подчеркнем, что из утверждений теоремы 7.1 сразу же вытекает

СЛЕДСТВИЕ 7.1. При выполнении условия (7.1) для областей Ω_ε , геометрия которых имеет вид, описанный в начале § 5 условия пп. Б и В теоремы 4.2 также выполняются.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Подставив асимптотики $\tau_\varepsilon^{(n)}$ и $\psi_\varepsilon^{(n)}$ из теоремы 7.1 в (4.19), легко убедиться, что для решения задачи рассеяния будет иметь место ситуация, описанная во введении.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Так как дальнейшее построение асимптотик обоих полюсов $\tau_\varepsilon^{(n)}$ и соответствующих собственных функций одинаково для обоих n (с точностью до конкретных значений главных членов асимптотик), то, чтобы не перегружать текст дополнительными индексами, индекс n будем по возможности опускать.

Для рядов $\psi_\varepsilon^{(q)}$ и $V_\varepsilon^{(m)}$ сохраним определения предыдущего параграфа. Естественно, что при таком определении краевые задачи для коэффициентов ряда V_ε имеют вид (6.7). Непосредственно проверяемым аналогом лемм 5.2 и 6.1 в рассматриваемом случае является

ЛЕММА 7.2. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1 и произвольная функция τ_ε имеет асимптотику (5.1). Тогда справедливы:*

- а) утверждения п. А леммы 6.1;
- б) если к тому же в (5.6) постоянные $P_0^{(1,t)}$ равны нулю при $t \geq 1$, то справедливы представления

$$\begin{aligned} V_0^{(1,1)}(\xi) &= -R_0^{(1)}\psi_1^2 + \frac{1}{\pi}k_0\tau_1(R_0^{(1)}\rho^{-1} + \Pi_0^{(1)}), \\ V_0^{(m,2)}(\xi) &= \psi_{m+1} \sum_{q=1}^2 R_0^{(q)}\psi_{q+1} - \frac{1}{\pi}k_0\tau_1(R_0^{(m)}\rho^{-1} + \Pi_0^{(m)}), \quad m = 1, 2, \\ V_0^{(2,3)}(\xi) &= \frac{1}{\pi}k_0\tau_1(R_0^{(2)}\rho^{-1} + \Pi_0^{(2)}), \\ V_s^{(m,m+j)}(\xi) &= \tilde{V}_s^{(m,m+j)}(\xi) + \delta_{m+j}^2 P_0^{(2,s+1)}\psi_3\psi_{m+1} \\ &\quad - \frac{(-1)^{m+j}}{\pi}k_0\left(\tau_{s+1}(R_0^{(m)}\rho^{-1} + \Pi_0^{(m)})\right. \\ &\quad \left.+ \tau_1(\delta_m^2 P_0^{(2,s)}\rho^{-1} + \Pi_s^{(m)})\right), \end{aligned}$$

где $s \geq 1$, а ряды $\tilde{V}_s^{(m,m+j)}$ не зависят от τ_{q+1} и $P_i^{(m,i+q)}$ при $q \geq s$.

Если мнимые части τ_1 и $R_0^{(2)}$ равны нулю, то

$$\operatorname{Im} \tilde{V}_2^{(2,3)} = 2k_0^2\tau_1 R_0^{(2)}\sigma.$$

ТЕОРЕМА 7.2. *Существуют функция τ_ε , имеющая асимптотику (5.1), и ряды $\psi_\varepsilon^{(q)}$ и $V_\varepsilon^{(m)}$ такие, что $v_i^{(m)} \in \mathcal{H}_i^{(m)}$ являются решениями краевых задач (6.7), для любого $N \geq 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства (6.8), а коэффициенты $R_0^{(m)} = R_0^{(m,n)}$, $\tau_1 = \tau_1^{(n)}$, $\operatorname{Im} \tau_2 = \operatorname{Im} \tau_2^{(n)}$ и $v_0^{(m)} = v_0^{(m,n)}$ удовлетворяют утверждениям леммы 7.1 и соотношениям (7.6)–(7.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гипотетическое (на данный момент) условие сходимости собственных функций возмущенной задачи к нормированным (для определенности) в $L_2(\Omega)$ линейным комбинациям собственных функций $\psi^{(m)}$ предельных задач в $\Omega^{(m)}$ и переход к формальному пределу в рядах $\psi_\varepsilon^{(q)}(x, \tau_\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводят к необходимости равенства (7.2).

Из условия согласования неубывающих членов асимптотик на бесконечностях функций $v_0^{(m)}$ и рядов $V_0^{(m,m+j)}$ (см. лемму 7.2) определяем эти функции в соответствии с (7.7) и (7.8). Далее, приравнявая коэффициенты при ρ^{-1} у асимптотик функций $v_0^{(m)}$ и рядов $V_0^{(m,m+j)}$, получаем уравнения (7.3) и (7.4). Разрешая

согласно лемме 7.1 систему уравнений (7.2)–(7.4), определяем $R_0^{(m)}$, τ_1 . Приравняв коэффициенты асимптотик функций $v_0^{(m)}$ и рядов $V_0^{(m,m+j)}$ при остальных степенях ρ , находим полиномы $P_i^{(m,i)}$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции (см. доказательство теоремы 6.2). Точно так же, как в упомянутой теореме, получаем систему уравнений на $\text{Im } \tau_2$ и $\text{Im } P_0^{(2,1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_2\psi_3c(\omega^{(1)})\text{Im } P_0^{(2,1)} &= k_0\text{Im } \tau_2\pi^{-1}R_0^{(1)}, \\ k_0^2\tau_1\sigma c(\omega^{(2)}) - \frac{1}{2}\psi_3^2c(\omega^{(2)})\text{Im } P_0^{(2,1)} &= -k_0\text{Im } \tau_2\pi^{-1}R_0^{(2)} - k_0\tau_1\pi^{-1}\text{Im } P_0^{(2,1)}. \end{aligned}$$

Разрешая эту систему с учетом равенств (7.3) и (7.4), находим значения (7.6) для $\text{Im } \tau_2$. Теорема доказана.

Обозначим

$$\psi(x) = -\psi_1^{-1}R_0^{(1)}\psi^{(1)}(x) + \sum_{m=1}^2 \psi_{m+1}^{-1}R_0^{(m)}\psi^{(2)}(x), \quad (7.9)$$

где функции $\psi^{(m)}$ считаются продолженными нулем вне $\overline{\Omega^{(m)}}$. С учетом последнего обозначения из теоремы 7.2 следует

ЛЕММА 7.3. Пусть функция τ_ε и ряды $\psi_\varepsilon^{(i)}$ и $V_\varepsilon^{(m)}$ удовлетворяют утверждениям теоремы 7.2. Тогда остаются справедливыми все утверждения леммы 5.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Из утверждений лемм 7.1, 7.3 и п. А теоремы 4.2 и произвола в выборе N следует, что асимптотики *двух* полюсов, сходящихся к k_0 , имеют вид (7.5) и совпадают с асимптотиками двух функций τ_ε , удовлетворяющих утверждениям теоремы 7.2. Более того, из леммы 7.1 вытекает выполнение условия п. Б теоремы 4.2, который, в свою очередь, обосновывает построенные асимптотики соответствующих собственных функций. Теорема доказана.

Приложение А

Обозначим через $\widetilde{W}_2^1(Q)$ множество обобщенных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со своими обобщенными производными первого порядка, а через $W_2^1(Q)$ – замыкание $C^\infty(\overline{Q})$ по норме $W_2^1(Q)$. Напомним, что в случае наличия разреза у области Q он понимается как двухсторонняя поверхность. Пусть ω – единичный открытый круг на плоскости $x_3 = 0$, $\mathbb{R}_\omega^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}$. Ясно, что для доказательства эквивалентности определений пространств $W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ и $\widetilde{W}_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ достаточно показать справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА А.1. *Пространство $\widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$ совпадает с $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3) \subset \widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$. Покажем обратное включение. Пусть $V \in \widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$, $V_\pm$ – сужение V на $\mathbb{R}_\pm^3 = \{x: \pm x_3 > 0\}$, $v_\pm$ – сужение $V_\pm$ на плоскость $x_3 = 0$ и $v = v_+ - v_-$. Обозначим, через $H_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ пространство Соболева–Слободешкого, определяемое как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|u\|_{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|) |\mathcal{F}u|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье, а через $\mathring{H}_{1/2}(\omega)$ – подпространство функций из $H_{1/2}(\mathbb{R}^2)$ с носителями из $\bar{\omega}$. Так как $V_\pm \in \widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}_\pm^3)$, то $v_\pm \in H_{1/2}(\mathbb{R}^2)$ (см., например, [29]) и, следовательно, $v \in \mathring{H}_{1/2}(\omega)$. Известно [29], что пространство финитных функций $C_0^\infty(\omega)$ плотно в $\mathring{H}_{1/2}(\omega)$. Пусть $\{v_j\}$ – последовательность функций из $C_0^\infty(\omega)$, сходящихся при $j \rightarrow \infty$ к v по норме $H_{1/2}(\omega)$, а V_j – потенциалы двойного слоя для оператора $(\Delta - 1)$ с плотностями v_j . По определению $V_j \in W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$, а скачок функций V_j на плоскости $x_3 = 0$ равен v_j (при соответствующем выборе множителя в определении потенциала двойного слоя). Так как $v_j \rightarrow v$ в $H_{1/2}(\omega)$, то $V_j \rightarrow V_0$ по норме $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$ (и, следовательно, $V_0 \in W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$) и в силу ограниченности оператора сужения из $W_2^1(\mathbb{R}_\pm^3)$ на $H_{1/2}(\mathbb{R}^2)$ скачок функции V_0 на плоскости $x_3 = 0$ равен v . Следовательно, функция $\tilde{V} = V - V_0$ принадлежит $\widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$ и не имеет скачка на плоскости $x_3 = 0$. Отсюда вытекает, что $\tilde{V} \in W_2^1(\mathbb{R}^3)$ и поэтому может быть приближена функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Из определения $\tilde{V}$ и принадлежности V_0 пространству $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$ следует включение $V \in W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$. Лемма доказана.

Очевидно также, что для доказательства плотности в $W_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ подмножества функций из $C^\infty(\overline{\Omega_{\varepsilon,L}})$, обращающихся в нуль в окрестности ребер $\partial\omega_\varepsilon^{(i)}$, достаточно показать справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА А.2. *Подмножество функций из $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$, обращающихся в нуль в окрестности ребра $\partial\omega$, плотно в $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что функция $v \in W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$, которую мы хотим аппроксимировать функциями из $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$, обращающимися в нуль в окрестности ребра $\partial\omega$, принадлежит $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_\omega^3})$, а ее носитель ограничен. Обозначим через $\tilde{\chi}_\mu(t)$ функцию, равную $1 - (\ln \mu)^{-1} \ln t$ при $t \geq \mu > 0$ и равную нулю при $t < \mu$. Легко непосредственно проверить, что функция $v_\mu(x) = \tilde{\chi}_\mu(\sqrt{r^2 + 1 - 2r \sin \theta})v(x)$, где (r, ϕ, θ) – сферические координаты x , принадлежит $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$ при достаточно малых μ , тождественно равна нулю в окрестности $\partial\omega$ и при $\mu \rightarrow 0$ имеет место сходимости $v_\mu \rightarrow v$ в $W_2^1(\mathbb{R}_\omega^3)$.

Приложение Б

Так как функция Грина предельной задачи имеет в нуле полюс второго порядка по переменной k , то в силу леммы 2.2 получаем следующий аналог леммы 4.4.

ЛЕММА Б.1. *В некоторой окрестности нуля справедливо представление*

$$B_0^{-1}(k) = \frac{D(k)}{k^2}, \quad (\text{Б.1})$$

где $D(k)$ – голоморфная оператор-функция в $L_2(S(L))$ и $D(0)$ – двумерный невырожденный оператор.

Для голоморфных (2×2) -матриц, имеющих представление (Б.1), легко доказываются следующие аналоги лемм 4.2, 4.3.

ЛЕММА Б.2. *Если (2×2) -матрица $H_0(k)$ голоморфна в окрестности нуля и для нее имеет место равенство (Б.1), где $D(0)$ – невырожденная матрица, а $D(k)$ – голоморфная матрица, то*

$$\det B_0(k) = k^4 d_0(k), \quad d_0(0) \neq 0.$$

ЛЕММА Б.3. *Пусть $B_\delta(k)$ – (2×2) -матрица, непрерывная по $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \overline{S(\tau_0, b)}$, голоморфная в $S(\tau_0, b)$ при фиксированном $\delta \in [0, \delta_0]$, и матрица $B_0(k)$ удовлетворяет условиям леммы Б.2. Тогда*

$$\det B_\delta(k) = \prod_{i=1}^4 (k - \tau_\delta^{(i)}) d_\delta(k), \quad |d_\delta(k)| > a > 0,$$

$$|||B_\delta(k)^{-1}||| \leq C \prod_{i=1}^4 \frac{1}{|(k - \tau_\delta^{(i)})|},$$

где $\tau_\delta^{(i)} \in C([0, \delta_0])$, $\tau_0^{(i)} = 0$. Если к тому же $\tau_\varepsilon^{(i)} \neq \tau_\varepsilon^{(j)}$ при $\varepsilon > 0$ и $j \neq i$, то

$$B_\varepsilon^{-1}(k) = \sum_{i=1}^4 \frac{D_\varepsilon^{(i)}}{k - \tau_\varepsilon^{(i)}} + \tilde{D}_\varepsilon(k), \quad \text{rank } D_\varepsilon^{(i)} = 1,$$

$$|||D_\varepsilon^{(i)}||| \leq C_1 \prod_{\substack{j \geq 1 \\ j \neq i}} \frac{1}{|\tau_\varepsilon^{(i)} - \tau_\varepsilon^{(j)}|}, \quad |||D_\varepsilon(k)||| \leq C_2 \prod_{\substack{j \geq 1 \\ j \neq i}} \frac{1}{|\tau_\varepsilon^{(i)} - \tau_\varepsilon^{(j)}|},$$

$\tilde{D}_\varepsilon(k)$ – голоморфная матрица при фиксированном ε .

Повторяя доказательство леммы 4.5 (с использованием лемм Б.1–Б.3 вместо лемм 4.4, 4.2 и 4.3 соответственно), получаем нужный аналог леммы 4.5.

ЛЕММА Б.4. Для оператора $B_\delta(k)$ при k , близких к нулю, справедлива равномерная оценка

$$\|B_\delta^{-1}(k)\| = C \prod_{i=1}^4 \frac{1}{|k - \tau_\delta^{(i)}|},$$

где $\tau_\delta^{(i)} \in C([0, \delta_0])$, $\tau_0^{(i)} = 0$. Если к тому же $\tau_\varepsilon^{(i)} \neq \tau_\varepsilon^{(j)}$ при $\varepsilon > 0$ и $i \neq j$, то

$$B_\varepsilon^{-1}(k) = \sum_{i=1}^4 \frac{D_\varepsilon^{(i)}}{k - \tau_\varepsilon^{(i)}} + \tilde{D}_\varepsilon(k), \quad \dim D_\varepsilon^{(i)} = 1,$$

$$\|D_\varepsilon^{(i)}\| \leq C \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \frac{1}{|\tau_\varepsilon^{(i)} - \tau_\varepsilon^{(j)}|}, \quad \|D_\varepsilon(k)\| \leq C_2 \prod_{\substack{j \geq 1 \\ j \neq i}} \frac{1}{|\tau_\varepsilon^{(i)} - \tau_\varepsilon^{(j)}|},$$

где $\tilde{D}_\varepsilon(k)$ – голоморфная функция из $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ при любом фиксированном ε .

Далее, из определения функции Грина вытекает

ЛЕММА Б.5. Справедливо равенство

$$G_\delta(x, y, k) = \overline{G_\delta(x, y, -\bar{k})}.$$

Леммы Б.4, Б.5 и теоремы 2.2, 3.1 позволяют доказать следующий аналог теоремы 4.2.

ТЕОРЕМА Б.1. Существуют $\delta_0 > 0$ и $b > 0$ такие, что при $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times S(0, b)$ справедливы следующие утверждения.

А. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \delta_0]$ существует не более четырех полюсов $\tau_\varepsilon^{(i)} \in \Sigma_\varepsilon$, лежащих в $S(\tau_0, b)$, они связаны равенствами $\tau_\varepsilon^{(3)} = -\bar{\tau}_\varepsilon^{(1)}$ и $\tau_\varepsilon^{(4)} = -\bar{\tau}_\varepsilon^{(2)}$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к нулю. Справедливо представление

$$\mathcal{A}_\delta(k) = \frac{\hat{\mathcal{A}}_\delta(k)}{\prod_{i=1}^4 (k - \tau_\delta^{(i)})},$$

где $\tau_0^{(i)} = 0$, а $\hat{\mathcal{A}}_\delta(k)$ – непрерывная по совокупности переменных (δ, k) и голоморфная при любом фиксированном $\delta \geq 0$ функция из $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2, \text{loc}}^1(\Omega_0))$.

Б. Если к тому же $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$ и $\operatorname{Re} \tau_\varepsilon^{(1)} > 0$, $\operatorname{Re} \tau_\varepsilon^{(2)} > 0$ при $\varepsilon > 0$, то для функций Грина и решений краевой задачи (1.1), (1.2) и предельной задачи справедливы представления

$$G_0(x, y, k) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\psi_0^{(i)}(x) \psi_0^{(i)}(y)}{k^2} + \tilde{G}_0(x, y, k),$$

$$G_\varepsilon(x, y, k) = \sum_{i=1}^2 \beta_\varepsilon^{(i)} \left(\frac{\psi_\varepsilon^{(i)}(x) \psi_\varepsilon^{(i)}(y)}{\tau_\varepsilon^{(i)} - k} - \frac{\bar{\psi}_\varepsilon^{(i)}(x) \bar{\psi}_\varepsilon^{(i)}(y)}{\bar{\tau}_\varepsilon^{(i)} + k} \right) + \tilde{G}_\varepsilon(x, y, k),$$

$$\begin{aligned}
u_0(x, k) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\psi_0^{(i)}(x)}{k^2} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0^{(i)}(y) F dy + \tilde{u}_0(x, k), \\
u_\varepsilon(x, k) &= - \sum_{i=1}^2 \beta_\varepsilon^{(i)} \left(\frac{\psi_\varepsilon^{(i)}(x)}{\tau_\varepsilon^{(i)} - k} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\varepsilon^{(i)}(y) F(y) dy \right. \\
&\quad \left. - \frac{\overline{\psi}_\varepsilon^{(i)}(x)}{\overline{\tau}_\varepsilon^{(i)} + k} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}_\varepsilon^{(i)}(y) F(y) dy \right) + \tilde{u}_\varepsilon(x, k),
\end{aligned}$$

где $\psi_\delta^{(i)}$ – соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, G_δ и $\tilde{u}_\delta$ при фиксированном δ являются голоморфными функциями из $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \times L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ соответственно и

$$|\beta_\varepsilon^{(i)}| \leq \frac{C}{\operatorname{Re} \tau_\varepsilon^{(i)} |\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|}, \quad \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_{0,R})} \leq \frac{C(R, L)}{|\tau_\varepsilon^{(1)} - \tau_\varepsilon^{(2)}|} \sum_{i=1}^2 \frac{\|F\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}}{\operatorname{Re} \tau_\varepsilon^{(i)}}$$

для любого $R > 0$ и F такого, что $\operatorname{supp} F \subset S(L)$.

В. Если к тому же при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\psi_\varepsilon^{(i)} \rightarrow \psi_0^{(i)} \quad (\text{Б.2})$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ и

$$\int_{\Omega} \psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)} dx = 0, \quad (\text{Б.3})$$

то

$$\beta_\varepsilon^{(i)} = \frac{1}{2 \operatorname{Re} \tau_\varepsilon^{(i)}} (1 + o(1)), \quad (\text{Б.4})$$

а функция $\tilde{u}_\delta(x, k)$ непрерывна в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ по совокупности переменных (δ, k) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость пп. А и Б вытекает непосредственно из лемм Б.4, Б.5, 3.1 и теоремы 2.2. Так как функция

$$\int_{\partial S(0,b)} k u_\delta dk$$

непрерывна в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ в силу теоремы 3.1, то из (Б.2), (Б.3) вытекает (Б.4). Из (Б.2)–(Б.4), п. А и теоремы 3.1 следует непрерывность в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ по совокупности переменных $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \partial S(0, b)$ голоморфной в $S(0, b)$ функции $\tilde{u}_\delta$. Отсюда вытекает справедливость и утверждения п. В.

Так же, как и в случае теоремы 4.2, п. А позволяет обосновывать асимптотики полюсов и снимать условность п. Б, который в свою очередь обосновывает асимптотики собственных функций и снимает условность п. В. С другой стороны, из явного вида асимптотик, построенных в [32], вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Условия пп. Б и В теоремы Б.1 выполняются.

Список литературы

1. *Lord Rayleigh* The theory of Helmholtz resonator // Proc. Roy. Soc. London. A. 1916. V. 92. P. 265–275.
2. *Miles J. W.* Scattering by a spherical cap // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 50. Pt. 2. P. 892–903.
3. *Hubert-Palencia J., Sanchez-Palencia E.* Coupling of Continious Systems. Asymptotic Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
4. *Арсеньев А. А.* Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца // ЖВМиМФ. 1971. Т. 12. С. 112–138.
5. *Beale J. T.* Scattering frequencies of resonators // Comm. Pure and Applied Math. 1973. V. 26. P. 549–564.
6. *Арсеньев А. А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // ЖВМиМФ. 1976. Т. 16. С. 718–724.
7. *Петрас С. В.* О расщеплении серий резонансов на “нефизическом” листе // Функцион. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 2. С. 89–90.
8. *Петрас С. В.* О расщеплении серий резонансов на “нефизическом листе” // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 155–169.
9. *Brown R. M., Hislop P. D., Martinez A.* Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions. Research report 92-06. University of Kentucky, 1992.
10. *Hislop P. D., Martinez A.* Scattering resonances of Helmholtz resonator // Indiana Univ. Math. J. 1991. V. 40. P. 767–788.
11. *Вайнберг Б. Р.* Об аналитических свойствах резольвенты для одного класса пучков операторов // Матем. сб. 1968. Т. 77. С. 259–296.
12. *Санчес-Паленсия Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
13. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
14. *Гадильшин Р. Р.* Существование и асимптотики полюсов с малой мнимой частью для резонатора Гельмгольца // УМН. 1997. Т. 52. Вып. 1 (313). С. 3–77.
15. *Гадильшин Р. Р.* Расщепление полюсов резонатора Гельмгольца // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 44–74.
16. *Гадильшин Р. Р.* Метод сращивания асимптотических разложений в задаче об акустическом резонаторе Гельмгольца // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. С. 412–418.
17. *Гадильшин Р. Р.* О квазистационарном режиме резонатора Гельмгольца // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. № 5. С. 54–61.
18. *Гадильшин Р. Р.* О влиянии выбора места отверстия и его формы на свойства акустического резонатора Гельмгольца // ТМФ. 1992. Т. 93. № 1. С. 107–118.
19. *Гадильшин Р. Р.* О полюсах акустического резонатора // Функцион. анализ и его прилож. 1993. № 5. С. 3–16.
20. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
21. *Ладженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
22. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
23. *Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.
24. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
25. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
26. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1986.

27. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
28. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981.
29. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
30. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
31. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
32. *Гадильшин Р. Р.* О системе акустических резонаторов в квазистационарном режиме // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. №3. С. 104–112.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа
E-mail: grr@imat.rb.ru

Поступило в редакцию
17.IX.1998