Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акбаров, Стереотипные локально выпуклые пространства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 4, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/im294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 08:02:43

УДК 519

С. С. Акбаров

Стереотипные локально выпуклые пространства

Приводятся доказательства некоторых анонсировавшихся ранее результатов по теории стереотипных (рефлексивных по Понтрягину) локально выпуклых пространств, имеющих важные приложения в топологической алгебре и функциональном анализе.

Библиография: 18 наименований.

Теоремы двойственности Понтрягина–ван Кампена, доказанные в 30-х гг. для локально компактных абелевых групп [1], [2], были, как известно, обобщены потом на довольно широкий класс топологических абелевых групп (см., например, [3]), и, в частности, в 1952 г. М. Ф. Смит [4] было замечено, что всякое банахово пространство является рефлексивной по Понтрягину группой. Более точно этот результат формулируется следующим эквивалентным образом: *всякое банахово пространство X над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$) удовлетворяет тождеству*

$$(X^*)^* \cong X,$$

в котором каждая звездочка $$ обозначает сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов со значениями в $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$ соответственно), наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах.*

Пространства, выделяемые этим условием рефлексивности, изучались затем в 60–70-х гг. несколькими авторами, работавшими независимо друг от друга: Б. С. Брудовский [5], В. С. Уотерхаус [6] и К. Браунер [7] сделали первые наблюдения в этой области и, в частности, отметили, что этот класс весьма широк, потому что включает все квазиполные бочечные пространства. После этих публикаций, однако, тема была надолго забыта и появилась вновь лишь недавно в работах автора [8]–[10], где анонсировались некоторые приложения категории рефлексивных по Понтрягину локально выпуклых пространств (названных в [8] *стереотипными*) в функциональном анализе и теории гомологий топологических алгебр.

В настоящей работе мы приводим доказательства некоторых результатов работы [8]. Именно, мы описываем конструкции псевдопополнения X^∇ и псевдонасыщения X^{Δ^1} , доказываем анонсировавшиеся в [8] свойства категории **Ste** стереотипных пространств и приводим ряд важных технических результатов, которые автор надеется использовать в последующих работах при доказательстве других фактов, анонсировавшихся в [8]–[10].

¹ Терминология и обозначения этой работы отличается от употреблявшихся в [8], [9]. В частности, $X^\nabla = \#X$, $X^\Delta = {}_bX$, $X^* = X'$.

§ 0. Предварительные сведения

0.1. Функционал Минковского и локально выпуклые топологии на векторном пространстве. Функционалом Минковского множества B в векторном пространстве X называется отображение $p: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, действующее по формуле

$$p(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda B\}. \quad (0.1)$$

Функционал Минковского p тогда и только тогда будет полунормой на X , когда B выпукло, уравновешено и поглощает X .

Лемма 0.1. Пусть p – функционал Минковского выпуклого уравновешенного поглощающего множества B в векторном пространстве X над $\mathbb{C}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $B = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$;
- (ii) B оставляет замкнутый след на каждом одномерном подпространстве в X : для всякого $x \in X$ множество $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha x \in B\}$ замкнуто в $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $a \in B$ означает, что $1 \in \{\lambda \geq 0 : a \in \lambda B\}$, поэтому $p(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda B\} \leq 1$. Наоборот, если $a \notin B$, то $1 \notin \{\lambda \geq 0 : a \in \lambda B\}$. Если выполнено (ii), то множество $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha a \in B\}$ есть замкнутый круг в $\mathbb{C}$ с центром в нуле, поэтому $\sup\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha a \in B\} < 1$. Отсюда $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\} = \frac{1}{\sup\{\alpha > 0 : \alpha a \in B\}} > 1$. Мы доказали импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Обратная импликация очевидна.

Лемма 0.2. Система $\mathcal{V}$ выпуклых уравновешенных множеств в векторном пространстве X над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда является локальной базой некоторой отделимой локально выпуклой топологии τ на X , когда выполняются следующие условия:

- (i) все множества $B \in \mathcal{V}$ поглощают X : $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda B = X$;
- (ii) $\forall B \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists C \in \mathcal{V} : C \subseteq \lambda B$;
- (iii) $\forall B, C \in \mathcal{V} \exists D \in \mathcal{V} : D \subseteq B \cap C$;
- (iv) $\bigcap_{B \in \mathcal{V}} B = \{0\}$.

При этом:

(а) множество $B \in \mathcal{V}$ будет замкнуто относительно τ тогда и только тогда, когда оно оставляет замкнутый след на каждом одномерном подпространстве в X : для всякого $x \in X$ множество $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha x \in B\}$ замкнуто в $\mathbb{C}$;

(б) система $\mathcal{V}$ будет совпадать с системой $\mathcal{W}(X_\tau)$ всех выпуклых уравновешенных окрестностей нуля в X (относительно τ) тогда и только тогда, когда для выпуклого уравновешенного множества $M \subseteq X$ условие $\exists B \in \mathcal{V} : B \subseteq M$, автоматически влечет за собой условие $M \in \mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (i) означает, что функционалы Минковского (0.1) множеств $B \in \mathcal{V}$ являются полунормами на X , свойства (ii) и (iii) – что топология τ , порожденная этими полунормами, имеет систему $\mathcal{V}$ своей локальной базой, свойство (iv) – что эта топология отделима. Свойство (а) следует из леммы 0.1, а свойство (б) очевидно.

Следствие 0.3. *Если выпуклая уравновешенная окрестность нуля U в локально выпуклом пространстве X оставляет замкнутый след на одномерных подпространствах в X , то U – замкнутая окрестность нуля.*

0.2. Вполне ограниченные, емкие и массивные в нуле множества. Если X – локально выпуклое пространство (ЛВП) над $\mathbb{C}$, то условимся символом $\mathcal{U}(X)$ обозначать систему всех окрестностей нуля в X , а символом $\mathcal{K}(X)$ – систему всех компактов в X .

Напомним, что множество S в ЛВП X называется *вполне ограниченным* или *предкомпактным*, если для всякой окрестности нуля U в X найдется конечное множество A такое, что $S \subseteq U + A$ [14]. Это равносильно тому, что S вполне ограничено в смысле индуцированной из X равномерной структуры [12] (т.е. A можно выбирать лежащим в S).

Система всех вполне ограниченных множеств в X обозначается $\mathcal{S}(X)$. Поскольку всякий компакт является вполне ограниченным множеством, справедливо вложение

$$\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{S}(X).$$

Предложение 0.4. *Для множества S в ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

- (i) S вполне ограничено в X ;
- (ii) $\forall U \in \mathcal{U}(X) \exists T \in \mathcal{S}(X): S \subseteq U + T$;
- (iii) $\forall U \in \mathcal{U}(X) \exists K \in \mathcal{K}(X): S \subseteq U + K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $D \subseteq X$ мы называем *емким по отношению к множеству $S \subseteq X$* , если для всякого скаляра $\varepsilon \neq 0$ найдется конечное множество $A \subseteq X$ такое, что $S \subseteq \varepsilon D + A$. Полезно заметить, что если D выпукло, то A можно выбирать лежащим в S (и при этом получится эквивалентное условие на D).

Лемма 0.5. *Пересечение $C \cap D$ любых двух выпуклых уравновешенных множеств C и D , емким по отношению к S , является выпуклым уравновешенным множеством, емким по отношению к S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить емкость $C \cap D$ по отношению к S . Пусть $\varepsilon \neq 0$. Выберем конечное множество $A \subseteq S$ так, чтобы $S \subseteq \frac{\varepsilon}{2}C + A$. Каждому $a \in A$ поставим в соответствие множество $S_a = S \cap (\frac{\varepsilon}{2}C + a)$. Поскольку D выпукло и является емким по отношению к S_a , можно подобрать конечное $B_a \subseteq S_a$ так, чтобы $S_a \subseteq \varepsilon D + B_a$. Таким образом, мы получим конечное семейство конечных множеств $\{B_a, a \in A\}$. Положим $B = \bigcup_{a \in A} B_a$ и покажем, что

$$S \subseteq \varepsilon(C \cap D) + B. \quad (0.2)$$

Пусть $x \in S$. Тогда существует $a \in A$ такое, что $x \in S_a \subseteq \frac{\varepsilon}{2}C + a$, откуда

$$x - a \in \frac{\varepsilon}{2}C. \quad (0.3)$$

Поскольку, далее, $x \in S_a \subseteq \varepsilon D + B_a$, найдется $b \in B_a \subseteq B$ такое, что $x \in D + b$, т.е.

$$x - b \in \varepsilon D. \quad (0.4)$$

Наконец, поскольку $b \in B_a \subseteq S_a \subseteq \frac{\varepsilon}{2}C + a$, имеем

$$b - a \in \frac{\varepsilon}{2}C. \quad (0.5)$$

Множество εC выпукло и уравновешено, поэтому из (0.3) и (0.5) следует

$$x - b = (x - a) - (b - a) \in \frac{\varepsilon}{2}C - \frac{\varepsilon}{2}C = \varepsilon C.$$

Вместе с (0.4) это дает $x - b \in \varepsilon C \cap \varepsilon D = \varepsilon(C \cap D)$. Таким образом, имеем $x \in \varepsilon(C \cap D) + b \subseteq \varepsilon(C \cap D) + B$, и мы доказали (0.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество D в ЛВП X мы называем *емким*, если оно является емким по отношению к любому вполне ограниченному множеству $S \subseteq X$. Это равносильно тому, что для любого $S \in \mathcal{S}(X)$ существует конечное $A \subseteq X$ такое, что $S \subseteq D + A$. Система всех емких множеств в X обозначается $\mathcal{D}(X)$. Очевидно, что всякая окрестность нуля является емким множеством, поэтому справедливо включение

$$\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{D}(X).$$

Лемма 0.6. *Всякое выпуклое уравновешенное емкое множество D в X является поглощающим: $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda D = X$. Поэтому, в частности, всякое замкнутое выпуклое уравновешенное емкое множество D в X является бочкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $x \in X$ и рассмотрим отрезок $[0, x] = \{\lambda x; 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Поскольку он является компактом, найдется конечное множество $A \subseteq [0, x]$ такое, что $[0, x] \subseteq D + A$, т.е. отрезок $[0, x]$ покрывается конечной системой своих подынтервалов $I_a = [0, x] \cap (D + a)$, $a \in A$. Ясно, что хотя бы один из этих интервалов должен быть невырожден: $\exists a \in A: I_a \neq \{a\}$. Тогда I_a содержит точку вида $\alpha x + a$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Таким образом, $\alpha x + a \in I_a \subseteq D + a$, откуда $\alpha x \in D$ и, значит, $x \in \frac{1}{\alpha}D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество M в ЛВП X мы называем *массивным в нуле*, если для любого вполне ограниченного множества S в X найдется окрестность нуля U в X такая, что $S \cap U \subseteq M$. Система всех массивных в нуле множеств в X обозначается $\mathcal{M}(X)$. Очевидно, что всякая окрестность нуля является массивным в нуле множеством, а всякое массивное в нуле множество является емким. Поэтому

$$\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{D}(X).$$

Теорема 0.7. *Для замкнутого выпуклого уравновешенного множества D в ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

- (i) D является емким;
- (ii) D является массивным в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii), обратная импликация очевидна. Пусть $D \subseteq X$ – замкнутое, выпуклое, уравновешенное и емкое множество. Зафиксируем вполне ограниченное $S \subseteq X$ и покажем, что найдется конечное множество линейных непрерывных функционалов $F \subseteq X'$ такое, что

$$S \cap {}^\circ F \subseteq D, \quad (0.6)$$

где ${}^\circ F = \{x \in X : \forall f \in F \ |f(x)| \leq 1\}$ – обратная полярная множества F . Выберем конечное множество $A \subseteq X$ так, чтобы $2S \subseteq D + A$, т.е.

$$S \subseteq \frac{1}{2}(D + A). \quad (0.7)$$

Положим $B = A \setminus D$ и заметим, что $\forall b \in B \ 0 \notin \frac{1}{2}(D + b)$. Поэтому каждому $b \in B$ можно по теореме Хана–Банаха поставить в соответствие функционал $f_b \in X'$, отделяющий $\frac{1}{2}(D + b)$ от нуля:

$$\inf_{x \in \frac{1}{2}(D+b)} |f_b(x)| \geq 2.$$

Тогда

$$\forall b \in B \quad \frac{1}{2}(D + b) \cap {}^\circ f_b = \emptyset. \quad (0.8)$$

Рассмотрим полученное конечное множество функционалов $F = \{f_b; b \in B\}$. Для него, во-первых, оказывается

$$\frac{1}{2}(D + B) \cap {}^\circ F = \bigcup_{b \in B} \left[\frac{1}{2}(D + b) \cap {}^\circ F \right] \subseteq \bigcup_{b \in B} \left[\frac{1}{2}(D + b) \cap {}^\circ f_b \right] \stackrel{(0.8)}{=} \emptyset, \quad (0.9)$$

и, во-вторых, поскольку $A \setminus B = A \setminus (A \setminus D) = A \cap D$, то

$$\frac{1}{2}(D + (A \setminus B)) \cap {}^\circ F \subseteq \frac{1}{2}(D + D) \cap {}^\circ F = D \cap {}^\circ F \subseteq D. \quad (0.10)$$

Формулы (0.7), (0.9) и (0.10) вместе дают (0.6):

$$S \cap {}^\circ F \subseteq \frac{1}{2}(D + A) \cap {}^\circ F \subseteq \left[\frac{1}{2}(D + B) \cap {}^\circ F \right] \cup \left[\frac{1}{2}(D + (A \setminus B)) \cap {}^\circ F \right] \subseteq \emptyset \cup D = D.$$

Итак, доказана формула (0.6), в которой ${}^\circ F$ есть не что иное, как $(X'$ -слабая) окрестность нуля $U \in \mathcal{U}(X)$: $S \cap U \subseteq D$. Поскольку это верно для всякого $S \in \mathcal{S}(X)$, множество D массивно в нуле. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество B в X мы называем *предкомпактно-замкнутым*, если оно оставляет замкнутый след $B \cap S$ на каждом замкнутом предкомпактном множестве $S \subseteq X$.

Пусть $\mathcal{Q}(X)$ обозначает систему всех выпуклых уравновешенных множеств в X , $\mathcal{P}(X)$ – систему всех предкомпактно-замкнутых выпуклых уравновешенных множеств в X , а $\mathcal{B}(X)$ – систему всех замкнутых выпуклых уравновешенных множеств в X . Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{D}(X) &= \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{D}(X), & \mathcal{P}\mathcal{D}(X) &= \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{D}(X), & \mathcal{Q}\mathcal{D}(X) &= \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{D}(X), \\ \mathcal{B}\mathcal{M}(X) &= \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X), & \mathcal{P}\mathcal{M}(X) &= \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M}(X), & \mathcal{Q}\mathcal{M}(X) &= \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{M}(X), \\ \mathcal{B}\mathcal{U}(X) &= \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{U}(X), & \mathcal{P}\mathcal{U}(X) &= \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{U}(X), & \mathcal{Q}\mathcal{U}(X) &= \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{U}(X), \\ \mathcal{B}\mathcal{S}(X) &= \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{S}(X), & \mathcal{P}\mathcal{S}(X) &= \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{S}(X), & \mathcal{Q}\mathcal{S}(X) &= \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{S}(X), \\ \mathcal{B}\mathcal{K}(X) &= \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{K}(X), & \mathcal{P}\mathcal{K}(X) &= \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{K}(X), & \mathcal{Q}\mathcal{K}(X) &= \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{K}(X). \end{aligned}$$

Очевидно, эти системы связаны между собой соотношениями

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}\mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{P}\mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{Q}\mathcal{D}(X) & & & & \\ \parallel & \cup & \cup & \mathcal{B}\mathcal{S}(X) = \mathcal{P}\mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{Q}\mathcal{S}(X) & \\ \mathcal{B}\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{P}\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{Q}\mathcal{M}(X) & & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \mathcal{B}\mathcal{K}(X) = \mathcal{P}\mathcal{K}(X) = \mathcal{Q}\mathcal{K}(X) & \\ \mathcal{B}\mathcal{U}(X) = \mathcal{P}\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{Q}\mathcal{U}(X) & & & & \end{array}$$

(равенство $\mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{P}\mathcal{U}$ следует из следствия 0.3, а $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{B}\mathcal{M}$ – из теоремы 0.7).

Предложение 0.8. Пусть $\mathcal{V}$ – какая-нибудь из систем множеств $\mathcal{B}\mathcal{D}$, $\mathcal{P}\mathcal{D}$, $\mathcal{B}\mathcal{M}$, $\mathcal{P}\mathcal{M}$, $\mathcal{Q}\mathcal{M}$. Тогда:

- (i) $\forall D \in \mathcal{V} \quad \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda D = X$;
- (ii) $\forall D \in \mathcal{V}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \lambda D \in \mathcal{V}$;
- (iii) $\forall C, D \in \mathcal{V} \quad C \cap D \in \mathcal{V}$;
- (iv) $\bigcap_{D \in \mathcal{V}} D = \{0\}$.

0.3. Дуальные системы и поляры. Напомним, что если на паре векторных пространств (P, Q) определена невырожденная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle: P \times Q \rightarrow \mathbb{C}$, то такая пара называется *дуальной системой*. Полями множеств $G \subseteq P$ и $H \subseteq Q$ называются множества

$$G^\circ = \{y \in Q : \forall x \in G \quad |\langle x, y \rangle| \leq 1\}, \quad {}^\circ H = \{x \in P : \forall y \in H \quad |\langle x, y \rangle| \leq 1\}.$$

Лемма 0.9. Пусть $\langle P, Q \rangle$ – дуальная система векторных пространств над $\mathbb{C}$, и пусть заданы множество $G \subseteq P$, выпуклое, уравновешенное и Q -слабо замкнутое в P , и множество $H \subseteq Q$, выпуклое, уравновешенное и P -слабо компактное в Q .

Тогда $(G \cap {}^\circ H)^\circ \subseteq G^\circ + H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включения $G^\circ + H \supseteq G^\circ \cup H$ следует ${}^\circ(G^\circ + H) \subseteq {}^\circ(G^\circ \cup H) = {}^\circ(G^\circ) \cap {}^\circ H = G \cap {}^\circ H$. Множество G° P -слабо замкнуто, а H P -слабо компактно, поэтому $G^\circ + H$ P -слабо замкнуто. Отсюда $G^\circ + H = [{}^\circ(G^\circ + H)]^\circ \supseteq (G \cap {}^\circ H)^\circ$.

§ 1. Функторы $\vee, \wedge, \nabla, \Delta, \blacktriangledown, \blacktriangle$

1.1. Функтор пополнения $\blacktriangledown$ и плотные вложения. ЛВП X мы, как обычно, называем *полным*, если в нем всякая направленность Коши сходится. Как известно, всякое ЛВП обладает пополнением, т.е. ближайшим к нему снаружи полным пространством. Формально эту конструкцию можно описать следующим образом.

Теорема 1.1. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\blacktriangledown_X: X \rightarrow X^\blacktriangledown$ в некоторое полное ЛВП $X^\blacktriangledown$ так, чтобы выполнялись условия:*

- (i) *X полно, тогда и только тогда, когда $\blacktriangledown_X: X \rightarrow X^\blacktriangledown$ – изоморфизм;*
- (ii) *для любого морфизма ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\blacktriangledown: X^\blacktriangledown \rightarrow Y^\blacktriangledown$, замыкающий диаграмму*

(1.1)

Из второго условия следует, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^\blacktriangledown$ является ковариантным функтором категории $\mathcal{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^\blacktriangledown = \psi^\blacktriangledown \circ \varphi^\blacktriangledown$. Заметим также, что если $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм в полное ЛВП Y , то существует единственный морфизм $X^\blacktriangledown \rightarrow Y$, замыкающий диаграмму

(1.2)

Это, между прочим, означает, что пространство $X^\blacktriangledown$ и морфизм $\blacktriangledown_X: X \rightarrow X^\blacktriangledown$ определены однозначно, с точностью до изоморфизма. Действительно, если бы морфизм $\blacktriangledown$ можно было определить двумя разными способами:

$$\blacktriangledown_X: X \rightarrow X^\blacktriangledown, \quad \tilde{\blacktriangledown}_X: X \rightarrow \tilde{X}^\blacktriangledown,$$

то возникли бы две коммутативные диаграммы

(в которых каждый внутренний треугольник с пунктирной стороной – это маленькая диаграмма (1.2)). В силу единственности пунктирных стрелок морфизмы α и β слева – те же самые, что α и β справа. Поэтому равенства

$$\beta \circ \alpha = 1_{X^\nabla}, \quad \alpha \circ \beta = 1_{\tilde{X}^\nabla}$$

означают, что α и β – изоморфизмы.

Таким образом, конструкция $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ однозначна, и это оправдывает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X^∇ называется *пополнением*, а морфизм $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ – *отображением пополнения* ЛВП X . Ковариантный функтор $\varphi \rightarrow \varphi^\nabla$ категории $\mathcal{LCS}$ в себя называется *функтором пополнения*.

Морфизм ЛВП $\sigma: X \rightarrow Y$ мы называем *вложением*, если σ инъективно и открыто (т.е. $\forall U \in \mathcal{U}(X) \exists V \in \mathcal{U}(Y): U \supseteq V \cap \sigma(X)$), и *плотным вложением*, если вдобавок образ $\sigma(X)$ плотен в Y .

Очевидным примером плотного вложения является отображение пополнения $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$. Эта конструкция обладает естественным свойством универсальности в системе всех плотных вложений пространства X , потому что любое плотное вложение “лежит между X и X^∇ ”.

Теорема 1.2. *Морфизм ЛВП $\sigma: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является плотным вложением, когда он вписывается в (необходимо единственную) коммутативную диаграмму*

в которой:

- X^σ обозначает некоторое подпространство в пополнении X^∇ пространства X , содержащее X ;
- морфизмы α и β изображают цепочку вложений $X \subseteq X^\sigma \subseteq X^\nabla$;
- $Y \cong X^\sigma$ – некоторый изоморфизм ЛВП.

1.2. Функтор насыщения $\blacktriangle$ и точные наложения. Пусть X – произвольное локально выпуклое пространство и τ обозначает его топологию. В силу предложения 0.8 и леммы 0.2 система $\mathcal{M}(X)$ выпуклых уравновешенных массивных в нуле множеств в X является локальной базой некоторой отделимой локально выпуклой топологии $\tau^\blacktriangle$ на X , мажорирующей топологию τ ($\tau \subseteq \tau^\blacktriangle$). Обозначим через $X^\blacktriangle$ пространство X с этой новой топологией $\tau^\blacktriangle$. В силу очевидного для $\mathcal{M}(X)$ условия (b) леммы 0.2 справедливо равенство

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(X^\blacktriangle). \quad (1.3)$$

Заметим, что топология $\tau^\blacktriangle$ на X имеет ту же самую систему вполне ограниченных множеств, что и τ :

$$\mathcal{S}(X^\blacktriangle) = \mathcal{S}(X),$$

причем на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$ топологии τ и $\tau^\blacktriangle$ совпадают. Отсюда следуют равенства

$$\mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{M}(X), \quad \mathcal{P}(X^\blacktriangle) = \mathcal{P}(X),$$

которые вместе с (1.3) дают

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\mathcal{M}(X^\blacktriangle) &= \mathcal{Q}(X^\blacktriangle) \cap \mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{M}(X) = \mathcal{Q}\mathcal{M}(X), \\ \mathcal{P}\mathcal{M}(X^\blacktriangle) &= \mathcal{P}(X^\blacktriangle) \cap \mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M}(X) = \mathcal{P}\mathcal{M}(X). \end{aligned}$$

Собирая вместе эти связи, мы получим две цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\mathcal{M}(X) &= \mathcal{Q}\mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{Q}\mathcal{U}(X^\blacktriangle), \\ \mathcal{P}\mathcal{M}(X) &= \mathcal{P}\mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{P}\mathcal{U}(X^\blacktriangle) = \mathcal{B}\mathcal{U}(X^\blacktriangle) \end{aligned} \tag{1.4}$$

(последнее равенство $\mathcal{P}\mathcal{U} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ справедливо в силу следствия 0.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ЛВП X называем *насыщенным*, если в нем всякое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество M является окрестностью нуля.

Это означает выполнение равенства $\mathcal{Q}\mathcal{M}(X) = \mathcal{Q}\mathcal{U}(X)$, т.е. в силу (1.4) совпадение топологий $\tau = \tau^\blacktriangle$. Можно заметить, что насыщенность пространства X равносильна тому, что в X всякое предкомпактно-замкнутое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество M является окрестностью нуля, т.е. справедливо равенство

$$\mathcal{P}\mathcal{M}(X) = \mathcal{P}\mathcal{U}(X) = \mathcal{B}\mathcal{U}(X).$$

Действительно, поскольку в $X^\blacktriangle$, как в любом локально выпуклом пространстве, замкнутые выпуклые уравновешенные окрестности нуля образуют локальную базу, мы получаем в силу (1.4), что $\mathcal{P}\mathcal{M}(X)$ конфинально сидит в $\mathcal{Q}\mathcal{M}(X)$, т.е. что всякое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество $M \subseteq X$ содержит некоторое предкомпактно-замкнутое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество $N \subseteq X$. Следовательно, если всякое множество $N \in \mathcal{P}\mathcal{M}(X)$ является окрестностью нуля в X , то и всякое множество $M \in \mathcal{Q}\mathcal{M}(X)$ должно быть окрестностью нуля в X .

Равенство $\mathcal{Q}\mathcal{M}(X) = \mathcal{Q}\mathcal{M}(X^\blacktriangle)$ означает, между прочим, что для всякого локально выпуклого пространства X соответствующее пространство $X^\blacktriangle$ является насыщенным. Обозначив через $\blacktriangle_X: X^\blacktriangle \rightarrow X$ отображение, соответствующее вложению топологий $\tau^\blacktriangle \supseteq \tau$, мы получим конструкцию, двойственную в некотором смысле конструкции пополнения.

Теорема 1.3. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\blacktriangle_X: X^\blacktriangle \rightarrow X$ из некоторого насыщенного ЛВП $X^\blacktriangle$ так, чтобы выполнялись условия:*

- (i) *X насыщено тогда и только тогда, когда $\blacktriangle_X: X^\blacktriangle \rightarrow X$ – изоморфизм;*
- (ii) *для любого морфизма ЛВП $\varphi: Y \rightarrow X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\blacktriangle: Y^\blacktriangle \rightarrow X^\blacktriangle$, замыкающий диаграмму*

(1.5)

Понятно, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^\blacktriangle$ есть ковариантный функтор категории $\mathcal{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^\blacktriangle = \psi^\blacktriangle \circ \varphi^\blacktriangle$. Ясно также, что если $\varphi: Y \rightarrow X$ – морфизм из насыщенного ЛВП Y , то существует единственный морфизм ЛВП $\varphi: Y \rightarrow X^\blacktriangle$, замыкающий диаграмму

(1.6)

Как и в случае с пополнением, это означает, в частности, что пространство $X^\blacktriangle$ и морфизм $\blacktriangle_X: X^\blacktriangle \rightarrow X$ определены однозначно с точностью до изоморфизма. Поэтому имеет смысл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство $X^\blacktriangle$ называется *насыщением*, а морфизм $\blacktriangle_X: X^\blacktriangle \rightarrow X$ – *отображением насыщения* пространства X . Ковариантный функтор $\varphi \mapsto \varphi^\blacktriangle$ категории $\mathcal{LCS}$ в себя называется *функтором насыщения*.

Морфизм ЛВП $\pi: Y \rightarrow X$ мы называем

– *наложением*, если всякое вполне ограниченное множество $S \subseteq X$ содержится в образе $\pi(T)$ некоторого вполне ограниченного множества $T \subseteq Y$:

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \exists T \in \mathcal{S}(Y) : \quad \pi(T) \supseteq S;$$

– *точным наложением*, если вдобавок для всякого вполне ограниченного множества $T \subseteq Y$ ограничение $\pi|_T: T \rightarrow \pi(T)$ является гомеоморфизмом топологических пространств.

Заметим, что наложение всегда является сюръекцией, а точное наложение – биекцией. Поэтому если пространства Y и X связаны точным наложением $\pi: Y \rightarrow X$, то Y можно рассматривать как новую, более тонкую топологизацию пространства X , сохраняющую вполне ограниченные множества и топологию на вполне ограниченных множествах. Именно такой топологизацией является насыщение $X^\blacktriangle$ пространства X , конструктивно описанное нами в начале этого пункта. Поскольку насыщение единственно, мы получаем, что отображение насыщения $\blacktriangle_X: X^\blacktriangle \rightarrow X$ всякого ЛВП X является точным наложением. Более того, из определения топологии $X^\blacktriangle$ следует, что всякое, вообще точное, наложение естественно “вписывается” в отображение насыщения.

Теорема 1.4. *Морфизм ЛВП $\pi: Y \rightarrow X$ тогда и только тогда будет точным наложением, когда он вписывается в (необходимо единственную) коммутативную диаграмму*

в которой:

- X_π обозначает пространство X с новой топологией π , лежащей между топологиями X и X^Δ ;
- морфизмы β и α изображают последовательное ослабление топологии от X^Δ к X_π и от X_π к X ;
- $Y \cong X_\pi$ – некоторый изоморфизм ЛВП.

1.3. Псевдополнота и псевдопополнение (функтор ∇). ЛВП X мы называем псевдополным, если в нем всякая вполне ограниченная направленность Коши сходится. Это равносильно тому, что всякое замкнутое вполне ограниченное множество S в X является компактом. С обычной полнотой и квазиполнотой это условие связано импликациями:

$$\text{полнота} \implies \text{квазиполнота} \implies \text{псевдополнота}.$$

Поэтому всякое (полное и всякое) квазиполное пространство псевдополно. В метризуемом случае эти понятия эквивалентны.

Оказывается, что, как и в случае с полнотой, всякое ЛВП X обладает псевдопополнением, т.е. ближайшим к нему “снаружи” псевдополным пространством. Формально эту конструкцию описывает следующая

Теорема 1.5. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ в некоторое псевдополное ЛВП X^∇ так, чтобы выполнялись условия:*

- (i) X псевдополно тогда и только тогда, когда $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ – изоморфизм;
- (ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\nabla: X^\nabla \rightarrow Y^\nabla$, замыкающий диаграмму

(1.7)

Из второго условия следует, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^\nabla$ является ковариантным функтором категории $\mathcal{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^\nabla = \psi^\nabla \circ \varphi^\nabla$. Заметим также, что если $\varphi: X \rightarrow Y$

– морфизм в полное ЛВП Y , то существует единственный морфизм $X^\nabla \rightarrow Y$, замыкающий диаграмму

(1.8)

Это, в свою очередь, означает, что пространство X^∇ и морфизм $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ определены однозначно с точностью до изоморфизма. Таким образом, конструкция $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ однозначна, и это оправдывает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X^∇ называется *псевдополнением*, а морфизм $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ – *отображением псевдополнения* ЛВП X . Ковариантный функтор $\varphi \rightarrow \varphi^\nabla$ категории $\mathcal{LCS}$ в себя называется *функтором псевдополнения*.

Теорема 1.6. *Для всякого ЛВП X отображение псевдополнения $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ является плотным вложением.*

Доказательство теорем 1.5 и 1.6 мы проведем в три этапа.

(а) **Функтор ∇ .** Каждому ЛВП X поставим в соответствие подпространство X^∇ в пополнении $X^\blacktriangledown$, состоящее из пределов всевозможных вполне ограниченных направленностей Коши из X :

$$x \in X^\nabla \iff x \in X^\blacktriangledown \text{ \& } \exists \{x_i\} \in \mathcal{S}(X): x_i \xrightarrow{X^\blacktriangledown} x \ (i \rightarrow \infty).$$

Пространство X^∇ наделяется топологией, индуцированной из $X^\blacktriangledown$. Естественная инъекция X в X^∇ обозначается $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$.

Лемма 1.7. *Отображение $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ является плотным вложением, и*
 (i) *X псевдополно тогда и только тогда, когда $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ – изоморфизм;*
 (ii) *для любого морфизма ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\nabla: X^\nabla \rightarrow Y^\nabla$, замыкающий диаграмму*

(1.9)

Отсюда следует, что если $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм в псевдополное ЛВП Y , то существует единственный морфизм $X^\nabla \rightarrow Y$, замыкающий диаграмму

(1.10)

(b) *Инъективный ряд.* *Инъективным рядом* локально выпуклого пространства X мы называем трансфинитную последовательность локально выпуклых пространств $\{X^\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ (занумерованных ординальными числами – см. [13]) с системой морфизмов ЛВП $\{\sigma_\iota^\varkappa: X^\iota \rightarrow X^\varkappa, \iota < \varkappa \in \text{ORD}\}$, удовлетворяющей следующим условиям:

- (i) $X^0 = X$;
- (ii) для любых трех ординалов $\iota < \varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

(1.11)

- (iii) если λ – изолированный ординал, т.е. существует ординал $\varkappa$ такой, что

$$\lambda = \varkappa + 1 = \min\{\omega \in \text{ORD} : \varkappa < \omega\}, \quad (1.12)$$

то существует изоморфизм $X^\lambda = X^{\varkappa+1} \cong (X^\varkappa)^\vee$ такой, что

(1.13)

- (iv) если λ – предельный ординал, т.е. (1.12) не выполняется ни для какого $\varkappa$, то существует изоморфизм между X^λ и локально выпуклым индуктивным пределом системы $\{X^\iota; \iota < \lambda, \iota \rightarrow \lambda\}$ такой, что для всякого $\varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

(1.14)

в которой $\rho_\varkappa$ – естественная инъекция элемента $X^\varkappa$ индуктивной системы $\{X^\iota; \iota < \lambda\}$ в соответствующий индуктивный предел.

Трансфинитной индукцией доказывается

Лемма 1.8. *Всякое ЛВП X обладает инъективным рядом.*

Из леммы 1.8 и диаграмм (1.13) и (1.14) следует

Лемма 1.9. *Все морфизмы $\sigma_\iota^\varkappa: X^\iota \rightarrow X^\varkappa$ инъективного ряда произвольного данного ЛВП X являются плотными вложениями.*

Из нее в свою очередь вытекает

Лемма 1.10. *Инъективный ряд данного ЛВП X определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Это означает, что если $\{X^\omega, \sigma_i^\omega\}$ и $\{\tilde{X}^\omega, \tilde{\sigma}_i^\omega\}$ – два инъективных ряда для X , то существует система изоморфизмов $X^\omega = \tilde{X}^\omega$ такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} X = X^0 & \longrightarrow & X^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^\omega & \longrightarrow & \dots \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \\ X = \tilde{X}^0 & \longrightarrow & \tilde{X}^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{X}^\omega & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (1.15)$$

Лемма 1.11. *Инъективный ряд $\{X^\omega, \sigma_i^\omega\}$ всякого ЛВП X стабилизируется: существует ординал μ такой, что*

$$\forall \omega > \mu \quad X^\omega = X^\mu \quad (1.16)$$

(т.е. $\sigma_\mu^\omega: X^\mu \rightarrow X^\omega$ является изоморфизмом при $\omega > \mu$).

Доказательство. Из леммы 1.9 и теоремы 1.2 следует, что все пространства X^ω можно считать вложенными в пополнение X^∇ пространства X :

$$X = X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^\omega \subseteq \dots \subseteq X^\nabla.$$

Если предположить, что последовательность X^ω не стабилизируется, т.е.

$$\forall \omega \in \text{ORD} \quad \exists x^\omega \in X^{\omega+1} \setminus X^\omega,$$

то класс элементов $\{x^\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ должен иметь “неограниченную мощность”, т.е. не может быть множеством по Гёделю–Бернайсу [13]. Но с другой стороны, все x^ω лежат во множестве X^∇ и, значит, класс $\{x^\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ является множеством. Полученное противоречие означает, что

$$\exists \mu \in \text{ORD} : \quad X^{\mu+1} = X^\mu,$$

а отсюда уже следует (1.16).

Лемма 1.12. *Пусть $\{X^\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ – инъективный ряд для ЛВП X , $\{Y^\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ – инъективный ряд для ЛВП Y . Тогда для любого морфизма $\varphi: X \rightarrow Y$ найдется единственная последовательность морфизмов $\{\varphi^\omega: X^\omega \rightarrow Y^\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ такая, что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccccccc} X = X^0 & \longrightarrow & X^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X^\omega & \longrightarrow & \dots \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^\omega & & \\ Y = Y^0 & \longrightarrow & Y^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Y^\omega & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (1.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале полагаем $\varphi^0 = \varphi$. Затем, если для некоторого ординала λ все $\{\varphi^\kappa; \kappa < \lambda\}$ уже построены, то рассматриваются два случая:

1) если λ – изолированный ординал, т.е. выполняется (1.12), то с помощью леммы 1.7 полагаем

$$\varphi^\lambda = \varphi^{\kappa+1} = (\varphi^\kappa)^\vee; \quad (1.18)$$

2) если же λ – предельный ординал, то, считая X^ω и Y^ω реализованными как системы подпространств в пополнениях X^∇ и Y^∇ , мы сможем переписать диаграмму (1.14) для X^ω и Y^ω в виде равенств

$$X^\lambda = \bigcup_{\iota < \lambda} X^\iota, \quad Y^\lambda = \bigcup_{\iota < \lambda} Y^\iota, \quad (1.19)$$

поэтому φ^λ будет однозначно определяться своими ограничениями $\varphi^\lambda|_{X^\iota} = \varphi^\iota: X^\iota \rightarrow Y^\iota (\iota < \lambda)$; причем непрерывность φ^λ будет следовать из определения индуктивного предела, а единственность – из леммы 1.9.

Лемма 1.12 доказана.

(с) *Конструкция X^∇* . Рассмотрим произвольное ЛВП X . Его инъективный ряд $\{X^\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ по лемме 1.11 стабилизируется. Пусть μ – ординал, на котором происходит эта стабилизация. Положив

$$X^\nabla = X^\mu, \quad \nabla_X = \sigma_0^\mu,$$

мы получим, что, во-первых, пространство X^∇ псевдополно, потому что

$$(X^\nabla)^\vee = (X^\mu)^\vee = X^{\mu+1} = X^\mu = X^\nabla,$$

во-вторых, если X псевдополно, то по лемме 1.7 $(\sigma_0^1: X^0 \rightarrow X^1) = (\vee_X: X \rightarrow X^\vee)$ – изоморфизм, откуда по индукции следует, что в инъективном ряде $\{X^\omega, \sigma_\iota^\omega\}$ все морфизмы σ_ι^ω являются изоморфизмами. В частности, $\vee_X = \sigma_0^\mu$ тоже будет изоморфизмом. Наконец, в-третьих, существование и единственность морфизма φ^∇ в диаграмме (1.7) следует из леммы 1.12.

Таким образом, доказана теорема 1.5. Теорема 1.6 следует из леммы 1.9.

1.4. Псевдонасыщенность и псевдонасыщение (функтор Δ). ЛВП X мы называем *псевдонасыщенным*, если в нем всякое замкнутое выпуклое уравновешенное емкое множество D является окрестностью нуля.

ПРИМЕР 1.13. Всякое бочечное пространство псевдонасыщено в силу леммы 0.6.

ПРИМЕР 1.14. Всякое метризуемое (необязательно полное) ЛВП псевдонасыщено. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.15. Пусть X – метризуемое ЛВП. Для всякого вполне ограниченного множества в его пополнении $T \subseteq X^\nabla$ найдется вполне ограниченное множество $S \subseteq X$, плотное в T : $T \subseteq \overline{S}$.

Замечательно, что существует стандартная конструкция, двойственная в определенном смысле конструкции псевдопополнения (см. ниже результаты § 3), позволяющее каждому ЛВП X поставить в соответствие ближайшее к нему “изнутри” псевдонасыщенное ЛВП X^Δ .

Теорема 1.16. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\Delta_X: X^\Delta \rightarrow X$ из некоторого псевдонасыщенного ЛВП X^Δ так, чтобы выполнялись условия:*

- (i) X псевдонасыщено тогда и только тогда, когда $\Delta_X: X^\Delta \rightarrow X$ — изоморфизм;
- (ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi: Y \rightarrow X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\Delta: Y^\Delta \rightarrow X^\Delta$, замыкающий диаграмму

(1.20)

Понятно, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^\Delta$ есть ковариантный функтор категории $\mathcal{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^\Delta = \psi^\Delta \circ \varphi^\Delta$. Ясно также, что если $\varphi: Y \rightarrow X$ — морфизм из псевдонасыщенного ЛВП Y , то существует единственный морфизм ЛВП $\varphi: Y \rightarrow X^\Delta$, замыкающий диаграмму

(1.21)

Как и в случае с псевдополнением, это означает, в частности, что пространство X^Δ и морфизм $\Delta_X: X^\Delta \rightarrow X$ определены однозначно с точностью до изоморфизма. Поэтому имеет смысл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X^Δ называется *псевдонасыщением*, а морфизм $\Delta_X: X^\Delta \rightarrow X$ — *отображением псевдонасыщения* пространства X . Ковариантный функтор $\varphi \mapsto \varphi^\Delta$ категории $\mathcal{LCS}$ в себя называется *функтором псевдонасыщения*.

Теорема 1.17. *Для всякого ЛВП X отображение псевдонасыщения $\Delta_X: X^\Delta \rightarrow X$ является точным наложением.*

Таким образом, X^Δ можно рассматривать как новую, более тонкую топологизацию X , при которой сохраняется система вполне ограниченных множеств

$$T \in \mathcal{S}(X^\Delta) \iff \Delta_X(T) \in \mathcal{S}(X),$$

причем топология на каждом вполне ограниченном множестве также не меняется.

Теоремы 1.16 и 1.17 доказываются по той же схеме, что и теоремы 1.5 и 1.6, и внешняя разница состоит лишь в обращении стрелок. Как и в п. 1.3, доказательство проводится в три этапа.

(а) **Функтор $\wedge$.** Для каждого ЛВП X обозначим через $X^\wedge$ новую топологизацию пространства X , в которой локальной базой служат всевозможные замкнутые выпуклые уравновешенные емкие множества из X :

$$U \in \mathcal{U}(X^\wedge) \iff \exists D \in \mathcal{BD}(X) : D \subseteq U.$$

В силу предложения 0.8 и леммы 0.2, система $\mathcal{BD}(X)$ действительно является локальной базой некоторой локально выпуклой топологии на X , поэтому наше определение корректно. Из леммы 0.2, (v) следует, что

$$\mathcal{BU}(X) \subseteq \mathcal{BD}(X) \subseteq \mathcal{BU}(X^\wedge), \quad (1.22)$$

поэтому топология $X^\wedge$ мажорирует топологию X . Получающееся таким образом отображение $X^\wedge$ в X обозначается $\wedge_X: X^\wedge \rightarrow X$.

Лемма 1.18. *Отображение $\wedge_X: X^\wedge \rightarrow X$ является точным наложением, причем:*

- (i) X псевдонасыщено тогда и только тогда, когда $\wedge_X: X^\wedge \rightarrow X$ — изоморфизм;
- (ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi: Y \rightarrow X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\wedge: Y^\wedge \rightarrow X^\wedge$, замыкающий диаграмму

$$(1.23)$$

Здесь важно проверить, что топология действительно не меняется на вполне ограниченных множествах — это вытекает из теоремы 0.7.

Отсюда следует, что если $\varphi: Y \rightarrow X$ — морфизм из псевдонасыщенного ЛВП Y , то существует единственный морфизм $Y \rightarrow X^\wedge$, замыкающий диаграмму

$$(1.24)$$

(b) *Проективный ряд. Проективным рядом* локально выпуклого пространства X мы называем трансфинитную последовательность локально выпуклых пространств $\{X_\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ (занумерованных ординальными числами — см. [13]) с системой морфизмов ЛВП $\{\pi_\varkappa^\iota: X^\varkappa \rightarrow X^\iota, \iota < \varkappa \in \text{ORD}\}$, удовлетворяющей следующим условиям:

- (i) $X_0 = X$;
- (ii) для любых трех ординалов $\iota < \varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

$$(1.25)$$

(iii) если λ – изолированный ординал, т.е. существует ординал $\varkappa$ со свойством (1.12), то существует изоморфизм $X_\lambda = X_{\varkappa+1} \cong (X_\varkappa)^\wedge$ такой, что

(1.26)

(iv) если λ – предельный ординал, т.е. (1.12) не выполняется ни для какого $\varkappa$, то существует изоморфизм между X_λ и локально выпуклым проективным пределом системы $\{X_\iota; \iota < \lambda, \iota \rightarrow \lambda\}$ такой, что для всякого $\varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

(1.27)

в которой $\rho_\varkappa$ – естественная проекция проективного предела в элемент $X^\varkappa$ проективной системы $\{X^\iota; \iota < \lambda\}$.

Как и в п. 1.3, последовательно доказываются пять лемм.

Лемма 1.19. *Всякое ЛВП X обладает проективным рядом.*

Лемма 1.20. *Все морфизмы $\pi_\varkappa^\iota: X_\iota \rightarrow X_\varkappa$ проективного ряда произвольного данного ЛВП X являются точными наложениями.*

Лемма 1.21. *Проективный ряд данного ЛВП X определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Это означает, что если $\{X_\omega, \pi_\varkappa^\omega\}$ и $\{\tilde{X}_\omega, \tilde{\pi}_\varkappa^\omega\}$ – два проективных ряда для X , то существует система изоморфизмов $X_\omega = \tilde{X}_\omega$ такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & X_\omega & \longleftarrow & \cdots \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \\ X = \tilde{X}_0 & \longleftarrow & \tilde{X}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \tilde{X}_\omega & \longleftarrow & \cdots \end{array} \quad (1.28)$$

Лемма 1.22. *Проективный ряд $\{X_\omega, \pi_\varkappa^\omega\}$ всякого ЛВП X стабилизируется: существует ординал μ такой, что*

$$\forall \omega > \mu \quad X_\omega = X_\mu$$

(т.е. $\pi_\omega^\mu: X_\omega \rightarrow X_\mu$ является изоморфизмом при $\omega > \mu$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств функтора $\wedge$ следует, что проективный ряд можно представлять себе как упорядоченную в сторону усиления систему топологизаций пространства X , причем все эти топологии мажорируются топологией насыщения:

$$X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \dots \leftarrow X_\omega \leftarrow \dots \leftarrow X^\Delta.$$

Поскольку различных топологизаций на X имеется не больше, чем некоторый кардинал $\mathfrak{m}$, который можно оценить, например, неравенством $\mathfrak{m} \leq 2^{2^{\text{card}(X)}}$, мы получаем, что по крайней мере начиная с номера $\mu = \mathfrak{m}$ все пространства X_ω совпадают.

Лемма 1.23. Пусть $\{X_\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ – проективный ряд для ЛВП X , $\{Y_\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ – проективный ряд для ЛВП Y . Тогда для любого морфизма $\varphi: Y \rightarrow X$ найдется единственная последовательность морфизмов $\{\varphi_\omega: Y_\omega \rightarrow X_\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ такая, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_\omega & \longleftarrow & \dots \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi_0 & & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_\omega & & \\ Y = Y_0 & \longleftarrow & Y_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & Y_\omega & \longleftarrow & \dots \end{array} \quad (1.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале полагаем $\varphi_0 = \varphi$. Затем, если для некоторого ординала λ все $\{\varphi_\kappa; \kappa < \lambda\}$ уже построены, рассматриваются два случая:

1) если λ – изолированный ординал, т.е. выполняется (1.12), то с помощью леммы 1.18 полагаем

$$\varphi_\lambda = \varphi_{\kappa+1} = (\varphi_\kappa)^\wedge;$$

2) если же λ – предельный ординал, то диаграмма (1.27) будет означать, что для X_ω и Y_ω , реализованных как системы топологизаций на X и Y , X_λ и Y_λ будут в точности верхними гранями топологий $\{X_\kappa; \kappa < \lambda\}$ и $\{Y_\kappa; \kappa < \lambda\}$, поэтому непрерывность отображений $\{\varphi_\kappa; \kappa < \lambda\}$ влечет за собой непрерывность отображения φ_λ .

Лемма доказана.

(с) **Конструкция X^Δ .** Рассмотрим произвольное ЛВП X . Его проективный ряд $\{X_\omega; \omega \in \text{ORD}\}$ по лемме 1.22 стабилизируется. Пусть μ – ординал, на котором происходит эта стабилизация. Положив

$$X^\Delta = X_\mu, \quad \Delta_X = \pi_\mu^0,$$

получим, что, во-первых, пространство X^Δ псевдонасыщено, потому что

$$(X^\Delta)^\wedge = (X_\mu)^\wedge = X_{\mu+1} = X_\mu = X^\Delta,$$

во-вторых, если X псевдонасыщено, то по лемме 1.18 $(\pi_1^0: X_1 \rightarrow X_0) = (\wedge_X: X^\wedge \rightarrow X)$ – изоморфизм, откуда следует, что в проективном ряде $\{X_\omega, \pi_\omega^\ell\}$ все морфизмы π_ω^ℓ являются изоморфизмами. В частности, $\Delta_X = \pi_\mu^0$ тоже будет изоморфизмом. Наконец, в-третьих, существование и единственность морфизма φ^Δ в диаграмме (1.20) следует из леммы 1.23.

Таким образом доказана теорема 1.16. Теорема 1.17 следует из леммы 1.23.

1.5. Таблица инвариантов. Как известно, полнота сохраняется при переходе к замкнутому подпространству, прямой сумме, прямому произведению и проективному пределу в категории локально выпуклых пространств. Теми же свойствами, как легко заметить, обладает псевдополнота. Двойственным образом оказывается, что псевдонасыщенность сохраняется при переходе к (отделимому) факторпространству, прямому произведению, прямой сумме и индуктивному пределу в категории ЛВП.

Напротив, псевдополнота не сохраняется при переходе к факторпространству и локально выпуклому индуктивному пределу, а псевдонасыщенность не сохраняется при переходе к подпространству и проективному пределу.

Наконец, оба свойства — псевдополнота и псевдонасыщенность — сохраняются под действием шести описанных в этом параграфе операций: $\vee$, $\wedge$, ∇ , Δ , $\blacktriangledown$, $\blacktriangle$.

Наглядно все эти закономерности удобно отразить в виде следующей таблицы инвариантов.

ТАБЛИЦА ИНВАРИАНТОВ

Операция	Псевдополнота	Псевдонасыщенность
$X^\vee$ (заготовка к псевдопополнению)	+	$\oplus$
$X^\wedge$ (заготовка к псевдонасыщению)	$\oplus$	+
X^∇ (псевдопополнение)	+	$\oplus$
X^Δ (псевдонасыщение)	$\oplus$	+
$X^{\blacktriangledown}$ (пополнение)	+	$\oplus$
$X^{\blacktriangle}$ (насыщение)	$\oplus$	+
$\prod_{i \in I} X_i$ (прямое произведение)	+	+
$\sum_{i \in I} X_i$ (прямая сумма)	+	+
$\varprojlim X_i$ (проективный предел)	+	$\ominus$
$\varinjlim X_i$ (индуктивный предел)	$\ominus$	+
$Y \subseteq X$ (замкнутое подпространство)	+	$\ominus$
X/Y (отделимое факторпространство)	$\ominus$	+

Кружками здесь обведены минусы и плюсы, требующие проверки (остальные ячейки таблицы мы считаем очевидными). Поскольку минусы в дальнейшем нам не понадобятся, мы не будем их доказывать, отметив только, что все они следуют из примера квазиполного бочечного пространства, обладающего не секвенциально полным отделимым факторпространством [14]. Доказательство плюсов содержится в следующих двух предложениях.

Предложение 1.24. *Если X псевдополно, то $X^\wedge$, X^Δ и $X^{\blacktriangle}$ также псевдополны.*

(По лемме 1.18, теореме 1.17 и теореме 1.4 $\wedge$, Δ и $\blacktriangle$ сохраняют топологию на вполне ограниченных множествах.)

Предложение 1.25. *Если X псевдонасыщено, то $X^\vee$, X^∇ и $X^\blacktriangledown$ также псевдонасыщены.*

Это следует из того, что $\vee_X: X \rightarrow X^\vee$, $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ и $\blacktriangledown_X: X \rightarrow X^\blacktriangledown$ — плотные вложения. Действительно, если $D \in \mathcal{BD}(X^\vee)$, то $D \cap X \in \mathcal{BD}(X)$, откуда в силу псевдонасыщенности X имеем $D \cap X$ — окрестность нуля в X . Значит, замыкание $\overline{D \cap X}$ в пространстве $X^\vee$ является окрестностью нуля в $X^\vee$. Но $\overline{D \cap X} \subseteq \overline{D} = D$ и, значит, D — тоже окрестность нуля в $X^\vee$. Аналогично рассматриваются случаи X^∇ и $X^\blacktriangledown$.

§ 2. Функтор сопряжения $\star$

Сопряженным пространством $X^\star$ к ЛВП X над $\mathbb{C}$ мы называем пространство линейных непрерывных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X . Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм ЛВП, то формула

$$\varphi^\star(g) = g \circ \varphi$$

определяет, как легко заметить, морфизм сопряженных пространств $\varphi^\star: Y^\star \rightarrow X^\star$, который мы называем *сопряженным морфизмом*. Отображение $\varphi \mapsto \varphi^\star$ является контравариантным функтором в категории ЛВП, и мы называем его *функтором сопряжения*.

2.1. Двойственность между вполне ограниченными и емкими множествами. Если $B \subseteq X$ и $F \subseteq X^\star$ — произвольные множества, то символами B° и ${}^\circ F$ обозначаются их (прямая и обратная) полярны (в $X^\star$ и X):

$$B^\circ = \{f \in X^\star : |f|_B := \sup_{x \in B} |f(x)| \leq 1\}, \quad {}^\circ F = \{x \in X : |x|_F := \sup_{f \in F} |f(x)| \leq 1\}.$$

Теорема 2.1. *Пусть X — произвольное ЛВП. Тогда:*

- (a) *если $B \subseteq X$ вполне ограничено, то $B^\circ \subseteq X^\star$ емкое;*
- (b) *если $B \subseteq X$ емкое, то $B^\circ \subseteq X^\star$ вполне ограничено;*
- (c) *если $F \subseteq X^\star$ вполне ограничено, то ${}^\circ F \subseteq X$ емкое;*
- (d) *если $F \subseteq X^\star$ емкое, то ${}^\circ F \subseteq X$ вполне ограничено.*

Для доказательства нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений. Условимся символом X' обозначать векторное пространство линейных непрерывных функционалов на X (без топологии).

Лемма 2.2. *На всяком вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$ X' -слабая топология совпадает с индуцированной из X . Поэтому, в частности, $S \in \mathcal{S}(X)$ тогда и только тогда компактно в X , когда оно X' -слабо компактно.*

Доказательство. Рассмотрим пополнение $X^\blacktriangledown$ пространства X . Системы линейных непрерывных функционалов для X и $X^\blacktriangledown$ одинаковы. Замыкание $S^\blacktriangledown$ множества $S \in \mathcal{S}(X)$ в $X^\blacktriangledown$ будет компактом в $X^\blacktriangledown$, на котором функционалы $X' = (X^\blacktriangledown)'$ индуцируют хаусдорфову топологию, мажорируемую исходной. В силу известного свойства компактов [12] эта топология совпадает с исходной на $S^\blacktriangledown$, а значит, и на $S \subseteq S^\blacktriangledown$.

Лемма 2.3. Пусть топология ЛВП Y является проективной относительно семейства линейных отображений $\pi_i: Y \rightarrow Y_i$ ($i \in I$) в некоторую систему локально выпуклых пространств $\{Y_i; i \in I\}$. Тогда множество $T \subseteq Y$ будет вполне ограничено в Y в том и только том случае, если для всякого $i \in I$ образ $\pi_i(T)$ вполне ограничен в Y_i .

Необходимость этого условия очевидна, а достаточность доказывается с помощью леммы 0.5: если $\pi_i(T)$ вполне ограничено в Y_i для любого $i \in I$, то для всякой окрестности нуля $V_i \subseteq Y_i$ прообраз $\pi_i^{-1}(V_i)$ будет емким по отношению к T множеством. Отсюда следует, что если зафиксировать окрестности нуля $V_{i_1} \subseteq Y_{i_1}, \dots, V_{i_n} \subseteq Y_{i_n}$, то их общий прообраз $\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$ будет емким по отношению к T множеством, и поскольку все такие множества образуют локальную базу в Y , то T должно быть вполне ограничено.

Лемма 2.4 (критерий полной ограниченности в сопряженном пространстве). Множество функционалов $F \subseteq X^*$ вполне ограничено в X^* тогда и только тогда, когда F равномерно непрерывно на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому $S \in \mathcal{BS}(X)$ поставим в соответствие компакт S^∇ , являющийся пополнением вполне ограниченного равномерного пространства S (см. [12, п. 8.3.16]). Пусть $\nabla_S: S \rightarrow S^\nabla$ — соответствующее вложение. Всякий функционал $f \in X^*$ равномерно непрерывен на S и, значит, на S^∇ , поэтому ограничение $f|_S$ можно (однозначно) продолжить до непрерывной функции $f_S^\nabla: S^\nabla \rightarrow \mathbb{C}$:

Таким образом, возникает линейное отображение $\pi_S: f \mapsto f_S^\nabla$ пространства X^* в банахово пространство $\mathcal{C}(S^\nabla)$ непрерывных функций на компакте S^∇ (с топологией равномерной сходимости на S^∇).

Если заставить S меняться, пробегая $\mathcal{BS}(X)$, то топология X^* окажется проективной относительно системы линейных отображений $\pi_S: X^* \rightarrow \mathcal{C}(S^\nabla)$. Значит, в силу леммы 2.3 множество $F \subseteq X^*$ вполне ограничено в X^* тогда и только тогда, когда для всякого $S \in \mathcal{BS}(X)$ его образ $F_S^\nabla = \pi_S(F)$ вполне ограничен в $\mathcal{C}(S^\nabla)$. По теореме Асколи [12, п. 8.2.10] это эквивалентно условиям:

- F_S^∇ равномерно непрерывно на S^∇ ;
- $\forall x \in S^\nabla \quad F_S^\nabla(x)$ ограничено в $\mathbb{C}$.

Их можно сначала ослабить, заменив S^∇ на S :

- F равномерно непрерывно на S ;
- $\forall x \in S \quad F(x)$ ограничено в $\mathbb{C}$.

А затем второе условие вовсе можно отбросить, потому что если F равномерно непрерывно на S , то $\forall x \in S \quad F$ равномерно непрерывно на отрезке $[0, x]$ (именно для этого S выбиралось выпуклым и уравновешенным), а отсюда в силу линейности

функционалов $f \in F$ следует, что $F(x)$ ограничено в $\mathbb{C}$. Мы доказали лемму 2.4, считая, что $S \in \mathcal{BS}(X)$. Отсюда уже следует, что S может быть любым: $S \in \mathcal{S}(X)$.

Лемма 2.5. *Поляра U° всякой окрестности нуля U в X является компактом в сопряженном пространстве X^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.4 следует, что U° вполне ограничено в X^* . С другой стороны, очевидно, что U° полно как равномерное пространство. Значит [12, п. 8.3.16], U° является компактом.

Теперь мы можем доказать теорему 2.1.

1. Если $B \in \mathcal{S}(X)$, то по определению топологии X^* имеем $B^\circ \in \mathcal{U}(X^*) \subseteq \mathcal{D}(X^*)$.
2. Пусть $B \in \mathcal{D}(X)$. Поскольку поляры B и его замкнутой выпуклой уравновешенной оболочки совпадают, можем считать, что $B \in \mathcal{BD}(X)$. Тогда по теореме 0.7 B будет массивно в нуле:

$$\forall S \in \mathcal{BS}(X) \quad \exists U \in \mathcal{BU}(X) : U \cap S \subseteq B.$$

Переходя к поляре и используя леммы 2.5 и 0.9 ($G = S \subseteq X = P$, $H = U^\circ \subseteq X' = Q$), получаем

$$\forall S \in \mathcal{BS}(X) \quad \exists U \in \mathcal{BU}(X) : B^\circ \subseteq (U \cap S)^\circ \subseteq U^\circ + S^\circ.$$

Здесь S° – базисная окрестность нуля в X^* , а U° – компакт в X^* (по лемме 2.5). Значит,

$$\forall V \in \mathcal{BU}(X^*) \quad \exists K \in \mathcal{BK}(X^*) : B^\circ \subseteq K + V.$$

Это равносильно условию $B^\circ \in \mathcal{S}(X^*)$ в силу предложения 0.4.

3. Пусть $F \in \mathcal{S}(X^*)$. Тогда по лемме 2.4 F равномерно непрерывно на каждом $S \in \mathcal{S}(X)$. Отсюда

$$\forall S \in \mathcal{BS}(X) \quad \exists U \in \mathcal{BU}(X) : U \cap S \subseteq {}^\circ F,$$

т.е. ${}^\circ F$ массивно в нуле и, значит, является емким в X .

4. Пусть $F \in \mathcal{D}(X^*)$. Поскольку обратные поляры F и его замкнутой выпуклой уравновешенной оболочки совпадают, можно считать, что $F \in \mathcal{BD}(X^*)$. Зафиксируем окрестность нуля $U \in \mathcal{BU}(X)$ и рассмотрим поляру $T = U^\circ \in \mathcal{B}(X^*)$. По лемме 2.5 $T \in \mathcal{BK}(X^*)$. Значит, по теореме 0.7

$$\exists V \in \mathcal{BU}(X^*) : V \cap T \subseteq F.$$

Заметим теперь, что на компакте $T = U^\circ \subseteq X^*$ X -слабая топология хаусдорфова и мажорируется X^* -топологией. Значит [12, п. 3.1.14], эти топологии на T совпадают. Поэтому должен существовать *конечномерный* компакт $K \in \mathcal{BK}(X)$ такой, что

$$K^\circ \cap T \subseteq V \cap T \subseteq F.$$

Воспользуемся теперь леммой 0.9 ($G = T \subseteq X^* = P$, $H = K \subseteq X = Q$):

$${}^\circ F \subseteq {}^\circ(K^\circ \cap T) \subseteq {}^\circ(K^\circ) + {}^\circ T \subseteq K + {}^\circ T \subseteq K + U.$$

Мы получили, что

$$\forall U \in \mathcal{BU}(X) \quad \exists K \in \mathcal{BK}(X) : {}^\circ F \subseteq K + U.$$

По предложению 0.4 это означает, что ${}^\circ F \in \mathcal{BS}(X)$. Теорема 2.1 доказана.

2.2. Кополнота и связь между насыщенностью и псевдонасыщенностью. Назовем ЛВП X *кополным*, если его сопряженное пространство X^* полно.

Предложение 2.6. *Для ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

- (i) *пространство X кополно;*
- (ii) *всякий линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, непрерывный на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, непрерывен на всем X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна. Докажем обратную (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть X кополно, т.е. X^* полно. Обозначим через $X^\natural$ пространство всех линейных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, непрерывных на каждом $S \in \mathcal{BS}(X)$. Если наделять $X^\natural$ топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах $S \in X$, мы получим вложение локально выпуклых пространств $X^* \subseteq X^\natural$. При этом X^* полно и, значит, замкнуто в $X^\natural$. Поэтому для доказательства равенства $X^* = X^\natural$ нам нужно только проверить, что X^* плотно в $X^\natural$.

Возьмем для этого функционал $f \in X^\natural$ и зафиксируем $S \in \mathcal{BS}(X)$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует $g \in X^*$ такой, что

$$|f - g|_S \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Функционал f непрерывен на S , поэтому существует окрестность нуля $V \in \mathcal{BU}(X)$ такая, что $|f|_{S \cap V} \leq \varepsilon$, т.е. $f \in \varepsilon(S \cap V)_{X^\natural}^\circ$. В силу леммы 2.2 найдется X^* -слабая окрестность нуля W в X такая, что $S \cap W \subseteq S \cap V$. При этом можно считать, что W выпукла, уравновешена и X^* -слабо замкнута, т.е. $W = {}^\circ K$ для некоторого конечномерного компакта $K \in \mathcal{BK}(X^*)$ ($K \subseteq X^* \subseteq X^\natural$):

$$f \in \varepsilon(S \cap V)_{X^\natural}^\circ \subseteq \varepsilon(S \cap W)_{X^\natural}^\circ \subseteq \varepsilon(S \cap {}^\circ K)_{X^\natural}^\circ.$$

Воспользуемся теперь леммой 0.9 ($G = S \subseteq X = P$, $H = K \subseteq X^\natural = Q$):

$$(S \cap {}^\circ K)_{X^\natural}^\circ \subseteq S_{X^\natural}^\circ + K.$$

Значит, $f \in \varepsilon S_{X^\natural}^\circ + \varepsilon K$. Таким образом, существует $g \in \varepsilon K \subseteq X^*$ такой, что $f - g \in \varepsilon S_{X^\natural}^\circ$, т.е. выполняется (2.1).

Теорема 2.7 (о связи между насыщенностью и псевдонасыщенностью). *ЛВП X насыщено тогда и только тогда, когда оно псевдонасыщено и кополно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть X псевдонасыщено и кополно. Рассмотрим насыщение $X^\blacktriangle$ пространства X . Из кополноты X следует, что сопряженные пространства X и $X^\blacktriangle$ совпадают:

$$X^* = (X^\blacktriangle)^*. \quad (2.2)$$

Пусть M – предкомпактно-замкнутое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество в X , т.е. $M \in \mathcal{PM}(X)$. Тогда в силу (1.4) $M \in \mathcal{BU}(X^\blacktriangle)$, а отсюда в силу (2.2) $M \in \mathcal{B}(X)$. Значит, $M \in \mathcal{BM}(X) = \mathcal{BU}(X)$. Таким образом, $\mathcal{PM}(X) \subseteq \mathcal{BU}(X)$, т.е. X насыщено.

2.3. Критерии насыщенности и псевдонасыщенности. Из теоремы 2.1 следует

Теорема 2.8 (критерий псевдонасыщенности). *ЛВП X тогда и только тогда псевдонасыщено, когда всякое множество линейных непрерывных функционалов*

$F \subseteq X'$, *равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве* $S \subseteq X$, *равностепенно непрерывно на всем* X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Рассмотрим обратную поляру ${}_0F \subseteq X$. В силу леммы 2.4 и теоремы 2.1, (с) она будет замкнутым выпуклым уравновешенным емким множеством в X . Поэтому если X псевдонасыщено, то ${}_0F \subseteq X$ есть окрестность нуля, т.е. F равностепенно непрерывно на X .

Достаточность. Пусть $D \in \mathcal{B}\mathcal{D}(X)$. Поляра $F = D^\circ$ будет по теореме 2.1, (b) и лемме 2.4 множеством функционалов из X' , равностепенно непрерывным на каждом $S \in \mathcal{S}(X)$. Если это равносильно равностепенной непрерывности F на всем X , то обратная поляра $D = {}_0F$ будет окрестностью нуля в X .

Теоремы 2.8 и 2.7 вместе дают следующую теорему.

Теорема 2.9 (критерий насыщенности). *ЛВП X тогда и только тогда насыщено, когда всякое множество линейных функционалов $F \subseteq X'$ (не предполагаемых заранее непрерывными), равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, равностепенно непрерывно на всем X .*

2.4. Отображение $i_X: X \rightarrow X^{}$.** Вторым сопряженным пространством X^{**} к ЛВП X мы называем сопряженное к первому сопряженному:

$$X^{**} = (X^*)^*$$

(каждая звездочка $*$ означает, что берется топология равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах). Формула

$$i_X(x)(f) = f(x)$$

определяет естественное отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$.

Теорема 2.10. *Для всякого ЛВП X отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$ инъективно, открыто и имеет плотный в X^{**} образ.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Это отображение не обязано быть непрерывным. Его открытость означает, что

$$\forall U \in \mathcal{U}(X) \quad \exists V \in \mathcal{U}(X^{**}) : i_X(U) \supseteq V \cap i_X(X).$$

Для доказательства заметим, что отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$ переводит всякое множество $B \subseteq X$ в его вторую поляру $B^{\circ\circ} = \{y \in X^{**} : \forall f \in B^\circ |y(f)| \leq 1\}$. Поэтому определено отображение $i_B: B \rightarrow B^{\circ\circ}$.

Лемма 2.11. *Пусть $S \in \mathcal{B}\mathcal{S}(X)$; тогда вторая поляра $S^{\circ\circ}$ является компактом в X^{**} , а отображение $i_S: S \rightarrow S^{\circ\circ}$ является вложением топологических пространств с плотным образом.*

Действительно, первая поляра S° будет окрестностью нуля в X^* в силу выбора топологии X^* , а вторая поляра $S^{\circ\circ}$ поэтому будет компактом в X^{**} по лемме 2.5. По лемме 2.2 топология S совпадает с X' -слабой. С другой стороны, топология $S^{\circ\circ}$ также совпадает с X' -слабой, потому что X' -слабая топология является хаусдорфовой топологией на компакте $S^{\circ\circ}$, мажорируемой исходной топологией этого компакта (см. [12]). Значит, $i_S: S \rightarrow S^{\circ\circ}$ является вложением. С другой стороны, по теореме о биполяре [11] $i(S)$ плотно в $S^{\circ\circ}$ в смысле X' -слабой топологии, поэтому $i(S)$ плотно в $S^{\circ\circ}$ в смысле топологии пространства X^{**} .

Лемма 2.12. Для всякого ЛВП X справедливо равенство (множеств)

$$X^{**} = \bigcup_{S \in \mathcal{BS}(X)} S^{\circ\circ}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $z \in X^{**}$. Поскольку функционал $z: X^* \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывен, он должен быть ограничен на некоторой базисной окрестности нуля $V = S^\circ$, $S \in \mathcal{S}(X)$. Пошевелив в случае необходимости $S \in \mathcal{S}(X)$, можно в качестве ограничивающей константы взять единицу. Таким образом, $|z|_V \leq 1$, т.е. $z \in V^\circ = S^{\circ\circ}$.

Из лемм 2.11 и 2.12 следует

Лемма 2.13. Для всякого ЛВП X любой вектор $z \in X^{**}$ является пределом в X^{**} некоторой направленности из $i_X(X)$:

$$z = \lim_{\nu \rightarrow \infty} i_X(x_\nu),$$

такой, что $\{x_\nu\}$ вполне ограничено в X , а $\{i_X(x_\nu)\}$ вполне ограничено в пространстве X^{**} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.10. Инъективность i_X очевидна. Плотность $i_X(X)$ в X^{**} следует из леммы 2.13. Проверим открытость. Пусть $U \in \mathcal{BU}(X)$. Тогда по лемме 2.5 $U^\circ \in \mathcal{BK}(X^*) \subseteq \mathcal{BS}(X^*)$ и, значит, $U^{\circ\circ} \in \mathcal{BU}(X^{**})$. Таким образом, $i_X(U) = U^{\circ\circ} \cap i_X(X)$ будет окрестностью нуля в пространстве $i_X(X) \subseteq X^{**}$.

2.5. Двойственность между псевдополнотой и псевдонасыщенностью. Итак, отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$ всегда инъективно, открыто и имеет всюду плотный образ. Естественный вопрос о сюръективности и непрерывности этого отображения, как оказывается, напрямую связан с псевдополнотой и псевдонасыщенностью X .

Теорема 2.14. Для произвольного ЛВП X следующие условия эквивалентны:

- (i) пространство X псевдополно;
- (ii) отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$ сюръективно (и, значит, биективно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Макки [11] $i_X: X \rightarrow X^{**}$ биективно тогда и только тогда, когда существует локальная база в X^* , состоящая из поляр T° X^* -слабо компактных множеств $T \subseteq X$. Это означает, что для всякого $S \in \mathcal{BS}(X)$ должно существовать X^* -слабо компактное $T \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $T^\circ \supseteq S^\circ$ т.е. $S \subseteq T$. Иными словами, всякое $S \in \mathcal{BS}(X)$ должно быть X^* -слабо компактным и, значит (лемма 2.2), просто компактным.

Следствие 2.15. Если пространство X псевдополно, то определено (непрерывное) отображение $i_X^{-1}: X^{**} \rightarrow X$, являющееся точным наложением.

Действительно, из открытости (теорема 2.10) и биективности отображения $i_X: X \rightarrow X^{**}$ следует существование и непрерывность обратного отображения $i_X^{-1}: X^{**} \rightarrow X$. При этом если $S \in \mathcal{BS}(X)$, то по лемме 2.11

$$i_X(S) = S^{\circ\circ} \cap i_X(X) = S^{\circ\circ} \cap X^{**} = S^{\circ\circ} \in \mathcal{BS}(X^{**}),$$

т.е. существует $T = i_X(S) \in \mathcal{BS}(X^{**})$ такое, что $i_X^{-1}(T) = S$.

Теорема 2.16. *Для произвольного ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

- (i) *пространство X псевдонасыщено;*
- (ii) *отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$ непрерывно (и, значит, является вложением).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть X псевдонасыщено и V – базисная окрестность нуля в X^{**} , т.е. $V = F^\circ$, где $F \in \mathcal{BS}(X^*)$. По теореме 2.1, (d) множество ${}^\circ F = i^{-1}(F^\circ) = i^{-1}(V)$ должно быть емким, т.е. окрестностью нуля в X .

(ii) $\Rightarrow$ (i). Возьмем $D \in \mathcal{BD}(X)$. По теореме 2.1, (b) поляра D° вполне ограничена в X^* , поэтому вторая поляра $D^{\circ\circ}$ есть окрестность нуля в X^{**} . Если $i_X: X \rightarrow X^{**}$ непрерывно, то $D = i^{-1}(D^{\circ\circ})$ будет окрестностью нуля в X .

Следствие 2.17. *Если пространство X псевдонасыщено, то отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$ является плотным вложением.*

Следующий результат устанавливает двойственность между псевдополными и псевдонасыщенными пространствами.

Теорема 2.18. *Пусть X – произвольное ЛВП. Тогда:*

- *если X псевдополно, то X^* псевдонасыщено;*
- *если X псевдонасыщено, то X^* псевдополно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует следующую очевидную формулу:

$$\forall f \in X^* \quad i_{X^*}(f) \circ i_X = f.$$

1. Пусть X псевдополно, т.е. (теорема 2.14) $i_X: X \rightarrow X^{**}$ является биекцией. Тогда определено обратное отображение $i_X^{-1}: X^{**} \rightarrow X$, непрерывное в силу следствия 2.15. Поэтому из формулы $i_{X^*}(f) = f \circ i_X^{-1}$ следует, что i_{X^*} есть непрерывное отображение, т.е. (теорема 2.16) X^* псевдонасыщено.

2. Пусть X псевдонасыщено, т.е. $i_X: X \rightarrow X^{**}$ непрерывно (теорема 2.16). Тогда, выбрав $g \in X^{***}$ и положив $f = g \circ i_X$, мы получим, что $f \in X^*$, причем

$$i_{X^*}(f) \circ i_X = f = g \circ i_X,$$

т.е. функционалы $i_{X^*}(f)$ и g совпадают на подпространстве $i_X(X)$, плотном в X^{**} , в силу теоремы 2.10. Следовательно, они совпадают на всем X^{**} . Мы получили, что отображение $i_{X^*}: X^* \rightarrow X^{***}$ сюръективно, т.е. (теорема 2.14) X^{**} псевдополно.

§ 3. Двойственность между функторами ∇ и Δ

3.1. Двойственность между плотными вложениями и точными наложениями. В этом пункте мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 3.1. *Если X псевдополно и $\varphi: X \rightarrow Y$ – точное наложение, то $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ – плотное вложение.*

Теорема 3.2. *Если X псевдонасыщено и $\varphi: X \rightarrow Y$ – плотное вложение, то $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ – точное наложение.*

Их доказательству мы предположим несколько лемм.

Лемма 3.3. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм ЛВП. Тогда

$$\forall A \subseteq X \quad \{\varphi(A)\}_{Y^*}^\circ = (\varphi^*)^{-1}(A_{X^*}^\circ), \quad (3.1)$$

а если X псевдополно, то

$$\forall B \subseteq Y \quad \{\varphi^{-1}(B)\}_{X^*}^\circ = \overline{\varphi^*(B_{Y^*}^\circ)}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \subseteq X$, то $[\varphi(A)]_{Y^*}^\circ = \{g \in Y^* : |g|_{\varphi(A)} \leq 1\} = \{g \in Y^* : |\varphi^*(g)|_A = |g \circ \varphi|_A \leq 1\} = \{g \in Y^* : \varphi^*(g) \in A_{X^*}^\circ\} = (\varphi^*)^{-1}(A_{X^*}^\circ)$. Пусть теперь X псевдополно и $B \subseteq Y$. Тогда по теореме 2.14

$$\begin{aligned} [\varphi^*(B_{Y^*}^\circ)]_{X^{**}}^\circ &= [\varphi^*(B_{Y^*}^\circ)]_X^\circ = \{x \in X : \forall f \in \varphi^*(B_{Y^*}^\circ) \quad |f(x)| \leq 1\} \\ &= \{x \in X : \forall g \in B_{Y^*}^\circ \quad |\varphi^*(g)(x)| = |g(\varphi(x))| \leq 1\} \\ &= \{x \in X : \varphi(x) \in (B_{Y^*}^\circ)_Y^\circ\} = \varphi^{-1}[(B_{Y^*}^\circ)_Y^\circ] \\ &= \varphi^{-1}[\overline{\text{absconv}_Y B}] = \overline{\text{absconv}_X [\varphi^{-1}(B)]}, \end{aligned}$$

где $\overline{\text{absconv}}$ – замкнутая выпуклая уравновешенная оболочка. Поскольку $B_{Y^*}^\circ$, а значит, и $\varphi^*(B_{Y^*}^\circ)$ выпуклы и уравновешены, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\varphi^*(B_{Y^*}^\circ)} &= \overline{\text{absconv}_{X^*} \varphi^*(B_{Y^*}^\circ)} = \{[\varphi^*(B_{Y^*}^\circ)]_{X^{**}}^\circ\}_{X^*}^\circ \\ &= \{\overline{\text{absconv}_X [\varphi^{-1}(B)]}\}_{X^*}^\circ = \{\varphi^{-1}(B)\}_{X^*}^\circ. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из нее следует

Лемма 3.4. Если X псевдополно и $\varphi: X \rightarrow Y$ – мономорфизм, то $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ – эпиморфизм.

Действительно, положив $B = \{0\} \subseteq Y$, мы получим $X^* = \{0\}_{X^*}^\circ = \{\varphi^{-1}(B)\}_{X^*}^\circ = \overline{\varphi^*(B_{Y^*}^\circ)} = \overline{\varphi^*(Y^*)}$.

Лемма 3.5. Если X псевдонасыщено и $\varphi: X \rightarrow Y$ – вложение, то $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ – наложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in \mathcal{S}(X^*)$. В силу леммы 2.4 и теоремы 2.8 F равностепенно непрерывно на X , т.е. все функционалы $f \in F$ подчинены одной полунорме p , непрерывной на X :

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in X, \quad f \in F.$$

Поскольку $\varphi: X \rightarrow Y$ – вложение, полунорма p продолжается до некоторой полунормы q , непрерывной на Y : $q \circ \varphi = p$. С помощью теоремы Хана–Банаха для всякого $f \in F$ выберем продолжение $f_Y \in Y^*$, подчиненное q :

$$f_Y \circ \varphi = f \quad \& \quad \forall y \in Y \quad |f_Y(y)| \leq q(y).$$

Множество функционалов $F_Y = \{f_Y; f \in F\}$ подчинено непрерывной полунорме q на Y , т.е. равностепенно непрерывно на Y . Значит (лемма 2.4), $F_Y \in \mathcal{S}(Y^*)$. При этом

$$\varphi^*(F_Y) = F_Y \circ \varphi = F.$$

Лемма доказана.

Следующие леммы очевидны.

Лемма 3.6. *Если $\varphi: X \rightarrow Y$ – наложение, то $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ – вложение.*

Лемма 3.7. *Если $\varphi: X \rightarrow Y$ – эпиморфизм, то $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ – мономорфизм.*

Теорема 3.1 теперь следует из лемм 3.4 и 3.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Из лемм 3.5 и 3.7 следует, что если X псевдонасыщено и $\varphi: X \rightarrow Y$ – плотное вложение, то $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ – биективное наложение. Для доказательства его точности возьмем вполне ограниченное множество $G \subseteq Y^*$. Его образ $F = \varphi^*(G) = G \circ \varphi$ будет вполне ограничен в X^* . По лемме 2.4 и теореме 2.8 F равномерно непрерывно на X , значит, F содержится в поляре U° некоторой окрестности нуля $U \subseteq X$. Поскольку $\varphi: X \rightarrow Y$ – вложение, существует окрестность нуля $V \subseteq Y$ такая, что $U = \varphi^{-1}(V)$. При этом $G \subseteq Y^*$ будет содержаться в поляре V° .

Заметим теперь, что (по лемме 2.5) U° – компакт в X^* , а X -слабая топология на нем хаусдорфова и мажорируется исходной (т.е. индуцированной из X^*). Значит, исходная топология U° совпадает с X -слабой. С другой стороны, поскольку X плотно в Y (в смысле φ), на компакте $V^\circ \subseteq Y^*$ X -слабая топология тоже хаусдорфова и тоже мажорируется исходной (т.е. индуцированной из Y^*). Значит, исходная топология V° совпадает с X -слабой.

Итак, топологии компактов $U^\circ \subseteq X^*$ и $V^\circ \subseteq Y^*$ совпадают с X -слабой топологией, и это значит, что V° и U° гомеоморфны в смысле биекции $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$. Следовательно, их подпространства $G \subseteq V^\circ$ и $F \subseteq U^\circ$ также гомеоморфны относительно φ^* . Теорема 3.2 доказана.

3.2. Двойственность между $\vee$ и $\wedge$.

Лемма 3.8. *Для всякого псевдополного ЛВП X существует (единственный) изоморфизм $X^\wedge = X^{**}$ такой, что коммутативна диаграмма*

(3.3)

При этом для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ будет коммутативна диаграмма

(3.4)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2.15 отображение $i_X^{-1}: X^{**} \rightarrow X$ является точным наложением, и поэтому его можно рассматривать как более тонкую топологизацию X , сохраняющую вполне ограниченные множества. Локальной базой такой топологии будут множества ${}^\circ F, F \in \mathcal{BS}(X^*)$, т.е. в силу теоремы 2.1, (b), (c) множества $D \in \mathcal{BD}(X)$. Это совпадает с определением $X^\wedge$. Дальнейшее ясно.

Лемма 3.9. *Для всякого псевдонасыщенного ЛВП X существует (единственный) изоморфизм $X^\vee = X^{**}$ такой, что коммутативна диаграмма*

(3.5)

При этом для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ будет коммутативна диаграмма

(3.6)

Это следует из определения $X^\vee$, леммы 2.13 и следствия 2.17.

Теорема 3.10. *Если X псевдополно, то существует (единственный) изоморфизм $(X^\wedge)^* = (X^*)^\vee$ такой, что коммутативна диаграмма*

(3.7)

При этом для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ будет коммутативна диаграмма

(3.8)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.18 X^* будет псевдонасыщено, поэтому

$$\begin{aligned}(X^\wedge)^* &= (\text{лемма 3.8}) = (X^{**})^* = (X^*)^{**} = (\text{лемма 3.9}) = (X^*)^\vee, \\ (\varphi^\wedge)^* &= (\text{лемма 3.8}) = (\varphi^{**})^* = (\varphi^*)^{**} = (\text{лемма 3.9}) = (\varphi^*)^\vee.\end{aligned}$$

Теорема 3.11. *Если X псевдонасыщено, то существует (единственный) изоморфизм $(X^\vee)^* = (X^*)^\wedge$ такой, что коммутативна диаграмма*

(3.9)

При этом для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ будет коммутативна диаграмма

(3.10)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.18 X^* будет псевдополно, поэтому

$$\begin{aligned}(X^\vee)^* &= (\text{лемма 3.9}) = (X^{**})^* = (X^*)^{**} = (\text{лемма 3.8}) = (X^*)^\wedge, \\ (\varphi^\vee)^* &= (\text{лемма 3.9}) = (\varphi^{**})^* = (\varphi^*)^{**} = (\text{лемма 3.8}) = (\varphi^*)^\wedge.\end{aligned}$$

3.3. Двойственность между инъективным и проективным рядами.

Теорема 3.12. *Пусть X – псевдополное ЛВП и $\{X_\omega, \pi\}$ – проективный ряд для X . Тогда:*

- (а) проективный ряд $\{X_\omega, \pi\}$ состоит из псевдополных пространств;
- (б) если $\{(X^*)_\omega, \sigma\}$ – инъективный ряд для сопряженного пространства X^* , то существует единственная система изоморфизмов

$$(X_\omega)^* = (X^*)_\omega$$

такая, что для всякого $\kappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

(3.11)

(с) для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ и любого ординала ω коммутативна диаграмма

(3.12)

в которой $\{Y_\omega\}$ – произвольный проективный ряд для Y , $\{(Y^*)^\omega\}$ – произвольный инъективный ряд для Y , а φ_ω и $(\varphi^*)^\omega$ – системы морфизмов, определенные в леммах 1.23 и 1.12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сразу, что в силу таблицы инвариантов п. 1.5 все пространства $\{X_\omega\}$ псевдополны. Проверим, что система $(X_\omega)^*$ является инъективным рядом для X , т.е. удовлетворяет условиям (i)–(iv) п. 1.3. Условия (i) и (ii) выполняются автоматически. Докажем (iii). Возьмем изолированный ординал λ и рассмотрим тетраэдр

(3.13)

в котором верхний внутренний треугольник есть диаграмма (3.7), а левый внутренний треугольник – диаграмма, сопряженная к (1.26). Определив пунктирную стрелку как композицию морфизмов $X_{\omega}^* \vee \longrightarrow X_{\omega}^{\wedge *} \longrightarrow (X_\lambda)^*$, мы получим коммутативную диаграмму (3.13). Пунктирная стрелка, как и другие стороны большого треугольника, будет изоморфизмом, поэтому примыкающий к пунктирной стрелке правый внутренний треугольник есть попросту диаграмма (1.13).

Проверим теперь условие (iv). Для этого возьмем предельный ординал λ и покажем, что имеется естественный изоморфизм

$$(\varprojlim_{\iota < \lambda} X_\iota)^* = (X_\lambda)^* = \varinjlim_{\iota < \lambda} (X_\iota)^*. \quad (3.14)$$

Действительно, если представлять себе X_ω как цепочку топологизаций τ_ω векторного пространства X (направленную в сторону усиления), то топология τ_λ пространства X_λ будет в точности верхней гранью (объединением) топологий τ_ι , $\iota < \lambda$. Поэтому формула (3.6), рассматриваемая как равенство множеств, будет означать просто, что функционал f на X тогда и только тогда непрерывен в топологии τ_λ , когда он непрерывен

в какой-нибудь топологии τ_ι , $\iota < \lambda$. С другой стороны, формула (3.6), рассматриваемая как совпадение топологических пространств, означает, что множество F линейных функционалов на X тогда и только тогда является окрестностью нуля в X , когда в каждом пространстве $(X_\iota)^*$, $\iota < \lambda$, его след $F \cap X_\iota$ является окрестностью нуля. Это тоже верно, потому что топологии в $(X_\lambda)^*$ и $(X_\iota)^*$ задаются полярами одной и той же системы множеств в X : во всех пространствах $(X_\omega)^*$ базисные окрестности нуля – поляры множеств $S \in \mathcal{BS}(X)$.

Итак, справедливо (3.14), и если заметить, что для всякого $\varkappa < \lambda$ это равенство естественно вписывается в диаграмму

$$(3.15)$$

(где $\sigma_\varkappa$ – вложение элемента индуктивной системы в соответствующий индуктивный предел), то это будет означать выполнение условия (iv) для инъективного ряда $(X_\omega)^*$.

Мы убедились, что система $(X_\omega)^*$ является инъективным рядом для пространства X^* . По лемме 1.10 это означает, что между $(X_\omega)^*$ и $(X^*)_\omega$ имеется естественный изоморфизм с коммутативностью диаграммы (3.11).

Нам остается доказать утверждение (с). Это делается индукцией по индексу ω с помощью теоремы 3.10. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 3.13. Пусть X – псевдонасыщенное ЛВП и $\{X^\omega, \sigma\}$ – инъективный ряд для X . Тогда:

- (а) инъективный ряд $\{X^\omega\}$ состоит из псевдонасыщенных пространств;
- (б) если $\{(X^*)_\omega, \pi\}$ – проективный ряд для сопряженного пространства X^* , то существует единственная система изоморфизмов

$$(X^\omega)^* = (X^*)_\omega$$

такая, что для всякого $\varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

$$(3.16)$$

(с) для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ и любого ординала ω коммутативна диаграмма

(3.17)

в которой Y^ω – произвольный инъективный ряд для Y , $(Y^*)_\omega$ – произвольный проективный ряд для Y^* , а φ^ω и $(\varphi^*)_\omega$ – системы морфизмов, определенные в леммах 1.12 и 1.23.

3.4. Двойственность между ∇ и Δ . Из теоремы 3.12 немедленно следует

Теорема 3.14. Пусть X – псевдополное ЛВП. Тогда:

(а) существует единственный изоморфизм $(X^\Delta)^* = (X^*)^\nabla$ такой, что коммутативна диаграмма

(3.18)

(b) для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ коммутативна диаграмма

(3.19)

Аналогично, из теоремы 3.13 следует

Теорема 3.15. Пусть X – псевдонасыщенное ЛВП. Тогда:

(а) существует единственный изоморфизм $(X^\nabla)^* = (X^*)^\Delta$ такой, что коммутативна диаграмма

(3.20)

(b) для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ коммутативна диаграмма

(3.21)

§ 4. Стереотипные пространства

4.1. Определения и примеры. ЛВП X мы называем *стереотипным*, если оно одновременно псевдополно и псевдонасыщено. Термин был введен автором в [8], и доводами в его пользу служили следующие соображения. Во-первых (как станет видно из примера 4.3), класс псевдополных псевдонасыщенных пространств весьма широк (настолько, что включает все реально используемые в анализе локально выпуклые пространства). Во-вторых (как оказывается по результатам пп. 4.3 и 4.6), выйти из этого класса невозможно, если пользоваться стандартными (категорными) правилами конструирования новых пространств. Наконец, в-третьих, описанные в пп. 1.3 и 1.4 операции псевдопополнения и псевдонасыщения позволяют строить для каждого локально выпуклого пространства ближайшие к нему в строго определенном смысле пространства из нашего класса, символизирующие его *стереотип* (или *стереотипы*, поскольку остается пока неясным, коммутируют друг с другом операции псевдопополнения и псевдонасыщения или нет).

Из теорем 2.14 и 2.16 следует

Теорема 4.1 (характеризация стереотипных пространств). *Для ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

- (i) *пространство X стереотипное;*
- (ii) *отображение $i_X: X \rightarrow X^{**}$ является изоморфизмом.*

Таким образом, класс стереотипных пространств выделяется равенством

$$X^{**} = X. \quad (4.1)$$

Впервые пространства с таким условием рефлексивности рассматривались в работе [4] в 1952 г. В ней было доказано, что равенству (4.1) удовлетворяют все банаховы и все рефлексивные в обычном смысле пространства. Затем существенно позже, в 1967 г., Б. С. Брудовский показал, что похожее равенство эквивалентно выполнению неких условий, близких к тем, что мы называем псевдополнотой и псевдонасыщенностью [5]. Параллельно им отмечалось, что равенству (4.1) удовлетворяют квазиполные бочечные пространства. Тот же факт независимо от него был установлен В. С. Уотерхаусом в работе [6] 1968 года. Наконец, независимо от всех, в 1973 г. К. Браунер в [7] отметил утверждение, в точности эквивалентное теореме 4.1.

Заметим, что из теоремы 4.1 (или 2.18) следует

Теорема 4.2. *Если X – стереотипное пространство, то X^* – тоже стереотипное пространство.*

Приведем некоторые примеры (из работ [5]–[7]).

ПРИМЕР 4.3. *Квазиполные бочечные пространства являются стереотипными в силу примера 1.13.*

ПРИМЕР 4.4. *Пространства Фреше и Браунера.* Понятно, что всякое пространство Фреше X , как полное и бочечное, является стереотипным. Его сопряженное пространство $Y = X^*$ также будет стереотипным по теореме 4.2. При этом если $\{U_n\}$ –

счетная локальная база в X , то полярны $K_n = U_n^\circ$ являются компактными в Y , причем образуют *фундаментальную систему компактов*: каждый компакт $T \subseteq Y$ содержится в некотором компакте K_n (отсюда следует, между прочим, что Y не может быть пространством Фреше, если X бесконечномерно). Пространства Y , сопряженные (в смысле определения § 2) к пространствам Фреше X впервые рассматривались К. Браунером в [24], и мы будем называть их *пространствами Браунера*. Характеристические свойства этих пространств полезно собрать в одном предложении.

Предложение 4.5. *Для локально выпуклого пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (i) Y является пространством Браунера;
- (ii) Y полно, является пространством Келли (т.е. всякое множество $M \subseteq Y$, оставляющее замкнутый след $M \cap K$ на любом компакте $K \subseteq Y$, замкнуто в Y) и обладает счетной фундаментальной системой компактов K_n : $\forall T \in \mathcal{K}(Y) \exists n \in \mathbb{N}: T \subseteq K_n$;
- (iii) Y является стереотипным и обладает счетной фундаментальной системой компактов K_n ;
- (iv) Y является стереотипным и обладает счетной исчерпывающей системой компактов K_n : $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = Y$.

ПРИМЕР 4.6. *Пространства Банаха и Смит являются частными случаями пространств Фреше и Браунера. Если X – пространство Банаха, то в силу 4.4 X и $Y = X^*$ являются стереотипными пространствами. При этом шар B в Y имеет полярной так называемый универсальный компакт $K = B^\circ$ в Y , т.е. такой компакт, который поглощает любой другой компакт T в Y . Пространства $Y = X^*$, сопряженные в смысле определения § 2 к пространствам Банаха X , первой рассматривала М. Ф. Смит в [4], поэтому мы называем их *пространствами Смита*. Их характеристические свойства собраны в следующем предложении.*

Предложение 4.7. *Для локально выпуклого пространства Y следующие условия эквивалентны:*

- (i) Y является пространством Смита;
- (ii) Y полно, является пространством Келли и обладает универсальным компактом K : $\forall T \in \mathcal{K}(Y) \exists \lambda \in \mathbb{C}: T \subseteq \lambda K$;
- (iii) Y является стереотипным пространством и обладает универсальным компактом;
- (iv) Y является стереотипным пространством и обладает компактной бочкой.

Пусть $\mathfrak{Ste}$ обозначает класс стереотипных пространств, $\mathfrak{Fre}$ – класс пространств Фреше, $\mathfrak{Bra}$ – класс пространств Браунера, $\mathfrak{Ban}$ – класс пространств Банаха, $\mathfrak{Smi}$ – класс пространств Смита.

Связи между этими классами иллюстрируются следующей диаграммой, в которой горизонтальные двойные стрелки означают переход к сопряженному пространству, а

вертикальные связи — вложения:

Поскольку бесконечномерное пространство Смит не может быть бочечным, класс стереотипных пространств не ограничивается квазиполными бочечными. Более того, как оказывается, он содержит пространства, не являющиеся пространствами Макки.

ПРИМЕР 4.8 (*стереотипное пространство, не являющееся пространством Макки*). Таким пространством будет сопряженное $Y = X^*$ к произвольному рефлексивному (в обычном смысле) банахову пространству X . Действительно, в X замкнутый единичный шар U , как известно, будет X' -слабо компактным, но не компактным в нормированной топологии множеством. Для сопряженного пространства $Y = X^*$ это означает, что в нем имеется замкнутое выпуклое уравновешенное множество $K = U^\circ$, не являющееся окрестностью нуля, поляра которого $K^\circ = U$ является Y -слабым компактом в Y' .

Приведем, наконец, примеры пространств, не являющихся стереотипными по разным причинам.

ПРИМЕР 4.9 (*псевдополное, но не псевдонасыщенное пространство*). Пусть X — произвольное бесконечномерное банахово пространство, и пусть $Y = X'_\sigma$ — его сопряженное пространство с X -слабой топологией. По теореме Банаха–Штейнгауза пространство Y псевдополно. Покажем, что оно не стереотипное. Действительно, в $Y = X'_\sigma$ вполне ограниченные множества — то же самое, что ограниченные, и то же самое, что подмножества в полярах U° окрестностей нуля U из X . Поэтому $Y^* = X$, а $Y^{**} = X^* \neq X'_\sigma = Y$.

ПРИМЕР 4.10 (*псевдонасыщенное, но не псевдополное пространство*). Таким пространством в силу примера 1.14 будет произвольное неполное метризуемое пространство.

4.2. Двойственность в классе стереотипных пространств. В силу теоремы 4.1 каждое стереотипное пространство X однозначно восстанавливается по своему сопряженному пространству $Y = X^*$. Поэтому различным свойствам X должны соответствовать их двойственные аналоги в Y и наоборот. Если собрать в одном предложении наиболее очевидные закономерности такого рода, возникает следующая любопытная картина.

Теорема 4.11. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная система стереотипных пространств, т.е. $X^* = Y$ и $Y^* = X$. Тогда:

(а) X нормируемо $\iff X$ — пространство Банаха $\iff Y$ — пространство Смит;

- (b) X метризуемо $\iff X$ – пространство Фреше $\iff Y$ – пространство Браунера;
- (c) X бочечно $\iff Y$ обладает свойством Гейне–Бореля;
- (d) X квазибочечно $\iff$ в Y любое подмножество T , поглощаемое любой бочкой, вполне ограничено;
- (e) X – пространство Макки $\iff$ в Y всякое Y' -слабо компактное множество компактно;
- (f) X – монтелевское пространство $\iff Y$ – монтелевское пространство;
- (g) X – пространство со слабой топологией $\iff$ в Y любой компакт T конечномерен;
- (h) X сепарабельно (т.е. обладает счетным всюду плотным множеством) $\iff$ в Y существует последовательность замкнутых подпространств L_n конечной коразмерности ($\forall n \dim(Y/L_n) < \infty$) с тривиальным пересечением: $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = \{0\}$.
- (i) X обладает (классическим) свойством аппроксимации $\iff Y$ обладает (классическим) свойством аппроксимации;
- (j) X полно $\iff Y$ копно $\iff Y$ насыщено;
- (k) X – пространство Птака (совершенно полное в смысле [15]) $\iff$ в Y всякое подпространство L , оставляющее замкнутый след $L \cap K$ на каждом компакте $K \subseteq Y$, автоматически замкнуто;
- (l) X – гиперполное пространство (в смысле [15]) $\iff$ в Y всякое выпуклое уравновешенное множество B , оставляющее замкнутый след $B \cap K$ на каждом компакте $K \subseteq Y$, автоматически замкнуто.

Для доказательства достаточно заметить, что операция перехода к поляре $B \mapsto B^\circ$ устанавливает биекцию между системами замкнутых выпуклых уравновешенных множеств в X и Y , причем окрестность нуля переходит в компакт, а бочка – в ограниченное множество.

4.3. Лемма об аннуляторе. Следующая лемма будет играть важную роль в дальнейших построениях.

Лемма 4.12. Пусть X – стереотипное пространство, E – его замкнутое локально выпуклое подпространство, и пусть

$$E^\perp = \{f \in X^*: f|_E = 0\} \quad (4.2)$$

– аннулятор пространства E в сопряженном пространстве X^* . Тогда:

- (a) имеется естественный изоморфизм локально выпуклых пространств

$$E^* \cong X^*/E^\perp, \quad (4.3)$$

порождающий изоморфизмы стереотипных пространств

$$(E^\Delta)^* \cong (X^*/E^\perp)^\nabla, \quad E^\Delta \cong [(X^*/E^\perp)^\nabla]^*; \quad (4.4)$$

- (b) имеется естественный изоморфизм локально выпуклых пространств

$$(E^\perp)^* \cong X/E, \quad (4.5)$$

порождающий изоморфизмы стереотипных пространств

$$((E^\perp)^\Delta)^* \cong (X/E)^\nabla, \quad (E^\perp)^\Delta \cong [(X/E)^\nabla]^*. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому функционалу $g \in E^*$ поставим в соответствие множество $\tilde{g} \subseteq X^*$ всевозможных его линейных непрерывных продолжений на X :

$$\tilde{g} = \{f \in X^* : f|_E = g\}.$$

Ясно, что $\tilde{g}$ является классом эквивалентности относительно $E^\perp$, т.е. $\tilde{g} \in X^*/E^\perp$, причем отображение $g \in E^* \mapsto \tilde{g} \in X^*/E^\perp$ биективно. Докажем его непрерывность в обе стороны.

1) Пусть $V \in \mathcal{B}\mathcal{U}(X^*/E^\perp)$; тогда $V = \pi(U)$, где $\pi: X^* \rightarrow X^*/E^\perp$ – фактор-отображение, а $U \in \mathcal{B}\mathcal{U}(X^*)$, $U + E^\perp = U$. Поскольку X стереотипное, то $U = K^\circ_{X^*}$, где $K \in \mathcal{B}\mathcal{K}(X)$. Условие $K^\circ + E^\perp = K^\circ$ означает, что $K \subseteq E$. Поэтому окрестность нуля $W = K^\circ_{E^*} \in \mathcal{B}\mathcal{U}(E^*)$ будет прообразом V при отображении $g \in E^* \mapsto \tilde{g} \in X^*/E^\perp$.

2) Наоборот, если имеется базисная окрестность нуля $W = K^\circ_{E^*} \in \mathcal{B}\mathcal{U}(E^*)$, $K \in \mathcal{B}\mathcal{K}(E)$, то можно рассмотреть $U = K^\circ_{X^*} \in \mathcal{B}\mathcal{U}(X^*)$ и положить $V = \pi(U)$, и мы получим $\widetilde{W} = V$.

Мы доказали формулу (4.3). Из нее следует

$$(E^*)^\nabla \cong (X^*/E^\perp)^\nabla.$$

Теперь, воспользовавшись теоремой 3.14, мы получим

$$(E^\Delta)^* \cong (E^*)^\nabla \cong (X^*/E^\perp)^\nabla,$$

и уже отсюда

$$E^\Delta \cong (E^\Delta)^{**} \cong [(X^*/E^\perp)^\nabla]^*.$$

Таким образом, доказано (а). Переобозначив объекты, мы получим условие (b). Лемма доказана.

4.4. Непосредственное подпространство и непосредственное факторпространство. Класс $\mathbf{Ste}$ стереотипных пространств образует категорию, морфизмами в которой служат линейные непрерывные отображения $\varphi: X \rightarrow Y$. Легко проверить, что в этой категории, как и в категории $\mathcal{LCS}$, *мономорфизмами* будут инъективные отображения (т.е. такие, что $\varphi^{-1}(0) = \{x \in X : \varphi(x) = 0\} = \{0\}$), а *эпиморфизмами* – отображения с плотным образом (т.е. такие, что $\overline{\varphi(X)} = \{\varphi(x); x \in X\} = Y$). Напомним, что морфизм называется *биморфизмом*, если он одновременно мономорфизм и эпиморфизм.

Стереотипное пространство Y мы называем *подпространством стереотипного пространства X* , если задан (произвольный) мономорфизм стереотипных пространств $\mu: Y \rightarrow X$, называемый *представляющим мономорфизмом* подпространства Y в пространстве X .

Если Y и $\tilde{Y}$ – два подпространства в стереотипном пространстве X с представляющими мономорфизмами μ и $\tilde{\mu}$, причем имеется биморфизм $\beta: Y \rightarrow \tilde{Y}$, замыкающий диаграмму

(4.7)

то подпространство $\tilde{Y}$ называется *посредником* подпространства Y в пространстве X .

Подпространство Y стереотипного пространства X мы называем *непосредственным подпространством* в X , если у него нет посредников, т.е. если для любого его посредника $\tilde{Y}$ в X соответствующий биморфизм β в диаграмме (4.7) автоматически является изоморфизмом.

ПРИМЕР 4.13. Пусть X – стереотипное пространство и E – его замкнутое локально выпуклое подпространство (т.е. подпространство в алгебраическом смысле, являющееся одновременно замкнутым подмножеством топологического пространства X). Тогда ЛВП E (с индуцированной из X топологией) будет псевдополным, поэтому его псевдонасыщение E^Δ будет также псевдополным в силу таблицы инвариантов п. 1.5. Значит, E^Δ является стереотипным пространством. Ясно, что оно будет непосредственным подпространством стереотипного пространства X с представляющим мономорфизмом $\sigma^\Delta: E^\Delta \rightarrow X$, где $\sigma: E \subseteq X$ – естественное вложение (локально выпуклых пространств).

Следующая теорема утверждает, что эта конструкция описывает все непосредственные подпространства.

Теорема 4.14 (о строении непосредственных подпространств). *Стереотипное пространство Y тогда и только тогда будет непосредственным подпространством стереотипного пространства X с представляющим мономорфизмом $\mu: Y \rightarrow X$, когда найдутся:*

- замкнутое подпространство E локально выпуклого пространства X ,
 - изоморфизм стереотипных пространств $\beta: Y \rightarrow E^\Delta$,
- такие, что коммутативна диаграмма

(4.8)

в которой σ^Δ – псевдонасыщение естественного вложения $\sigma: E \subseteq X$.

Для доказательства в качестве E нужно взять $\overline{\mu(Y)}$.

Стереотипное пространство Y мы называем *факторпространством стереотипного пространства X* , если задан (произвольный) эпиморфизм стереотипных пространств $\varepsilon: X \rightarrow Y$, называемый *представляющим эпиморфизмом* факторпространства Y пространства X .

Если Y и $\tilde{Y}$ – два факторпространства стереотипного пространства X с представляющими эпиморфизмами ε и $\tilde{\varepsilon}$, причем имеется биморфизм $\beta: \tilde{Y} \rightarrow Y$, замыкающий диаграмму

(4.9)

то факторпространство $\tilde{Y}$ называется *посредником* факторпространства Y пространства X .

Факторпространство Y стереотипного пространства X мы называем *непосредственным факторпространством* пространства X , если у него нет посредников, т.е. если для любого его посредника $\tilde{Y}$ соответствующий биморфизм β в диаграмме (4.9) автоматически является изоморфизмом.

ПРИМЕР 4.15. Пусть X – стереотипное пространство и E – его замкнутое локально выпуклое подпространство (т.е. подпространство в алгебраическом смысле, являющееся одновременно замкнутым подмножеством топологического пространства X). Тогда факторпространство локально выпуклых пространств X/E будет в силу таблицы инвариантов п. 1.5 псевдонасыщенным локально выпуклым пространством. Значит, опять же в силу таблицы инвариантов, его псевдополное дополнение $(X/E)^\nabla$ будет псевдонасыщенным (и псевдополным), т.е. стереотипным пространством. Покажем, что оно будет непосредственным факторпространством пространства X с представляющим эпиморфизмом $\pi^\nabla: X \rightarrow (X/E)^\nabla$, где $\pi: X \rightarrow X/E$ – факторотображение локально выпуклых пространств. Действительно, аннулятор $E^\perp$ – замкнутое локально выпуклое подпространство в X^* . По лемме 4.12, (b) факторпространство $(X/E)^\nabla$ стереотипного пространства X имеет сопряженным пространством $[(X/E)^\nabla]^*$ подпространство $(E^\perp)^\Delta$ стереотипного пространства X^* . Поскольку в силу примера 4.13 $(E^\perp)^\Delta$ – непосредственное подпространство в X^* , по принципу двойственности получаем, что $(X/E)^\nabla$ должно быть непосредственным факторпространством для X .

Применяя теперь принцип двойственности к теореме 4.14, мы получим утверждение об универсальности конструкции примера 4.15.

Теорема 4.16 (о строении непосредственных факторпространств). *Стереотипное пространство Y тогда и только тогда будет непосредственным факторпространством стереотипного пространства X с представляющим эпиморфизмом $\varepsilon: X \rightarrow Y$, когда найдутся:*

- замкнутое подпространство E локально выпуклого пространства X ,
 - изоморфизм стереотипных пространств $\beta: (X/E)^\nabla \rightarrow Y$,
- такие, что коммутативна диаграмма

(4.10)

в которой π^∇ – псевдополное дополнение факторотображения $\pi: X \rightarrow X/E$.

4.5. Предабелевость категории $\mathfrak{Ste}$. Поскольку любые два параллельных морфизма $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$ в категории стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$ можно складывать и вычитать, понятно, что $\mathfrak{Ste}$ является аддитивной категорией. Не так очевидно, что она предабелева.

Теорема 4.17. *Всякий морфизм стереотипных пространств $\varphi: X \rightarrow Y$ обладает:*

- *ядром* $\ker \varphi: \text{Ker } \varphi \rightarrow X$,
- *коядром* $\text{coker } \varphi: Y \rightarrow \text{Coker } \varphi$,
- *образом* $\text{im } \varphi: \text{Im } \varphi \rightarrow Y$,
- *кообразом* $\text{coim } \varphi: X \rightarrow \text{Coim } \varphi$

в категории $\mathbf{Ste}$ стереотипных пространств. При этом операция $\varphi \mapsto \varphi^$ перехода к сопряженному отображению устанавливает следующие связи между этими объектами:*

$$\begin{aligned} (\ker \varphi)^* &= \text{coker } \varphi^*, & (\text{coker } \varphi)^* &= \ker \varphi^*, \\ (\text{im } \varphi)^* &= \text{coim } \varphi^*, & (\text{coim } \varphi)^* &= \text{im } \varphi^*, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \varphi)^{\perp \Delta} &= \text{Im } \varphi^*, & (\text{Im } \varphi)^{\perp \Delta} &= \text{Ker } \varphi^*, \\ \text{Ker } \varphi &= (\text{Im } \varphi^*)^{\perp \Delta}, & \text{Im } \varphi &= (\text{Ker } \varphi^*)^{\perp \Delta}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Доказательство. Прообраз нуля $\varphi^{-1}(0)$ будет, очевидно, замкнутым локально выпуклым подпространством в X . Поэтому его псевдонасыщение $[\varphi^{-1}(0)]^\Delta$ будет в силу примера 4.13 (непосредственным) подпространством стереотипного пространства X . Положив $\text{Ker } \varphi = [\varphi^{-1}(0)]^\Delta$, мы получим, что всякий морфизм $\psi: Z \rightarrow X$ со свойством $\varphi \circ \psi = 0$ автоматически поднимается до морфизма локально выпуклых пространств $\tilde{\psi}: Z \rightarrow \varphi^{-1}(0)$ и, поскольку Z псевдонасыщено, до морфизма $\tilde{\psi}: Z \rightarrow [\varphi^{-1}(0)]^\Delta = \text{Ker } \varphi$ (здесь применяется диаграмма (1.21)). Таким образом, $\text{Ker } \varphi$ действительно является ядром морфизма φ в категории $\mathbf{Ste}$.

Положив $\text{Coker } \varphi = [Y/\overline{\varphi(X)}]^\nabla$, получим, что из леммы 4.12 следует равенство $\text{Coker } \varphi = [\text{Ker } \varphi^*]^*$, которое в силу принципа двойственности должно означать, что $\text{Coker } \varphi$ действительно является коядром для φ . Существование ядра и коядра автоматически влечет за собой существование образа и кообраза, которые в данном случае принимают вид $\text{Im } \varphi = [\overline{\varphi(X)}]^\Delta$ и $\text{Coim } \varphi = [X/\varphi^{-1}(0)]^\nabla$.

Формулы (4.11) следуют из принципа двойственности и влекут за собой (4.12). Например, с помощью (4.6) получаем

$$\text{Ker } \varphi = (\text{Coker } \varphi^*)^* = ((X^*/\text{Im } \varphi^*)^\nabla)^* \stackrel{(4.6)}{=} (\text{Im } \varphi^*)^{\perp \Delta}.$$

Теорема доказана.

Из предабелевости категории $\mathbf{Ste}$ следует, что всякий морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ в $\mathbf{Ste}$ раскладывается в композицию

$$(4.13)$$

в которой морфизм $\text{bim } \varphi$ называется *биморфизмом, ассоциированным с φ* .

4.6. Иммерсии и субмерсии. Условимся говорить, что образ морфизма $\mu: X \rightarrow Y$ шире образа морфизма $\varphi: Z \rightarrow Y$:

$$\text{Im } \varphi \leq \text{Im } \mu,$$

если для всякого морфизма $\lambda: Y \rightarrow L$ из равенства $\lambda \circ \mu = 0$ следует равенство $\lambda \circ \varphi = 0$.

Морфизм стереотипных пространств $\mu: X \rightarrow Y$ называется *иммерсией*, если для всякого морфизма $\varphi: Z \rightarrow Y$ такого, что $\text{Im } \varphi \leq \text{Im } \mu$, найдется единственный морфизм $\psi: Z \rightarrow X$, замыкающий диаграмму

(4.14)

Теорема 4.18. Для морфизма стереотипных пространств $\mu: X \rightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:

- (i) μ является иммерсией;
- (ii) μ совпадает со своим образом: $\mu = \text{im } \mu$ (т.е. $\text{coim } \mu$ и $\text{bim } \mu$ являются изоморфизмами);
- (iii) X является непосредственным подпространством в Y с представляющим мономорфизмом μ .

Рассмотрим двойственную конструкцию. Условимся говорить, что ядро морфизма $\varepsilon: X \rightarrow Y$ уже ядра морфизма $\varphi: Z \rightarrow Y$, т.е. $\text{Ker } \varepsilon \leq \text{Ker } \varphi$, если для всякого морфизма $\lambda: L \rightarrow X$ из равенства $\varepsilon \circ \lambda = 0$ следует равенство $\varphi \circ \lambda = 0$.

Морфизм стереотипных пространств $\varepsilon: X \rightarrow Y$ называется *субмерсией*, если для всякого морфизма $\varphi: X \rightarrow Z$ такого, что

$$\text{Ker } \varepsilon \leq \text{Ker } \varphi,$$

найдется единственный морфизм $\psi: Y \rightarrow Z$, замыкающий диаграмму

(4.15)

Теорема 4.19. Для морфизма стереотипных пространств $\varepsilon: X \rightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:

- (i) ε является субмерсией;
- (ii) ε совпадает со своим кообразом: $\varepsilon = \text{coim } \varepsilon$ (т.е. $\text{im } \varepsilon$ и $\text{bim } \varepsilon$ являются изоморфизмами);
- (iii) Y является непосредственным факторпространством для X с представляющим эпиморфизмом ε .

4.7. Полнота категории $\mathfrak{Stc}$. Из таблицы инвариантов п. 1.5 следует

Теорема 4.20. *Всякое семейство $\{X_i; i \in I\}$ стереотипных пространств обладает прямой суммой и прямым произведением в категории стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$.*

(Эти объекты будут совпадать с обычной локально выпуклой прямой суммой и прямым произведением.)

Теорема 4.21. *Всякая индуктивная (проективная) система $\{X_i; i \in I, i \rightarrow \infty\}$ стереотипных пространств обладает индуктивным (проективным) пределом в категории стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$.*

С обычным локально выпуклым индуктивным и проективным пределом эти объекты связаны формулами

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim X_i = (\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim X_i)^\nabla, \quad \mathfrak{Ste}\text{-}\varprojlim X_i = (\mathfrak{LCS}\text{-}\varprojlim X_i)^\Delta. \quad (4.16)$$

Список литературы

1. *Pontrjagin L. S.* The theory of topological commutative groups // *Ann. Math.* 1934. V. 35. № 2. P. 361–388.
2. *Van Kampen E.* Locally bicomact Abelian groups and their character groups // *Ann. Math.* 1935. V. 36. № 2. P. 448–456.
3. *Venkataraman R.* Characterization of Pontryagin duality // *Math. Z.* 1976. V. 149. № 2. P. 109–119.
4. *Smith M. F.* The Pontrjagin duality theorem in linear spaces // *Annals of Mathematics.* 1952. V. 56. № 2. P. 248–253.
5. *Брудовский Б. С.* О k - и s -рефлексивности // *Литовский матем. сб.* 1967. Т. 7. № 1. С. 17–21.
6. *Waterhouse W. C.* Dual groups of vector spaces // *Pacific J. Math.* 1968. V. 26. № 1. P. 193–196.
7. *Brauner K.* Duals of Frechet spaces and a generalization of the Banach–Dieudonne theorem // *Duke Math. Jour.* 1973. V. 40. № 4. P. 845–855.
8. *Акбаров С. С.* Двойственность Понтрягина в теории топологических векторных пространств // *Матем. заметки.* 1995. Т. 57. № 3. С. 463–466.
9. *Акбаров С. С.* Двойственность Понтрягина в теории топологических модулей. // *Функц. анализ и его прилож.* 1995. Т. 29. № 4. С. 68–72.
10. *Акбаров С. С.* Свойство стереотипной аппроксимации и проблема Гротендика однозначности следа // *Функц. анализ и его прилож.* 1999. Т. 33. № 2. С. 68–73.
11. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
12. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
13. *Келли Дж. Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981.
14. *Смолянов О. Г.* Пространство $\mathcal{D}(X)$ не является наследственно полным // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1971. Т. 35. № 4. С. 686–696.
15. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

Поступило в редакцию

12.V.1998

10.II.1999