Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, А. С. Слущкий, Одномерные уравнения деформации тонких слабо-искривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 3, 97–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:54:09

УДК 517.946

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий

**Одномерные уравнения деформации
тонких слабоискривленных стержней.
Асимптотический анализ и обоснование**

Строится асимптотика решения пространственной задачи теории упругости в тонком теле (стержне) с плавно изменяющимся сечением. Допускается произвольная анизотропия и неоднородность материала. Торцы стержня, находящегося под действием объемных сил, жестко зашпелены, а к боковой поверхности приложены усилия. Малым параметром h служит отношение длины стержня к максимальному его диаметру. Указаны требования к дифференциальным свойствам и структуре внешних нагрузок, при которых решение одномерных уравнений, появляющихся в результате асимптотического анализа, доставляет приемлемое приближение к трехмерным полям смещений и напряжений. Оценка погрешности базируется на специальном неравенстве Корна, асимптотическая точность которого достигается распределением весовых множителей и степеней h в L_2 -нормах смещений и их производных.

Библиография: 39 наименований.

§ 1. Постановка задачи и предварительное описание результатов

1. Задача теории упругости. Пусть ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым замкнутым контуром $\partial\omega$, и $\varkappa$ – гладко зависящий от параметра $z \in [-1, 1]$ диффеоморфизм: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Положим $\omega(z) = \varkappa_z \omega$ и определим тонкий криволинейный стержень формулой

$$\Omega_h = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3: |z| < 1, \eta = h^{-1}y \in \omega(z)\}. \quad (1.1)$$

Здесь $h > 0$ – малый параметр, $y = (y_1, y_2)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ – “медленные” и “быстрые” переменные в сечениях стержня (поскольку длина стержня равна двум, величины y_i, η_i и h безразмерные).

Рассмотрим линейную задачу теории упругости, допуская произвольную анизотропию и неоднородность материала. Воспользуемся матричной записью уравнений; при этом вектор смещений $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ интерпретируем как столбец (t – знак транспонирования). Введем еще столбец деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \alpha^{-1}\varepsilon_{32}, \alpha^{-1}\varepsilon_{31}, \alpha^{-1}\varepsilon_{13})^t \quad (1.2)$$

и аналогичный столбец напряжений $\sigma(u)$, записывая закон Гука в виде $\sigma(u) = A\varepsilon(u)$. Здесь $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ – тензор деформаций с декартовыми компонентами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (1.3)$$

A – симметрическая положительно определенная матрица-функция, составленная из упругих модулей материала и гладко зависящая от переменных η и z . Множитель $\alpha^{-1} = 2^{1/2}$ введен в (1.2) для того, чтобы совпали естественные нормы тензора и столбца деформаций (напряжений). Согласно (1.2) и (1.3)

$$\varepsilon(u) = D(\nabla_x)^t u, \quad (1.4)$$

где $\nabla_x = \text{grad}$ и D – (3×6) -матрица дифференциальных операторов,

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 & \alpha\xi_2 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 & \alpha\xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения теории упругости принимают вид

$$D(-\nabla_x)A(h^{-1}y, z)D(\nabla_x)^t u(h, x) = f(h, x), \quad x \in \Omega_h, \quad (1.6)$$

$$D(n(h, x))A(h^{-1}y, z)D(\nabla_x)^t u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \Gamma_h, \quad (1.7)$$

$$u(h, x) = 0, \quad x \in \omega_h(\pm 1). \quad (1.8)$$

Они означают, что на стержень действуют объемные силы $f = (f_1, f_2, f_3)^t$, к боковой поверхности $\Gamma_h = \{x \in \partial\Omega_h : |z| < 1\}$ приложены усилия $g = (g_1, g_2, g_3)^t$, а торцы стержня $\omega_h(\pm 1) = \{x : \eta \in \omega(\pm 1), z = \pm 1\}$ жестко зашпемлены. В (1.7) $n = (n_1, n_2, n_3)^t$ – единичный вектор внешней нормали к S_h . Дифференциальные операторы, фигурирующие в (1.6) и (1.7), обозначаем $L(h, x, \nabla_x)$ и $B(h, x, \nabla_x)$.

Как обычно, под обобщенным решением задачи (1.6)–(1.8) в пространстве Соболева $H^1(\Omega_h)^3$ (тройка указывает количество компонент вектор-функций) понимается элемент u подпространства $\mathring{H}^1(\Omega_h)^3 = \{u \in H^1(\Omega_h)^3 : u = 0 \text{ на } \omega_h(\pm 1)\}$, удовлетворяющий при любой пробной функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$ интегральному тождеству

$$E(u, v; \Omega_h) = (f, v)_{\Omega_h} + (g, v)_{\Gamma_h}. \quad (1.9)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{\Xi}$ – скалярное произведение в $L_2(\Xi)$, $2^{-1}E(u, u; \Omega_h)$ – функционал упругой энергии, запасенной телом Ω_h ,

$$E(u, v; \Xi) = (AD(\nabla_x)^t u, D(\nabla_x)v)_{\Xi}. \quad (1.10)$$

Отметим, что тождество (1.9) возникает при учете формулы Грина

$$(Lu, v)_{\Omega_h} + (Bu, v)_{\Gamma_h} = E(u, v; \Omega_h), \quad (1.11)$$

справедливой, например, для $u \in H^2(\Omega_h)^3$ и $v \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$.

Следующее утверждение о разрешимости задачи (1.6)–(1.8) (или (1.9)) известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если $f \in L_2(\Omega_h)^3$, $g \in L_2(\Gamma_h)^3$, то существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$ задачи (1.6)–(1.8) и справедлива оценка*

$$\|u; H^1(\Omega_h)\| \leq c_h (\|f; L_2(\Omega_h)\| + \|g; L_2(\Gamma_h)\|). \quad (1.12)$$

Подчеркнем, что постоянная c_h существенно зависит от малого параметра h (но не от f, g и u). Выявление и спецификация этой зависимости составляет предмет § 3 статьи, где отыскивается правильная запись весового неравенства Корна, учитывающая геометрию тонкого тела Ω_h . Однако основная цель работы – построение и оправдание асимптотики решения задачи (1.6)–(1.8) при $h \rightarrow +0$.

2. Описание результатов. Теория тонких стержней, являющаяся одной из важных прикладных дисциплин, имеет давнюю историю. Прежде всего нужно упомянуть так называемые технические теории изгиба стержней. В них упрощение трехмерных уравнений теории упругости и формулировки одномерных моделей основываются на ряде физических допущений (гипотез), а цели и методика исследований не подразумевают какого-либо математического обоснования. Основы современной теории стержней заложены А. Клебшем [1]. Дальнейшее развитие теории стержней получила в трудах [2], [3] и др. К настоящему времени технической теории изгиба стержней изотропных и анизотропных, прямых и искривленных посвящено огромное количество работ (упомянем монографии [4]–[8], статьи [9], [10]). Технические теории многие десятилетия используются в инженерных расчетах, но вопросы об условиях их применимости, обеспечиваемой точности приближения и, вообще, об адекватности одномерных моделей реальным объектам остаются открытыми до сих пор.

Явное вхождение малого параметра в задачи о стержнях, пластинах и оболочках делает их привлекательными для математиков, и к настоящему времени разработано множество подходов к асимптотическому анализу задач теории упругости для тонких тел, в частности для стержней. Во-первых, имеется ряд публикаций, посвященных формальным асимптотическим конструкциям (см. [11]–[14] и др.); в них предположение о справедливости того или иного анзаца, т.е. асимптотической структуры решения, в целом играет ту же роль, что и упоминавшиеся физические гипотезы, а существо математического исследования состоит в описании процедуры построения элементов анзаца и проверке разрешимости (результатирующей) задачи на подмногообразии меньшей размерности, к которому стягивается тонкий объект (ср. с § 2 данной статьи). Во-вторых, саму идею редукции размерности объясняет метод доказательства теорем о сходимости в подходящем смысле решений трехмерных задач к решениям результирующих задач (см. [15], [16] для пластин и [17]–[22] для стержней; отметим, что во всех этих публикациях речь идет об изотропных тонких телах). Однако более точная информация о поведении решения при $h \rightarrow +0$ (в том числе и скорость сходимости) зачастую остается за рамками такого подхода, и потому сформулированные выше вопросы, важные для практических целей, требуют продолжения исследований. В-третьих, разработана методика построения полных асимптотических разложений, включающая

изучение явления пограничного слоя около торцов стрижней (см. [23]–[26] и др., а также [27, гл. 15, 16]). Именно, при условии бесконечной дифференцируемости данных задачи и с помощью решения рекуррентной последовательности предельных задач члены асимптотического ряда определяются так, что путем удлинения его частичной суммы удастся невязки, порожденные ею в исходных уравнениях, сделать сколь угодно малыми. Преимущество подобной методики (возможность обоснования асимптотики при наличии какой-нибудь, даже очень грубой, априорной оценки решения) оборачивается и ее недостатком, т.е. из-за завышенных требований к правым частям без ответа остается основной вопрос: какие же их свойства обеспечивают возможность редукции размерности? Вместе с тем, она (методика) обеспечивает наиболее полное представление о свойствах решения при малых значениях геометрического параметра h , хотя младшие члены асимптотики вряд ли могут быть востребованы для приложений.

Настоящая работа посвящена изучению главного члена асимптотики решения задачи (1.6)–(1.8) и определению условий на правые части f и g , достаточных для справедливости неутраченной (по показателю степени h) оценки разности истинного и асимптотического решений. В § 2 приводятся используемые асимптотические конструкции. Процедура их построения следует общей схеме из [23], [28], [29] (см. также [27, гл. 16]), но включает модификации, связанные с вариацией сечения стержня (ср. с [30]). В силу матричной формы записи дифференциальных операторов (см. (1.6) и (1.7)) выкладки, формирующие результирующие задачи, сведены к необходимому минимуму; кроме того, они допускают произвольные анизотропию и неоднородность материала и форму сечения. Единственное ограничение геометрического плана имеет чисто технический характер и возникает в § 3 при выводе неравенства Корна, приспособленного к геометрии тонкого искривленного стержня (1.1). Известно (см. [7], [31], [32] и др.), что асимптотическая точность такого неравенства обеспечивается добавлением весовых множителей и степеней малого параметра h в нормы смещений и их производных; при этом необходимо различать направления поперек и вдоль оси стержня. Весовое неравенство Корна, установленное в теореме 3.1, дает возможность в § 4 обосновать главный член U асимптотики решения u задачи (1.6)–(1.8). Именно, в теореме 4.3 содержится такая оценка:

$$|u - U| \leq c_\delta h^{(1-\delta)/2} (\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}), \quad (1.13)$$

здесь δ – произвольное положительное число, а $|\cdot|$ – норма, приспособленная к асимптотической структуре решения (см. определение (3.4) и п. 2 § 3, где поясняется его правильность). Особенно важным является то, что величины $\mathcal{N}_0$ и $\widetilde{\mathcal{N}}$, указанные в (4.13) и (4.24), вбирают в себя всю зависимость мажоранты в оценке (1.13) от правых частей f и g , т.е. постоянная c_δ зависит от числа δ , формы стержня и упругих свойств материала, но не меняется при допустимом варьировании нагрузок. Тем самым неравенство (1.13) указывает требования к структуре f , g и к дифференциальным свойствам ее элементов, обеспечивающие редукцию размерности в задаче о стержне. Оптимальность этих требований обсуждается в п. 7 § 2 и п. 4 § 4, где, в частности, высказывается гипотеза о необходимых условиях.

3. Асимптотический анзац. В [29] изучен широкий класс краевых задач в тонких областях, выделяемый так называемым полиномиальным свойством. Иными словами, квадратичная форма вида (1.10) должна вырождаться только на конечномерном линеале $\mathcal{R}$ векторных полиномов. Как вытекает из (1.4), (1.5) и (1.10), в рассматриваемой задаче теории упругости этот линеал

$$\mathcal{R} = \{u: u(x) = a + b \times x, a, b \in \mathbb{R}^3\} \quad (1.14)$$

состоит из смещений тела как жесткого целого (в (1.14) крестом обозначено векторное произведение). Если линеал $\mathcal{R}$ известен, то согласно [29] определение размеров результирующей системы и порядков ее элементов, проверка эллиптичности и разрешимости соответствующей задачи Дирихле сводятся к несложным алгебраическим операциям. Так, в случае редукции размерности к единице достаточно указать в $\mathcal{R}$ базис $\{p^{j,k} \mid j = 1, \dots, J, k = 0, \dots, \tau_j - 1\}$, подчиненный условиям

$$\partial_z p^{j,k}(y, z) = p^{j,k-1}(y, z), \quad k = 0, \dots, \tau_j - 1,$$

где $p^{j,-1} = 0$. Для линеала жестких смещений (1.14) нужный базис выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} p^{i,0} &= e^i, & p^{i,1}(y, z) &= e^i z - e^3 y_i, \quad i = 1, 2, \\ p^{3,0} &= e^3, & p^{4,0}(y) &= \alpha(y_1 e^2 - y_2 e^1) \end{aligned}$$

(e^j – орт оси x_j , $j = 1, 2, 3$). При этом $J = 4$ и $\tau_1 = \tau_2 = 2$, $\tau_3 = \tau_4 = 1$. Общие результаты [29] обслуживают случай *прямолинейного однородного стержня* и утверждают, что редукция размерности в задаче (1.6)–(1.8) приводит к эллиптической системе обыкновенных дифференциальных уравнений с оператором $\mathbf{M}(\partial_z) = (\mathbf{M}_{pq}(\partial_z))_{p,q=1}^J$, в котором $\text{ord } \mathbf{M}_{pq} = \tau_p + \tau_q$. В § 2, приспособив процедуру построения асимптотики к тонкой искривленной области (1.1), мы обнаруживаем результирующую систему (2.36) с оператором $\mathbf{M}(z, \partial_z)$ той же структуры (разумеется, у него переменные коэффициенты). Кроме того, мы пользуемся начальными членами асимптотического анзаца, найденного в работе [29] для общих краевых задач с полиномиальным свойством:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J h^{-\tau_j} \sum_{q=0}^{-\tau_j-1} h^q p^{q,j}(\eta, 0) \frac{\partial^q w_j}{\partial z^q}(z) &= h^{-2} \{e^1 w_1(z) + e^2 w_2(z)\} \\ &+ h^{-1} \{e^3 (w_3(z) - \eta_1 \partial_z w_1(z) - \eta_2 \partial_z w_2(z)) + \alpha(\eta_1 e^2 - \eta_2 e^1) w_4(z)\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где w_1, w_2, w_3 и w_4 – функции, подлежащие определению (соответственно продольные и поперечные смещения в стержне и его закручивание). Отметим, что искривленность стержня не влияет на члены асимптотики, выделенные в (1.15), а для вычисления всего оператора $\mathbf{M}(z, \partial_z)$ достаточно построить лишь очередной асимптотический член $h^0 U^0(\eta, z)$ (см. п. 6 § 2).

Расхождение показателей степеней h при w_q имеет простое механическое истолкование: стержень легче изогнуть, чем растянуть или скрутить. Подчеркнем, что серьезное (см. замечание 2.3) отклонение от анзаца (1.15) приводит к необходимости сузить постановку задачи (1.6)–(1.8); например, в [26] ограничения на симметрию физических и геометрических характеристик стержня возникли именно из-за неудачно выбранной структуры асимптотического ряда.

§ 2. Формальная схема построения асимптотики

1. Вспомогательные конструкции. Замена координат $x \mapsto (\eta, z)$ влечет расщепление оператора (1.5):

$$D(\nabla_x) = h^{-1}D(\nabla_\eta, 0) + D(0, \partial_z) \equiv h^{-1}\mathbb{D}_\eta + \mathbb{D}_z, \quad (2.1)$$

здесь $\partial_z = \partial/\partial z$. Нормаль n к боковой поверхности Γ_h стержня $\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет соотношению

$$N(h, x)^{1/2}n(h, x) = (\nu_1(\eta, z), \nu_2(\eta, z), h\nu_0(\eta, z))^t, \quad (2.2)$$

в котором $\nu^t = (\nu_1, \nu_2)^t$ – единичный вектор внешней нормали к границе области $\omega(z) \subset \mathbb{R}^2$ и $N(h, x) = 1 + h^2\nu_0(\eta, z)^2$. Таким образом,

$$N^{1/2}D(n) = D(\nu, 0) + h\nu_0D(0, 1) \equiv \mathbb{D}_\nu + h\nu_0\mathbb{D}_1, \quad (2.3)$$

причем в (2.1) $\mathbb{D}_z = \mathbb{D}_1\partial_z$. Операторы L и B из (1.6) и (1.7) допускают расщепления

$$\begin{aligned} L(h, x, \nabla_x) &= h^{-2}L^0(\eta, z, \nabla_\eta) \\ &\quad + h^{-1}L^1(\eta, z, \nabla_\eta, \partial_z) + h^0L^2(\eta, z, \partial_z), \\ N(h, x)^{1/2}B(h, x, \nabla_x) &= h^{-1}B^0(\eta, z, \nabla_\eta) \\ &\quad + h^0B^1(\eta, z, \nabla_\eta, \partial_z) + h^1B^2(\eta, z, \partial_z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} L^0 &= -\mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_\eta^t, & L^1 &= -\mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_z^t - \mathbb{D}_z A \mathbb{D}_\eta^t, & L^2 &= -\mathbb{D}_z A \mathbb{D}_z^t, \\ B^0 &= \mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_\eta^t, & B^1 &= \mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t + \nu_0 \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_\eta^t, & B^2 &= \nu_0 \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_z^t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Правые части f и g задачи (1.6)–(1.8) запишем в форме

$$\begin{aligned} f(h, x) &= h^{-1}f^0(\eta, z) + h^0\bar{f}^0(z) + \tilde{f}(h, x), \\ g(h, x) &= h^{-1}g^0(\eta, z) + \tilde{g}(h, x), \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем остатки $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ считаем малыми (для уточнения см. § 4), а выделенные члены подчиним условиям

$$(f^0, e^i)_{\omega(z)} + (g^0, e^i)_{\partial\omega(z)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

$$\bar{f}_3^0(z) = 0, \quad (2.8)$$

где $z \in (-1, 1)$, e^i — орт оси Ox_i . Задача (1.6)–(1.8) линейна, и потому требования (2.6)–(2.8) всегда можно соблюсти за счет введения нормирующих множителей и нулевых слагаемых. Представления (2.6), полностью согласованные с анзацем (1.15), кажутся искусственными только на первый взгляд — в п. 7 обсуждается их механическая интерпретация.

Вспоминая сказанное в п. 3 § 1 и учитывая (2.4), (2.6), предлагаем такое асимптотическое представление решения:

$$\begin{aligned} u(h, x) = & h^{-2}\mathcal{U}^{(-2)}(z) + h^{-1}\mathcal{U}^{(-1)}(\eta, z) + h^0\mathcal{U}^{(0)}(\eta, z) \\ & + h^1\mathcal{U}^{(1)}(\eta, z) + h^2\mathcal{U}^{(2)}(\eta, z) + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.4) и (2.6), (2.9) в (1.6), (1.7) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра h , приходим к набору двумерных задач на сечении $\omega(z)$:

$$L^0\mathcal{U}^{(j)} = -L^1\mathcal{U}^{(j-1)} - L^2\mathcal{U}^{(j-2)} + \delta_{j,1}f^0 \quad \text{в } \omega(z), \quad (2.10)$$

$$B^0\mathcal{U}^{(j)} = -B^1\mathcal{U}^{(j-1)} - B^2\mathcal{U}^{(j-2)} + \delta_{j,1}g^0 \quad \text{на } \partial\omega(z), \quad (2.11)$$

здесь $j = -2, -1, 0, 1$ и $\mathcal{U}^{(p)} = 0$ при $p < -2$. Отметим, что при выводе (2.11) использовано очевидное соотношение $N(h, x)^{1/2} = 1 + O(h^2)$. Следующее утверждение известно (или легко проверяемо).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in H^{l-1}(\omega(z))^3 \times H^{l-1/2}(\partial\omega(z))^3$ и $l \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Краевая задача

$$L^0\mathcal{U} = \mathcal{F} \quad \text{в } \omega(z), \quad B^0\mathcal{U} = \mathcal{G} \quad \text{на } \partial\omega(z) \quad (2.12)$$

имеет решение $\mathcal{U} \in H^{l+1}(\omega(z))^3$ в том и только том случае, если выполнены условия

$$(\mathcal{F}, \Phi^q)_{\omega(z)} + (\mathcal{G}, \Phi^q)_{\partial\omega(z)} = 0, \quad q = 1, \dots, 4, \quad (2.13)$$

где

$$\Phi^1 = e^1, \quad \Phi^2 = e^2, \quad \Phi^3 = e^3, \quad \Phi^4 = \alpha(\eta_1 e^2 - \eta_2 e^1). \quad (2.14)$$

Решение определено с точностью до линейной комбинации векторов (2.14), а решение, нормированное условиями

$$(\mathcal{U}, \Phi^q)_{\omega(z)} = 0, \quad q = 1, \dots, 4, \quad (2.15)$$

становится единственным, наследует от правых частей гладкость относительно параметра $z \in [-1, 1]$ и подчиняется оценке

$$\|\mathcal{U}; H^{l+1}(\omega(z))\| \leq c \|(\mathcal{F}, \mathcal{G}); H^{l-1}(\omega(z)) \times H^{l-1/2}(\partial\omega(z))\|.$$

В случае $l = 0$ оценка сохраняется, например, при замене мажоранты на $c \|(\mathcal{F}, \mathcal{G}); L_2(\omega(z)) \times L_2(\partial\omega(z))\|$.

2. Задачи на сечении при $j = -2, -1$. В случае $j = -2$ правые части соотношений (2.10), (2.11) равны нулю, т.е. $\mathcal{U}^{(-2)}$ – линейная комбинация векторов (2.14). Обратившись еще раз к формуле (1.15), положим

$$\mathcal{U}^{(-2)}(z) = e^1 w_1(z) + e^2 w_2(z). \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь задачу (2.10), (2.11) при $j = -1$, т.е.

$$\begin{aligned} -\mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(-1)} &= \mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-2)} \quad \text{в } \omega(z), \\ \mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(-1)} &= -\mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-2)} \quad \text{на } \partial\omega(z). \end{aligned} \quad (2.17)$$

При вычислении правых частей в (2.7) учтены равенства (2.5) и тот факт, что функция (2.16) не зависит от η .

ЛЕММА 2.2. *Справедливы соотношения*

$$\mathbb{D}_z^t e^i = \mathbb{D}_\eta^t e^3 \eta_i \partial_z, \quad i = 1, 2. \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достигается непосредственными вычислениями при учете вытекающих из (1.5) и (2.1) формул

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \mathbb{D}_\eta &= \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_2 & \alpha \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial \eta_i}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

При помощи (2.18) находим частное решение $-(\eta_1 \partial_z w_1(z) + \eta_2 \partial_z w_2(z))e^3$ задачи (2.17). Теперь положим

$$\mathcal{U}^{(-1)}(\eta, z) = w_3(z)e^3 + w_4(z)\Phi^4(\eta) - e^3 \sum_{i=1}^2 \eta_i \partial_z w_i(z). \quad (2.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В определении решения (2.20) имеется произвол (предложение 2.1). При условии соблюдения (2.16) он не сказывается на процедуре в целом. Решение (2.20) было фиксировано так, чтобы сумма $h^{-2}\mathcal{U}^{(-2)} + h^{-1}\mathcal{U}^{(-1)}$ описывала жесткие смещения стержня посредством наиболее простых формул для $w_1, \dots, w_4$. Именно, согласно (2.16) и (2.20) случаю $w_m = c_m$, $m = 1, 2, 3$, и $w_4 = 0$ отвечает жесткое поступательное смещение, а случаю $w_i(z) = C_i z$, $i = 1, 2$, $w_3 = 0$ и $w_4 = C_3$ – вращательное. При этом член $\mathcal{U}^{(-1)}$ в (2.9) зависит от выбора координат (нужно “отметить” ось стержня), но член $\mathcal{U}^{(-2)}$ при параллельном переносе декартовой системы остается неизменным – он и является ключевым фрагментом в анзаце (2.9) или (1.15).

3. Задача на сечении при $j = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
L^0 \mathcal{U}^{(0)} &= \mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} + \mathbb{D}_z A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(-1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-2)} \} \quad \text{в } \omega(z), \\
B^0 \mathcal{U}^{(0)} &= -\mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \\
&\quad - \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(-1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-2)} \} \quad \text{на } \partial\omega(z).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

В силу (2.16), (2.20) и (2.18) выражение в фигурных скобках равно нулю. Кроме того, при любом столбце $\mathcal{W} \in H^1(\omega(z))^6$

$$\begin{aligned}
(\Phi^q, \mathbb{D}_\eta \mathcal{W})_{\omega(z)} - (\Phi^q, \mathbb{D}_\nu \mathcal{W})_{\partial\omega(z)} &= (\mathbb{D}_\eta^t \Phi^q, \mathcal{W})_{\omega(z)} \\
&= (0, \mathcal{W})_{\omega(z)} = 0, \quad q = 1, \dots, 4.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Следовательно, правые части (2.21) удовлетворяют (2.13), а сама задача (2.21) разрешима.

ЛЕММА 2.4. *Справедлива формула*

$$\mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)}(\eta, z) = \mathcal{Y}(\eta) \mathcal{D}(\partial_z) w(z), \tag{2.23}$$

в которой $w = (w_1, \dots, w_4)^t$, $\mathcal{D}(\partial_z) = \text{diag}\{\alpha \partial_z^2, \alpha \partial_z^2, \partial_z, \partial_z\}$ и

$$\mathcal{Y}(\eta)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{-1} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^{-1} \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \eta_1 & -\alpha^2 \eta_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается непосредственным применением формул (2.19) и (2.20).

Итак,

$$\mathcal{U}^{(0)}(\eta, z) = \mathcal{V}(\eta, z) \mathcal{D}(\partial_z) w(z), \tag{2.25}$$

где $\mathcal{V}$ — (3×4) -матрица, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned}
-\mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{V} &= \mathbb{D}_\eta A \mathcal{Y} \quad \text{в } \omega(z), \\
\mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{V} &= -\mathbb{D}_\nu A \mathcal{Y} \quad \text{на } \partial\omega(z).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Иными словами, каждый столбец матрицы $\mathcal{V}$ является решением задачи (2.12) с правыми частями специального вида, которые подчинены условиям разрешимости (2.13) в силу (2.22). Эти столбцы нормируются соотношениями (2.15).

4. Задача на сечении при $j = 1$. Найдем условия разрешимости задачи

$$\begin{aligned}
L^0 \mathcal{U}^{(1)} &= \mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \} + f^0 \quad \text{в } \omega(z), \\
B^0 \mathcal{U}^{(1)} &= -\mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)} \\
&\quad - \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \} + g^0 \quad \text{на } \partial\omega(z).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

ЛЕММА 2.5 (см. [30, § 2]). Пусть Y – гладкая функция на $\bar{\Omega}_1$ (см. (1.1)). Тогда при $z \in [-1, 1]$

$$\frac{d}{dz} \int_{\omega(z)} Y(\eta, z) d\eta = \int_{\omega(z)} \frac{\partial Y}{\partial z}(\eta, z) d\eta - \int_{\partial\omega(z)} Y(\eta, z) \nu_0(\eta, z) ds_\eta. \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи разбиения единицы ситуацию удастся упростить дополнительным условием малости носителя подынтегрального выражения. Тогда можно считать, что вблизи $\text{supp } Y$ область $\omega(z)$ задана неравенством $\eta_2 < F(\eta_1, z)$. Формула (2.2) конкретизируется так:

$$\nu_1 = -\mathcal{N}^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial \eta_1}, \quad \nu_2 = -\mathcal{N}^{1/2}, \quad \nu_0 = -\mathcal{N}^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \mathcal{N} = 1 + \left| \frac{\partial F}{\partial \eta_1} \right|^2.$$

Кроме того, при некоторых $a_\pm$ и b

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{\omega(z)} Y(\eta, z) d\eta &= \frac{d}{dz} \int_{a_-}^{a_+} \int_b^{F(\eta_1, z)} Y(\eta, z) d\eta_1 d\eta_2 \\ &= \int_{\omega(z)} \frac{\partial Y}{\partial z}(\eta, z) d\eta + \int_{a_-}^{a_+} Y(\eta, z) \frac{\partial F}{\partial z}(\eta_1, z) d\eta_1. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что на рассматриваемом участке границы $ds_\eta = \mathcal{N}^{1/2} d\eta_1$ (элемент длины дуги).

Ввиду (2.22) первые слагаемые в правых частях (2.27) не влияют на условия разрешимости. Благодаря формулам (2.28), (2.18) и предположению (2.7) получаем, что при $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} &(e^i, f^0 + \partial_z \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\omega(z)} \\ &\quad + (e^i, g^0 - \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\partial\omega(z)} \\ &= \partial_z (\mathbb{D}_1^t e^i, A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\omega(z)} \\ &= \partial_z (\mathbb{D}_\eta^t e^3 \eta_i, A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\omega(z)} \\ &= -\partial_z (e^3 \eta_i, \mathbb{D}_\eta A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\omega(z)} \\ &\quad + \partial_z (e^3 \eta_i, \mathbb{D}_\nu A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\partial\omega(z)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Вспоминая, что в равенствах (2.21) фигурные скобки равны нулю, видим, что правая часть (2.29) исчезает, т.е. для задачи (2.27) выполняются условия разрешимости (2.13) с $q = 1, 2$.

Преобразуем те же условия при $q = 3, 4$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi^q, \mathbb{D}_z A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\omega(z)} \\ &\quad - (\Phi^q, \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)} \})_{\partial\omega(z)} + \mathcal{F}^q, \end{aligned} \quad (2.30)$$

здесь

$$\mathcal{F}^q = (\Phi^q, f^0)_{\omega(z)} + (\Phi^q, g^0)_{\partial\omega(z)}. \quad (2.31)$$

В силу (2.28), (2.23) и (2.25) равенства (2.30) эквивалентны следующим:

$$-\partial_z(\mathbb{D}_1^t \Phi^q, A\{\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}\})_{\omega(z)} \mathcal{D}(\partial_z)w(z) = \mathcal{F}^q(z), \quad z \in (-1, 1), \quad q = 3, 4. \quad (2.32)$$

Итак, найдены два уравнения для определения неизвестного вектора $w = (w_1, \dots, w_4)^t$. Далее важным окажется то, что $\mathbb{D}_1^t \Phi^3$ и $\mathbb{D}_1^t \Phi^4$ совпадают с третьим и четвертым столбцами матрицы $\mathcal{Y}$ из (2.24).

5. Два условия разрешимости задачи на сечении при $j = 2$. Если предположить, что в (2.6) $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$, то для определения $\mathcal{U}^{(2)}$ появится краевая задача:

$$\begin{aligned} L^0 \mathcal{U}^{(2)} &= \mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\} + \bar{f}^0 \quad \text{в } \omega(z), \\ B^0 \mathcal{U}^{(2)} &= -\mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(1)} - \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\} \quad \text{на } \partial\omega(z). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Рассмотрим первые два ($q = 1, 2$) условия разрешимости (2.13). Как обычно, благодаря (2.22) на первые слагаемые справа в (2.33) можно не обращать внимания. Применяя леммы 2.5, 2.2 и интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} &(e^i, \mathbb{D}_z A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\} + \bar{f}^0)_{\omega(z)} - (e^i, \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\})_{\partial\omega(z)} \\ &= |\omega(z)| \bar{f}^0 + \partial_z (e^i, \mathbb{D}_1 A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\})_{\omega(z)}, \\ &(\mathbb{D}_1^t e^i, A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\})_{\omega(z)} = (\mathbb{D}_\eta^t e^3 \eta_i, A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\})_{\omega(z)} \\ &= -(e^i \eta_i, \mathbb{D}_\eta A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\})_{\omega(z)} \\ &\quad + (\eta_i e^3, \mathbb{D}_\nu A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(1)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(0)}\})_{\partial\omega(z)} \equiv \Sigma_i. \end{aligned}$$

Здесь через $|\omega(z)|$ обозначена площадь $\text{mes}_2 \omega(z)$ сечения. Выражения Σ_i , $i = 1, 2$, преобразуем при помощи равенств (2.27), а также леммы 2.5 и формул (2.25), (2.23),

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= (\eta_i e^3, \mathbb{D}_z A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)}\})_{\omega(z)} + (\eta_i, f_3^0)_{\omega(z)} \\ &\quad - (\eta_i e^3, \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{\mathbb{D}_\eta^t \mathcal{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathcal{U}^{(-1)}\})_{\partial\omega(z)} + (\eta_i, g_3^0)_{\partial\omega(z)} \\ &= (\eta_i, f_3^0)_{\omega(z)} + (\eta_i, g_3^0)_{\partial\omega(z)} + \partial_z (\mathbb{D}_1^t \eta_i e^3, A \{\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}\})_{\omega(z)} \mathcal{D}(\partial_z)w(z). \end{aligned}$$

Итак, два условия разрешимости задачи (2.33) принимают вид обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\partial_z^2 (\eta_i \mathbb{D}_1^t e^3, A \{\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}\})_{\omega(z)} \mathcal{D}(\partial_z)w(z) = \mathcal{F}_i(z), \quad z \in (-1, 1), \quad (2.34)$$

где $i = 1, 2$ и

$$\mathcal{F}_i(z) = |\omega(z)| \bar{f}_i^0(z) + \partial_z \{(\eta_i, f_3^0(\eta, z))_{\omega(z)} + (\eta_i, g_3^0(\eta, z))_{\partial\omega(z)}\}. \quad (2.35)$$

В дальнейших асимптотических конструкциях вектор $\mathcal{U}^{(2)}$ участия не принимает (см. § 4), однако введение условий (2.34) не обязательно связывать с разрешимостью задачи (2.33). Сумма четырех слагаемых справа в (2.9) (без $h^2\mathcal{U}^{(2)} + \dots$) оставляет невязки в системе (1.6) и краевом условии (1.7), которые обладают той же структурой, что и исходные правые части (2.6), с дополнительным множителем h . Иными словами, в принципе процедуру построения формальной асимптотики можно продолжить, для чего нужно обеспечить аналогичное (2.7) условие ортогональности (напомним, что $\mathcal{U}^{(1)}$ определяется только при учете (2.7)). Роль таких условий и играют уравнения (2.34). Подчеркнем, что в п. 3 § 4 при обосновании асимптотики условия ортогональности будут востребованы еще раз.

6. Результирующая задача. Согласно (2.24) и (2.19) столбец $-\alpha^{-1}\eta_i\mathbb{D}_1^te^3$ при $i = 1, 2$ фигурирует и в матрице $\mathcal{Y}(\eta)$, и в скалярном произведении из (2.34). В силу аналогичного наблюдения относительно столбцов $\mathbb{D}_1^t\Phi^q$ в (2.32) переписываем дифференциальные уравнения (2.32) и (2.34) одной строкой:

$$\mathcal{D}(-\partial_z)\mathcal{M}(z)\mathcal{D}(\partial_z)w(z) = \mathcal{F}(z), \quad z \in (-1, 1), \quad (2.36)$$

где $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_4)^t$ и $\mathcal{M}$ – (4×4) -матрица-функция,

$$\mathcal{M}(z) = \int_{\omega(z)} \mathcal{Y}(\eta)^t A(\eta, z) (\mathbb{D}_\eta^t \Psi(\eta, z) + \mathcal{Y}(\eta)) d\eta. \quad (2.37)$$

В соответствии с (1.8) дополним систему (2.36) условиями Дирихле на концах интервала $(-1, 1)$:

$$w_q(\pm 1) = 0, \quad q = 1, \dots, 4, \quad \partial_z w_i(\pm 1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.38)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *При любом $z \in (-1, 1)$ матрица (2.37) симметрическая и положительно определенная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь уравнениями (2.26) и интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} \int_{\omega(z)} (\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y})^t A(\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}) d\eta &= \mathcal{M} + \int_{\omega(z)} (\mathbb{D}_\eta^t \Psi)^t A(\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}) d\eta \\ &= \mathcal{M} - \int_{\omega(z)} \Psi^t \mathbb{D}_\eta A(\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}) d\eta \\ &\quad + \int_{\partial\omega(z)} \Psi^t \mathbb{D}_\nu A(\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}) ds_\eta = \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Таким образом, $\mathcal{M}$ – матрица Грама, построенная по столбцам (6×4) -матрицы $\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}$ при помощи скалярного произведения $\langle u, v \rangle = (u, Av)_{\omega(z)}$ в $L_2(\omega(z))^6$ (напоминаем про симметричность и положительную определенность A). Осталось убедиться в том, что названные столбцы линейно независимы. Пусть $a \in \mathbb{R}^4$ и

$$\mathbb{D}_\eta^t \Psi a + \mathcal{Y} a = 0. \quad (2.40)$$

В силу (2.19) и (2.24) третья строка системы (2.40) читается так:

$$0 + (\mathcal{Y}a)_3 = -\alpha^{-1}\eta_1 a_1 - \alpha^{-1}\eta_2 a_2 + a_3 = 0.$$

Значит, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Кроме того, четвертая и пятая строки дают соотношения

$$\alpha \partial_2 (\mathcal{Y}a)_3 + \alpha^2 \eta_1 a_4 = 0, \quad \alpha \partial_1 (\mathcal{Y}a)_3 - \alpha^2 \eta_2 a_4 = 0,$$

откуда дифференцированием выводим, что $2\alpha^2 a_4 = 0$. Искомая тривиальность столбца a установлена.

Очередное утверждение стало очевидным.

ТЕОРЕМА 2.7. Если $\mathcal{F}_i \in H_2^l(-1, 1)$, $\mathcal{F}_{2+i} \in H_2^{l-1}(-1, 1)$ при некотором $l \in \mathbb{N}$ и $i = 1, 2$, то существует единственное решение задачи (2.36), (2.38) и верна оценка

$$\|w; H_2^{l+3}(-1, 1)^2 \times H_2^{l+2}(-1, 1)^2\| \leq c \|\mathcal{F}; H_2^{l-1}(-1, 1)^2 \times H_2^l(-1, 1)^2\|. \quad (2.41)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Оператор $\mathbf{M}(z, \partial_z)$ системы (2.36) наследует полиномиальное свойство [35] от оператора L из упругой задачи (1.6)–(1.8). Действительно, в силу предложения 2.6 соответствующая квадратичная форма $\mathbf{E}(w)$ удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{E}(w) \equiv \int_{-1}^1 (\mathcal{D}(\partial_z)w(z))^t \mathcal{M}(z) \mathcal{D}(\partial_z)w(z) dz \geq c \|\mathcal{D}(\partial_z)w; L_2(-1, 1)\|^2 \quad (2.42)$$

и поэтому вырождается только на полиномах из линеала

$$\{p = (p_1, \dots, p_4)^t : p_i(z) = a_i + b_i z, p_{i+2} = a_{i+2}, a_i, a_{i+2}, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}.$$

7. Обсуждение. Как уже упоминалось, представления (2.6) и (1.15) (или (2.9) при учете (2.16) и (2.20)) согласованы. Укажем физическую интерпретацию появившихся математических объектов (всюду имеются в виду главные асимптотические члены механических величин). Усредненные по сечению стержня прогибы в направлении Oy_i равны $h^{-2}w_i(z)$, $i = 1, 2$, а $h^{-1}w_3(z)$ – его смещение вдоль оси Oz и $h^{-1}\alpha w_4(z)$ – угол закручивания вокруг этой оси. В соответствии с (2.6) и (2.31), (2.35) $h\mathcal{F}_3(z)$ и $h^2\alpha^{-1}\mathcal{F}_4(z)$ – продольная сила и крутящий момент, приложенные к стержню. Кроме того, выражения из фигурных скобок в (2.35) пропорциональны изгибающим моментам, а $h^2|w(z)|\bar{f}_i^0(z)$ – перерезывающие силы; здесь $i = 1, 2$ и $|w(z)|$ – площадь области $w(z)$. Замена в функционале потенциальной энергии

$$P(u, f, g) = 2^{-1}E(u, u; \Omega_h) - [(f, u)_{\Omega_h} + (g, u)_{\Gamma_h}] \quad (2.43)$$

векторов u , f и g главными членами $h^{-2}\mathcal{U}^{-2} + h^{-1}\mathcal{U}^{-1} + h^0\mathcal{U}^0$, $h^{-1}f^0 + h^0\bar{f}^0$ и h^0g^0 их асимптотик и последующий переход к $h = 0$ приводят к выражению

$$\mathbf{P}(w, \mathcal{F}) = 2^{-1}\mathbf{E}(w) - (\mathcal{F}, w)_{(-1, 1)}, \quad (2.44)$$

являющемуся потенциальной энергией деформации для задачи (2.36), (2.38). Это наблюдение будет обосновано в п. 4 § 4. Его вывод существенно опирается на формулы (2.16), (2.6), (2.7) и (2.37) – без условия ортогональности (2.7) вычитаемое в (2.43) не имеет конечного предела при $h \rightarrow +0$.

При вычислении асимптотик пространственных полей деформаций и напряжений необходимо учитывать три слагаемых (2.16), (2.20) и (2.25) в представлении (2.9) поля смещений. К этому вопросу мы вернемся в п. 2 § 3 и п. 4 § 4.

Если Ω_h – искривленный стержень с постоянным поперечным сечением (в (1.1) $\omega(z)$ зависит от z специальным образом), то оправдан переход к натуральным криволинейным координатам, связанным с осью стержня. При этом поперечные смещения получаются в главном простым ортогональным преобразованием (w_1, w_2) , а продольное смещение и закручивание требуют пересчета, базирующегося на полном анзаце (1.15), так как при поворотах осей на углы $O(h)$ старший член асимптотики $h^{-2}(w_1 e^1 + w_2 e^2)$ оказывает влияние на коэффициент при h^{-1} (ср. с замечанием 2.3).

§ 3. Весовое неравенство Корна

1. Дополнительные геометрические предположения. Для обоснования формальной асимптотики, построенной в § 2, необходима правильная запись неравенства Корна в тонкой искривленной области. Асимптотическая точность такого неравенства достигается введением в L_2 -нормы смещений и их производных добавочных весовых множителей – степеней параметра h и расстояний до торцов стержня. Для тонких цилиндрических областей подобные неравенства получены в [36], [33] (изотропное распределение весовых множителей) и в [32], [34] (анизотропное распределение, выделяющее направление вдоль оси стержня). В этом параграфе весовое неравенство Корна обобщается на случай криволинейного стержня при дополнительных предположениях о его геометрии. Сформулируем их.

Разобьем область Ω_h на ячейки $S_m = \{x \in \Omega_h : hm < z < h(m+1)\}$; здесь m – целое число. Пусть еще $\xi^\pm$ – некоторая система декартовых координат, центр которой помещен на торец $\omega_h(\pm 1)$ стержня Ω_h . Введем круговые цилиндры $Q_h^\pm = \{x : |\xi_1^\pm|^2 + |\xi_2^\pm|^2 < 4h^2 R_\pm^2, -C_\pm h < \xi_3^\pm < H_\pm\}$; при этом

$$0 < R_\pm \leq \frac{1}{2}, \quad C_\pm \geq 1, \quad 0 < H_\pm < 2. \quad (3.1)$$

Предположим, что системы координат $\xi^\pm$ и не зависящие от h числа $R_\pm, C_\pm, H_\pm$ удается подобрать так, чтобы были соблюдены условия:

- i) основные части цилиндров $Q_h^\pm$ лежат внутри Ω_h , т.е. $\{Q_h^\pm : \pm z < 1\} \subset \Omega_h$;
- ii) каждая из ячеек S_m , составляющих Ω_h , пронизана хотя бы одним из стержней $Q_h^\pm$, т.е. $S_m \cap Q_h^\pm = \{x \in Q_h^\pm : hm < z < h(m+1)\}$.

Из ii) вытекает, в частности, что $H_+ + H_- \geq 2$. Типичная картина изображена на рис. 1.

Рис. 1

Вектор-функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$ продолжается нулем на полупространства $\{x: \pm z > 1\}$ с сохранением класса. Поэтому ее можно считать заданной на $Q_h^\pm$, причем $u = 0$ на торце $q_h^\pm = \{x \in \bar{Q}_h^\pm: \xi_3^\pm = -C_\pm h\}$ (поскольку в силу (3.1) $q_h^\pm$ лежит вне Ω_h). Кроме того, если число $1/h$ не является целым, то крайние ячейки, ограниченные торцами $\omega_h(\pm 1)$, имеют меньшую протяженность в направлении z , чем средние. Принимая во внимание продолжение поля u нулем, крайние ячейки можно удлинить так, чтобы любая из ячеек S_m содержала шар B_m с радиусом $hR_\pm$ и центром на пересечении оси цилиндра $Q_h^\pm$ с плоскостью $\{x: z = h(m + 1/2)\}$ (знак “ $\pm$ ” выбираем в соответствии с условием ii) и учитываем первое из неравенств (3.1)). Заметим, что соотношения (3.1) не являются ограничительными – всегда можно достичь их допустимой вариацией размеров цилиндров.

Последнее из требований заключается в следующем:

iii) справедливо неравенство

$$|||u|||_{S_m}^2 \leq c(E(u, u; S_m) + |||u|||_{B_m}^2),$$

в котором $|||u|||_{\Xi}^2 = \|\nabla u; L_2(\Xi)\|^2 + h^{-2}\|u; L_2(\Xi)\|^2$, а постоянная c не зависит от h, m и вектор-функции $u \in H^1(S_m)^3$.

Это требование также можно заменить геометрическим условием: *ячейка S_m звезда относительно шара B_m* . В самом деле, согласно теореме 1 и замечанию 3 из [31] названное условие обеспечивает оценку

$$\|\nabla_x u; L_2(S_m)\|^2 \leq c_1 \varkappa_m^3 \{E(u, u; S_m) + \|\nabla_x u; L_2(B_m)\|^2\}, \quad (3.2)$$

в которой c_1 – абсолютная постоянная, $\varkappa_m = R_m/R_\pm$, а R_m выбрано так, что $S_m \subset \{x: |x - x^m| < hR_m\}$, где x^m – центр шара B_m . Ясно, что дробь $\varkappa_m$ ограничена постоянной, не зависящей от m и h . Таким образом, вместе с легко проверяемым неравенством типа Пуанкаре–Фридрихса

$$\|u; L_2(S_m)\|^2 \leq c_2 \varkappa_m^3 \{\|u; L_2(B_m)\|^2 + h^2 R_m^2 \varkappa_m^3 \|\nabla_x u; L_2(S_m)\|^2\} \quad (3.3)$$

оценка (3.2) приводит к нужному неравенству из iii).

Требование звездности более сильное, чем само условие iii). Так, итерированным применением оценок (3.2) и (3.3) можно проверить iii) для стержней с продольными полостями, выемками и пр. Вообще же, обоснование асимптотики в § 4 опирается только на окончательный вариант весового неравенства Корна, сформулированный в теореме 3.1, а геометрические требования i) – iii) вызваны техническими моментами в избранном способе доказательства этой теоремы.

2. Неравенство Корна и его асимптотическая точность. Весовая функция $\rho(z) = h + 1 - |z|$ принимает значения $O(h)$ в непосредственной близости от торцов стержня Ω_h , но на удалении от них становится величиной $O(1)$. Положим

$$|u; \Omega_h, \rho|^2 = \int_{\Omega_h} \left[\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + \frac{h^2}{\rho^2} \left\{ \left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right\} + \frac{h^2}{\rho^2} \left\{ \left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right\} + \frac{1}{\rho^2} \left\{ |u_3|^2 + \frac{h^2}{\rho^2} |u_i|^2 \right\} \right] dy dz. \quad (3.4)$$

Здесь, как и всюду в параграфе, суммирование по $i = 1, 2$ подразумевается, но не указывается явно.

В этом пункте норму (3.4) обозначаем $|u|$. Так как $\rho(z) > 0$ при $x \in \bar{\Omega}_h$, она эквивалентна обычной соболевской норме, но, разумеется, одна из констант эквивалентности зависит от малого параметра h . Доказательство следующего утверждения приводится в конце параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для вектор-функции $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$ справедливо неравенство*

$$|u|^2 \leq cE(u, u; \Omega_h), \quad (3.5)$$

где постоянная c не зависит ни от u , ни от $h \in (0, 1]$.

Убедимся в асимптотической точности неравенства (3.5) (точнее, в правильности выбора весовой нормы (3.4)). С этой целью возьмем произвольную вектор-функцию $w \in C^\infty([-1, 1])^4$, подчиненную (2.38), построим по ней начальные члены суммы из (2.9) и вычислим порядки относительно h левой и правой частей (3.5).

Положим

$$\mathcal{W} = h^{-2}\mathcal{U}^{(-2)} + h^{-1}\mathcal{U}^{(-1)} + h^0\mathcal{U}^{(0)}; \quad (3.6)$$

в силу (2.1), (2.16), (2.18), (2.20) и (2.23), (2.25) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathcal{W}) &= D(\nabla_x)^t \mathcal{W} = (h^{-1}\mathbb{D}_\eta + \mathbb{D}_z)(h^{-2}\mathcal{U}^{(-2)} + h^{-1}\mathcal{U}^{(-1)} + h^0\mathcal{U}^{(0)}) \\ &= h^{-1}(\mathcal{Y} + \mathbb{D}_\eta \mathcal{V}) \mathcal{D}(\partial_z)w(z) + O(1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.10), (2.39) вытекает соотношение

$$E(\mathcal{W}, \mathcal{W}; \Omega_h) = \mathbf{E}(w) + O(1), \quad (3.7)$$

где $2^{-1}\mathbf{E}(\cdot)$ – энергетический функционал для задачи (2.36), (2.38), определенный в (2.42). Мы ограничились в (3.6) тремя членами, поскольку вклады остальных все равно были бы отнесены в остатки $O(1)$ и $O(h)$; именно до суммы (3.6) урезается асимптотическое разложение (2.9) в центральной теореме 4.4.

Теперь рассмотрим интеграл из (3.4), содержащий восемь слагаемых $I_1, \dots, I_8$. Список соответствующих подынтегральных выражений таков:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_p}{\partial y_p} &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta_p} \mathcal{V}_p \mathcal{D}(\partial_z) w, & \frac{\partial \mathcal{W}_3}{\partial z} &= \frac{1}{h} (\partial_z w_3 - \eta_i \partial_z^2 w_i) + O(1), \\ -\frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial y_2}, \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_1} &= \frac{\alpha}{h^2} w_4 + O\left(\frac{1}{h}\right), & -\frac{\partial \mathcal{W}_3}{\partial y_p}, \frac{\partial \mathcal{W}_p}{\partial z} &= \frac{1}{h^2} \partial_z w_p(z) + O\left(\frac{1}{h}\right), \\ \mathcal{W}_3 &= h^{-1} (w_3 - \eta_i \partial_z w_i) + O(1), & \mathcal{W}_p &= h^{-2} w_p + O(h^{-1}); \end{aligned} \quad (3.8)$$

здесь $p = 1, 2$. Нетрудно убедиться в следующем: степени h распределены в (3.4) так, что каждый из интегралов I_j равен $O(1)$, а значит, $|\mathcal{W}|^2 = O(1)$. Этот факт, вкуче с формулой (3.7) и теоремой 4.4, обосновывающей асимптотику, указывает на асимптотическую точность оценки (3.5). Отметим еще, что ввиду (2.38)

$$w_p(z) = O([1 - |z|]^2), \quad w_{2+p}(z) = O([1 - |z|]). \quad (3.9)$$

Просматривая список (3.8) еще раз, видим, что весовые множители ρ^{-2} расставлены в (3.4) с соблюдением условия: их влияние на сходимость интеграла компенсируется малостью выражений (3.8) при $z \rightarrow \pm 1$, обеспечиваемой соотношениями (3.9).

3. Весовое неравенство Корна на $Q_h^\pm$. Ввиду симметрии имеем дело только с цилиндром Q_h^- , а индексы “ $\pm$ ” не указываем в обозначениях. Вспомнив сказанное в п. 1 о продолжении нулем вектор-функции $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$, считаем, что $u \in \mathring{H}^1(Q_h)^3$ (т.е. u обращается в нуль на q_h). Пусть v_1, v_2 и v_3 – проекции вектора u на оси ξ_1, ξ_2 и ξ_3 . Радиус коаксиального с Q_h цилиндра $Q'_h = \{\xi \in Q_h : \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq h^2 R^2\}$ уменьшим вдвое. Временно положим

$$\begin{aligned} |v|^2 &= \int_{Q'_h} \left[\left| \frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \right|^2 + \frac{h^2}{(h + \xi_3)^2} \left\{ \left| \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} \right|^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{(h + \xi_3)^2} \left\{ \left| \frac{\partial v_i}{\partial \xi_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_3}{\partial \xi_i} \right|^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(h + \xi_3)^2} \left\{ |v_3|^2 + \frac{h^2}{(h + \xi_3)^2} |v_i|^2 \right\} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

т.е. приспособим весовую норму (3.4) к положению цилиндра Q_h . Так как число H из (3.1) не зависит от h , угол между осями ξ_3 и z составляет $O(1)$, и, следовательно, используемые декартовы координаты связаны формулой

$$(y, z + 1) = \Theta \xi,$$

где Θ – унитарная матрица, элементы которой удовлетворяют неравенству

$$|\Theta_{pq}| + |\Theta_{33}| + h^{-1}|\Theta_{p3}| + h^{-1}|\Theta|_{3q} \leq C, \quad p, q = 1, 2, \quad (3.11)$$

с постоянной C , не зависящей от h . Таким образом,

$$u = \Theta v, \quad \nabla_\xi = \Theta \nabla_x. \quad (3.12)$$

ЛЕММА 3.2. Для $u \in \mathring{H}^1(Q_h)^3$ справедливы неравенства

$$|v|^2 \leq CE(u, u; Q_h), \quad (3.13)$$

$$|u; Q'_h, \rho|^2 \leq c(|v|^2 + E(u, u; Q'_h)), \quad (3.14)$$

в которых c и C не зависят от u , h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что энергетический функционал невосприимчив к ортогональному преобразованию координат. Если множитель перед первой фигурной скобкой в (3.10) заменить на $h^4(h + \xi_3)^{-4}$, то неравенство $|v|^2 \leq CE(u, u; Q_h)$ совпадет с неравенством, доказанным в [32] (см. также [34, предложение 3.1]). Оценка

$$h^2 \int_{Q'_h} (h + \xi_3)^{-2} |\nabla_\xi v_i|^2 d\xi \leq CE(u, u; Q_h), \quad (3.15)$$

достаточная теперь для проверки (3.13), по существу установлена в [33, лемма 1] при помощи техники, разработанной в [37], [36], [31] (см. [38, лемма 3.1]).

Перейдем к доказательству (3.14). С этой целью сравним выражение (3.10) с выражением (3.4), где интегрирование ведется по Q'_h . Весовые множители ρ и $h + \xi_3$ эквивалентны. В силу (3.11) и (3.12)

$$|u_p| \leq c(|v_1| + |v_2| + h|v_3|), \quad |u_3| \leq c(|v_3| + h|v_1| + h|v_2|).$$

Так как $h \leq \rho(z) \leq 4$, получаем

$$\begin{aligned} |u_3|^2 + h^2 \rho^{-2} |u_i|^2 &\leq c_1 \{ |v_3|^2 + h^2 |v_i|^2 + h^2 \rho^{-2} (|v_i|^2 + h^2 |v_3|^2) \} \\ &\leq c_2 (|v_3|^2 + h^2 \rho^{-2} |v_i|^2) \leq c_3 (|v_3|^2 + h^2 (h + \xi_3)^{-2} |v_i|^2). \end{aligned}$$

Таким образом, фрагменты интегралов из (3.4) и (3.10), содержащие только сами компоненты вектора смещений, нужным неравенством связаны. Для деформаций $\partial u_i / \partial y_i$ и $\partial u_3 / \partial z$ требуемые оценки очевидны, поскольку согласно (1.2)–(1.4) и (1.10) квадраты их норм в $L_2(Q'_h)$ мажорируются величиной $CE(u, u; Q'_h)$. Наконец, правая часть формулы

$$c \frac{h^2}{\rho^2} \left\{ \left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right\} \leq \frac{h^2}{(h + \xi_3)^2} \sum_{j=1}^3 |\nabla_\xi v_j|^2,$$

вытекающей из (3.11) и (3.12), не больше подынтегрального выражения в (3.10). Проверка (3.14) закончена.

4. Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим одну из ячеек S_m , на которые разбит стержень Ω_h , и расположенный в ней шар B_m с радиусом $hR_{\pm}$ и центром $x^m = (y_1^m, y_2^m, h(m + 1/2))$. По построению этот шар принадлежит также одному из круговых цилиндров $Q_h^{\pm}$ (их радиусы $hR_{\pm}$ вдвое меньше радиусов цилиндров $Q_h^{\pm}$, фигурирующих в предположении ii)). Для определенности будем считать, что $B_m \subset Q_h^{\pm}$. Тогда

$$c\rho(x) \leq \rho_m \leq C\rho(x), \quad x \in S_m, \quad (3.16)$$

где $\rho_m = 1 + h(m + 1/2)$, а c и C – положительные постоянные. Подчеркнем, что благодаря использованию вектор-функции u , продолженной нулем на $\{x: \pm z > 1\}$, крайние ячейки не требуют отдельной обработки (см. п. 1). Далее индексы m и $\pm$ не пишем, а x^m и ρ_m обозначаем $x^0 = (y^0, z^0)$ и ρ_0 .

Поле u представим на ячейке S в виде

$$u(x) = u^{\perp}(x) + d(x)a, \quad (3.17)$$

где $u^{\perp} \in H^1(S)^3$, $a \in \mathbb{R}^6$, $z^0 = h(m + 1/2)$,

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(z - z^0) & \alpha(y_2 - y_2^0) \\ 0 & 1 & 0 & \alpha(z - z^0) & 0 & -\alpha(y_1 - y_1^0) \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha(y_2 - y_2^0) & \alpha(y_1 - y_1^0) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$a = d_B^{-1} \int_B d(x)^t u(x) dx, \quad (3.19)$$

$$d_B = \int_B d(x)^t d(x) dx. \quad (3.20)$$

Обратим внимание на следующие факты. Во-первых, при любом столбце $a \in \mathbb{R}^6$ вектор $d(x)a$ является жестким смещением (трансляция + поворот), причем в силу (1.5), (3.18) и (3.17), (1.10) $D(\nabla_x)^t d(x)a = 0$ и

$$E(u, u; \Xi) = E(u^{\perp}, u^{\perp}; \Xi). \quad (3.21)$$

Во-вторых, столбцы матрицы d линейно независимы, а (3.20) – симметрическая и положительно определенная матрица Грама размером 6×6 , построенная по этим столбцам при помощи скалярного произведения в $L_2(B)^3$. В-третьих,

$$\begin{aligned} \int_B d(x)^t u^{\perp}(x) dx &= \int_B d(x)^t u(x) dx - \int_B d(x)^t d(x) dx a \\ &= \int_B d(x)^t u(x) dx - d_B d_B^{-1} \int_B d(x)^t u(x) dx = 0, \end{aligned}$$

а значит, сужение $u^{\perp}$ на B принадлежит подпространству, имеющему тривиальное пересечение с линеалом жестких смещений, и справедливо неравенство Корна

$$|||u^{\perp}|||_B^2 \leq cE(u^{\perp}, u^{\perp}; B) \quad (3.22)$$

(доказательство этого неравенства можно найти, например, в [34, § 2]; в дополнение к нему нужно сделать замену координат $x \mapsto \tilde{x} = h^{-1}(x - x^m)$, учитывающую малый параметр h).

Принимая во внимание предположение iii) и формулы (3.21), (3.22), заключаем, что

$$|||u^\perp|||_S^2 \leq c(E(u^\perp, u^\perp; S) + |||u^\perp|||_B^2) \leq CE(u^\perp, u^\perp; S) = CE(u, u; S).$$

Кроме того, поскольку $h^2\rho(z)^{-2} \leq 1$, $\rho(z)^{-2} \leq h^{-2}$ и $h^2\rho(z)^{-4} \leq h^{-2}$, в силу определения норм $|\cdot; S, \rho|$ и $|||\cdot|||_S$ получаем

$$|u^\perp; S, \rho|^2 \leq |||u^\perp|||_S^2 \leq E(u, u; S). \quad (3.23)$$

Итак, осталось оценить норму последнего слагаемого в (3.17). Отметим сначала, что несложные выкладки, использующие (3.4), приводят к неравенству

$$|da; S, \rho|^2 \leq ch^5\rho_0^{-2}\{\rho_0^{-2}a_1^2 + \rho_0^{-2}a_2^2 + h^{-2}a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2\}. \quad (3.24)$$

Обратимся теперь к формуле (3.19). Поскольку лемма 3.2 дает соотношение

$$|u; Q'_h, \rho|^2 \leq c(E(u, u; Q_h) + E(u, u; Q'_h)) \leq 2cE(u, u; Q_h) \quad (3.25)$$

и шар B содержится в Q'_h , в нашем распоряжении имеется норма $|u; B, \rho|$, позволяющая оценить интеграл в правой части (3.19). Начало координат $(y - y^0, z - z^0)$ совмещено с центром шара B , и поэтому матрица (3.20) вычисляется легко:

$$d_B = \frac{4\pi}{3}h^3R_\pm^3 \operatorname{diag}\left\{1, 1, 1, \frac{1}{5}h^2R_\pm^2, \frac{1}{5}h^2R_\pm^2, \frac{1}{5}h^2R_\pm^2\right\}. \quad (3.26)$$

Первая пара компонент столбца $J = (J_1, \dots, J_6)^t = \int_B d(x)^t u(x) dx$ удовлетворяет оценкам

$$|J_p|^2 \leq c \operatorname{mes}_3(B) \int_B |u_p|^2 dx \leq ch\rho_0^4 \int_B \frac{h^2}{\rho^4} |u_p|^2 dx \leq ch\rho_0^4 |u; B, \rho|^2, \quad p = 1, 2$$

(воспользовались (3.16)). Аналогично

$$|J_3|^2 \leq ch^3\rho_0^2 \int_B \rho^{-2} |u_3|^2 dx \leq ch^3\rho_0^2 |u; B, \rho|^2.$$

Пусть $\mathcal{R}(x) = |y - y^0|^2 + |z - z^0|^2 - h^2R_\pm^2$. Так как $\mathcal{R} = 0$ на ∂B , то интегрирование по частям при учете (3.16) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} |J_6|^2 &= \frac{1}{2} \left| \int_B \{(y_2 - y_2^0)u_1 - (y_1 - y_1^0)u_2\} dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} \left| \int_B \left\{ u_1 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y_2} - u_2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y_1} \right\} dx \right|^2 = \frac{1}{8} \left| \int_B \mathcal{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) dx \right|^2 \\ &\leq ch^2\rho_0^2 \operatorname{mes}_3(B) \int_B \frac{h^2}{\rho^2} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) dx \leq ch^2\rho_0^2 |u; B, \rho|^2. \end{aligned}$$

Тот же трюк дает неравенства

$$|J_{6-p}|^2 \leq |u; B, \rho|^2, \quad p = 1, 2.$$

Приведенная информация о $|J_1|, \dots, |J_6|$ и формула (3.26) для d_B позволяют оценить компоненты столбца $a = d_B^{-1}J$ и заключить, что правая часть (3.24) не превосходит $C|u; B, \rho|^2$. Из сказанного и из (3.23) выводим, что

$$\begin{aligned} |u; S, \rho|^2 &\leq 2|u^\perp; S, \rho|^2 + 2|da; S, \rho|^2 \leq c(E(u, u; S) \\ &\quad + |u; B, \rho|^2) \leq C(E(u, u; S) + |u; Q'_h \cap S, \rho|^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Просуммируем неравенства (3.27), которые справедливы для всех ячеек, составляющих стержень Ω_h , и имеют общую постоянную C . Ввиду предположения ii)

$$|u; \Omega_h, \rho|^2 \leq C\{E(u, u; \Omega_h) + |u; Q'^+, \rho|^2 + |u; Q'^-, \rho|^2\}. \quad (3.28)$$

В силу (3.25) последние два слагаемых мажорируются величинами $cE(u, u; Q_h^\pm) \leq cE(u, u; \Omega_h)$, после чего (3.27) принимает вид искомого неравенства (3.5). Теорема 3.1 доказана.

5. Одно утверждение о следах на боковой поверхности. Пусть вектор-функция $T \in C_0^\infty(\bar{\Omega}_1)^2$ такова, что

$$\nu_1(\eta, z)T_1(\eta, z) + \nu_2(\eta, z)T_2(\eta, z) = 1 \quad \text{при } z \in (-1, 1), \quad \eta \in \partial\omega(z).$$

Используя это равенство и интегрируя по частям на сечениях $\omega_h(z)$ стержня Ω_h , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_h(z)} |v(x)|^2 ds_y &= \int_{\omega_h(z)} \nabla_y \cdot (T(h^{-1}y)v(x)^2) dy \\ &\leq c \left(h^{-1} \int_{\omega_h(z)} |v(x)|^2 dy + \int_{\omega_h(z)} |v(x)| |\nabla_y v(x)| dy \right) \\ &\leq ch^{-1} \int_{\omega_h(z)} (|v(x)|^2 + h^2 |\nabla_y v(x)|^2) dy. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Умножив (3.29) на подходящий весовой множитель и проинтегрировав по $z \in (-1, 1)$, приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.3. *В условиях теоремы 3.1*

$$h^{3/2} \|\rho^2 u_i; L_2(\Gamma_h)\| + h^{1/2} \|\rho u_3; L_2(\Gamma_h)\| \leq c|u|, \quad i = 1, 2. \quad (3.30)$$

§ 4. Обоснование асимптотики

1. Вспомогательная задача и ее решение. Пусть $\mathcal{U}$ – сумма первых четырех слагаемых из правой части (2.9). В силу (2.38) слагаемые (2.16) и (2.20) удовлетворяют (1.8). Вместе с тем для $\mathcal{U}^{(0)}$ и $\mathcal{U}^{(1)}$ (решения задач (2.21) и (2.27)) условия Дирихле (1.8) выполняются разве лишь случайно. Поэтому, желая соблюсти (1.8), изменим вид асимптотического приближения, а именно умножим w на срезающую функцию $\chi \in C_0^\infty(-1, 1)$, т.е. положим $\mathbf{w} = \chi w$ и определим $\mathbf{U}^{(-2)}$, $\mathbf{U}^{(-1)}$, $\mathbf{U}^{(0)}$ формулами (2.16), (2.20) и (2.25) с заменой w на $\mathbf{w}$ ($\mathbf{U}^{(1)}$ требует отдельного обсуждения). Поскольку $\chi = 0$ вблизи торцов стержня Ω_h , каждая вектор-функция (из трех построенных) удовлетворяет (1.8). Фиксируем срезку χ так, чтобы $\chi(z) = 1$ при $|z| < 1 - 2h$ и $\chi(z) = 0$ при $|z| > 1 - h$. По существу χ зависит от “быстрых” переменных $h^{-1}(z \mp 1)$ и верны оценки

$$|\partial_z^k \chi(z)| \leq c_k h^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.1)$$

однако в дальнейших вычислениях эту зависимость удобно считать медленной.

Слагаемое $\mathbf{U}^{(-1)}$ определяется как решение задачи, подобной (2.27), а условие ее разрешимости удается соблюсти за счет незначительного видоизменения представления (2.6) правой части исходной задачи (1.6)–(1.8). Предугадать это условие несложно: результирующая задача для $\mathbf{w}$ получается в результате умножения системы (2.36) на χ и коммутирования дифференциальных операторов со срезкой. Иными словами, оно имеет вид

$$\mathcal{D}(-\partial_z) \mathcal{M} \mathcal{D}(\partial_z) \mathbf{w} = \chi \mathcal{F} + \mathcal{F}^1 \quad \text{на } (1, -1), \quad (4.2)$$

где $[A, B] = AB - BA$ – коммутатор операторов A и B ,

$$\mathcal{F}^1 \equiv (\mathcal{F}_1^1, \dots, \mathcal{F}_1^4)^t = [\mathcal{D}(-\partial_z) \mathcal{M} \mathcal{D}(\partial_z), \chi] w. \quad (4.3)$$

Укажем изменения в (2.6), достаточные для того, чтобы уравнение (4.2) возникло в результате применения процедуры, описанной в § 2. Во-первых, считаем, что $\tilde{f} = 0$ и $\tilde{g} = 0$. Во-вторых, заменим f^0 , g^0 и $\bar{f}^0$ произведениями $\chi f^0 = \mathbf{f}^0$, $\chi g^0 = \mathbf{g}^0$ и $\chi \bar{f}^0 = \bar{\mathbf{f}}^0$ (это действие приводит к появлению множителя χ при $\mathcal{F}$ в (4.2)). В-третьих, добавим к $\mathbf{f}^0$, $\mathbf{g}^0$ и $\bar{\mathbf{f}}^0$ выражения

$$\mathbf{f}^1(\eta, z) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_i(z) \Phi^i(\eta), \quad \mathbf{g}^1(\eta, z) = 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}^1(z) = & |\omega|^{-1} \sum_{i=1}^2 e^i \{ \mathcal{F}_i^1(z) \\ & + ((\eta_i, f_3^0(\eta, z))_{\omega(z)} + (\eta_i, g_3^0(\eta, z))_{\partial\omega(z)}) \partial_z \chi(z) \}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где Φ^q – жесткие смещения (2.14), а столбец $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_4)^t$ является решением алгебраической системы

$$\mathbf{K}(z)\mathbf{H}(z) = (0, 0, \mathcal{F}_3^1(z), \mathcal{F}_4^1(z))^t \quad (4.6)$$

с симметрической и положительно определенной (4×4) -матрицей Грама $\mathbf{K} = ((\Phi^q, \Phi^p)_{\omega(z)})_{p,q=1}^4$.

Приведем пояснения к формулам (4.4)–(4.6). В силу (4.6) вектор-функции $\mathbf{f}^1$, $\mathbf{g}^1$ и $\bar{\mathbf{f}}^1$ удовлетворяют требованиям (2.7), (2.8) и формируют в результирующей задаче для $\mathbf{w}$ правую часть $\mathcal{F}_3^1$. Кроме того, последнее слагаемое из фигурных скобок в (4.5) учитывает наличие дифференцирования ∂_z в представлении (2.35) для $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ (возникает дополнительный коммутатор). Наконец, каждая из величин в (4.4) и (4.5) обращается в нуль при $|z| > 1 - h$ и $|z| < 1 - 2h$ (поскольку содержит производные срезающей функции χ).

Итак, в силу (4.2) выполнены условия разрешимости задачи

$$\begin{aligned} L^0 \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathbf{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(-1)} \} + \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^1 \quad \text{в } \omega(z), \\ B^0 \mathbf{U}^{(1)} &= -\mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(0)} - \nu_0 \mathbb{D}_1 A \{ \mathbb{D}_\eta^t \mathbf{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(-1)} \} \\ &\quad + \mathbf{g}^0 + \mathbf{g}^1 \quad \text{на } \partial\omega(z), \end{aligned} \quad (4.7)$$

и вектор-функция $\mathbf{U}^{(1)}$ построена. Сумму $\mathbf{U} = h^{-2}\mathbf{U}^{(-2)} + \dots + h^1\mathbf{U}^{(1)}$ назовем *вспомогательным решением*. Вычислим невязку этого решения в уравнении (1.6) с измененной правой частью. Учитывая расщепление (2.4) оператора L , имеем

$$\begin{aligned} L\mathbf{U} - h^{-1}(\mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^1) - h^0(\bar{\mathbf{f}}^0 + \bar{\mathbf{f}}^1) &= h^{-4}L^0\mathbf{U}^{(-2)} + h^{-3}(L^0\mathbf{U}^{(-1)} + L^1\mathbf{U}^{(-2)}) \\ &\quad + h^{-2}(L^0\mathbf{U}^{(0)} + L^1\mathbf{U}^{(-1)} + L^2\mathbf{U}^{(-2)}) \\ &\quad + h^{-1}(L^0\mathbf{U}^{(1)} + L^1\mathbf{U}^{(0)} + L^2\mathbf{U}^{(-1)} - \mathbf{f}^0 - \mathbf{f}^1) \\ &\quad + h^0(L^1\mathbf{U}^{(1)} + L^2\mathbf{U}^{(0)} + \bar{\mathbf{f}}^0 + \bar{\mathbf{f}}^1) + h^1L^2\mathbf{U}^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Вспоминая структуру краевых задач для $\mathbf{U}^{(j)}$ (см. (2.10), (2.11), а также (4.7)), обнаруживаем, что в (4.8) множители при $h^{-4}, \dots, h^{-1}$ равны нулю. Введем краткие обозначения для последних двух слагаемых и перепишем (4.8) так:

$$L\mathbf{U} - h^{-1}(\mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^1) - h^0(\bar{\mathbf{f}}^0 + \bar{\mathbf{f}}^1) = h^0\mathbf{F}^0 - h^1\partial_z\mathbf{F}', \quad (4.9)$$

здесь $\mathbf{F}' = \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(1)}$ (поскольку $L^2 = -\partial_z \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_z^t$; см. (2.5)). Аналогично обрабатывается невязка, порожденная $\mathbf{U}$ в краевом условии (1.7) с правой частью $\mathbf{g}^0 + \mathbf{g}^1$. Принимая во внимание (2.3) и (2.4), находим, что

$$B\mathbf{U} - \mathbf{g}^0 - \mathbf{g}^1 = h^1\mathbf{G}^0 + h^0 N^{-1/2} \nu_0 \mathbf{F}' + (N^{-1/2} - 1)(\mathbf{G}^0 + \mathbf{g}^0 + \mathbf{g}^1) \quad (4.10)$$

(см. формулу для B^2 в (2.5)). Отметим, что множитель $N(h, x)^{-1/2} - 1 = O(h^2)$ мал,

$$\mathbf{G}^0 = \mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(0)} + \nu_0 \mathbb{D}_1 A (\mathbb{D}_\eta^t \mathbf{U}^{(0)} + \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(-1)}) \quad (4.11)$$

и в соответствии с п. 5 § 2

$$(\mathbf{F}^0, e^i)_{\omega(z)} + (\mathbf{G}^0, e^i)_{\partial\omega(z)} = 0, \quad z \in (-1, 1), \quad i = 1, 2. \quad (4.12)$$

Наконец, $\mathbf{U}$ удовлетворяет условиям Дирихле (1.8).

2. Сравнение вспомогательного и асимптотического решений. Оценка разности $\mathcal{U} - \mathbf{U}$, полученная в данном пункте, позволит во всех дальнейших рассуждениях иметь дело только со вспомогательным решением.

Сначала уточним свойства слагаемых в разложениях (2.6). Именно, будем считать, что

$$\begin{aligned} f^0 &\in H^1((-1, 1) \ni z \mapsto L_2(\omega(z))^3), \\ g^0 &\in H^1((-1, 1) \ni z \mapsto H^{1/2}(\partial\omega(z))^3), \\ \bar{f}^0 &\in L_2(-1, 1)^3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Более того, нормы в пространствах $H^1(\dots)$ по определению равны соответственно

$$\|f^0 \circ \varkappa^{-1}; H^1((-1, 1) \rightarrow L_2(\omega)^3)\|, \quad \|g^0 \circ \varkappa^{-1}; H^1((-1, 1) \rightarrow H^{1/2}(\partial\omega)^3)\|;$$

здесь $\varkappa$ – диффеоморфизм, упомянутый в п. 1 § 1, и $H^1(\Delta \rightarrow \mathfrak{H})$ – пространство абстрактных функций на отрезке Δ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$,

$$\|Z; H^1(\Delta \rightarrow \mathfrak{H})\| = \left(\int_{\Delta} (\|Z; \mathfrak{H}\|^2 + \|\partial_z Z; \mathfrak{H}\|^2) dz \right)^{1/2}.$$

Сумму норм функций (4.13) в указанных пространствах обозначим $\mathcal{N}_0$. В силу формул (2.31), (2.35) и теоремы 2.7, в которой $l = 1$, справедливо соотношение

$$\|w; H^4(-1, 1)^2 \times H^3(-1, 1)^2\| \leq c \|\mathcal{F}; L_2(-1, 1)^2 \times H^1(-1, 1)^2\| \leq C \mathcal{N}_0, \quad (4.14)$$

краткая запись которого такова: $\mathcal{N}_w \leq \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \leq C \mathcal{N}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Вектор-функции $\mathcal{U}$ и $\mathbf{U}$ связаны соотношением*

$$|\mathcal{U} - \mathbf{U}; \Omega_h, \rho| \leq C_{\delta} h^{(1-\delta)/2} \mathcal{N}_0, \quad (4.15)$$

в котором $\delta > 0$ – произвольное число, $|\cdot|$ – выражение (3.4), постоянная C_{δ} зависит от δ , но не от w и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению $\mathcal{U}$ и $\mathbf{U}$ достаточно установить оценки

$$h^k |\mathcal{U}^{(k)} - \mathbf{U}^{(k)}; \Omega_h, \rho| \leq c_{\delta} h^{(1-\delta)/2} \mathcal{N}_0, \quad (4.16)$$

где $k = -2, -1, 0, 1$. Среди первой тройки индексов рассмотрим представительный случай $k = -1$. В силу (2.20)

$$\mathcal{U}^{(-1)} - \mathbf{U}^{(-1)} = (1 - \chi) \left(w_3 e^3 + w_4 \Phi^4 - e^3 \sum_{i=1}^2 \eta_i \partial_z w_i \right) - e^3 \sum_{i=1}^2 \eta_i w_i \partial_z \chi.$$

Применяя различные варианты одномерного неравенства Харди (см. [39]), находим, что при любом $\delta > 0$ в соответствии с (2.38)

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1 - |z|)^{\delta-3} \{ |w_{i+2}|^2 + |\partial_z w_i|^2 + (1 - |z|)^{-2} |w_i|^2 \} dz \\
& \leq c_\delta \int_{-1}^1 (1 - |z|)^{\delta-1} \{ |\partial_z w_{i+2}|^2 + |\partial_z^2 w_i|^2 \} dz \\
& \leq c_\delta \int_{-1}^1 (1 - |z|)^{\delta+1} \{ |\partial_z w_{i+2}|^2 + |\partial_z^2 w_{i+2}|^2 + |\partial_z^2 w_i|^2 + |\partial_z^3 w_i|^2 \} dz \\
& \leq c_\delta \mathcal{N}_w^2, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Заметим, что носители функций $1 - \chi$ и $\partial_z \chi$ содержатся во множестве $\Delta(h) = [-1, 2h - 1] \cup [1 - 2h, 1]$, на котором $h \leq \rho(z) \leq 3h$ и $(1 - |z|)^{-1} \geq (2h)^{-1}$. Теперь в соответствии с (4.17) и (3.4), (4.1) получаем

$$\begin{aligned}
& h^{-2} |\mathcal{U}^{(-1)} - \mathbf{U}^{(-1)}; \Omega_h, \rho|^2 \leq ch^{-2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Delta(h)} \text{mes}_2(\omega_h(z)) \\
& \quad \times \{ h^{-4} |w_i|^2 + h^{-2} (|\partial_z w_i|^2 + |w_{i+2}|^2) + h^0 (|\partial_z^2 w_i|^2 + |\partial_z w_{i+2}|^2) \} dz \\
& \leq c \sum_{i=1}^2 h^{5-\delta-4} \int_{\Delta(h)} (1 - |z|)^{\delta-5} \{ |w_i|^2 + (1 - |z|)^2 (|\partial_z w_i|^2 + |w_{i+2}|^2) \\
& \quad + (1 - |z|)^4 (|\partial_z^2 w_i|^2 + |\partial_z w_{i+2}|^2) \} dz \leq c_\delta h^{1-\delta} \mathcal{N}_w^2,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

причем $\omega_h(z) = \{y: h^{-1}y \in \omega(z)\}$ – сечение стержня, обладающее площадью $O(h^2)$.

Формулы (4.18) и (4.14) приводят к неравенству (4.16) при $k = -1$. Поскольку известен явный вид $\mathcal{U}^{(-2)}$, $\mathbf{U}^{(-2)}$ и $\mathcal{U}^{(0)}$, $\mathbf{U}^{(0)}$ (см. (2.16) и (2.25)), вывод оценок (4.16) при $k = -2$ и $k = 0$ столь же прост.

Обратимся к случаю $k = 1$. В силу (4.7) и (2.27) разность $\mathcal{R}^{(1)} = \mathcal{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(1)}$ является решением задачи (2.12), в которой

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= (1 - \chi) \{ \mathbb{D}_\eta A \mathbb{D}_z^t \Psi + \mathbb{D}_z A (\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}) \} \mathcal{D}(\partial_z) w \\
& \quad + \mathcal{K}^1 w + (1 - \chi) f^0 - \mathbf{f}^1, \\
\mathcal{G} &= -(1 - \chi) \{ \mathbb{D}_\nu A \mathbb{D}_z^t \Psi + \nu_0 \mathbb{D}_1 A (\mathbb{D}_\eta^t \Psi + \mathcal{Y}) \} \mathcal{D}(\partial_z) w \\
& \quad + \mathcal{K}^0 w + (1 - \chi) g^0 - \mathbf{g}^1,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

где $\mathbf{f}^1$ и $\mathbf{g}^1 = 0$ взяты из (4.4), а $\mathcal{K}^1$ и $\mathcal{K}^0$ – коммутаторы, образовавшиеся в результате вынесения срезки χ за дифференциальные операторы $\mathbb{D}_z$ и $\mathcal{D}(\partial_z)$. Иными словами,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^P(\eta, z, \partial_z) w(z) &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{s=0}^3 h^{s-3} k_{i,s}(\eta, z) \partial_z^s w_i(z) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{s=0}^2 h^{s-2} k_{i+2,s}(\eta, z) \partial_z^s w_{i+2}(z) \right\},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

причем в силу (4.1)

$$|k_{q,s}(\eta, z)| + h|\partial_z k_{q,s}(\eta, z)| \leq \text{const}.$$

Вектор-функции (4.19) аннулируются вне множества $\Upsilon(h) = \{x \in \overline{\Omega}_h : 1 \geq |z| \geq 1 - 2h\}$. Подчеркнем, что $h \leq \rho \leq 3h$ на $\Upsilon(h)$. Теперь, вычисляя нужную норму, применим оценку, указанную в предложении 2.1, и получим

$$\begin{aligned} & h^2 |\mathcal{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(1)}; \Upsilon(h), \rho|^2 \leq \\ & \leq ch^2 \int_{\Delta(h)} (h^{-2} \|\mathcal{R}^{(1)}; H^1(\omega(z))\|^2 + \|\partial_z \mathcal{R}^{(1)}; H^1(\omega(z))\|^2) h^2 dz \\ & \leq ch^4 \left\{ \int_{\Delta(h)} (h^{-2} \|(f^0, g^0); L_2(\omega(z)) \times L_2(\partial\omega(z))\|^2 + \right. \\ & \quad + \|(\partial_z f^0, \partial_z g^0); L_2(\omega(z)) \times L_2(\partial\omega(z))\|^2) dz \\ & \quad + \int_{\Delta(h)} (h^{-2} \|\mathbf{f}^1; L_2(\omega(z))\|^2 + \|\partial_z \mathbf{f}^1; L_2(\omega(z))\|^2) dz \\ & \quad + \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{s=0}^4 h^{2(s-4)} \int_{\Delta(h)} |\partial_z^2 w_i|^2 dz \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{s=0}^3 h^{2(s-3)} \int_{\Delta(h)} |\partial_z^2 w_{i+2}|^2 dz \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

(не забыли о дополнительном множителе $\text{mes}_2(\omega_h(z)) = O(h^2)$). Мажоранта $ch^{-2} \mathcal{N}_0^2$ для первого интеграла I_1 в правой части (4.21) находится посредством расширения области интегрирования до интервала $(-1, 1)$. В согласии с (4.4), (4.6) и (4.3) второй интеграл I_2 обрабатывается следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2 & \leq \int_{\Delta(h)} (\|\mathbf{K}(z)^{-1}\|^2 + \|\partial_z \mathbf{K}(z)^{-1}\|^2) \sum_{q=3}^4 (h^{-2} \|\mathcal{F}_q^1; L_2(\omega(z))\|^2 \\ & \quad + \|\partial_z \mathcal{F}_q^1; L_2(\omega(z))\|^2) dz \\ & \leq ch^{-2} \int_{\Delta(h)} |[\mathcal{D}(-\partial_z) \mathcal{M} \mathcal{D}(\partial_z), \chi(z)] w(z)|^2 dz \\ & \leq ch^{-2} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{s=0}^3 h^{2(s-3)} \int_{\Delta(h)} |\partial_z^s w_i(z)|^2 dz \right. \\ & \quad \left. + \sum_{s=0}^2 h^{2(s-2)} \int_{\Delta(h)} |\partial_z^s w_{i+2}(z)|^2 dz \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Последнее выражение не превосходит $c\Sigma$, где Σ – сумма по $i = 1, 2$ из фигурных скобок в (4.21). Таким образом, оценивание правой части (4.21) заканчивается аналогично (4.18): при помощи (4.17) проверяем, что

$$h^4 \Sigma \leq c_\delta h^4 \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{s=0}^2 h^{2(s-4)+5-\delta-2s} \int_{\Delta(h)} (1-|z|)^{\delta-5+2s} |\partial_z^s w_i(z)|^2 dz \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=3}^4 h^{2(s-4)} \int_{\Delta(h)} |\partial_z^s w_i(z)|^2 dz \\
& + \sum_{s=0}^1 h^{2(s-3)+3-\delta-2s} \int_{\Delta(h)} (1-|z|)^{\delta-3+2s} |\partial_z^s w_{i+2}(z)|^2 dz \\
& + \sum_{s=2}^3 h^{2(s-3)} \int_{\Delta(h)} |\partial_z^s w_{i+2}(z)|^2 dz \Big\} \leq C_\delta h^{1-\delta} \mathcal{N}_w^2. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Итак, оценки (4.16), а значит, и само неравенство (4.15) установлены.

3. Промежуточная оценка асимптотического остатка. Фиксируем некоторое $\delta > 0$ в неравенстве (4.15). Малость остаточных членов $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ в представлениях (2.6) выразим соотношением

$$\begin{aligned}
& h^{-1} \sum_{i=1}^2 (\|\rho^2 \tilde{f}_i; L_2(\Omega_h)\| + h^{1/2} \|\rho^2 \tilde{g}_i; L_2(\Gamma_h)\|) + \\
& + \|\rho \tilde{f}_3; L_2(\Omega_h)\| + h^{1/2} \|\rho \tilde{g}_3; L_2(\Gamma_h)\| = h^{(1-\delta)/2} \widetilde{\mathcal{N}_\delta}, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

считая, что $\widetilde{\mathcal{N}_\delta}$ — “величина порядка единицы”.

Согласно (1.6)–(1.8), (2.6) и (4.9), (4.10) разность $\mathbf{R} = u - \mathbf{U}$ удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned}
L\mathbf{R} &= \tilde{f} + \mathbf{F} - \mathbf{F}^0 + h\partial_z \mathbf{F}' \quad \text{в } \Omega_h, \\
B\mathbf{R} &= \tilde{g} + \mathbf{G} - \mathbf{G}^0 - N^{-1/2} \nu_0 \mathbf{F}' \quad \text{на } \Gamma_h, \\
\mathbf{R} &= 0 \quad \text{на } \omega_h(\pm 1),
\end{aligned} \tag{4.25}$$

где $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{G}^0$ и $\mathbf{F}'$ определены в (4.9), (4.11) и

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= h^{-1}(1-\chi)f^0 + h^{-1}\mathbf{f}^1 + (1-\chi)\bar{f}^0 + \bar{\mathbf{f}}^1, \\
\mathbf{G} &= (1-\chi)g^0 + (1-N^{-1/2})(\mathbf{G} + \chi g^0).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Подставим $\mathbf{R}$ в формулу Грина (1.11) на обе позиции. Пользуясь (4.25) и “перебрасывая” производную ∂_z с $\mathbf{F}'$ на $\mathbf{R}$ при учете (2.2), получаем равенство

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{R}, \mathbf{R}; \Omega_h) &= (\tilde{f}, \mathbf{R})_{\Omega_h} + (\tilde{g}, \mathbf{R})_{\Gamma_h} + (\mathbf{F}, \mathbf{R})_{\Omega_h} + (\mathbf{G}, \mathbf{R})_{\Gamma_h} \\
&\quad - (\mathbf{F}^0, \mathbf{R})_{\Omega_h} - (h\mathbf{G}^0, \mathbf{R})_{\Gamma_h} - h(\mathbf{F}', \partial_z \mathbf{R})_{\Omega_h}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Предположение (4.13) обеспечивает включение w и $\mathbf{w}$ в пространство $H^4(-1, 1)^2 \times H^3(-1, 1)^2$. Вместе с тем, вектор-функции $\mathcal{U}$ и $\mathbf{U}$ принадлежат $H^1(\Omega_h)^3$, а каждое из слагаемых $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^0$, $\mathbf{G}'$ в (4.25) содержится в $L_2(\Omega_h)^3$ и $L_2(\Gamma_h)^3$ соответственно. Таким образом, задача (4.25) нуждается в слабой постановке (как интегральное тождество, получающееся, если $\mathbf{R}$ на вторых позициях в (4.27) заменить произвольной пробной функцией $v \in \mathring{H}^1(\Omega_h)^3$, подчиненной (1.8)). Поскольку для вывода дальнейших оценок требуется только равенство (4.27), мы избегаем обсуждать задачу (4.24) более подробно.

Теорема 3.1 дает оценку снизу для левой части (4.27) через величину $|\mathbf{R}|^2$ (c – положительная постоянная). Теперь нужно оценить слагаемые справа в (4.27). Благодаря (4.24) и (3.4) сразу же обнаруживаем, что

$$|(\tilde{f}, \mathbf{R})_{\Omega_h} + (\tilde{g}, \mathbf{R})_{\Gamma_h}| \leq ch^{(1-\delta)/2} \widetilde{\mathcal{N}_\delta} |\mathbf{R}|.$$

Итак, для доказательства неравенства

$$c_A |\mathbf{R}|^2 \leq E(\mathbf{R}, \mathbf{R}; \Omega_h) \leq ch^{(1-\delta)/2} (\widetilde{\mathcal{N}_\delta} + \mathcal{N}_0) |\mathbf{R}| \quad (4.28)$$

достаточно проверить такие оценки:

$$|(\mathbf{F}, \mathbf{R})_{\Omega_h} + (\mathbf{G}, \mathbf{R})_{\Gamma_h}| \leq ch^{(1-\delta)/2} \mathcal{N}_0 |\mathbf{R}|, \quad (4.29)$$

$$|(\mathbf{F}^0, \mathbf{R})_{\Omega_h} + (h\mathbf{G}^0, \mathbf{R})_{\Gamma_h}| \leq ch^{(1-\delta)/2} \mathcal{N}_0 |\mathbf{R}|, \quad (4.30)$$

$$\|\rho \mathbf{F}'; L_2(\Omega_h)\| \leq ch^{(1-\delta)/2} \mathcal{N}_0. \quad (4.31)$$

Формула (4.31) написана при учете (3.4); с нее и начнем проверку. Так как $\mathbf{F}' = \mathbb{D}_1 A \mathbb{D}_z^t \mathbf{U}^{(1)}$, имеем

$$\|\rho \mathbf{F}'; L_2(\Omega_h)\|^2 \leq c \|\rho \partial_z \mathbf{U}^{(1)}; L_2(\Omega_h)\|^2.$$

Обращаясь к задаче (4.7) и формулам (2.25), (2.20), видим, что последнее выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & ch^2 \left\{ \|\rho \mathbf{w}; H^4(-1, 1)^2 \times H^3(-1, 1)^2\|^2 + \int_{\Delta(h)} \rho^2 \|\partial_z \mathbf{f}^1; L_2(\omega(z))\|^2 dz \right. \\ & \quad \left. + \int_{-1}^1 \rho^2 \|(\partial_z \mathbf{f}^0, \partial_z \mathbf{g}^0); L_2(\omega(z)) \times L_2(\partial_z \omega(z))\|^2 dz \right\} \\ & \leq h^2 \{ \|w; H^4(-1, 1)^2 \times H^3(-1, 1)^2\|^2 + h^2 (\Sigma + I_2) + \mathcal{N}_0^2 \} \\ & \leq c(h^2 \mathcal{N}_w^2 + h^{1-\delta} \mathcal{N}_w^2 + h^2 \mathcal{N}_0^2) \leq Ch^{1-\delta} \mathcal{N}_0^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Поясним выкладки. Вычисляя норму $\mathbf{w} = \chi w$, произвели коммутирование со срезкой χ , вызвавшее появление величины Σ , уже фигурировавшей в (4.21). Интеграл

по $\Delta(h)$ сравнили с аналогичным интегралом I_2 (4.21). При рассмотрении интеграла, содержащего $\mathbf{f}^0 = \chi f^0$ и $\mathbf{g}^0 = \chi g^0$, учли неравенство $\rho \leq \text{const}$ и включения (4.13). Общий множитель h^2 связан с площадью сечения $\omega_h(z)$, а дополнительные множители h^2 при Σ и I_2 – с весом ρ , равным $O(h)$ на $\Delta(h)$.

Убедившись в справедливости (4.31), приступим к проверке (4.30). Вспоминая условия ортогональности (4.12), имеем

$$(\mathbf{F}_i^0, \mathbf{R}_i)_{\Omega_h} + (h\mathbf{G}_i^0, \mathbf{R}_i)_{\Gamma_h} = (\mathbf{F}_i^0, \mathbf{R}_i^\perp)_{\Omega_h} + (h\mathbf{G}_i^0, \mathbf{R}_i^\perp)_{\Gamma_h}, \quad i = 1, 2$$

(множитель h исчезает при переходе к быстрым переменным); здесь

$$\mathbf{R}_i^\perp(y, z) = \mathbf{R}_i(y, z) - |\omega_h(z)|^{-1} \int_{\omega_h(z)} \mathbf{R}_i(y, z) dy,$$

причем в силу неравенства Пуанкаре, примененного на каждом из сечений стержня,

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}|^2 &\geq \|h\rho^{-1}\nabla_y \mathbf{R}_i; L_2(\Omega_h)\|^2 \\ &= h^2 \|\rho^{-1}\nabla_y \mathbf{R}_i^\perp; L_2(\Omega_h)\|^2 \geq c \|\rho^{-1}\mathbf{R}_i^\perp; L_2(\Omega_h)\|^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

и при учете (3.29)

$$|\mathbf{R}|^2 \geq ch \|\rho^{-1}\mathbf{R}_i^\perp; L_2(\Gamma_h)\|^2. \quad (4.34)$$

Случай $i = 3$ не требует отдельных рассмотрений. В итоге

$$|(\mathbf{F}^0, \mathbf{R})_{\Omega_h} + (h\mathbf{G}^0, \mathbf{R})_{\Gamma_h}| \leq c|\mathbf{R}| \{ \|\rho\mathbf{F}^0; L_2(\Omega_h)\|^2 + h\|\rho\mathbf{G}^0; L_2(\Gamma_h)\|^2 \}^{1/2}.$$

Изучим выражение J из фигурных скобок. Явные формулы для $\mathbf{G}^0$ и $\mathbf{F}^0$ (см. (4.11) и ср. (4.9) с (4.8)) показывают, что

$$\begin{aligned} J &\leq ch^2 \left\{ \|\rho\mathbf{w}; H^4(-1, 1)^2 \times H^3(-1, 1)^2\|^2 \right. \\ &\quad + \int_{\Delta(h)} \rho^2 \|\partial_z \mathbf{f}^1; L_2(\omega(z))\|^2 dz \\ &\quad + \int_{-1}^1 \rho^2 \|(\partial_z \mathbf{f}^0, \partial_z \mathbf{g}^0); L_2(\omega(z)) \times L_2(\partial_z \omega(z))\|^2 dz \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \rho^2 \chi^2 |\bar{f}^0|^2 dz + \int_{\Delta(h)} \rho^2 |\bar{\mathbf{f}}^1|^2 dz \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Все слагаемые справа, за исключением двух последних интегралов, уже обработаны в (4.32). Мажорантой для интеграла, содержащего $\bar{f}^0$, служит величина $\mathcal{N}_0^2$ (см. (4.13)). Наконец, согласно (4.5) и (4.3)

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(h)} \rho^2 |\bar{\mathbf{f}}^1|^2 dz &\leq ch^2 \int_{\Delta(h)} |\bar{\mathbf{f}}^1|^2 dz \leq ch^2 \int_{\Delta(h)} \left(\sum_{i=1}^2 |\mathcal{F}_i^1|^2 \right. \\ &\quad \left. + h^{-2} \|(f_3^0, g_3^0); L_2(\omega(z)) \times L_2(\partial\omega(z))\|^2 \right) dz \leq c(h^2 \Sigma + \mathcal{N}_0^2), \end{aligned} \quad (4.36)$$

т.е. ввиду (4.32), (4.22) и (4.23) справедливость (4.30) сомнений не вызывает.

Осталось удостовериться в (4.29). Векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ определены в (4.26). Обратим внимание на следующие факты: во-первых, $N(h, x) = 1 + O(h^2)$ (см. комментарии к (2.2)) и, во-вторых, в силу (2.7), (4.4) и (4.6)

$$((1 - \chi)\mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^1, e^i)_{\omega(z)} + ((1 - \chi)g^0, e^i)_{\partial\omega(z)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, помятуя о структуре нормы (3.4) и применяя неравенства (3.30), (4.33) и (4.34), получаем

$$\begin{aligned} |(\mathbf{F}, \mathbf{R})_{\Omega_h} + (\mathbf{G}, \mathbf{R})_{\Gamma_h}| &\leq \\ &\leq c|\mathbf{R}| \left\{ h^2 \int_{\Delta(h)} (h^{-2}\rho^2 \|(1 - \chi)(f^0, g^0); L_2(\omega(z)) \times L_2(\partial\omega(z))\|^2 \right. \\ &\quad \left. + h^{-2}\rho^2 \|\mathbf{f}^1; L_2(\omega(z))\|^2 + h^{-2}\rho^4 |(1 - \chi)\bar{f}^0 + \bar{\mathbf{f}}^1|^2) dz \right. \\ &\quad \left. + h^4 \int_{\Gamma_h} h^{-3}\rho^4 |\mathbf{G}^0 + \chi g^0|^2 ds_x \right\}. \end{aligned}$$

В интегралах по $\Delta(h)$ вес ρ безболезненно превращается в h – таким образом возникают интегралы, которыми мы уже занимались в (4.21), (4.35) и (4.36). За счет запасного множителя h^4 (фрагмент $1 - N^{-1/2}$ в (4.26)) интеграл по Γ_h также сводится к исследованным ранее интегралам. Значит, (4.29) действительно имеет место.

Сформулируем оценку, вытекающую из установленного неравенства (4.28).

ТЕОРЕМА 4.3. *При сформулированных предположениях решение и задачи (1.6)–(1.8) и вспомогательное асимптотическое решение $\mathbf{U}$ удовлетворяют оценке*

$$|u - \mathbf{U}| + \|\varepsilon(u - \mathbf{U}); L_2(\Omega_h)\|^2 \leq c_\delta h^{(1-\delta)/2} (\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_\delta), \quad (4.37)$$

где $\mathcal{N}_0$ и $\widetilde{\mathcal{N}}_\delta$ – нормы слагаемых в представлении (2.6) (см. (4.13) и (4.24)), а постоянная c_δ зависит от $\delta > 0$, но не от решения u и параметра $h \in (0, 1)$.

4. Оправдание асимптотического представления решения. Аналогично выводу оценки (4.15) нетрудно проверить неравенство

$$\|\varepsilon(u - \mathbf{U}); L_2(\Omega_h)\|^2 \leq C_\delta h^{(1-\delta)/2} \mathcal{N}_0.$$

Кроме того, прямые вычисления убеждают в том, что

$$|h\mathcal{U}^{(1)}| + \|\varepsilon(h\mathcal{U}^{(1)}); L_2(\Omega_h)\| \leq ch^1 \mathcal{N}_0$$

(показатель степени h в мажоранте предопределен величинами $h\|\partial\mathcal{U}_i^{(1)}/\partial y_i; L_2(\Omega_h)\| = \|\partial\mathcal{U}_i^{(1)}/\partial \eta_i; L_2(\Omega_h)\|$, $i = 1, 2$, присутствующими в обоих слагаемых слева). Теперь предложение 4.1 и теорема 4.3 приводят к центральному утверждению статьи.

ТЕОРЕМА 4.4. *При сформулированных предположениях (см. первые пункты в § 1–§ 3 и п. 2 данного параграфа) решение и задачи (1.6)–(1.8) и асимптотическое решение $\mathcal{W}$ из (3.6), построенное в согласии с (2.16), (2.20), (2.25) и (2.36), (2.38), связаны соотношением*

$$|u - \mathcal{W}| + \|\varepsilon(u - \mathcal{W}); L_2(\Omega_h)\|^2 \leq c_\delta h^{(1-\delta)/2}(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_\delta), \quad (4.38)$$

где обозначения те же, что и в (4.37).

Так как $|\mathcal{W}| = O(h^0)$ (см. п. 2 § 3) и $\|\varepsilon(\mathcal{W}); L_2(\Omega_h)\| = O(h^0)$ (проверяется аналогично), теорема 4.4 в самом деле обосновывает асимптотику $u \sim \mathcal{W}$. Интегральная оценка (4.38) позволяет, в частности, установить сходимость функций $\Omega_1 \ni (\eta, z) \mapsto h^2 u_i(h\eta, z)$, $i = 1, 2$ (нормированных поперечных смещений), в $L_2(\Omega_1)$ к компонентам w_i решения w результирующей задачи (2.36), (2.38). Более того, выполняется неравенство

$$\|h^2 u_i - w_i; L_2(\Omega_1)\| \leq c_1 h(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_1). \quad (4.39)$$

Подчеркнем, что скорость сходимости ограничена величиной Ch из-за присутствия младших членов асимптотики u_i , содержащих w_4 , а не мажорантой в (4.38), которую можно взять равной $c_1 h^0(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_1)$ (дополнительный множитель h появляется благодаря растяжению координат). Эти же члены препятствуют сходимости u_i к w_i в $H^1(\Omega_1)$.

После удаления из u_3 асимптотического фрагмента (2.20), содержащего w_1 и w_2 , получается такая оценка:

$$\|h\{u_3 + h^{-1}(\eta_1 \partial_z w_1 + \eta_2 \partial_z w_2)\} - w_3; L_2(\Omega_1)\| \leq c_1 h(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_\delta).$$

Для идентификации угла закручивания положим $u' = (u_1, u_2)^t$ и

$$\tilde{v}(y, z) = v(y, z) - |\omega(z)|^{-1} \int_{\omega(z)} v(h\eta, z) d\eta.$$

Теперь, используя проинтегрированное по $z \in (-1, 1)$ неравенство Пуанкаре на сечении $\omega_h(z)$

$$\|\rho^{-1} \tilde{v}; L_2(\Omega_h)\| \leq ch \|\rho^{-1} \nabla_y v; L_2(\Omega_h)\|$$

и вспоминая определение (3.4) нормы $|\cdot|$, получаем

$$\|h\tilde{u}' - \alpha(\tilde{\eta}_1 e^{2'} - \tilde{\eta}_2 e^{1'}) w_4; L_2(\Omega_1)\| \leq ch(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_\delta).$$

Для деформации $\varepsilon(u)$ (а потому и для напряжений $\sigma(u) = A\varepsilon(u)$) на основании оценки (4.38) и сказанного в п. 2 § 3 выводим неравенство

$$\|\varepsilon(u) - h^{-1}(\mathcal{D} + \mathbb{D}_\eta \mathcal{V}) \mathcal{D}(\partial_z) w; L_2(\Omega_h)\| \leq c_\delta h^{(1-\delta)/2}(\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_\delta). \quad (4.40)$$

Отметим, что вычитаемое под знаком нормы является ничем иным, как столбцом деформаций, найденным согласно одномерной модели упругого стержня. Наконец, из приведенных формул вытекает соотношение, связывающее энергетические функционалы (2.43) и (2.24),

$$|P(u, f, g) - \mathbf{P}(w, \mathcal{F})| \leq c_\delta h^{(1-\delta)/2} (\mathcal{N}_0 + \widetilde{\mathcal{N}}_\delta)^2.$$

Асимптотическая точность оценки (4.38) подтверждается известными исследованиями явления пограничного слоя вблизи торцов прямолинейного стержня (см. [23]–[27] и др.). Так, для компенсации невязки составляющей $h^0 \mathcal{U}^{(0)}(\eta, z)$ в условиях Дирихле (1.8) приходится в асимптотическое разложение (2.9) добавить слагаемые $h^0 \mathcal{X}^\pm(\xi^\pm)$, записанные в быстрых переменных $\xi^\pm = (h^{-1}y, h^{-1}(1 \mp z))$ и являющиеся экспоненциально затухающими на бесконечности решениями специальных задач теории упругости в полуцилиндрах $\omega(\pm 1) \times \mathbb{R}_+$. Вычисляя нормы $|\mathcal{X}^\pm|$ и $\|\varepsilon(\mathcal{X}^\pm); L_2(\Omega_h)\|$, видим, что они равны $O(h^{1/2})$. Таким образом, из-за отсутствия $\mathcal{X}^\pm$ в асимптотическом решении $\mathcal{W}$ показатель степени h в оценке (4.38) нельзя сделать большим $1/2$, что и находит свое отражение в неравенстве $\delta > 0$. Кроме того, величины $\varepsilon(\mathcal{X}^\pm)$ и $\sigma(\mathcal{X}^\pm)$ имеют вблизи торцов стержня Ω_h тот же порядок h^{-1} , что $\varepsilon(\mathcal{W})$ и $\sigma(\mathcal{W})$, т.е. рассчитывать на равномерное приближение пространственных полей деформаций и напряжений асимптотическими конструкциями (3.6) или (2.9) не приходится, а интегральная оценка (4.40) стала возможной только благодаря экспоненциальному затуханию пограничного слоя на удалении от торцов стержня.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Согласно (2.16), (2.20) и (2.25) включение $\mathcal{W} \in H^1(\Omega_h)^3$ обеспечивается условием $w \in H^3(-1, 1)^2 \times H^2(-1, 1)^2$, более слабым, чем указанное в (4.14) (ранее в приближенном решении $\mathcal{U}$ использовалось слагаемое $h^1 \mathcal{U}^{(1)}$, требовавшее двукратной дифференцируемости $\mathcal{D}(\partial_z)w(z)$). Это обстоятельство позволяет сформулировать гипотезу: теорема 4.4 остается верной и при уменьшении на единицу показателей гладкости по переменной z в предположении (4.13). Вопрос о ее справедливости, ответить на который при помощи изложенного в статье подхода, к сожалению, не удалось, весьма важен для приложений, поскольку расширяет область обоснованной применимости одномерных моделей. Например, условия (4.13) отвергает кусочно-постоянное погружение вдоль оси цилиндра; в то же время нормы $|\cdot|$ и $\|\varepsilon(\cdot); L_2(\Omega_h)\|$ дополнительного внутреннего пограничного слоя, возникающего вблизи поверхности $\{z = z^0\}$ разрывов функций f^0, g^0 и описываемого решениями задачи теории упругости в цилиндре $\omega(z^0) \times \mathbb{R}$, оказываются величинами $O(h)$ и не могут повлиять на мажоранту в (4.38).

Список литературы

1. *Clebsch A.* Theorie der Elastizität der festen Körper. Leipzig, 1862.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
3. *Лурые Ю. Н., Джанелидзе Г. Ю.* Задача Сан-Венана для естественно скрученных стержней // ДАН СССР. 1939. Т. 24. № 1. С. 23–26; № 3. С. 225–229; № 4. С. 325–326.
4. *Легницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971.

5. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1978.
6. *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979.
7. *Ржаницын А. Р.* Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982.
8. *Светлицкий В. А.* Механика стержней. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1987.
9. *Бердичевский В. Л.* Об энергии упругого стержня // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 40. № 4. С. 704–718.
10. *Елисеев В. В.* К нелинейной динамике упругого стержня // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. № 4. С. 635–642.
11. *Галактионов Е. В., Тропп Э. А.* Асимптотический метод расчета термоупругих напряжений в тонком стержне // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1976. Т. 40. № 7. С. 1399–1406.
12. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Couplage flexion-torsion-traction dans les poutres anisotropes a section heterogene // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 2. 1991. V. 312. P. 337–344.
13. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Coques elastiques mines. Proprietes asymptotiques. Paris: Masson, 1997.
14. *Елисеев В. В., Орлов С. Г.* Асимптотическое расщепление в пространственной задаче линейной упругости для удлиненных тел со структурой // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63. № 1. С. 93–101.
15. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 5. С. 914–924.
16. *Ciarlet P. C., Destuynder P. A.* Justification of the two-dimensional linear plate model // J. Mecanique. 1979. V. 18. P. 315–344.
17. *Bermúdez A., Viaño J. M.* Une justification des équations de la thermoélasticité des poutres à section variable par des méthodes asymptotiques // RAIRO Analyse Numérique. 1984. V. 18. P. 347–376.
18. *Tutek Z., Aganovich I.* A justification of the one-dimensional model of an elastic beam // Math. Methods in Appl. Sci. 1986. V. 8. P. 1–14.
19. *Trabucho de Campos L., Viaño J. M.* Existence and characterization of higher order terms in an asymptotic expansion method for linearized elastic beams // Asymptotic Analysis. 1989. V. 2. P. 223–255.
20. *Le Dret H.* Modeling of the junction between two rods // J. Math. Pures Appl. 1989. V. 68. P. 365–397.
21. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domains modélisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
22. *Veiga M. F.* Asymptotic method applied to a beam with a variable cross section // Asymptotic methods for elastic Structures. Berlin–N.Y.: Walter de Gruyter, 1995. P. 237–254.
23. *Назаров С. А.* Структура решения эллиптических краевых задач и тонких областях // Вестн. ЛГУ. 1982. № 7. С. 65–68.
24. *Козлова М. В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости для тонкого неоднородного бруса // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1989. № 5. P. 6–10.
25. *Козлова М. В., Панасенко Г. П.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородном стержне // ЖВМиМФ. 1991. Т. 31. № 10. С. 1592–1596.
26. *Panasenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems. I // Russian J. of Math. Physics. 1994. V. 2. № 3. P. 325–352; II // ibid. 1996. V. 4. № 1. P. 87–116.
27. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewskij B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 2. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
28. *Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В.* Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ // ЖВМиМФ. 1986. Т. 26. № 7. С. 1032–1048.

29. Назаров С. А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
30. Назаров С. А., Пилецкас К. И. Рейнольдсово течение жидкости в тонком трехмерном канале // Литовский матем. сб. 1990. Т. 30. № 4. С. 772–783.
31. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Hardy's and Korn's type inequalities and their applications // Rendiconti di Matematica. Ser. VII. 1990. V. 10. P. 641–666.
32. Назаров С. А. Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. 1992. № 8. Р. 19–24.
33. Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G. Korn's inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants // Asymptotic analysis. 1994. V. 8. P. 1–14.
34. Nazarov S. A. Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20. № 3. P. 219–243.
35. Назаров С. А. Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы матем. анализа. Вып. 16. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 167–192.
36. Кондратьев В. А., Олейник О. А. О зависимости констант в неравенстве Корна от параметра, характеризующего геометрию области // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 157–158.
37. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
38. Назаров С. А. Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы матем. анализа. Вып. 17. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. Р. 101–152.
39. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

Поступило в редакцию
3.VIII.1998