Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, О суммируемости и сходимости негармонических рядов Фурье,
Изв. РАН. Сер. матем., 2000, том 64, выпуск 3, 151–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:13:58

УДК 517.5

А. М. Седлецкий

О суммируемости и сходимости негармонических рядов Фурье

Рассмотрены системы экспонент, ортогональные на $(-a, a)$ мерам $d\sigma$ специального вида. При определенных условиях на метод суммирования эти системы образуют базисы суммирования в $L^p(-a, a)$ и в C_0 – подпространстве пространства $C[-a, a]$, ортогональном $d\sigma$. Липшицевы функции из C_0 разлагаются в равномерно сходящиеся на $[-a, a]$ негармонические ряды Фурье по этим системам.

Библиография: 18 наименований.

1. Введение. Рассматривается система функций

$$e(\lambda) := (e^{i\lambda_n t}, ite^{i\lambda_n t}, \dots, (it)^{m_n-1} e^{i\lambda_n t})_{n=0}^\infty, \quad (1)$$

порожденная пронумерованной в порядке неубывания модулей последовательностью $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, в которой каждая точка λ_n считается со своей кратностью m_n . Пусть $a \in (0, \infty)$ фиксировано. Предположим, что система (1) минимальна в пространстве $L^p(-a, a)$, $1 \leq p < \infty$, т.е. обладает биортогональной системой

$$(h_{n,0}(t), h_{n,1}(t), \dots, h_{n,m_n-1}(t))_{n=0}^\infty,$$

все функции которой лежат в $L^q(-a, a)$, $1/p + 1/q = 1$. Тогда каждой функции $f \in L^p(-a, a)$ отвечает ее биортогональный ряд по системе (1):

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^\infty e^{i\lambda_n t} \sum_{k=0}^{m_n-1} c_{nk} t^k, \quad c_{nk} = \int_{-a}^a f(t) h_{n,k}(t) dt, \quad (2)$$

– негармонический ряд Фурье. Такие ряды рассматривались многими авторами; пока ограничимся упоминанием классических работ [1] и [2].

Начиная с этого момента, предполагаем, что λ – последовательность всех нулей целой функции вида

$$L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} d\sigma(t), \quad \text{var } \sigma(t) < \infty. \quad (3)$$

Тогда система (1) минимальна в $L^1(-a, a)$ (а значит, и во всех пространствах $L^p(-a, a)$, $1 \leq p < \infty$, и $C[-a, a]$), и ряд (2) имеет вид [3]–[5]

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^\infty i \operatorname{Res}_{z=\lambda_n} \frac{e^{izt}}{L(z)} \int_{-a}^a d\sigma(u) \int_0^u f(v) e^{iz(u-v)} dv. \quad (4)$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 01-00-00396).

Ряд (4) можно трактовать и как ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора, порожденного операцией дифференцирования $-id/dt$ и так называемым “размазанным” краевым условием

$$\int_{-a}^a f(t) d\sigma(t) = 0. \quad (5)$$

Подпространство в $C = C[-a, a]$, состоящее из функций f с условием (5), обозначим через $C(d\sigma) = C[-a, a; d\sigma]$. Если $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна и $\sigma'(t) \in L^q(-a, a)$, то подпространство в $L^p = L^p(-a, a)$, состоящее из функций f с условием (5), обозначаем через $L^p(d\sigma) = L^p(-a, a; d\sigma)$. Заметим, что условие $f \in C(d\sigma)$ ($\in L^p(d\sigma)$) является необходимым условием сходимости или суммируемости ряда (4) к $f(t)$ в C (в L^p).

Поведение рядов (4) зависит, конечно, от меры $d\sigma(t)$, порождающей последовательность λ (спектр соответствующего оператора). Наиболее изученным к настоящему времени является случай наличия скачков у функции $\sigma(t)$ в точках $\pm a$ (см. [5], [6]).

Здесь мы будем рассматривать случай, когда

$$d\sigma(t) = \frac{k(t) dt}{(a^2 - t^2)^\alpha}, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1, \quad \operatorname{var} k(t) < \infty, \quad k(\pm a \mp 0) \neq 0. \quad (6)$$

Для его иллюстрации запишем тождества [2]

$$\begin{aligned} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \beta)^2} \right) &= c \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \frac{\sin(t/2)}{(\cos(t/2))^{1-2\beta}} dt, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \\ \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \beta)^2} \right) &= c_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\beta} dt, \quad \operatorname{Re} \beta > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Соответственно при $0 < \operatorname{Re} \beta < 1/2$, $-1/2 < \operatorname{Re} \beta < 0$ для мер

$$d\sigma(t) = \frac{\sin(t/2)}{(\cos(t/2))^{1-2\beta}} dt, \quad d\sigma(t) = \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\beta} dt$$

выполнены условия (6) с $a = \pi$; в первом случае $\alpha = 1 - 2\beta$, а во втором $\alpha = -2\beta$. Но в силу выписанных тождеств эти меры порождают в качестве систем (1) следующие системы:

$$(\exp(i(n + \beta \operatorname{sign} n)t))_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (\exp(i(n + \beta \operatorname{sign} n)t))_{n \neq 0}. \quad (7)$$

Таким образом, класс негармонических рядов, задаваемых условиями (6), содержит в себе ряды по системам (7), которые интересны не только сами по себе (в связи с особой регулярностью спектра), но и тем, что от них мы легко переходим к рядам по системам синусов и косинусов:

$$(\sin(n + \beta)t)_{n=1}^{\infty}, \quad 1 \cup (\cos(n + \beta)t)_{n=1}^{\infty}, \quad (8)$$

важных для уравнений математической физики [7].

Случай (6) разработан менее полно, чем упоминавшийся случай скачков функции $\sigma(t)$ в точках $\pm a$. Для негармонических рядов класса (6) и соответствующих систем $e(\lambda)$ известны следующие факты.

1) Теорема о равномерной равносходимости на $[-a + \delta, a - \delta] \forall \delta \in (0, a)$ ряда (4) с тригонометрическим рядом Фурье (по системе $\exp(i\pi n t/a)$) для любой функции $f \in L^1(-a, a)$ [8].

2) Аналог признака Дирихле–Жордана равномерной сходимости рядов (4) на $[-a, a]$ [8].

3) Пусть при некотором $\delta \in (0, a)$ функция $k(t)$ принадлежит классу $C^2(a - \delta \leq |t| \leq a)$, и пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда если $1 < p < 1/(1 - \alpha)$, то система (1) образует базис в $L^p(-a, a)$; если $1/(1 - \alpha) < p < \infty$, то система (1) образует базис в $L^p(-a, a; d\sigma)$. Доказательство основано на применении метода распространения сходимости квазиполиномов [5]. При $p = 1/(1 - \alpha)$ система (1), вообще говоря, не образует базиса в L^p [5], будучи в этом пространстве полной и минимальной.

Приведенный перечень показывает, что для систем экспонент, аннулируемых мерами (6), важный вопрос о базисах суммирования в пространстве $C(d\sigma)$ до сих пор оставался неисследованным. Этот пробел теории – отсутствие теорем типа Фейера – восполняется в настоящей статье. Отметим, что в данном случае упомянутый метод из [5] неприменим, так как, в отличие от классов L^p ($1 < p < \infty$), в классе C система (1) системой распространения сходимости не является [9]. Применяемый нами подход позволил получить также результаты о равномерной сходимости на $[-a, a]$ рядов (4) для липшицевых функций f и о базисах суммирования (1) в пространствах L^p и $L^p(d\sigma)$ при $1 < p < \infty$, но уже без каких бы то ни было условий гладкости функции $k(t)$ (из (6)) в окрестностях точек $\pm a$.

Определим *ядро суммирования* как аналитическую при $|z| < 1$ и непрерывную при $|z| \leq 1$ функцию $K(z)$ со свойствами:

- 1) $K(z)$ четна;
- 2) $K(0) = 1$;
- 3) $|\hat{K}(x)| \leq K_0(|x|)$, где $K_0(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $K_0(x)$ не возрастает.

Здесь $\hat{K}(x)$ обозначает преобразование Фурье функции $K(x)$, продолженной нулем вне $[-1, 1]$. Если $K(z)$ – ядро суммирования, то будем говорить также, что функция $K(z)$ порождает *метод суммирования* K . В нашем изложении важную роль будут играть ядра суммирования со свойством

$$\int_0^\pi |\theta|^{-\gamma} |K(e^{i\theta})| d\theta < \infty, \quad \gamma \geq 1. \quad (9)$$

Функция $K(z) = (1 - z^2)^\nu$, $\nu > 0$, $|z| \leq 1$, дает пример ядра суммирования [10] (ядро Рисса). Очевидно, оно удовлетворяет условию (9) при $\nu > \gamma - 1$.

Введем линейные средние ряда (4) порядка r относительно метода суммирования K :

$$S_r(t, f; K) := \sum_{|\lambda_n| < r} i \operatorname{Res}_{z=\lambda_n} \frac{e^{izt}}{L(z)} K(z) \int_{-a}^a d\sigma(u) \int_0^u f(v) e^{iz(u-v)} dv.$$

Формальная подстановка $K \equiv 1$ дает частичную сумму ряда (4), которую обозначаем через $S_r(t, f)$, т.е. $S_r(t, f) = S_r(t, f; 1)$. В случае простых корней $L(z)$ имеем

$$S_r(t, f; K) = \sum_{|\lambda_n| < r} c_n K\left(\frac{\lambda_n}{r}\right) e^{i\lambda_n t},$$

где $c_n = c_{n0}$ в обозначениях (2). Последовательность $r_k \rightarrow \infty$ будем называть *подходящей*, если множество окружностей $|z| = r_k$ отстоит на положительном расстоянии от множества λ .

Пусть B обозначает какое-нибудь из пространств $C(d\sigma)$, L^p , $L^p(d\sigma)$. По построению система (1) минимальна в B , поэтому корректно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что система (1) образует в пространстве B *базис суммирования* относительно метода K , если для любой функции $f \in B$ и для любой подходящей последовательности r_k

$$\|S_r(t, f; K) - f(t)\|_B \rightarrow 0, \quad r = r_k \rightarrow \infty.$$

Через $\Lambda_\beta[c, d]$ обозначаем класс функций $f \in C[c, d]$, для которых

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\beta, \quad t_1, t_2 \in [c, d], \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Сформулируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ – последовательность всех нулей функции (3) с условиями (6). Тогда если ядро суммирования $K(z)$ обладает свойством (9) с $\gamma = 1$, то система (1) образует в $C[-a, a; d\sigma]$ и $L^1(-a, a)$ базис суммирования относительно метода K .

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ – последовательность всех нулей функции (3) с условиями (6). Тогда для любой функции $f \in C(d\sigma) \cap \Lambda_\beta[-a, a]$, $\beta > 0$, ряд (4) сходится к $f(t)$ равномерно на $[-a, a]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть λ – последовательность всех нулей функции (3) с условиями (6), и пусть ядро суммирования $K(z)$ удовлетворяет условию (9). Тогда:

- 1) если $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$, $a \gamma = 2 - \operatorname{Re} \alpha$, то система (1) образует в $L^p(-a, a)$ базис суммирования относительно метода K ;
- 2) если $1/(1 - \operatorname{Re} \alpha) < p < \infty$, $a \gamma = 1 + 1/p$, то система (1) образует в $L^p(-a, a; d\sigma)$ базис суммирования относительно метода K .

Показано, что в случае $p = 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$, когда система (1) полна в $L^p(-a, a)$, утверждение 1) теоремы 3, вообще говоря, теряет силу.

Отметим, что для вещественных α утверждение теоремы 1, касающееся пространства L^1 , было известно [5] и что в [11] доказано утверждение о равномерной сходимости на $[0, \pi]$ рядов по системам (8) с $\beta \in \mathbb{R}$ для липшицевых функций f .

2. Свойства функции $L(z)$ и системы $e(\lambda)$.

ЛЕММА 1 [8]. Пусть выполнены условия (6). Тогда:

- 1) все достаточно большие по модулю нули λ_n функции $L(z)$ просты и верна асимптотическая формула

$$\lambda_n = \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1-\alpha}{2} \operatorname{sign} n \right) + \frac{1}{2\pi i} \log \left(-\frac{k(-a+0)}{k(a-0)} \right) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty;$$

- 2) вне кружков одинакового радиуса с центрами в точках λ_n и 0 справедливы оценки ($r = |z|$, $y = \operatorname{Im} z$)

$$0 < A \leq |L(z)| e^{-a|y|} \cdot r^{1-\operatorname{Re} \alpha} \leq B < \infty. \quad (10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что *дефект* системы (1) в $C(L^p)$ равен 1, если эта система неполна в $C(L^p)$, а система

$$e(\lambda) \cup e^{i\mu t}, \quad \mu \neq \lambda_n, \quad (11)$$

полна в $C(L^p)$.

ЛЕММА 2 [12]. Пусть λ – последовательность всех нулей функции (3). Тогда для полноты системы (1) в $C(d\sigma)$ (в $L^p(d\sigma)$ при условии $\sigma \in AC$ и $\sigma' \in L^q$) необходимо и достаточно, чтобы дефект этой системы в $C(L^p)$ был равен 1.

ЛЕММА 3. Пусть λ – последовательность всех нулей функции (3), и пусть выполнены условия (6). Тогда:

- 1) при $\operatorname{Re} \alpha \geq 1/q$ система (1) полна в L^p , $1/p + 1/q = 1$;
- 2) при $\operatorname{Re} \alpha < 1/q$ система (1) полна в $C(d\sigma)$ и в $L^p(d\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим противное: система (1) неполна в L^p . Тогда найдется нетривиальная целая функция $M(z)$ вида

$$M(z) = \int_{-a}^a e^{izt} m(t) dt, \quad m(t) \in L^q,$$

обращающаяся в нуль в точках λ . Но тогда $M(z) = L(z)E(z)$, где $E(z)$ – некоторая целая функция экспоненциального типа. Индикатор функции $M(z)$ не превосходит $a|\sin \theta|$, а индикатор функции $L(z)$ по лемме 1 равен $a|\sin \theta|$. Так как $L(z)$ – функция вполне регулярного роста, то индикатор функции $E(z)$ равен разности индикаторов функций $M(z)$ и $L(z)$. Значит, индикатор функции $E(z)$ неположителен, и потому $E(z)$ – функция минимального типа. Так как $|M(z)|$ ограничен на каждой горизонтали, то по лемме 1 при достаточно большом h справедлива оценка

$$|E(x + ih)| \leq C(1 + |x|)^{1 - \operatorname{Re} \alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как $E(z)$ – функция минимального типа, а $1 - \operatorname{Re} \alpha < 1$, то $E(z) \equiv C$. Следовательно, функции $M(z)$ и $L(z)$ пропорциональны. Тогда и функции $m(t)$ и $\sigma'(t)$ пропорциональны. Но $m(t) \in L^q$, а $\sigma'(t) \notin L^q$, так как в (6) $\operatorname{Re} \alpha \geq 1/q$. Противоречие. Утверждение 1) доказано.

2) Так как λ – последовательность нулей функции (3), то система $e(\lambda)$ неполна в C . В силу условий (6) она неполна и в L^p при $\operatorname{Re} \alpha < 1/q$. Значит, по лемме 2 нам остается убедиться в том, что система (11) полна в C и L^p .

Рассмотрим целую функцию $M(z) = (z - \mu)L(z)$. Последовательность ее нулей совпадает с последовательностью показателей системы (11). По лемме 1 индикатор функции $M(z)$ равен $a|\sin \theta|$ и при подходящем h

$$|M(x + ih)| \geq m > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \pm\infty} |M(x + ih)| = \infty, \quad (12)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} |M(iy)| e^{-a|y|} > 0. \quad (13)$$

Условия (12) влекут полноту системы (11) в C [13, с. 541], а условие (13) влечет полноту системы (11) в L^p [13, с. 542]. Лемма 3 доказана.

3. Классы функций, интеграл Пуассона и свойства свертки. В этом пункте через $\|g(x)\|_p$ обозначаем норму функции $g(x)$ в $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть $0 < \beta \leq 1$; определим $\Lambda_\beta^p(\mathbb{R})$ ($= \Lambda_\beta^{p,\infty}(\mathbb{R})$ в обозначениях [14]) как класс функций $g \in L^p(\mathbb{R})$, для которых

$$\sup(|t|^{-\beta} \|g(x+t) - g(x)\|_p : t \neq 0) < \infty.$$

Пишем $\Lambda_\beta(\mathbb{R})$ вместо $\Lambda_\beta^\infty(\mathbb{R})$. Через $P_y(t)$ обозначаем ядро Пуассона, т.е. $P_y(t) = (y/\pi)(t^2 + y^2)^{-1}$. Для функций $u(t)$, $f(t)$, $g(t)$ через $U(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ обозначаем их интегралы Пуассона, т.е.

$$U(x, y) = P_y * u = \int_{\mathbb{R}} P_y(t) u(x-t) dt, \quad F = P_y * f, \quad G = P_y * g, \quad y > 0.$$

ЛЕММА 4 [14, с. 167, 170]. Пусть $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, $0 < \beta < 1$. Тогда для принадлежности $u \in \Lambda_\beta(\mathbb{R})$ необходимо при $m = 1$ и достаточно при $m = 2$, чтобы имела место оценка

$$\left\| \frac{\partial^m U(x, y)}{\partial y^m} \right\|_\infty \leq A_m \cdot y^{-m+\beta}, \quad y > 0.$$

ЛЕММА 5. Если $g \in \Lambda_\beta^1(\mathbb{R})$, $0 < \beta < 1$, то

$$\left\| \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right\|_1 \leq A y^{-1+\beta}, \quad y > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P_y(t)}{\partial y} g(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P_y(t)}{\partial y} (g(x-t) - g(x)) dt, \\ \left\| \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial P_y(t)}{\partial y} \right| dt \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial P_y(t)}{\partial y} \right| |t|^\beta dt, \end{aligned} \quad (14)$$

так как $g \in \Lambda_\beta^1(\mathbb{R})$. Последний интеграл разобьем на два: по $|t| < y$ и по $|t| > y$. К полученным слагаемым применяем соответственно оценки

$$\left| \frac{\partial P_y(t)}{\partial y} \right| \leq \frac{c}{y^2}, \quad \left| \frac{\partial P_y(t)}{\partial y} \right| \leq \frac{c}{t^2} \quad (15)$$

(см. [14, с. 167]). Получим требуемую оценку. Лемма доказана.

Заметим, что утверждение леммы 5 содержится в [14], однако в соответствующей оценке в [14, с. 177] допущена опечатка: показатель степени входит с противоположным знаком. Поэтому мы привели лемму 5 вместе с доказательством.

Если в средней части (14) интеграл разбить на два (снова по $|t| < y$ и $|t| > y$) и к полученным слагаемым применить неравенство Гёльдера и оценки (15), то мы придем к следующей лемме.

ЛЕММА 6. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq \infty$, то

$$\left\| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right\|_{\infty} \leq Ay^{-1-1/p}, \quad y > 0. \quad (16)$$

ЛЕММА 7. Пусть $\text{var } k(t) < \infty$, $0 < \text{Re } \alpha < 1$, $g(t) = k(t)/(a^2 - t^2)^\alpha$, $|t| < a$ и $g(t) = 0$ при $|t| > a$. Тогда $g \in \Lambda_{1-\text{Re } \alpha}^1(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Его достаточно провести для функции $g(t)$, которая равна нулю вне $(0, a]$, а на $(0, a]$ имеет вид

$$\frac{k(t)}{t^\alpha}, \quad \text{var } k(t) < \infty, \quad t \in (0, a]. \quad (17)$$

Обозначим $g_h(x) = g(x+h) - g(x)$. Требуемую оценку

$$\|g_h(x)\|_1 = O(|h|^{1-\text{Re } \alpha}) \quad (18)$$

достаточно доказать для $0 < |h| \leq a/2$. Рассмотрим случай $0 < h \leq a/2$; случай $h < 0$ разбирается по аналогии. Имеем

$$\|g_h(x)\|_1 = \int_{-h}^0 |g(x+h)| dx + \int_0^{a-h} |g_h(x)| dx + \int_{a-h}^a |g(x)| dx.$$

Первый и третий интегралы справа оцениваются сверху соответственно величинами $O(h^{1-\text{Re } \alpha})$ и $O(h)$. Для оценки второго интеграла запишем $|g_h(x)|$ в виде

$$\left| \frac{k(x+h)}{(x+h)^\alpha} - \frac{k(x)}{x^\alpha} \right| \leq \left| \frac{k(x+h) - k(x)}{(x+h)^\alpha} \right| + \left| k(x) \left(\frac{1}{(x+h)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} \right) \right| := A_1 + A_2.$$

Так как $A_2 \leq Mx^{-\text{Re } \alpha}$, $0 < x \leq 2h$, и

$$A_2 = \frac{|k(x)|}{x^{\text{Re } \alpha}} \left| \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{-\alpha} - 1 \right| \leq \frac{Mh}{x^{1+\text{Re } \alpha}}, \quad 2h < x < a,$$

то

$$\int_0^{a-h} A_2 dx \leq C \left(h \int_{2h}^{a-h} x^{-1-\text{Re } \alpha} dx + \int_0^{2h} x^{-\text{Re } \alpha} dx \right) \leq C_1 h^{1-\text{Re } \alpha}.$$

Далее, по лемме Харди–Литтлвуда [15, с. 72] условие $\text{var } k(t) < \infty$ влечет свойство $k(t) \in \Lambda_1^1(\mathbb{R})$ (в этой лемме речь идет о периодических функциях, но доказательство проходит и для нашего случая). Поэтому

$$\int_0^{a-h} A_1 dx \leq \frac{1}{h^{\text{Re } \alpha}} \int_0^{a-h} |k(x+h) - k(x)| dx \leq Ch^{1-\text{Re } \alpha},$$

и оценка (18) доказана. Лемма 7 верна.

В нижеследующих леммах 8–11 под $g(t)$ подразумевается функция из леммы 7, а $g_1(t) = g(-t)$.

ЛЕММА 8. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1/(1 - \operatorname{Re} \alpha) < p \leq \infty$, то

$$f * g_1 \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}(\mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как g_1 имеет тот же вид, что и g , то достаточно доказать лемму для свертки $f * g := u$.

Так как $q \operatorname{Re} \alpha < 1$, то $g \in L^q$, и по неравенству Гёльдера $u \in L^\infty(\mathbb{R})$. По лемме 7 $g \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha}^1(\mathbb{R})$. Значит, по лемме 5

$$\left\| \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right\|_1 \leq A y^{-1+(1-\operatorname{Re} \alpha)}, \quad y > 0. \quad (19)$$

По лемме 6 имеет место оценка (16). Применим прием из [14, с. 175]. Так как

$$P_{y_1+y_2} = P_{y_1} * P_{y_2}, \quad y_1, y_2 > 0,$$

то

$$U(x, y_1 + y_2) = P_{y_1+y_2} * f * g = P_{y_1} * f * P_{y_2} * g = F(x, y_1) * G(x, y_2).$$

Продифференцируем это равенство сначала по y_1 , а затем по y_2 . Получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial y_1} * \frac{\partial G}{\partial y_2}, \quad y = y_1 + y_2.$$

Полагая здесь $y_1 = y_2 = y/2$ и учитывая (16) и (19), находим

$$\left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial y_1} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial G}{\partial y_2} \right\|_1 \leq A_1 y^{-2+(1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p)}, \quad y > 0. \quad (20)$$

По лемме 4 $u \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если $f \in \Lambda_\beta(\mathbb{R})$, $0 < \beta < \operatorname{Re} \alpha$, то

$$f * g_1 \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha + \beta}(\mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Его также достаточно провести для свертки $f * g = u$. Доказательство леммы 8 повторяется с единственной заменой: теперь вместо неравенства (16) применяется неравенство

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial y} \right\|_\infty \leq A y^{-1+\beta}, \quad y > 0,$$

которое обеспечивается условием $f \in \Lambda_\beta(\mathbb{R})$ и леммой 4, т.е. в доказательстве леммы 8 число $-1/p$ заменяется числом β . В итоге оценка (20) будет верна с той же заменой, т.е.

$$\left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\|_\infty \leq A y^{-2+(1-\operatorname{Re} \alpha + \beta)}, \quad y > 0.$$

По лемме 4 $f * g \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha + \beta}(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Если $f \in L^p(-a, a)$, $1 - \operatorname{Re} \alpha < 1/p < 1$, то

$$f * g_1 \in L^s(\mathbb{R}), \quad 1 - \operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно считать, что g_1 равна нулю вне $(0, a)$, а на $(0, a)$ задана посредством (17). Но тогда лемма сразу следует из теоремы Харди–Литтлвуда [14, с. 141], по которой оператор

$$f(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y) dy}{|x - y|^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

действует как ограниченный из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^s(\mathbb{R})$, где $\alpha = 1/p - 1/s$, $1 < p < s < \infty$.

Леммы 8–10, которые будут существенно использоваться в дальнейшем, показывают, что оператор свертки с мерой (6) ведет себя подобно оператору интегрирования дробного порядка α [17].

4. Обобщенный интеграл Стильеса. Нам понадобится оценка обобщенного интеграла Стильеса, построенного в [16] следующим образом. Пусть функции φ , μ определены на отрезке $[c, d]$, причем функция φ интегрируема. Пусть $P = (x_k)_{k=0}^n$ – разбиение отрезка $[c, d]$, и пусть $\tau = \tau(P)$ – диаметр разбиения. Составим интегральные суммы

$$\sigma = \sigma(P) := \sum_{k=1}^n \frac{\Delta\mu_k}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(t) dt, \quad (21)$$

где $\Delta\mu_k = \mu(x_k) - \mu(x_{k-1})$. По определению

$$\int_c^d \varphi(t) d\mu(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma(P). \quad (22)$$

Если $\varphi \in C[c, d]$, то по теореме о среднем

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k^*) \Delta\mu_k, \quad x_k^* \in (x_{k-1}, x_k).$$

Значит, в этом случае интегральная сумма (21) превращается в интегральную сумму обычного интеграла Стильеса, а интеграл (22), если он существует, совпадает с обычным интегралом Стильеса.

Введем интегральный модуль непрерывности

$$\omega_1(h; \varphi) := \int_c^{d-h} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| dt, \quad 0 < h \leq d - c.$$

По определению $\varphi \in W_1^\gamma(c, d)$, $0 < \gamma < 1$, если

$$\max(N_{1,\gamma}(\varphi), \|\varphi\|_1) < \infty,$$

где

$$N_{1,\gamma}(\varphi) = \int_0^{d-c} h^{-1-\gamma} \omega_1(h; \varphi) dh, \quad \|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_{L^1(c,d)}.$$

ЛЕММА 11 [16]. Если $\varphi \in W_1^\gamma(c, d)$, а $\mu \in \Lambda_{1-\gamma}[c, d]$, $0 < \gamma < 1$, то интеграл (22) существует и

$$\left| \int_c^d \varphi(t) d\mu(t) \right| \leq C(\gamma, \mu)(N_{1,\gamma}(\varphi) + \|\varphi\|_1).$$

Мы будем применять эту оценку, когда отрезок $[c, d]$ совпадает с $[-2a, 0]$, а $\varphi(t) = \exp(-izt)$, $\operatorname{Im} z > 0$. Оценим величины $N_{1,\gamma}(\varphi)$ и $\|\varphi\|_1$ для этого случая. Имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= e^{yt} |1 - e^{-izh}|, \quad y = \operatorname{Im} z > 0, \\ \omega_1(h; \varphi) &= |1 - e^{-izh}| \int_{-2a}^{-h} e^{yt} dt = |1 - e^{-izh}| \frac{e^{-hy} - e^{-2ay}}{y}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\omega_1(h; \varphi) \leq \frac{C|izh|}{1+y}, \quad \omega_1(h; \varphi) \leq \frac{C}{1+y}$$

соответственно при $0 < h < 1/r$ и $1/r < h < 2a$, $r = |z|$. Значит,

$$N_{1,\gamma}(\varphi) = \int_0^{2a} h^{-1-\gamma} \omega_1(h; \varphi) dh \leq \frac{C}{1+y} (I_1 + I_2),$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{1/r} h^{-1-\gamma} |izh| dh = r \int_0^{1/r} h^{-\gamma} dh = C_1 r^\gamma, \\ I_2 &= \int_{1/r}^{2a} h^{-1-\gamma} dh = C r^\gamma. \end{aligned}$$

Следовательно, для $\varphi(t) = \exp(-izt)$, $\operatorname{Im} z > 0$, $-2a \leq t \leq 0$,

$$N_{1,\gamma}(\varphi) \leq \frac{Cr^\gamma}{1+y}, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad r = |z|. \quad (23)$$

Далее,

$$\|\varphi\|_1 = \int_{-2a}^0 e^{yt} dt = \frac{1 - e^{-2ay}}{y} \leq \frac{C}{1+y}. \quad (24)$$

Если же в роли отрезка $[c, d]$ выступает $[0, 2a]$, а $\varphi(t) = \exp(-izt)$, $\operatorname{Im} z < 0$, то оценки (23), (24) сохраняются с заменой y на $|y|$. Вместе с леммой 11 эти оценки дают следующую лемму.

ЛЕММА 12. Пусть $\mu \in \Lambda_{1-\gamma}[-2a, 0] \ (\in \Lambda_{1-\gamma}[0, 2a])$, $0 < \gamma < 1$, u

$$E(z) = \int_{-2a}^0 e^{-izt} d\mu(t), \quad y > 0 \quad \left(E(z) = \int_0^{2a} e^{-izt} d\mu(t), \quad y < 0 \right).$$

Тогда

$$|E(z)| \leq \frac{Cr^\gamma}{1+|y|}, \quad r = |z| \geq 1, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

5. Формулы для частичных сумм. Пусть $f \in L^1(-a, a)$. Считая функцию $f(t)$ продолженной нулем на внешность отрезка $[-a, a]$, обозначим через $\hat{f}$ ее преобразование Фурье, т.е.

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-iut} f(t) dt, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Далее, обозначим

$$R_r(t, f; K) := S_r(t, f; K) - \int_{-r}^r e^{iut} \hat{f}(u) K\left(\frac{u}{r}\right) du. \quad (25)$$

Если на окружности $|z| = r$ нет точек λ_n , то справедлива формула [5]

$$R_r(t, f; K) = \int_{|z|=r} \frac{e^{izt} F(z)}{L(z)} K\left(\frac{z}{r}\right) dz, \quad (26)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(u) L(u)}{u - z} du, \quad \text{Im } z \neq 0. \quad (27)$$

Преобразуем $F(z)$ к более удобному виду. Пусть $g(t)$ – функция из леммы 7 и $g_1(t) = g(-t)$. Тогда из (3) и (6) вытекает, что

$$L(u) = \int_{-a}^a e^{-iut} g(-t) dt = 2\pi \hat{g}_1(u).$$

Значит,

$$\hat{f}(u) L(u) = 2\pi (\widehat{f * g_1})(u). \quad (28)$$

Далее, тождество

$$\frac{1}{i(u - z)} = \int_{\mathbb{R}_-} e^{iut} e^{-izt} dt, \quad \text{Im } z > 0, \quad (29)$$

показывает, что при фиксированном z : $\text{Im } z > 0$, функция $1/(i(u - z))$ есть обратное преобразование функции $\exp(-izt)$, сосредоточенной на $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. Используя это и (28) и применяя к (27) равенство Парсеваля, находим

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\widehat{f * g_1})(u)}{i(u - z)} du = \int_{\mathbb{R}_-} e^{-izt} (f * g_1)(t) dt, \quad \text{Im } z > 0.$$

Но $\text{supp } f, \text{supp } g_1 \subseteq [-a, a]$, и потому

$$\text{supp}(f * g_1) \subseteq [-2a, 2a]. \quad (30)$$

Значит,

$$F(z) = \int_{-2a}^0 e^{-izt} (f * g_1)(t) dt, \quad \text{Im } z > 0. \quad (31)$$

Если $\text{Im } z < 0$, то функция $1/(i(u - z))$ есть обратное преобразование Фурье функции $-\exp(-izt)$, сосредоточенной на $\mathbb{R}_+$. Повторяя только что сделанные шаги с использованием свойства (30), приходим к формуле

$$F(z) = - \int_0^{2a} e^{-izt} (f * g_1)(t) dt, \quad \text{Im } z < 0. \quad (32)$$

Формулы (31), (32) раньше, по-видимому, не встречались. Стоит отметить, что явный вид условий (6) здесь существенной роли не играет; на самом деле эти формулы верны для случая, когда в (3) $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна, причем $g_1(t) = \sigma'(-t)$.

6. Доказательства теорем. Они уже начаты в предыдущих пунктах. Здесь мы проведем непосредственный анализ формулы (26), сохраняя прежние обозначения. Фиксируем подходящую последовательность $r_k \rightarrow \infty$. Тогда по лемме 1 оценки (10) верны для $|z| = r = r_k$ при всех k .

Заметим, что для вещественных α часть теоремы 1, относящаяся к случаю пространства L^1 , доказана в [5, с. 69]. Доказательство опиралось на асимптотику интеграла Фурье

$$\int_0^a e^{ixt} \frac{g(t, x, y)}{t^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где функция трех переменных $g(t, x, y)$ удовлетворяет определенным условиям. В [8] показано, что эта асимптотика распространяется и на комплексные значения α : $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$. С учетом этого буквальный повтор рассуждений из [5] доказывает теорему 1 для случая пространства L^1 .

Пусть $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Пусть $h(t) \in L^q = L^q(-a, a)$ и

$$H(z) = \int_{-a}^a e^{izt} h(t) dt. \quad (33)$$

Всюду в дальнейшем $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в $L^p(-a, a)$. По неравенству Гёльдера

$$|H(z)| \leq C \|h\|_q e^{a|y|} |y|^{-1/p}, \quad y = \operatorname{Im} z \neq 0. \quad (34)$$

Применяя формулу (26), находим

$$\begin{aligned} \|R_r(t, f; K)\|_p &= \sup_{\|h\|=1} \left| \int_{-a}^a h(t) dt \int_{|z|=r} \frac{e^{izt} F(z)}{L(z)} K\left(\frac{z}{r}\right) dz \right| \\ &= \sup_{\|h\|=1} \left| \int_{|z|=r} \frac{H(z) F(z)}{L(z)} K\left(\frac{z}{r}\right) dz \right|. \end{aligned} \quad (35)$$

Пусть $f \in L^p(-a, a)$, $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$. По лемме 10 $f * g_1 \in L^s(\mathbb{R})$, где $1 - \operatorname{Re} \alpha = 1/p - 1/s$. Применяя неравенство Гёльдера к правым частям формул (31) и (32), находим

$$|F(z)| \leq C |y|^{-1/l}, \quad \frac{1}{l} + \frac{1}{s} = 1, \quad y = \operatorname{Im} z \neq 0. \quad (36)$$

Теперь в формулу (35) подставляем оценки (36), (34) и левую оценку (10). Получаем для $r = r_k$

$$\|R_r(t, f; K)\|_p \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|K(e^{i\theta})| r^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{|y|^{1/p+1/l}} r d\theta = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|K(e^{i\theta})|}{|\sin \theta|^{2-\operatorname{Re} \alpha}} d\theta. \quad (37)$$

Мы хотим доказать утверждение 1) теоремы 3. По условию ядро $K(z)$ обладает свойством (9) с $\gamma = 2 - \operatorname{Re} \alpha$. Значит, оценка (37) дает следующее: если $f \in L^p(-a, a)$, где $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$, то

$$\|R_r(t, f; K)\|_p \leq C < \infty, \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Теперь вернемся к формуле (25) и рассмотрим ее последний член. Так как $K(z)$ – ядро суммирования, то (см. [10])

$$\left\| \int_{-r}^r e^{iut} \hat{f}(u) K\left(\frac{u}{r}\right) du \right\|_p \leq C(K) \|f\|_p, \quad r > 0.$$

Отсюда, из (38) и из формулы (25) следует, что если $f \in L^p$, $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$, то

$$\|S_r(t, f; K)\|_p \leq C < \infty, \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Пусть

$$f(t) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_{m_j-1} t^{m_j-1}) e^{i\lambda_j t} = P_{m_j-1}(t) e^{i\lambda_j t}, \quad \lambda_j \in \lambda. \quad (40)$$

Так как ряд (4) построен с помощью биортогональной системы, то в этом случае он сведется к единственному вычету в точке $z = \lambda_j$ и даст функцию (40); при этом функция

$$A(z) := \frac{e^{izt}}{L(z)} \int_{-a}^a d\sigma(u) \int_0^u f(v) e^{iz(u-v)} dv$$

аналитична всюду, кроме точки $z = \lambda_j$, в чем можно убедиться непосредственным вычислением правой части. Значит, при $r > |\lambda_j|$ также и сумма $S_r(t, f; K)$ сведется к единственному вычету в точке $z = \lambda_j$, т.е.

$$S_r(t, f; K) = i \operatorname{Res}_{z=\lambda_j} A(z) K\left(\frac{z}{r}\right). \quad (41)$$

Учитывая свойство 1) в определении ядра суммирования, отметим предельные соотношения

$$K\left(\frac{z}{r}\right) \rightarrow 1, \quad \left(K\left(\frac{z}{r}\right)\right)^{(i)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (42)$$

равномерные в окрестности точки $z = \lambda_j$. Теперь если для подсчета вычета в (41) применить формулу Лейбница, учесть соотношения (42) и тот факт, что $i \operatorname{Res}_{z=\lambda_j} A(z) = f(t)$, то получим

$$\|S_r(t, f; K) - f(t)\|_\infty \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad f(t) = P_{m_j-1}(t) e^{i\lambda_j t}. \quad (43)$$

По лемме 3 (утверждение 1)) линейные комбинации функций (43) плотны в L^p . Значит, (39) и (43) показывают, что последовательность линейных (и, очевидно, ограниченных в L^p) операторов S_{r_k} ограничена на каждом элементе $f \in L^p$ и сходится на каждом элементе из плотного в L^p множества. По принципу равномерной ограниченности [18, с. 73] последовательность операторов S_{r_k} (сильно) сходится к некоторому оператору S . Но из (43) и из полноты системы $e(\lambda)$ в L^p следует, что S – единичный оператор. Значит, для любой функции $f \in L^p(-a, a)$, $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$,

$$\|S_r(t, f; K) - f(t)\|_p \rightarrow 0, \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Таким образом, система $e(\lambda)$ образует базис суммирования в L^p , $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$. Мы доказали утверждение 1) теоремы 3.

Для доказательства теоремы 2 и остальных частей теорем 1, 3 будут применяться формулы, которые мы сейчас получим из (31) и (32) интегрированием по частям. Во всех перечисленных случаях $f \in L^p$ (по крайней мере), где $p > 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$. Тогда $q \operatorname{Re} \alpha < 1$ и, значит, $g, g_1 \in L^q(-a, a)$. Следовательно, по неравенству Гёльдера свертка $f * g_1$ непрерывна на всей прямой. С учетом (30) получаем

$$(f * g_1)(\pm 2a) = 0. \quad (45)$$

Пусть теперь $f \in C(d\sigma)$ или $f \in L^p(d\sigma)$ (при $1/p < 1 - \operatorname{Re} \alpha$). Покажем, что тогда и

$$(f * g_1)(0) = 0. \quad (46)$$

Действительно,

$$(f * g_1)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) g_1(t - u) du = \int_{\mathbb{R}} f(u) g(u - t) du,$$

и при $t = 0$ мы получаем (46), так как по предположению выполнено условие (5).

Учитывая (45) и (46), проинтегрируем по частям (31) и (32). Получим следующие формулы:

$$F(z) = \frac{1}{iz} \int_{-2a}^0 e^{-izt} d(f * g_1)(t), \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad (47)$$

$$F(z) = -\frac{1}{iz} \int_0^{2a} e^{-izt} d(f * g_1)(t), \quad \operatorname{Im} z < 0. \quad (48)$$

Так как $f * g_1 \in C[-2a, 2a]$, а функция $\exp(-izt)$ имеет ограниченную вариацию на каждом отрезке, то в этих формулах присутствуют обычные интегралы Стильерса.

Предположим, что

$$f * g_1 \in \Lambda_{1-\nu}(\mathbb{R}), \quad 0 < \nu < 1. \quad (49)$$

Тогда из формул (47), (48) по лемме 12 следует оценка

$$|F(z)| \leq \frac{Cr^{\nu-1}}{1+|y|}, \quad r = |z| > 1, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (50)$$

Пусть $f \in L^p(-a, a; d\sigma)$, $1/(1 - \operatorname{Re} \alpha) < p \leq \infty$; здесь и только здесь для единообразия полагаем $L^\infty(-a, a; d\sigma) = C[-a, a; d\sigma]$. Считаем, что $f(t)$ продолжена нулем на внешность отрезка $[-a, a]$. Тогда $f \in L^p(\mathbb{R})$; здесь, как обычно, $L^\infty(\mathbb{R})$ – пространство существенно ограниченных функций. По лемме 8 $f * g_1 \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}(\mathbb{R})$. Значит, выполнено условие (49) с $\nu = \operatorname{Re} \alpha + 1/p$. Тогда и оценка (50) верна с $\nu = \operatorname{Re} \alpha + 1/p$, т.е.

$$|F(z)| \leq C \frac{r^{\operatorname{Re} \alpha + 1/p - 1}}{|y|} = C \frac{r^{\operatorname{Re} \alpha + 1/p - 2}}{|\sin \theta|}, \quad r > 1, \quad \theta = \arg z \neq 0, \pi.$$

Соединим эту оценку с оценкой снизу (10). Тогда

$$\left| \frac{F(z)}{L(z)} K\left(\frac{z}{r}\right) \right| \leq C \frac{r^{1/p-1} |K(e^{i\theta})|}{e^a |y| |\sin \theta|}, \quad |z| = r = r_k, \quad \theta \neq 0, \pi. \quad (51)$$

Сейчас мы на время разделим случаи $p = \infty$ и $p < \infty$. Когда $p = \infty$, то в силу (26) и (51) мы получаем: если $t \in [-a, a]$, а $r = r_k$, то

$$|R_r(t, f; K)| \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|K(e^{i\theta})|}{|\sin \theta|} d\theta \leq C_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\theta|^{-1} |K(e^{i\theta})| d\theta \leq C_2 < \infty$$

(мы использовали четность ядра $K(z)$ и свойство (9) с $\gamma = 1$).

Если $p < \infty$, то применяем формулу (35). Подставляя в нее оценки (34) и (51), находим, что для $r = r_k \rightarrow \infty$

$$\|R_r(t, f; K)\|_p \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|K(e^{i\theta})| d\theta}{|\sin \theta|^{1+1/p}} \leq C_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\theta|^{-1-1/p} |K(e^{i\theta})| d\theta \leq C_2 < \infty,$$

так как по условию ядро $K(z)$ обладает свойством (9) с $\gamma = 1 + 1/p$.

Снова объединяя случаи $p = \infty$ и $p < \infty$, видим, что мы доказали оценку (38) и в случае $f \in L^p(-a, a; d\sigma)$, $1/(1 - \operatorname{Re} \alpha) < p \leq \infty$.

Теперь повторяются рассуждения, следующие за (38); по ходу дела вместо утверждения 1) леммы 3 применяется утверждение 2). В итоге мы приходим к соотношению (44), что доказывает недостающие части теорем 1, 3. Теоремы 1, 3 полностью доказаны.

Осталось доказать теорему 2. Будем считать, что

$$f(a) = f(-a) = 0. \quad (52)$$

Покажем, как можно добиться этого условия. Найдутся точки λ_j, λ_m такие, что $a(\lambda_j - \lambda_m) \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; это следует из леммы 1. Рассмотрим функцию

$$f_1(t) := f(t) - c_j e^{i\lambda_j t} - c_m e^{i\lambda_m t}$$

и потребуем, чтобы $f_1(\pm a) = 0$. Это условие равносильно системе

$$\begin{aligned} c_j e^{i\lambda_j a} + c_m e^{i\lambda_m a} &= f(a), \\ c_j e^{-i\lambda_j a} + c_m e^{-i\lambda_m a} &= f(-a), \end{aligned}$$

которая разрешима относительно c_j, c_m , так как ее определитель

$$e^{ia(\lambda_j - \lambda_m)} - e^{-ia(\lambda_j - \lambda_m)} = 2i \sin(\lambda_j - \lambda_m)a \neq 0$$

в силу выбора точек λ_j, λ_m . Итак, вычитая из f подходящий двучлен, мы добиваемся свойства (52). При этом принадлежность $f \in C(d\sigma) \cap \Lambda_\beta[-a, a]$ сохраняется.

Достаточно рассмотреть случай $0 < \beta < \operatorname{Re} \alpha$. Продолжим функцию $f(t)$ нулем на внешность отрезка $[-a, a]$. В силу (52) $f \in \Lambda_\beta(\mathbb{R})$. По лемме 9 $f * g_1 \in \Lambda_{1-\nu}(\mathbb{R})$, $\nu = \operatorname{Re} \alpha - \beta$. В силу (50)

$$|F(z)| \leq C \frac{r^{\operatorname{Re} \alpha - \beta - 1}}{1 + |y|}, \quad r > 1.$$

Подставим эту оценку вместе с оценкой снизу (10) в формулу (26), где полагаем $K \equiv 1$, $R_r(t, f) := R_r(t, f; 1)$. Получим, что при $r = r_k \rightarrow \infty$

$$\|R_r(t, f)\|_\infty \leq Cr^{1-\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+|y|} \leq C_1 r^{-\beta} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1/r+\theta} \leq C_2 \frac{\log r}{r^\beta} \rightarrow 0.$$

Так как $f \in \Lambda_\beta(\mathbb{R})$, то

$$\left\| \int_{-r}^r e^{iut} \hat{f}(u) du - f(t) \right\|_\infty \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Учитывая смысл обозначения $R_r(t, f)$ (см. (25) с $K \equiv 1$), отсюда заключаем, что

$$\|S_r(t, f) - f(t)\|_\infty \rightarrow 0, \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (53)$$

Мы доказали равномерную сходимость к $f(t)$ на $[-a, a]$ некоторой подпоследовательности S_{r_k} частичных сумм ряда (4). Переход ко всей последовательности частичных сумм совершается так же, как в [8], а именно по лемме 1 все достаточно большие по модулю точки λ_n просты и существует подходящая последовательность $r_k \rightarrow \infty$ такая, что в кольце $r_k < |z| < r_{k+1}$ содержится не более двух точек λ_n . Значит, для любого достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ найдется r_k такое, что частичные суммы

$$\sum_{n=0}^N P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t}, \quad \sum_{|\lambda_n| < r_k} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t} = S_{r_k}(t, f)$$

ряда (4) отличаются друг от друга не более чем одним слагаемым $c_N e^{i\lambda_N t}$ — членом ряда (4). Но общий член ряда (4) в условиях (6) сходится к нулю равномерно на $[-a, a]$ при $N \rightarrow \infty$ для произвольной функции $f \in L^1(-a, a)$ [8]. Значит, утверждение теоремы 2 следует из (53). Теорема 2 доказана.

7. Нарушение теоремы 3 в критическом случае. Как следует из п. 1, последовательность $\lambda = (n + (1/(2p)) \operatorname{sign} n)$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет условиям теоремы 3 с $1 - \operatorname{Re} \alpha = 1/p$, $a = \pi$. Рассмотрим соответствующую систему экспонент

$$\exp \left(i \left(n + \frac{1}{2p} \operatorname{sign} n \right) t \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (54)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если ядро суммирования $K(z)$ положительно на интервале $(-1, 1)$, то система (54) не образует в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, базиса суммирования относительно метода K .

Таким образом, при $1 - \operatorname{Re} \alpha = 1/p$ теорема 3, вообще говоря, теряет силу. Напомним, что по лемме 3 система (54) полна в $L^p(-\pi, \pi)$.

Доказательство. В [5] показано, что для функции $f(t) = e^{i\mu t}$, $\mu \neq n + (1/(2p)) \operatorname{sign} n$, ее негармонический ряд Фурье по системе (54) расходится в $L^p(-\pi, \pi)$, и, следовательно, данная система не образует базиса в $L^p(-\pi, \pi)$. Оказывается, пример этого ряда подтверждает и справедливость только что сформулированного предложения.

Действительно, как показано в [5], негармонический ряд Фурье функции $f(t) = e^{i\mu t}$ по системе (54) с точностью до равномерно сходящегося на $[-\pi, \pi]$ ряда и постоянного множителя имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^{1/q}} \sin \lambda_n t, \quad \lambda_n = n + \frac{1}{2p}. \quad (55)$$

Это означает, что ряд (55) есть негармонический ряд Фурье по системе (54) некоторой функции $f_0(t) \in C[-\pi, \pi]$. Положим $t = \pi - x$; $t, x \in (0, \pi)$. Тогда ряд (55) запишется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{1/q}} \sin \left(\frac{\pi}{2p} - \lambda_n x \right).$$

Фиксируем подходящую последовательность $r_N = N + 1/2$ и обозначим

$$S_{2N}(x; K) := \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{\lambda_n^{1/q}} K \left(\frac{\lambda_n}{2N + 1/2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2p} - \lambda_n x \right).$$

Достаточно показать, что при $N \rightarrow \infty$

$$\|f_0(\pi - x) - S_{2N}(x; K)\|_{L^p(0, \pi)} \geq \delta > 0. \quad (56)$$

Поступаем так же, как в [5], а именно положим

$$x_N = \frac{\pi}{4p\lambda_{2N}} = \frac{\pi}{8pN + 2}.$$

Тогда $\pi/(4p) \leq \pi/(2p) - \lambda_n x \leq \pi/(2p)$, $0 < x < x_N$, $n = \overline{1, 2N}$, и, значит,

$$\sin \left(\frac{\pi}{2p} - \lambda_n x \right) \geq \delta_1 > 0, \quad x \in (0, x_N), \quad n = \overline{1, 2N}. \quad (57)$$

Обозначим $m := \min(K(x): 0 \leq x \leq 2/3)$, $m > 0$. Так как при достаточно большом N

$$\frac{\lambda_n}{2N + 1/2} = \frac{n + 1/(2p)}{2N + 1/2} \in \left[0, \frac{2}{3} \right], \quad n = \overline{1, N},$$

то, учитывая условие $K(x) > 0$, из (57) получаем, что при $x \in (0, x_N)$

$$S_{2N}(x; K) > \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^{1/q}} K \left(\frac{\lambda_n}{2N + 1/2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2p} - \lambda_n x \right) \geq m\delta_1 \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^{1/q}} \geq \delta_2 N^{1/p},$$

где $\delta_2 > 0$. Значит,

$$\|S_{2N}(x; K)\|_{L^p(0, x_N)} \geq \delta_3 > 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Но норма $f_0(\pi - x)$ в $L^p(0, x_N)$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\|f_0(\pi - x) - S_{2N}(x; K)\|_{L^p(0, x_N)} \geq \delta_4 > 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Значит, свойство (56) выполнено. Предложение доказано.

Отметим, что упоминавшееся выше ядро Рисса $K(z) = (1 - z^2)^\nu$, $\nu > 0$, $|z| \leq 1$, удовлетворяет условиям предложения.

Автор благодарит М. Л. Гольдмана за полезные беседы по тематике книги [14].

Список литературы

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.
2. Levinson N. Gap and density theorems. N.Y.: Publ. Amer. Math. Soc., 1940.
3. Verblunsky S. On an expansion in exponential series // Quart. J. Math. 1956. V. 7. № 27. P. 231–240.
4. Леонтьев А. Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 2. С. 269–328.
5. Седлецкий А. М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 51–95.
6. Молоденков В. А., Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования // Дифф. уравн. и вычисл. матем. Саратов, 1972. Вып. 1. С. 17–26.
7. Пономарев С. М. Об одной задаче на собственные значения // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 5. С. 1068–1070.
8. Седлецкий А. М. О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 299–309.
9. Седлецкий А. М. Распространение сходимости квазиполиномов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 5. С. 1131–1149.
10. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
11. Моисеев Е. И. О базисности систем синусов и косинусов // ДАН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 794–798.
12. Седлецкий А. М. О разрешимости одного интегрального уравнения с начальным условием // Дифф. уравн. 1975. Т. 11. № 12. С. 2283–2285.
13. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
14. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
15. Duren P. L. Theory of H^p spaces. N.Y.: Academic Press, 1970.
16. Мацаев В. И., Соломяк М. З. Об условиях существования интеграла Стильеса // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 4. С. 522–535.
17. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
18. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

Поступило в редакцию
3.XI.1998