Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие расслоения Фано, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 3, 131–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:27:34

УДК 513.6

А. В. Пухликов

Бирационально жесткие расслоения Фано

Доказана бирациональная сверхжесткость общих расслоений Фано вида $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$, слой которых $W_M \subset \mathbf{P}^M$ есть гиперповерхность Фано индекса 1. Если расслоение достаточно закручено по базе $\mathbf{P}^1$, то на V нет других структур расслоения на рационально связные многообразия. Сформулированы гипотезы о бирациональной жесткости для широкого класса многообразий Фано и расслоений Фано над базой произвольной размерности.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Цель настоящей работы – доказательство бирациональной (сверх)жесткости общих расслоений Фано $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ со слоем $W_M \subset \mathbf{P}^M$ – гиперповерхностью индекса 1. Этот результат известен для $M = 3, 4$ (см. [5]) и может рассматриваться как частный случай общего принципа [7]: если расслоение Фано “достаточно закручено” по базе, то бирациональная геометрия многообразия V сводится к бирациональной геометрии общего слоя F_η – многообразия Фано над незамкнутым полем $\mathbf{C}(S)$.

Общая гиперповерхность $W_M \subset \mathbf{P}^M$ – бирационально сверхжесткое многообразие, не имеющее ни нетривиальных бирациональных автоморфизмов, ни нетривиальных структур расслоения Фано. Соответственно, если $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ – общее расслоение Фано, слой которого есть гиперповерхность степени M в $\mathbf{P}^M$, и V достаточно “закручено” над $\mathbf{P}^1$, то пучок слоев $|\pi|$ есть единственный пучок рационально связных дивизоров на V .

Доказательство получено комбинацией техники [5] и [6]. Основным ингредиентом рассуждений является метод максимальных особенностей, восходящий к работе [1]. Последний параграф работы посвящен краткому обсуждению некоторых естественных гипотез.

Работа над доказательством основной теоремы данной статьи была начата в 1997 г. во время моего пребывания в Институте Макса Планка (Бонн, ФРГ). После того как удалось доказать сверхжесткость гиперповерхностей Фано [6], казалось, что новые идеи, использованные в [6], почти автоматически приведут к широкому классу обобщений. Действительность оказалась гораздо сложнее. Тем не менее, данную работу удалось успешно завершить. Это свидетельствует о том, что возможности метода максимальных особенностей еще далеко не исчерпаны.

Пользуясь случаем, хотел бы поблагодарить Институт Макса Планка за гостеприимство и стимулирующую творческую атмосферу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-15-96013, 99-01-01132) и INTAS-OPEN (грант № 97/2072).

§ 1. Алгебраические многообразия с пучком гиперповерхностей Фано

1.1. Явная конструкция семейства расслоений Фано. Пусть $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга $M + 1$ на проективной прямой $\mathbf{P}^1$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^M \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$, $a_0 = 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_M$, $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ – соответствующее проективное расслоение. Символом $\mathbf{P}$ будем обозначать проективное пространство $\mathbf{P}^M$ – слой канонической проекции $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Пусть $L \in \text{Pic } X$ – класс тавтологического пучка и $G \in \text{Pic } X$ – класс слоя $\cong \mathbf{P}$. Для произвольного $m \in \mathbf{Z}$ определим семейство $\mathcal{V}(m)$ подмногообразий коразмерности 1 в X как подмножество линейной системы $|ML + mG|$, состоящее из гладких дивизоров. Здесь параметр m определяет “степень закрученности” расслоения Фано $V \in \mathcal{V}(m)$ над базой $\mathbf{P}^1$. Проекцию V на $\mathbf{P}^1$ обозначим тем же символом π . Общий слой F_η расслоения Фано $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ – гиперповерхность Фано индекса 1 в $\mathbf{P}_{\mathbf{C}(t)}^M$, где t – линейный параметр на прямой. При $m \geq 1$ по теореме Лефшеца $\text{Pic } V = \text{Pic } X|_V$, так что

$$\text{Pic } V = \mathbf{Z}K_V \oplus \mathbf{Z}F,$$

где $F = G|_V$ – класс слоя. Конкретный слой $\pi^{-1}(t)$ над точкой $t \in \mathbf{P}^1$ будет обозначаться символом F_t .

Очевидно, $K_V = -L_V + (a_1 + \dots + a_M - 2 + m)F$, так что чем больше m , тем “меньше” антиканоническая линейная система $|-K_V|$.

1.2. K^2 -условие и условие регулярности. Пусть $g \in A^2(V)$ – класс гиперплоского сечения слоя $F_t \subset \mathbf{P}$. Как обычно [5], [7], скажем, что расслоение Фано $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ удовлетворяет K^2 -условию, если численный класс циклов коразмерности 2 на V : $NK_V^2 - g$, не является эффе́ктивным для любого $N \in \mathbf{Z}$.

Поскольку линейная система $|L_V|$ свободна, K^2 -условие выполнено для V , если справедливо неравенство

$$(K_V^2 \cdot L_V^{M-2}) \leq 0.$$

Последний индекс пересечения, как нетрудно подсчитать, равен

$$M(4 - a_1 - \dots - a_M) - m(2M - 1).$$

Поэтому неравенство

$$m \geq \frac{M}{2M - 1} \left(4 - \sum_{i=1}^M a_i \right)$$

гарантирует выполнение K^2 -условия.

Рассмотрим произвольную гиперповерхность $W \subset \mathbf{P}$ степени M . Пусть $p \in W$, $z_* = (z_1, \dots, z_M)$ – система линейных координат на $\mathbf{P}$ с центром в точке p , $q = q_1 + q_2 + \dots + q_M$ – уравнение гиперповерхности W относительно координат z_* , разложенное на однородные компоненты q_i степени i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Точка $p \in W$ называется *регулярной неособой точкой* гиперповерхности W , если последовательность $(q_1, \dots, q_{M-1})$ регулярна. Точка p называется *регулярной особой точкой* гиперповерхности W , если $q_1 \equiv 0$, последовательность $(q_2, \dots, q_M)$ регулярна, квадрика $q_2 = 0$ в $\mathbf{P}^{M-1} = T_p \mathbf{P}$ неособа и, более того, система уравнений $q_2 = \dots = q_M = 0$ определяет в $\mathbf{P}^{M-1} = T_p \mathbf{P}$ конечное множество, состоящее из ровно $M!$ различных точек, любые M из которых линейно независимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Расслоение Фано $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ назовем *регулярным*, если любой его слой F_t — $\mathbf{Q}$ -факториальное многообразие (при этом группа классов дивизоров Вейля, тензорно умноженная на $\mathbf{Q}$, изоморфна $\mathbf{Z}$ и порождена гиперплоским сечением $F_t \subset \mathbf{P}$), любая точка которого $p \in F_t$ регулярна.

В [6] было показано, что общая гладкая гиперповерхность $W \subset \mathbf{P}$ степени M регулярна. Ниже (§4) с помощью небольшой модификации рассуждений работы [6] мы показываем, что дополнение ко множеству гиперповерхностей W , все точки которых регулярны (в частности, имеющих не более чем двойные особые точки), имеет коразмерность ≥ 2 . Расслоение Фано $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ можно рассматривать как кривую в пространстве $\mathbf{P}(H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(M)))$; таким образом, если система $|ML + mG|$ достаточно подвижна, то ее общий член — регулярное расслоение Фано.

1.3. Формулировка основной теоремы. Напомним, что *порогом канонического присоединения* дивизора D на расслоении Фано $\rho: W \rightarrow S$ называется неотрицательное число

$$c(D, W) = \sup \left\{ \frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}, |aD + bK_W| \neq \emptyset \right\}.$$

Расслоение Фано $\rho: W \rightarrow S$ называется *бirationально сверхжестким*, если для любого расслоения Фано $\rho': W' \rightarrow S'$, $\dim W' = \dim W$, бирационального отображения $\chi: W \dashrightarrow W'$ (в предположении, что таковые существуют) и линейной системы $|D'|$ на W' , свободной в коразмерности 1 (т.е. $\text{codim Bs } |D'| \geq 2$), имеет место неравенство

$$c(D, W) \leq c(D', W'),$$

где $|D| = (\chi^{-1})_* |D'|$ — собственный прообраз $|D'|$ на W относительно χ .

Основной результат настоящей работы — следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ — расслоение Фано, построенное в п. 1.1. Предположим, что оно регулярно и удовлетворяет K^2 -условию. Тогда оно бирационально сверхжесткое.

СЛЕДСТВИЕ. (i) Любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow W$ на расслоение Фано $\rho: W \rightarrow S$ является послойным, т.е. $S = \mathbf{P}^1$ или S есть точка, и в первом случае существует изоморфизм $\alpha: \mathbf{P}^1 \rightarrow S$ такой, что $\alpha \circ \pi = \rho \circ \chi$.

(ii) Группа бирациональных автоморфизмов многообразия V совпадает с группой его бирегулярных автоморфизмов: $\text{Bir } V = \text{Aut } V$. Для общего члена семейства $\mathcal{V}(m)$ эта группа тривиальна.

(iii) Многообразие V не рационально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) сразу следует из теоремы с учетом того факта, что если $|D|$ – подвижная линейная система на V , то $D \sim -nK_V + lF$, где $n \geq 0$ и $l \geq 0$. Первое очевидно. Второе доказывается так же, как в [5]. Утверждение (ii) получается комбинацией (i) и основной теоремы работы [6]. Утверждение (iii) очевидно.

ПРИМЕР. Рассмотрим вполне конкретное семейство многообразий, соответствующее значениям $a_i = 0$, $1 \leq i \leq M$, т.е. $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}$ – прямое произведение. Многообразия из $\mathcal{V}(m)$ задаются биоднородными многочленами

$$p_{m,M}(u, v; x_0, \dots, x_M).$$

Если $m \geq 3$ и многочлен p достаточно общий, то для него выполнены и K^2 -условие, и все условия регулярности. Следовательно, многообразие $\{p = 0\}$ является бирационально сверхжестким как расслоение Фано над $\mathbf{P}^1$. При больших $M \gg 0$ K^2 -условие “почти выполнено” при $m = 2$, однако из численного класса K_V^2 все же можно “немножко” вычесть, т.е. класс $NK_V^2 - g$ все еще эффективен на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}$. Более того, нетрудно видеть, что линейная система $|MK_V - F|$ непуста и даже подвижна. В самом деле, пусть $F_t = \pi^{-1}(t)$ – некоторый слой, $\pi_P: V \rightarrow \mathbf{P}$ – проекция. Тогда эффективный дивизор $\pi_P^{-1}(\pi_P(F_t)) - F_t$ принадлежит системе $|MK_V - F|$. Нетрудно понять, что π_P – конечный в общей точке морфизм степени 2, так что на V имеется инволюция $\tau \in \text{Bir } V$, переставляющая точки в слоях π_P , и линейная система $|MK_V - F|$ есть не что иное как образ пучка $|F|$ относительно τ . Имеются ли на V другие структуры расслоений Фано? Мы предполагаем, что $\text{Bir } V = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{\text{id}, \tau\}$ и любой пучок на V , общий слой которого рационально связан, есть один из этих двух пучков, $|F|$ или $\tau(|F|)$. Мы оставляем здесь этот вопрос открытым. При $m = 1$ проекция $\pi_P: V \rightarrow \mathbf{P}$ имеет степень 1, так что V рационально.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приводимого ниже доказательства видно, что требование регулярности, особенно в отношении двойных точек, слишком сильное и может быть несколько ослаблено без ущерба для основного результата.

§ 2. Доказательство основной теоремы

2.1. Максимальные особенности. Следуя обычной схеме рассуждений (см. [1], [5]–[8], [9]), зафиксируем $\chi: V \dashrightarrow W$, где $\rho: W \rightarrow S$ – расслоение Фано, и предположим, что для некоторой подвижной системы $|D'|$ на W условие монотонности не выполнено: $n = c(D, V) > c(D', W) \geq 0$. Линейная система $|\chi| = |D|$, $D \sim -nK_V + lF$, $l \geq 0$, не имеет неподвижных компонент. Порог канонического присоединения имеет в данном случае простой геометрический смысл: дивизоры $|\chi|_{F_t}$ на слое $F_t \subset \mathbf{P}$ высекаются гиперповерхностями в $\mathbf{P}$ степени n .

В обозначениях [5], [6] геометрическое дискретное нормирование $\nu \in \mathcal{N}(V)$ называется *максимальной особенностью*, если оно удовлетворяет *неравенству Нётера–Фано* (–Манина–Исковских) $e(\nu) = \nu(|\chi|) - na(\nu, V) > 0$, где $a(\cdot)$ – дискрепантность нормирования относительно заданной модели.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеет место один из двух случаев:*

- (i) *существует максимальная особенность $\nu \in \mathcal{N}(V)$, центр которой накрывает базу: $\pi(\text{centre}(\nu)) = \mathbf{P}^1$;*
- (ii) *центры всех максимальных особенностей лежат в слоях проекции π , и существует конечное множество максимальных особенностей $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}(V)$ такое, что выполнено неравенство*

$$\sum_{t \in \mathbf{P}} \max_{\{\nu \in \mathcal{M} \mid \text{centre}(\nu) \subset F_t\}} \left(\frac{e(\nu)}{\nu(F_t)} \right) > l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [5]). Прежде всего отметим, что возможность (i) не реализуется: если центр максимальной особенности ν накрывает базу, то ν индуцирует максимальную особенность $\nu_t \in \mathcal{N}(F_t)$ линейной системы $|\chi|_t = |\chi|_{F_t}$ на слое F_t общего положения. Однако в [6] было показано, что линейная система дивизоров без неподвижных компонент на гладкой регулярной гиперповерхности F_t степени M в $\mathbf{P}$ не может иметь максимальных особенностей. Отметим также, что центр любой максимальной особенности $\nu \in \mathcal{M}$ имеет коразмерность ≥ 3 относительно V : иначе $B = \text{centre}(\nu)$ – дивизор на F_t , т.е. неподвижная компонента линейной системы $|\chi|_t$. Однако

$$D_t = D|_{F_t} \sim nh, \quad B \sim bh,$$

где $h \in \text{Pic } F_t$ – класс гиперплоского сечения в $\mathbf{P}$, $b \geq 1$, и поэтому

$$\text{mult}_B |\chi| \leq \text{mult}_B |\chi|_t \leq n,$$

что противоречит неравенству Нётера–Фано.

2.2. Сверхмаксимальная особенность. Пусть $D_i \in |\chi|$ – общие дивизоры, $Z = (D_1 \bullet D_2)$ – алгебраический цикл их теоретико-схемного пересечения, $Z = Z^v + Z^h$ – его разложение на вертикальную (т.е. содержащуюся в слоях) и горизонтальную (т.е. накрывающую базу $\mathbf{P}^1$) компоненты соответственно. Для Z^v имеем дальнейшее разложение:

$$Z^v = \sum_{t \in \mathbf{P}^1} Z_t^v, \quad \text{Supp } Z_t^v \subset F_t.$$

Под степенью горизонтального цикла мы понимаем степень его пересечения со слоем F общего положения (относительно $\mathbf{P}$). Под степенью вертикального цикла, носитель которого содержится в слое F_t , мы понимаем его степень в $\mathbf{P} \supset F_t$. Очевидно, в силу K^2 -условия

$$\sum_{t \in \mathbf{P}^1} \deg Z_t^v \leq 2nlM.$$

Комбинируя это неравенство с неравенством части (ii) предложения 1, мы заключаем, что существует максимальная особенность $\nu \in \mathcal{M}$, $\text{centre}(\nu) \subset F = F_t$, такая, что

$$e = e(\nu) > \frac{\nu(F)}{2Mn} \deg Z_t^v.$$

Следуя [5], назовем эту особенность *сверхмаксимальной* и зафиксируем. Для простоты обозначений пишем Z^v вместо Z_t^v и так далее.

2.3. Техника подсчета кратностей. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}: & V_i & \rightarrow V_{i-1} \\ & \cup & \cup \\ & E_i & \rightarrow B_{i-1}, \end{array}$$

$i = 1, \dots, K$, – разрешение нормирования ν , первые $L \leq K$ раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности ≥ 3 , а первые $N \leq L$ соответствуют циклам $B_{i-1} \subset F^{i-1}$ (напомним, что операция взятия собственного прообраза на j -м этаже разрешения обозначается добавлением верхнего индекса j), $B_0 = \text{centre}(\nu)$, $B_j = \text{centre}(V_j, \nu)$. Положим для $i = 1, \dots, L$

$$m_i^h = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^h)^{i-1}, \quad m_i^v = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^v)^{i-1}.$$

Очевидно, $m_i^v = 0$ при $i \geq N + 1$. Положим также $\mu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} F^{i-1}$ при $i = 1, \dots, N$. Очевидно,

$$m_i^h \leq m_h = m_1^h = \text{mult}_{\text{centre}(\nu)} Z^h.$$

Пусть $p_i \geq 1$ – число путей в графе $\mathcal{N}(V)$, соединяющих вершины ν и E_i (см. [1], [5]–[8]). Положим

$$\Sigma_l = \sum_{i=1}^L p_i, \quad \Sigma_u = \sum_{i=L+1}^K p_i, \quad \Sigma_f = \sum_{i=1}^N p_i.$$

Очевидно, имеем $\nu(F) \geq \sum_{i=1}^N p_i \mu_i$. Полагая $d_h = \deg Z^h$, $d_v = \deg Z_t^v$, введем коэффициенты

$$k_h = \frac{m_h}{d_h}, \quad k_v = \frac{1}{\nu(F)d_v} \sum_{i=1}^N p_i m_i^v, \quad k_f = \frac{1}{\nu(F)} \sum_{i=1}^N p_i.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Имеет место неравенство*

$$(4 - Mk_h)\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u)n^2 + \Sigma_u^2 n^2 + e^2 + 2(2 - Mk_v)\Sigma_l n e + 2(1 - Mk_v)\Sigma_u n e < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. в [5], [7]). Это стандартная техника подсчета кратностей, восходящая к работе [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Имеют место оценки*

$$k_h \leq \frac{4}{M}, \quad k_v \leq \frac{2}{M}.$$

Доказательство дано ниже, в § 3.

Используя эти оценки, приходим к противоречию: согласно предложению 2.2

$$\Sigma_u^2 n^2 - 2\Sigma_u n e + e^2 < 0,$$

что невозможно. Следовательно, неравенство

$$c(D, V) > c(D', W)$$

не может выполняться. Бирациональная сверхжесткость расслоения Фано $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ доказана.

§ 3. Особые точки алгебраических циклов малой коразмерности на регулярных гиперповерхностях Фано

3.1. Горизонтальные циклы. Пусть $p \in \text{centre}(\nu) \subset F$ – произвольная точка общего положения на неприводимом цикле $B_0 = \text{centre}(\nu)$. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \sigma: & \tilde{F} & \rightarrow F \\ & \cup & \cup \\ & E & \rightarrow \{p\} \end{array}$$

– ее раздутие, рассматриваемое как ограничение раздутия точки p на $\mathbf{P} \supset F$, $\sigma: \tilde{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}$ с исключительным дивизором $\tilde{E} \cong \mathbf{P}^{M-1}$. Если p неособа на слое F , то, как показано в [6], для любого цикла $Z \subset F$ коразмерности 2 имеет место неравенство

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg} \leq \frac{4}{M}.$$

Следовательно, $k_h \leq 4/M$, что и требовалось показать. Пусть теперь p – невырожденная двойная точка слоя F .

ЛЕММА 3.1. *Для любого эффективного цикла $Z \subset F$ коразмерности 2 имеет место неравенство*

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg} \leq \frac{4}{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие регулярности точки p позволяет дословно повторить рассуждения, доказывающие это неравенство в неособом случае.

Поэтому $k_h \leq 4/M$ всегда. Предложение 2.3 для горизонтальных циклов доказано.

3.2. Вертикальные циклы. Неособый случай. Положим $m_v = m_1^v$ и заметим, что $k_v \leq k_f \frac{m_v}{d_v}$. Рассмотрим сначала случай, когда слой F неособ в точке p .

ЛЕММА 3.2. *Пусть $Y \subset F$ – простой дивизор Вейля. Имеет место оценка*

$$\frac{\text{mult}_p Y}{\deg} \leq \frac{2}{M},$$

причем равенство достигается на единственном цикле – пересечении $F \cap T_p F$ с касательной гиперплоскостью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Саму оценку установить очень легко. Для $T = F \cap T_p F$ она имеет место в силу условия регулярности. Предположим, что $Y \neq T$. Тогда эффективный цикл $(Y \bullet T)$ имеет в точке p кратность $\geq 2 \text{mult}_p Y$. Согласно [6]

$$\frac{2}{M} \geq \frac{1}{2} \frac{\text{mult}_p (Y \bullet T)}{\deg} \geq \frac{\text{mult}_p Y}{\deg},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение об экстремальности цикла T для доказательства предложения 2.3 не требуется, но метод, с помощью которого оно получается, будет необходим ниже в трудном особом случае, поэтому мы установим здесь и второе утверждение леммы.

Рассмотрим линейные системы

$$\Lambda_k = |kH - (k+1)E|,$$

где $k = 3, \dots, M-2$. В силу условия регулярности коразмерность

$$\operatorname{codim}_T \operatorname{Bs} \Lambda_k|_T \geq k-1,$$

так что для общих дивизоров $D_k \in \Lambda_k$ алгебраический цикл

$$Z = (T \bullet D_3 \bullet \dots \bullet D_{M-2})$$

эффективен, и его компоненты образуют алгебраическое семейство поверхностей, заматающих T . Вместе с тем,

$$\frac{\operatorname{mult}_p Z}{\deg} \geq \frac{2(M-1)}{3M} > \frac{1}{2},$$

так что (взяв гиперплоское сечение, содержащее точку p) получаем, что T заматается алгебраическим семейством кривых $\mathcal{C} = (C_s, s \in S)$, для которых отношение $\operatorname{mult}_p / \deg$ строго больше, чем $1/2$. Теперь если

$$\frac{\operatorname{mult}_p Y}{\deg} = \frac{2}{M},$$

то $Y \supset C_s$ для любого $s \in S$, и потому $Y = T$. Лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, как видно из приведенного доказательства, имеет место оценка

$$\frac{\operatorname{mult}_p Y}{\deg} \leq \frac{3}{2(M-1)}$$

для любого простого дивизора Вейля $Y \neq T$.

Поскольку $k_f \leq 1$ и $k_v \leq m_v/d_v \leq 2/M$, предложение 2.3 для неособой точки p доказано.

3.3. Вертикальные циклы. Особый случай, $N = 1$. Итак, пусть $B_0 = \operatorname{centre}(\nu) = p \in F$ – особая регулярная точка. Рассмотрим сначала более простой случай $N = 1$, т.е. либо $\operatorname{codim}_{V_1} B_1 = 2$, либо $B_1 \not\subset F^1$. Здесь $k_f \leq 1/2$ и соответственно $k_v \leq m_v/(2d_v)$.

ЛЕММА 3.3. Для простого дивизора Вейля $Y \subset F$ имеет место оценка

$$\frac{\operatorname{mult}_p Y}{\deg} \leq \frac{3}{M},$$

причем равенство достигается на единственном цикле $Q = T_p F \cap F$, где $T_p F$ – касательный конус к гиперповерхности $F \subset \mathbf{P}$ в точке p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\tilde{Q} \in |2H - 3E|$, так что для Q имеет место равенство $\text{mult}_p / \deg = 3/M$. Предположим, что $Y \neq Q$ – простой дивизор Вейля. Тогда $(Y \bullet Q)$ – эффективный цикл коразмерности 2 на F . Применяя к нему лемму 3.1, получаем

$$\frac{4}{M} \geq \frac{\text{mult}_p}{\deg}(Y \bullet Q) \geq \frac{3}{2} \frac{\text{mult}_p}{\deg} Y,$$

так что $(\text{mult}_p / \deg)Y \leq 8/(3M)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, в рассматриваемом случае $k_v \leq 3/(2M)$, что доказывает предложение 2.3.

3.4. Вертикальные циклы. Особый случай, $N \geq 2$. Это – наиболее трудный случай. Здесь $\text{codim } B_1 \geq 3$ и $B_1 \subset F^1$. Выберем произвольную точку общего положения $x \in B_1 \subset E$. Имеем очевидные оценки

$$k_v \leq \frac{1}{\nu(F)} \left[\left(\frac{m_v}{d_v} \right) p_1 + \left(\frac{m_2^v}{d_v} \right) \sum_{i=2}^N p_i \right],$$

$$\nu(F) \geq 2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i.$$

Мы уже знаем (лемма 3.3), что $(m_v/d_v) \leq 3/M < 4/M$. Решающий факт дается в следующем утверждении.

ЛЕММА 3.4. Для любого простого дивизора Вейля $Y \subset F$ имеет место оценка

$$\frac{\text{mult}_x \tilde{Y}}{\deg Y} \leq \frac{2}{M},$$

где $\tilde{Y} \subset \tilde{F}$ – собственный прообраз Y относительно раздутия точки p .

Завершим, наконец, доказательство предложения 2.3. Очевидно,

$$\frac{m_2^v}{d_v} \leq \frac{\text{mult}_x(Z^v)^1}{\deg Z^v} \leq \frac{2}{M},$$

откуда $k_v < 2/M$, что и требовалось доказать.

3.5. Доказательство леммы 3.4. Предположим противное и зафиксируем простой дивизор Вейля $Y \subset F$, удовлетворяющий неравенству

$$\frac{\text{mult}_x \tilde{Y}}{\deg Y} > \frac{2}{M}.$$

Поскольку F – $\mathbf{Q}$ -факториальное многообразие, Y – $\mathbf{Q}$ -дивизор Картье и для некоторых $d, \nu \in \mathbf{Q}_+$ имеем $\tilde{Y} \in |dH - \nu E|$. Очевидно, $\nu = (1/2) \text{mult}_p Y$. Положим $\mu = \text{mult}_x \tilde{Y}$. Напомним, что $E \subset \tilde{E} = \mathbf{P}^{M-1}$ – неособая квадратичная гиперповерхность. Пусть $B = E \cap T_x E$ – невырожденный квадратичный конус с вершиной в точке x .

ЛЕММА 3.5. *Имеет место оценка $\text{mult}_B \tilde{Y} \geq (1/2)(\mu - \nu)$.*

Доказательство дано ниже.

Рассмотрим гиперплоскость $H \subset \mathbf{P}$, содержащую точку p , такую, что $T_p H = T_x E \subset \tilde{E}$. В соответствии с леммой 3.5 (и элементарной теорией пересечений [4], см. также [5], [6], [8]) имеем

$$\text{mult}_p(Y \bullet H) \geq 2\nu + (\mu - \nu) > \frac{3}{M} \deg Y$$

(ибо $2\nu > \mu$). Однако такого не может быть.

ЛЕММА 3.6. *Для любой гиперплоскости $H \subset \mathbf{P}$, содержащей точку p , и любого эффективного $\mathbf{Q}$ -Картье дивизора W на $F_H = F \cap H$ имеет место оценка*

$$\frac{\text{mult}_p}{\deg} W \leq \frac{3}{M},$$

причем равенство достигается только на дивизорах вида tS_H , $t \in \mathbf{Z}_+$, где $S_H = F_H \cap T_p F = H \cap Q$.

Доказательство леммы дано ниже.

Осталось заметить, что утверждения лемм 3.5 и 3.6 противоречат друг другу. Стало быть, исходное предположение неверно. Лемма 3.4 доказана (по модулю лемм 3.5 и 3.6).

3.6. Доказательство леммы 3.5. Мы приведем два (независимых друг от друга) рассуждения. Первое более явное и хорошо объясняет суть дела, зато второе гораздо короче.

Введем ряд обозначений:

$X = \mathbf{C}^M$, $(z_*) = (z_1, \dots, z_M)$ – линейные координаты на X ;

$$\begin{aligned} \varphi: \tilde{X} &\rightarrow X \\ \cup \\ \tilde{E} &\cong \mathbf{P}^{M-1} \end{aligned}$$

– раздутие точки $p = (0, \dots, 0)$ – начала координат;

$(1 : 0 : \dots : 0)$ – направление бесконечно близкой точки $x \in \tilde{E}$;

$(y_1 = z_1, y_2 = z_2/z_1, \dots, y_M = z_M/z_1)$ – система координат на открытом аффинном множестве в $\tilde{X}$, содержащем точку x с началом в этой точке;

$q = q_2 + \dots$ – уравнение гиперповерхности F ;

$q_2 = q_E$, $c = \frac{\partial^3}{\partial z_1^3} q|_{(0, \dots, 0)} = \frac{\partial^3}{\partial z_1^3} q_3 \in \mathbf{C}$;

$E \subset \tilde{E}$ – исключительный дивизор раздутия точки p на F – неособая квадрика в $\tilde{E} = \mathbf{P}^{M-1}$,

$$\begin{aligned} \varphi: \tilde{F} &\rightarrow F \\ \cup \\ E &\rightarrow p; \end{aligned}$$

l_E – уравнение гиперплоскости $T_x E$ в $\tilde{E}$, т.е. линейная часть многочлена q_E относительно координат $(y_2, \dots, y_M) = (y'_*)$;

$l_E + cy_1$ – уравнение касательной гиперплоскости $T_x \tilde{F}$ в открытом аффинном множестве $\mathbf{C}_{(y_1, \dots, y_M)}^M$;
 $|\alpha E - \beta x|$ – линейное пространство формальных степенных рядов, или аналитических в нуле функций, или алгебраических функций, регулярных в нуле вида $f(z_*)$ таких, что функция y_1^α , ограниченная на $\tilde{F}$, делит $\varphi^* f|_{\tilde{F}}$ и $\text{mult}_x(\varphi^* f|_{\tilde{F}}/y_1^\alpha) \geq \beta$;
 $\mathcal{H} = |\alpha E - \mu x|$;
 $\mathcal{H}_k = \mathcal{H} \cap |(\nu + k)E|$, $k \in \mathbf{Z}_+$.

Если f – аналитическая (соответственно регулярная в нуле алгебраическая) функция, то $f \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (\varphi^* f|_{\tilde{F}}) - \nu E \geq 0$ и $\text{mult}_x(\varphi^* f|_{\tilde{F}}) \geq \nu + \mu$. Если же $f \in \mathcal{H}_k$, то еще к тому же $(\varphi^* f|_{\tilde{F}}) - (\nu + k)E \geq 0$. Пусть $B = E \cap T_x E$ – наш квадратичный конус на E . Очевидно, лемма 3.5 следует из неравенства

$$\text{mult}_B(\varphi^* f|_{\tilde{F}}) \geq \max\left(\nu, \frac{\nu + \mu}{2}\right) \quad (*)$$

для любой $f \in \mathcal{H}$. Неравенство $\text{mult}_B(\varphi^* f|_{\tilde{F}}) \geq \nu$ тривиально. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\mu > \nu$. Будем доказывать (*) убывающей индукцией по

$$k = \max\{i \in \mathbf{Z}_+ \mid f \in \mathcal{H}_i\}.$$

Если $k \geq (\mu - \nu)/2$, то (*) выполнено очевидным образом. Поэтому предположим, что оно доказано для всех $g \in \mathcal{H}_{k+1}$ и $f \in \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{H}_{k+1}$.

Пусть $f = f_a + f_{a+1} + \dots$ – ряд Тейлора функции f , где f_i однородны по z_* степени i . Подъем $\varphi^* f$ имеет вид $y_1^a(f_a(1, y'_*) + y_1 f_{a+1}(1, y'_*) + \dots)$, где можно считать, что q_E не делит f_a , т.е. $\text{mult}_E(\varphi^* f|_{\tilde{F}}) = a$. В самом деле, для любой функции $g \in \mathcal{H}$ такой, что $g|_F = f|_F$, имеем оценку $\text{mult}_p g \leq \nu + k$, ибо $f \notin \mathcal{H}_{k+1}$. Поэтому f можно с самого начала выбрать таким образом, что

$$a = \text{mult}_p f = \max\{\text{mult}_p g \mid g - f \equiv 0 \text{ на } F\}.$$

Если q_E делит f_a , то заменим f на $f - q_E \frac{f_a}{q_E}$. Противоречие.

Итак, $a = \nu + k$. Поэтому кратность функции $\frac{\varphi^* f}{y_1^a}|_{\tilde{F}}$, тождественно не обращающейся в нуль на E , в точке x не меньше, чем $\mu - k$. Тем более $\text{mult}_x f_a|_E \geq \mu - k$.

Таким образом, полином f_a высекает на квадрике E (нетривиальный) дивизор, имеющий в точке x кратность не меньше, чем $\mu - k$. Если $a \leq \mu - k - 1$, то цикл $B \subset E$ является его компонентой кратности $\mu - k - a + \beta \geq 1$, где $\beta \in \mathbf{Z}_+$. Иными словами, существуют многочлены g, h такие, что

$$f_a = l_E^{\mu - k - a + \beta} g + q_E h.$$

При этом B не является компонентой дивизора $g|_E = 0$, и поэтому $\text{mult}_x g|_E \leq \deg g$. Можно считать, что g имеет полную степень, т.е. $\deg g + \mu - k - a + \beta = a$.

ЛЕММА 3.7. Пусть $P \in H^0(\mathbf{P}^{M-1}, \mathcal{O}(b))$ – однородный многочлен степени b и $\text{mult}_x P|_E \leq b$. Тогда существует P^* – однородный многочлен той же степени такой, что $P - P^* \equiv 0$ на E и $\text{mult}_x P^* = \text{mult}_x P|_E$.

Доказательство проведем убывающей индукцией по $\text{mult}_x P \leq \deg P$. Если $\text{mult}_x P = b$, то положим $P^* = P$. Предположим, что утверждение леммы установлено для всех многочленов с $\text{mult}_x \geq j + 1$ и $\text{mult}_x P = j \leq b - 1$. В аффинных координатах с началом в точке x запишем $P = P_j + \dots + P_b$, где P_i однородны степени i . Если $j = \text{mult}_x P|_E$, то доказывать нечего: положим $P^* = P$. Предположим поэтому, что $\text{mult}_x P|_E > j$. Отсюда следует, что l_E делит P_j , т.е. $P_j = l_E R$, где R — однородный многочлен степени $j - 1 \leq b - 2$. Теперь заменим P на $P' = P - q_E R \in H^0(\mathbf{P}^{M-1}, \mathcal{O}(b))$ (где мы отождествляем однородные многочлены с их неоднородными представлениями). Поскольку $\text{mult}_x P' \geq \text{mult}_x P + 1$, для P' утверждение леммы верно. Значит, оно верно и для P . Лемма доказана.

Вернемся к доказательству леммы 3.5.

Согласно лемме 3.7 мы можем считать, что

$$\text{mult}_x g|_E = \text{mult}_x g = \text{mult}_x g|_{\tilde{F}}.$$

Рассмотрим теперь многочлен $\xi(z) = l_E(z_*) + cz_1^2$. По построению $\text{mult}_E \varphi^* \xi|_{\tilde{F}} = 1$, и в координатах (y_*) гиперплоскость

$$0 = \frac{\varphi^* \xi}{y_1} = l_E(y'_*) + cy_1$$

есть не что иное как касательная гиперплоскость к $\tilde{F}$ в точке x . Иными словами, $\xi \in |-E - 2x|$. На квадрике E функция $\varphi^* \xi / y_1$ высекает в точности цикл B . Рассмотрим, наконец, многочлен

$$\Delta = \xi^{\mu-a-k+\beta} g(z_*),$$

где g однороден степени $\deg g$. Очевидно, $\text{mult}_E \varphi^* \Delta = a$, и кратность функции $(\varphi^* \Delta / y_1^a)|_{\tilde{F}}$ в точке x есть в точности $\text{mult}_x f_a|_E \geq \mu - k$. Таким образом, $\Delta \in \mathcal{H}_k$. Далее,

$$\frac{\varphi^* \Delta}{y_1^a} \Big|_E \equiv \frac{\varphi^* f}{y_1^a} \Big|_E$$

по построению, так что $f - \Delta \in \mathcal{H}_{k+1}$. Заметим, наконец, что

$$\text{mult}_B \varphi^* \Delta|_{\tilde{F}} \geq \max(a, a + \mu - k - a + \beta) = \max(\nu + k, \mu - k + \beta) \geq \frac{\mu + \nu}{2}.$$

Лемма 3.5 полностью доказана.

Теперь приведем другое доказательство леммы 3.5.

3.7. Короткое доказательство леммы 3.5. Пусть $P \ni p$ — общая 4-плоскость в $\mathbf{P}$, собственный прообраз которой $\tilde{P}$ на $\tilde{\mathbf{P}}$ содержит точку x . Положим $Y_P = Y \cap P$, $F_P = F \cap P$, $\tilde{E}_P = \tilde{E} \cap \tilde{P} \cong \mathbf{P}^3$, $E_P = E \cap \tilde{P} \cong \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и так далее. Очевидно, $B_P = T_x E_P \cap E_P = L_1 + L_2$ — пара прямых. Положим $L = L_1$. Очевидно, достаточно доказать, что

$$\text{mult}_L \tilde{Y}_P \geq \frac{1}{2}(\mu - \nu).$$

Пусть $\varphi_L: P_L \rightarrow \tilde{P}$ – раздутие прямой L , F_L – собственный прообраз (гладкой) трехмерной гиперповерхности F_P на P_L , $E_L \subset F_L$ – исключительный дивизор. Легко видеть, что

$$\mathcal{N}_{L/F_P} \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1),$$

так что E_L – поверхность типа $\mathbf{F}_1$. Пусть s и f – классы исключительного сечения и слоя в $\text{Pic } E_L$ соответственно. Легко видеть, что $(E_L \cdot E_L) = -s - f$, ибо $(E_L \cdot s) = (E_L \cdot \varphi_L^* L) = 0$. Положим $\gamma = \text{mult}_L \tilde{Y}_P$. Класс собственного прообраза дивизора Y на F_L есть, очевидно, $dH - \nu E_P - \gamma E_L$, а его ограничение на E_L есть $\gamma s + (\gamma + \nu)f$. Это – класс эффективной кривой на E_L , содержащей слой над точкой x с кратностью $\mu - \gamma$. Следовательно,

$$\gamma + \nu \geq \mu - \gamma.$$

Поэтому $2\gamma \geq \mu - \nu$, что и требовалось доказать.

3.8. Доказательство леммы 3.6. Отметим прежде всего, что $\deg S_H = 2M$ и $\text{mult}_p S_H = 6$, так что дивизор S_H реализует предельный случай нашего неравенства.

Предположим сначала, что $M \geq 9$. Допустим, что для простого дивизора Вейля W на F_H выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_p}{\deg} W > \frac{3}{M}.$$

Тогда $W \neq S_H$ и эффективный цикл $C = (W \bullet S_H)$ коразмерности 2 (на F_H) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_p}{\deg} C > \frac{9}{2M}.$$

Рассуждая по образцу [6], рассмотрим гиперкасательные линейные системы $\Lambda_k = |kL - (k+1)E|$, $k = 2, \dots, M-1$, где $L \in \text{Pic } F_H$ – класс гиперплоского сечения, а $E \subset \tilde{F}_H \rightarrow F_H \ni p$ – исключительный дивизор раздутия точки p . Очевидно, $\text{codim}_{F_H} \text{Bs } \Lambda_k \geq k-1$ при $2 \leq k \leq M-2$ в силу условия регулярности. Выберем общие дивизоры $D_k \in \Lambda_k$ для $k = 4, \dots, M-2$ и рассмотрим эффективный 1-цикл

$$Z^* = (C \bullet D_4 \bullet \dots \bullet D_{M-2}) \subset F_H.$$

Этот цикл удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_p}{\deg} Z^* > \frac{9}{2M} \cdot \frac{M-1}{4} \geq 1,$$

что невозможно. Это доказывает искомое неравенство для $M \geq 9$ (а также утверждение об экстремальности цикла S_H для $M \geq 10$).

ЗАМЕЧАНИЕ. F_H есть гиперповерхность степени M в $\mathbf{P}^{M-1}$. Именно по этой причине, повторяя схему рассуждений работы [6], мы вынуждены сделать на один шаг меньше, пересекая цикл C с $D_4, \dots, D_{M-2}$, но не с D_{M-1} : размерность уже не позволяет этого сделать. Для больших M это несущественно.

Чтобы получить утверждение леммы 3.6 в полном объеме, нужно рассуждать чуть тоньше. Приводимое ниже доказательство имеет смысл для всех значений $M \geq 5$. Отметим, что $m\widetilde{W} \in |\alpha L - \beta E|$ для некоторых $m, \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ с $\beta/\alpha > 3/2$. Поэтому любая кривая $C \subset F_H$, для которой выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_p C}{\deg} > \frac{2}{3}, \quad (**)$$

содержится в W . Следовательно, лемма доказана, если верна следующая лемма.

ЛЕММА 3.8. Цикл S_H замещается семейством кривых $\mathcal{C} = (C_t, t \in T)$, общая кривая которого неприводима и удовлетворяет неравенству (**).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве примера рассмотрим наиболее прозрачный случай $M = 5$. Линейная система кривых $\Lambda_4|_{S_H}$ на поверхности S_H имеет в силу условия регулярности γ однократных базисных прямых, $0 \leq \gamma \leq 4$ (ибо любые пять прямых из числа 5! решений системы уравнений $q_2 = \dots = q_5 = 0$ линейно независимы и, следовательно, не могут содержаться в H). Выбрасывая эти прямые и взяв неприводимую компоненту общей кривой вычетного подвижного семейства, получаем семейство $\mathcal{C} = (C_t, t \in T)$, для которого

$$\frac{\text{mult}_p C_t}{\deg} = \frac{30 - \gamma}{40 - \gamma} > \frac{2}{3},$$

что и требовалось доказать.

Для произвольного $M \geq 6$ рассуждаем аналогичным образом (см. выше доказательство леммы 3.2). Пусть γ , $0 \leq \gamma \leq M - 1$, — количество решений системы уравнений $q_2 = \dots = q_M = 0$, попадающих в H . Положим

$$\beta_k = \frac{3(k+4)}{4M}.$$

Построим по индукции для каждого $k = 1, \dots, M - 5$ семейство неприводимых циклов $\mathcal{R}_k = (R_t^{(k)}, t \in T_k)$, замещающих S_H , имеющих в S_H коразмерность k и удовлетворяющих неравенству

$$\frac{\text{mult}_p R_t^{(k)}}{\deg} \geq \beta_k.$$

Предположим, что семейство $\mathcal{R}_k$ уже построено и $k \leq M - 6$. Пусть $R = R_t^{(k)}$ — достаточно общий член этого семейства. Тогда в силу условия регулярности линейная система $\Lambda_{k+4}|_R$ не имеет неподвижных компонент, поскольку

$$\text{codim Bs } \Lambda_{k+4}|_{S_H} \geq k + 2 = \text{codim } R + 2.$$

Общий дивизор системы $\Lambda_{k+4}|_R$ неприводим, если только она не составлена из пучка; в любом случае неприводимые компоненты общего дивизора, взятые по всем $R_t^{(k)}$, $t \in T_k$, и образуют искомое семейство $\mathcal{R}_{k+1}$, ибо

$$\frac{\text{mult}_p R_t^{(k+1)}}{\deg} \geq \beta_k \frac{k+5}{k+4} = \beta_{k+1}.$$

Рассмотрим общую поверхность $R = R_t^{(M-5)}$ из семейства $\mathcal{R}_{M-5}$. Ограничивая линейную систему Λ_{M-1} на R , получаем линейную систему кривых, имеющих, вообще говоря, неподвижные компоненты – прямые на F_H . Выбрасывая эти компоненты (каждая из которых имеет кратность ровно 1) и взяв неприводимую компоненту общей кривой вычетной подвижной системы, получаем семейство кривых $\mathcal{C} = (C_t, t \in T)$, заметающих S_H . Общая кривая этого семейства есть неприводимая компонента кривой семейства $\mathcal{C}^* = (C_t^*, t \in T^*)$, которое получается из семейства 1-циклов $(S_H \bullet D_4 \bullet \dots \bullet D_{M-1})$, $D_i \in \Lambda_i$ – общие дивизоры, удалением γ однократных прямых, лежащих в F_H , $0 \leq \gamma \leq M-1$. Следовательно,

$$\frac{\text{mult}_p C_t}{\deg} = \frac{\text{mult}_p C_t^*}{\deg} \geq \frac{(M!/4) - \gamma}{(M!/3) - \gamma} > \frac{2}{3},$$

что и требовалось доказать. Этим лемма 3.6 доказана. Доказательство основной теоремы настоящей работы завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. При больших M отношение $(\text{mult}_p / \deg)$ для кривых семейства $\mathcal{C}$ стремится к $3/4$. Это означает, что, как и в гладком случае (лемма 3.2), имеется значительный разрыв отношения $(\text{mult}_p / \deg)$ для S_H и всех остальных простых дивизоров Вейля $W \neq S_H$. Для этих циклов при $M \gg 0$

$$\max \left\{ \frac{\text{mult}_p W}{\deg} \mid W \neq S_H \right\} \approx \frac{8}{3M}.$$

§ 4. Счет констант: регулярные гиперповерхности

4.1. Существование регулярных гиперповерхностей. Наши аргументы являются незначительной модификацией доказательства предложения 1.1 из [6]. Обозначения настоящего параграфа и § 1 в [6] согласованы.

Пусть $\mathcal{P}_{k,K}$ – пространство однородных многочленов степени k от K переменных, $\dim \mathcal{P}_{k,K} = \binom{k+K-1}{k}$. Рассмотрим пространство пар

$$S = \{(x, F) \mid x \in \mathbf{P}, F \in H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(M)) \cong \mathcal{P}_{M,M+1}\}$$

с естественными проекциями $p: S \rightarrow \mathbf{P}$ и $q: S \rightarrow H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(M))$, гиперповерхность инцидентности $I = \{(x, F) \mid F(x) = 0\} \subset S$ и положим

$$\begin{aligned} Y^* &= \{(x, F) \mid x \in F - \text{нерегулярная гладкая точка}\}, \\ Y^{\text{sing}} &= \{(x, F) \mid x \in F - \text{нерегулярная особая точка}\}, \\ Y &= Y^* \cup Y^{\text{sing}}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Множество $q(Y)$ есть собственное замкнутое подмножество коразмерности 2 пространства $H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(M))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I(x) = I \cap p^{-1}(x)$ и $Y(x) = Y \cap p^{-1}(x)$. Достаточно показать, что

$$\text{codim}_{I(x)} Y(x) = M + 1.$$

Рассмотрим гладкие и особые точки по отдельности.

4.2. Гладкие нерегулярные точки. Следуя [6], положим:

$$Y^*(x) = Y^* \cap p^{-1}(x),$$

$$Y_k^*(x) = \left\{ (q_1, \dots, q_k) \in \prod_{i=1}^k \mathcal{P}_{i,M} \mid q_1 \neq 0, \text{codim}\{q_1 = \dots = q_k = 0\} < k \right\},$$

где мы отождествили

$$p^{-1}(x) = \prod_{i=1}^M \mathcal{P}_{i,M} = \{(q_1, \dots, q_M)\}$$

при помощи системы линейных координат $(z_1, \dots, z_M)$ с началом в точке x . Положим также

$$R_1 = \{q_1 \neq 0\}, \quad R_k = \prod_{i=1}^k \mathcal{P}_{i,M} \setminus Y_k^*, \quad k \geq 2.$$

Пусть (злоупотребляя обозначениями)

$$\pi: \prod_{i=1}^{k+1} \mathcal{P}_{i,M} = \prod_{i=1}^k \mathcal{P}_{i,M} \times \mathcal{P}_{k+1,M} \rightarrow \prod_{i=1}^k \mathcal{P}_{i,M}$$

– естественная проекция.

В [6] было показано, что при $k = 2, \dots, M - 2$ имеет место оценка

$$\text{codim } Y_k^* \cap \pi^{-1}(R_{k-1}) \geq \binom{M}{k} > M + 1,$$

где коразмерность берется относительно пространства многочленов $\prod_{i=1}^k \mathcal{P}_{i,M}$. Таким образом, последовательности $(q_1, \dots, q_M)$ с $q_1 \neq 0$, регулярность которых нарушена в k -м члене, $k \leq M - 2$, имеют высокую коразмерность. Рассмотрим множество R_{M-2} . Система уравнений $q_1 = \dots = q_{M-2} = 0$ определяет кривую $C(q_*) \subset \mathbf{P}^{M-1} = \mathbf{P}(T_x \mathbf{P})$.

ЛЕММА 4.1. *Подмножество $\mathcal{L} \subset R_{M-2}$, для точек которого $C(q_*)$ содержит компонентой прямую в $\mathbf{P}^{M-1}$, имеет коразмерность $(M-2)(M-3)/2$.*

Доказательство очевидно.

На самом деле нам достаточно того, что $\mathcal{L} \subset R_{M-2}$ – собственное замкнутое подмножество (т.е. имеет коразмерность ≥ 1), ибо согласно [6]

$$\text{codim } Y_{M-1}^* \cap \pi^{-1}(\mathcal{L}) \geq M + 1.$$

Таким образом, можно считать, что $C(q_*)$ не содержит прямых. Для завершения доказательства (в неособом случае) достаточно показать, что

$$\text{codim}_{\pi^{-1}(q_*)}(Y_{M-1}^* \cap \pi^{-1}(q_*)) \geq M + 1.$$

Пусть $P \subset \mathbf{P}^{M-1}$ – общая $(M-4)$ -плоскость, так что ограничение линейной проекции $\pi_P: \mathbf{P}^{M-1} \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ на каждую компоненту C кривой $C(q_*)$ есть бирациональный морфизм, причем $d = \deg \pi_P(C) = \deg C \geq 2$. Следовательно, ядро отображения ограничения

$$\text{res}_C: H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(M-1)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(M-1))$$

имеет коразмерность $Md - d(d-1)/2$ при $d \leq M-1$ (при больших $d \geq M$ оно тривиально). Таким образом, существует подпространство $W \subset \mathcal{P}_{3,M-1}$ размерности $M+1$, пересекающее $Y^* = Y_{M-1}^*$ только по нулю. Поэтому

$$\text{codim}_{I(x)} Y^*(x) \geq M + 1,$$

что и требовалось доказать.

4.3. Особые нерегулярные точки. Положим

$$I^{\text{sing}}(x) = \left\{ (x, F) \in I(x) \mid \frac{\partial F}{\partial z_*} \Big|_x = 0 \right\}.$$

Поскольку, очевидно, $\text{codim}_{I(x)} I^{\text{sing}}(x) = M$, для завершения доказательства предложения 4.1 достаточно установить, что $Y^{\text{sing}}(x) \subset I^{\text{sing}}(x)$ есть собственное замкнутое подмножество. Но это очевидно в силу того, что условие регулярности – это открытое условие, а общий многочлен вида $q_2 + \dots + q_M$ имеет в нуле регулярную двойную точку.

Предложение 4.1 полностью доказано.

§ 5. Гипотезы

5.1. Полные пересечения Фано. Пусть $V = V_{m_1 \dots m_k} \subset \mathbf{P}$, $m_1 + \dots + m_k = M$, – полное пересечение Фано индекса 1.

ГИПОТЕЗА 5.1. *Гладкое полное пересечение V является бирационально сверхжестким.*

Техника, с помощью которой в [6] была доказана сверхжесткость общих гиперповерхностей (соответствующих $k = 1$), для полных пересечений недостаточна. Тем не менее, основная схема рассуждений [6], использованная в настоящей работе, исключает бесконечно близкую особенность $\nu \in \mathcal{N}(V)$ с центром в *общей* точке $p = \text{centre}(\nu) \in V$. В самом деле, пусть $k \geq 2$ и

$$V = H_1 \cap \cdots \cap H_k,$$

где в системе линейных координат $z_1, \dots, z_M$ с центром в точке p гиперповерхность H_i задается уравнением

$$f_i = q_{i,1} + q_{i,2} + \cdots + q_{i,m_i} = 0.$$

Рассматривая оборванные многочлены $f_{i,j} = q_{i,1} + \cdots + q_{i,j}$, мы получаем гиперкасательные линейные системы $\Lambda_k = |kH - (k+1)E|$, причем если точка p достаточно общая, то имеет место оценка

$$\text{codim}_V \text{Bs } \Lambda_l \geq \sum_{\alpha=1}^k \min\{m_\alpha, l\}.$$

Положим при $l \geq 2$

$$\begin{aligned} n_l &= \#\{\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq k, m_\alpha \geq l+1\}, \\ n_1 &= k-2 \geq 0 \end{aligned}$$

и выберем в каждой системе Λ_l ровно n_l общих дивизоров $F_{l,1}, \dots, F_{l,n_l}$. Легко видеть, что кратность нульмерной схемы

$$\left(Z \bullet \prod_{l=1}^{\max\{m_i\}} \prod_{\alpha=1}^{n_l} F_{l,\alpha} \right)$$

в точке p , где $Z = (D_1 \bullet D_2)$, $D_i \in |\chi|$ – общие дивизоры, строго превосходит $d = n^2 \prod_{l=1}^k m_l!$, в то время как степень этой схемы есть именно d . Противоречие. Это исключает максимальную особенность $\nu \in \mathcal{N}(V)$.

К сожалению, эта схема не работает, если на V имеются прямые, проходящие через точку p . Тем не менее, нет никаких сомнений в том, что гипотеза 5.1 (и даже существенно более сильное утверждение, где на V допускаются особенности) верна¹.

¹*Примечание при корректуре.* К настоящему моменту доказана бирациональная сверхжесткость общих полных пересечений индекса 1 с $M \geq 3k+1$.

5.2. Расслоения на полные пересечения Фано. Пусть S – гладкое многообразие, $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга $M + 1$, $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ – локально тривиальное $\mathbf{P}^M$ -расслоение на S . Рассмотрим гладкие подмногообразия $V \subset X$ коразмерности $k \geq 1$, локально реализуемые как полные пересечения типа $(m_1, \dots, m_k)$ в $\mathbf{P} \times U$, где $U \subset S$ – открытые аффинные множества, над которыми расслоение $\pi: X \rightarrow S$ тривиально, $m_1 + \dots + m_k = M$. Очевидно, $\text{Pic } V = \mathbf{Z}K_V \oplus \pi^* \text{Pic } S$. Пусть $f \in A^{\dim S + 1}(V)$ – класс гиперплоского сечения общего слоя $V \cap \pi^{-1}(s)$ – цикла коразмерности $\dim S + 1$ на V .

ГИПОТЕЗА 5.2. *Предположим, что выполнено следующее K^2 -условие: для любого класса $C \in A^{\dim S - 1}(S)$ подвижных рациональных кривых, заметающих S , и любого $N \in \mathbf{Z}$ численный класс $N(K_V^2 \cdot \pi^* C) - f$ не является эффективным на V . Тогда расслоение Фано $\pi: V \rightarrow S$ бирационально свертжесткое.*

Предположим, что (подкручивая $\mathcal{E}$, если это необходимо) пучок $\mathcal{E}$ порождается своими сечениями, так что класс L тавтологического пучка на X дает свободную линейную систему $|L|$. K^2 -условие выполнено, если имеет место неравенство

$$(K_V^2 \cdot \pi^* C \cdot L_V^{M-1-k}) \leq 0,$$

которое легко проверяется в терминах инвариантов базы S и классов Чженя пучка $\mathcal{E}$.

Основное препятствие к доказательству гипотезы 5.2 так же, как и гипотезы 5.1, состоит в том, что условия регулярности не выполняются в точках и на слоях необщего положения. Если бы этих трудностей не было, мы могли бы рассуждать так. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \chi: & V & \dashrightarrow V' \\ & \downarrow & \downarrow \\ & S & S' \end{array}$$

– бирациональное отображение расслоений Фано. Рассмотрим линейную систему $|D'|$ на V' и плотное свободное алгебраическое семейство рациональных кривых $\mathcal{C}' = (C'_t, t \in T)$ на V' (например, стягиваемых проекцией $\pi': V' \rightarrow S'$ в точку). Возьмем их собственные прообразы $|D| \subset |-nK_V + \pi^* A|$, $A \in \text{Pic } S$, и $\mathcal{C} = (C_t, t \in T)$ на V и будем рассуждать так же, как выше (§ 2, 3), ограничивая линейную систему $|D|$ на прообраз $\pi^{-1}(\pi(C_t))$ общей кривой семейства $\pi_* \mathcal{C}$ на S . Если бы все слои π были достаточно хорошими, K^2 -условие обеспечило бы полную аналогию со случаем одномерной базы. К настоящему моменту эта схема рассуждений успешно реализована лишь для расслоений на коники [8] (теорема Саркисова [9]).

5.3. Дальнейшие гипотезы. Как показывает опыт работы с полными пересечениями Фано во взвешенном проективном пространстве $\mathbf{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ [3], при соответствующих предположениях результаты о полных пересечениях в $\mathbf{P}^N$ переносятся во взвешенный случай (и, более того, случай тривиальных весов $a_0 = \dots = a_N = 1$, по-видимому, самый трудный). Поэтому гипотезы 5.1 и 5.2

должны быть справедливы (при необходимых модификациях гладкости и т.д.) для взвешенных полных пересечений и расслоений на взвешенные полные пересечения соответственно.

Сформулируем, наконец, еще одну гипотезу о максимальных особенностях линейных систем дивизоров на расслоениях Фано. Она верна во всех случаях, в которых анализ был успешным. К сожалению, мы не можем предложить подхода к ее доказательству.

ГИПОТЕЗА 5.3 (основная гипотеза). Пусть $\pi: V \rightarrow S$ – расслоение Фано, $\nu \in \mathcal{N}(V)$ – максимальная особенность линейной системы Λ . Тогда существует неприводимый цикл $B \subset V$, $B \cap \text{centre}(\nu) \neq \emptyset$, максимальный для Λ (т.е. $\nu_B = \text{mult}_B$ – максимальная особенность).

Надежду на то, что гипотеза 5.3 справедлива, подтверждают работы [11], [2] и все, что мы знаем о максимальных особенностях.

Список литературы

1. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
2. Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry (to appear in “Birational Geometry of Threefolds”, LMS series).
3. Corti A., Pukhlikov A., Reid M. Fano 3-fold hypersurfaces. Preprint/Warwick, 10/1999.
4. Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
5. Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
6. Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. № 2. P. 401–426.
7. Pukhlikov A. V. Certain examples of birationally rigid varieties with a pencil of double quadrics // J. Math. Sci. 1999. V. 94. № 1. P. 986–995.
8. Pukhlikov A. V. Essentials of the method of maximal singularities. Preprint/Warwick, 31/1996.
9. Саркисов В. Г. О структурах расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 355–390.
10. Гриненко М. М. Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.
11. Kawamata Y. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher Dimensional Complex Varieties. Berlin, 1996. P. 241–245.
12. Kollár J. et al. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds // Asterisque. 1993. V. 211.

Поступило в редакцию
3.XI.1998