Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 4, 109–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:23:29

УДК 517.958

В. С. Климов

Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью

Приводятся условия существования стационарных и ограниченных решений дифференциальных включений с однородной главной частью. Устанавливаются формулы для вычисления индекса нулевой особой точки однородного многозначного векторного поля.

Библиография: 25 наименований.

В работе приводятся условия существования стационарных и ограниченных решений дифференциальных включений параболического типа с однородной главной частью. Устанавливаются формулы для вычисления индекса нулевой особой точки однородного многозначного векторного поля, порождаемого оператором монотонного типа [1]–[3]. Основу статьи составляют геометрические методы нелинейного анализа [4]–[7]. Близкие вопросы изучаются в [8], [9].

Используются обозначения: $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ – совокупность ограниченных подмножеств метрического пространства $\mathfrak{X}$; $H_l(\mathfrak{X})$, $l = 0, 1, \dots$, – группы целочисленных гомотопий с компактными носителями пространства $\mathfrak{X}$ (см. [10, гл. 9], [11, с. 316]); $b_l(\mathfrak{X})$ – ранг группы $H_l(\mathfrak{X})$; $\chi(\mathfrak{X}) = b_0(\mathfrak{X}) - b_1(\mathfrak{X}) + \dots + (-1)^l b_l(\mathfrak{X}) + \dots$ – эйлерова характеристика пространства $\mathfrak{X}$, имеющая смысл лишь в случае $b_l(\mathfrak{X}) < \infty \forall l$ и $b_l(\mathfrak{X}) = 0$ при $l \geq l_0$; $\overline{\mathcal{M}}^{\circ}(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$ – замыкание (внутренность, граница) множества $\mathcal{M} \subset \mathfrak{X}$; $d_{\mathfrak{X}}(x, \mathcal{M}) = \inf\{\rho(x, y), y \in \mathcal{M}\}$ – расстояние в метрике ρ пространства $\mathfrak{X}$ от элемента x до множества $\mathcal{M}$; $\theta_{\mathfrak{X}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \sup\{d_{\mathfrak{X}}(x, \mathcal{M}_2), x \in \mathcal{M}_1\}$ – уклонение множества $\mathcal{M}_1 \subset \mathfrak{X}$ от множества $\mathcal{M}_2 \subset \mathfrak{X}$; $\Gamma(X)$ – совокупность конечномерных подпространств банахова пространства X ; $\|x; X\|$ – норма элемента x в X ; X^* – сопряженное к X пространство; (x, x^*) – значение функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$; $\sigma(X, X^*)$ и $\sigma(X^*, X)$ – слабые топологии на X и X^* , порождаемые формой $(\cdot, \cdot)$; $\text{Cv } X$ – совокупность выпуклых замкнутых подмножеств пространства X ; $s(x^*, \mathcal{M}) = \sup\{(x, x^*), x \in \mathcal{M}\}$ – опорная функция множества $\mathcal{M} \subset X$; $L^p(T, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $C(T, X)$ – банаховы пространства измеримых по Лебегу–Бохнеру (непрерывных) на отрезке $T \subset \mathbb{R}$ функций со значениями в пространстве X ; как обычно, совпадающие п.в. (почти всюду) функции отождествляются, нормы в $L^p(T, X)$ и $C(T, X)$ вводятся стандартным образом (см., например, [12, с. 148, 154]); $L_w^p(T, X)$, $C_w(T, X)$ – топологические пространства слабо измеримых (слабо непрерывных) на отрезке $T \subset \mathbb{R}$ функций со значениями в X ; определяющая в $L_w^p(T, X)$ ($C_w(T, X)$) топологию система полунорм задается равенством

$$\|v\|_l = \|l(v); L^p(T)\| \quad (\|v\|_l = \|l(v); C(T)\|),$$

где $l \in X^*$, $L^p(T) = L^p(T, \mathbb{R})$, $C(T) = C(T, \mathbb{R})$; все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; $X_1 \times X_2$ – прямое произведение B -пространств X_1, X_2 ; если X_1, X_2 вложены в топологическое простран-

ство X_0 , то с X_1, X_2 связаны B -пространства $X_1 \cap X_2$ и $X_1 + X_2$ [12, с. 22, 23]. Через $\Lambda(\mathcal{M}, Y)$ обозначается совокупность отображений множества $\mathcal{M} \subset X$ в банахово пространство Y , удовлетворяющих локальному условию Липшица, т.е. $F \in \Lambda(\mathcal{M}, Y)$, если для каждой точки x из $\mathcal{M}$ найдутся такие ее окрестность O и константа L , что

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1 \in O, \quad x_2 \in O.$$

Класс $\Lambda(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ действительных на $\mathcal{M}$ функций, удовлетворяющих локальному условию Липшица, обозначается символом $\Lambda(\mathcal{M})$.

Мнозначное отображение F множества $\mathcal{M}_1$ во множество $\mathcal{M}_2$ – это оператор, ставящий в соответствие элементу x из $\mathcal{M}_1$ непустое множество $F(x) \subset \mathcal{M}_2$; если $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$, то $F(\mathcal{M}) = \cup F(x)$ ($x \in \mathcal{M}$) – область значений отображения F на множестве $\mathcal{M}$. Отображение $F: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ ($\mathcal{M}_i$ – подмножество метрического пространства $\mathfrak{R}_i$, $i = 1, 2$) называют *ограниченным*, если $F(\mathcal{M}) \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}_2)$ для каждого $\mathcal{M}$ из $\mathcal{B}(\mathfrak{R}_1)$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$. Через I обозначается оператор тождественного преобразования.

1. Всюду далее V – сепарабельное рефлексивное B -пространство, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в пространствах V, V^* соответственно. Обозначим через $S(V)$ совокупность ограниченных многозначных операторов $\mathcal{F}: V \rightarrow \text{Cv } V^*$, усиленно замкнутых в следующем смысле: для произвольных последовательностей $v_n \in V, v_n^* \in \mathcal{F}(v_n)$, обладающих свойствами

$$v_n \rightarrow v \text{ в } \sigma(V, V^*), \quad v_n^* \rightarrow v^* \text{ в } \sigma(V^*, V), \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (v_n, v_n^*) \leq (v, v^*), \quad (1)$$

имеют место соотношения: $v_n \rightarrow v$ в метрике V , $v^* \in \mathcal{F}(v)$.

Близкие классы однозначных операторов рассматривались в [1]–[3], [6], [12]. Примеры многозначных операторов класса $S(V)$ можно найти в [9], [13], [14]. Оператор $\mathcal{F}$ класса $S(V)$ хеминепрерывен на V в следующем смысле: для любого w из V функция $s(w, \mathcal{F}(x)) = \max\{(w, x^*), x^* \in \mathcal{F}(x)\}$ полунепрерывна сверху на V ; в частности, график $\text{Gr } \mathcal{F} = \{(x, x^*) \in V \times V^*\}$ оператора $\mathcal{F}$ замкнут в $V \times V^*$, где V наделено сильной, а V^* слабой топологиями [15, с. 128].

Элемент $v \in V$ назовем *особой точкой оператора* $\mathcal{F}$ класса $S(V)$, если $0 \in \mathcal{F}(v)$. Оператор $\mathcal{F}$ назовем *невыврожденным на множестве* $\mathcal{M} \subset V$, если $\mathcal{M}$ не содержит особых точек. Множество $\mathcal{N}$, все точки которого являются особыми для $\mathcal{F}$, назовем *особым*. Пересечение множества особых точек поля $\mathcal{F}$ с шаром $\mathfrak{B}_V(x_0, R) = \{x \in V, \|x - x_0\| \leq R\}$ компактно [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [9]. Пусть оператор $\mathcal{F}$ класса $S(V)$ невыврожден на замкнутом множестве $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}_V(0, r_0)$. Тогда существуют E из $\Gamma(V)$, отображение w класса $\Lambda(\mathcal{M}, E)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами

$$\|w(x)\| \leq r_0, \quad s(w(x) - x, \mathcal{F}(x)) < -\delta, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (2)$$

Пусть Ω – ограниченное открытое подмножество V с границей $\partial\Omega$. Если оператор $\mathcal{F}$ класса $S(V)$ невыврожден на $\partial\Omega$, то согласно предложению 1 существуют пространство E класса $\Gamma(V)$ и векторное поле w класса $\Lambda(\partial\Omega, E)$ такие, что

$$(x - w(x), x^*) > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad x^* \in \mathcal{F}(x). \quad (3)$$

В частности, поле $I - w$ невырождено на $\partial\Omega$ и определено вращение $\gamma(I - w, \partial\Omega)$ на $\partial\Omega$ [4], [5]. Это вращение не зависит от произвола в способе выбора пространства E и поля w класса $\Lambda(\partial\Omega, E)$, удовлетворяющих условию острого угла (3). Число $\gamma(I - w, \partial\Omega)$ назовем *вращением поля $\mathcal{F}$ на $\partial\Omega$* и обозначим символом $\gamma(\mathcal{F}, \Omega)$.

Последовательность E_n , $n = 1, 2, \dots$, класса $\Gamma(V)$ назовем *исчерпывающей пространством V* , если $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, и объединение всех пространств E_n всюду плотно в пространстве V . Отметим, что в качестве пространства E , фигурирующего в (2), (3), можно взять пространство E_n при больших n [9]. Несколько иные, но приводящие к тем же результатам, способы определения $\gamma(\mathcal{F}, \Omega)$ содержатся в [2], [3], [6], [14]. Вращение гомотопически инвариантно и аддитивно. Обсуждение этих и других свойств вращения можно найти в [2], [6], [9], [14]; здесь же приведем формулировки используемых далее результатов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в пространстве V , оператор $\mathcal{F}$ класса $S(V)$ невырожден на $\partial\Omega$. Тогда:

- 1) если $(v - v_0, v^*) \geq 0$ ($v \in \partial\Omega$, $v^* \in \mathcal{F}(v)$) для некоторого v_0 из Ω , то $\gamma(\mathcal{F}, \Omega) = 1$ (свойство нормировки);
- 2) если область Ω симметрична относительно 0, а поле $\mathcal{F}$ нечетно на $\partial\Omega$ ($\mathcal{F}(-v) = -\mathcal{F}(v)$, $v \in \partial\Omega$), то $\gamma(\mathcal{F}, \Omega)$ – нечетное число (теорема об антиподах);
- 3) если $\gamma(\mathcal{F}, \Omega) \neq 0$, то включение $0 \in \mathcal{F}(v)$ имеет принадлежащее Ω решение (принцип ненулевого вращения);
- 4) если $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in S(V)$ и $\theta_{V^*}(\mathcal{F}_1(v), \mathcal{F}_0(v)) < \theta_{V^*}(0, \mathcal{F}_0(v))$, $v \in \partial\Omega$, то $\gamma(\mathcal{F}_1, \Omega) = \gamma(\mathcal{F}_0, \Omega)$ (теорема Руше).

Если $\mathcal{N}$ – ограниченное изолированное особое множество поля $\mathcal{F}$ класса $S(V)$, то для ограниченных окрестностей U множества $\mathcal{N}$ таких, что поле $\mathcal{F}$ невырождено на $U \setminus \mathcal{N}$, вращение $\gamma(\mathcal{F}, U)$ одинаково; оно называется *индексом особого множества $\mathcal{N}$ поля $\mathcal{F}$* и обозначается символом $\text{ind}(\mathcal{N}, \mathcal{F})$. Если множество особых точек поля $\mathcal{F}$ ограничено, то вращение $\gamma(\mathcal{F}, \overset{\circ}{\mathfrak{B}}_V(0, R))$ на сферах $\partial\mathfrak{B}_V(0, R)$ достаточно больших радиусов R одинаково; оно обозначается символом $\text{ind}(\infty, \mathcal{F})$ и называется *индексом на ∞ поля $\mathcal{F}$* .

Вычисление индексов поля $\mathcal{F}$ в ряде случаев можно свести к аналогичной задаче для близкого к $\mathcal{F}$ однородного поля. Приведем некоторые определения. Оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow \text{Cv } V^*$ называется *m -однородным* ($m > 0$), если $\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda^m \mathcal{A}(v)$ для любых $\lambda > 0$, $v \in V$. Однородный оператор $\mathcal{A}$ регулярен на ∞ , если включение $0 \in \mathcal{A}(v)$ имеет только нулевое решение. Регулярность m -однородного оператора $\mathcal{A}$ класса $S(V)$ влечет оценки

$$k_1 \|v\|^m \leq \theta_{V^*}(0, \mathcal{A}(v)), \quad \theta_{V^*}(\mathcal{A}(v), 0) \leq k_2 \|v\|^m, \quad (4)$$

в которых k_1, k_2 – положительные константы.

Оператор $\mathcal{F}: V \rightarrow \text{Cv } V^*$ называют *асимптотически m -однородным*, если найдется такой m -однородный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow \text{Cv } V^*$, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^m} \sup_{\|v\| \leq R} \theta_{V^*}(\mathcal{F}(v), \mathcal{A}(v)) = 0; \quad (5)$$

оператор $\mathcal{A}$ называют *главной частью оператора* $\mathcal{F}$. Из (4), (5) вытекают неравенства

$$c_1 \|v\|^m - c_0 \leq \theta_{V^*}(0, \mathcal{F}(v)), \quad \theta_{V^*}(\mathcal{F}(v), 0) \leq c_2 \|v\|^m + c_0 \quad (6)$$

с некоторыми положительными константами c_i . Если $\mathcal{A}$ – регулярный m -однородный оператор класса $S(V)$, то 0 – единственная особая точка $\mathcal{A}$; в частности, $\text{ind}(0, \mathcal{A}) = \text{ind}(\infty, \mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнены условия:*

1) *асимптотически m -однородный оператор $\mathcal{F}: V \rightarrow \text{Cv } V^*$ и его главная часть $\mathcal{A}$ принадлежат классу $S(V)$;*

2) *оператор $\mathcal{A}$ регулярен на ∞ и $\text{ind}(0, \mathcal{A}) \neq 0$.*

Тогда оператор $\mathcal{F}$ есть сюръекция V на V^ , т.е. включение $v^* \in \mathcal{F}(v)$ разрешимо при любом v^* из V^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценок (5), (6) и теоремы Руше следует, что на сферах $\partial \mathfrak{B}_V(0, R)$ больших радиусов R векторные поля $\mathcal{F}(v) - v^*$ и $\mathcal{A}(v)$ имеют одинаковое вращение, поэтому $\text{ind}(\infty, \mathcal{F}(\cdot) - v^*) = \text{ind}(\infty, \mathcal{A}) = \text{ind}(0, \mathcal{A}) \neq 0$. Теперь разрешимость включения $v^* \in \mathcal{F}(v)$ вытекает из принципа ненулевого вращения. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть выполнено условие 1) теоремы 1 и $\mathcal{A}$ – нечетный регулярный оператор. Тогда $\mathcal{F}(V) = V^*$.*

Для однозначных операторов теорема 1 хорошо известна; достаточно полные ссылки можно найти в обзоре [16]. В условиях следствия $\text{ind}(0, \mathcal{A})$ – нечетное число, это вытекает из теоремы об антиподах. Рассмотрим более подробно задачу о вычислении индекса нулевой особой точки однородного оператора.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – регулярные на бесконечности однородные операторы класса $S(V)$ порядков однородности m и r соответственно, причем $m > r$. Если x_0 – ненулевая особая точка оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, то элемент $w_0 = x_0 / \|x_0\|$ есть нормированная особая точка оператора $\mathcal{A} + \lambda_0 \mathcal{B}$, где $\lambda_0 = \|x_0\|^{r-m}$. Верно и обратное: каждая нормированная особая точка w_0 оператора $\mathcal{A} + \lambda_0 \mathcal{B}$, $\lambda_0 > 0$, порождает решение $x_0 = \lambda_0^{1/(r-m)} w_0$ включения $0 \in \mathcal{A}(v) + \mathcal{B}(v)$; при этом если w_0 – изолированная особая точка оператора $\mathcal{A} + \lambda_0 \mathcal{B}$, то x_0 – изолированная особая точка поля $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и $\text{ind}(w_0, \mathcal{A} + \lambda_0 \mathcal{B}) = \text{ind}(x_0, \mathcal{A} + \mathcal{B})$.

Аналогичное замечание верно и в том случае, когда рассматривается изолированное особое множество W_0 поля $\mathcal{A} + \lambda_0 \mathcal{B}$:

$$W_0 = \{v \in V, \|v\| = 1, 0 \in \mathcal{A}(v) + \lambda_0 \mathcal{B}(v)\}.$$

Множество $X_0 = \lambda_0^{1/(r-m)} W_0$ есть изолированное особое множество поля $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, при этом $\text{ind}(W_0, \mathcal{A} + \lambda_0 \mathcal{B}) = \text{ind}(X_0, \mathcal{A} + \mathcal{B})$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть пара $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ имеет конечное число нормированных собственных множеств $W_1, \dots, W_s$, отвечающих положительным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Тогда*

$$\text{ind}(0, \mathcal{A}) = \text{ind}(0, \mathcal{B}) + \sum_{i=1}^s \text{ind}(W_i, \mathcal{A} + \lambda_i \mathcal{B}). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – регулярные на ∞ операторы, то справедливы неравенства (4) и оценки $\theta_{V^*}(\mathcal{B}(v), 0) \leq k_3 \|v\|^r$, $\theta_{V^*}(0, \mathcal{B}(v)) \geq k_4 \|v\|^r$, k_3, k_4 – положительные константы. Из этих соотношений и теоремы Руше вытекают равенства

$$\text{ind}(0, \mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{ind}(0, \mathcal{B}), \quad \text{ind}(\infty, \mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{ind}(\infty, \mathcal{A}).$$

Положим $X_i = \lambda_i^{1/(r-m)} W_i$, $i = 1, \dots, s$. Тогда X_i , $i = 1, \dots, s$, – изолированные ненулевые особые множества поля $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. В силу теоремы об алгебраическом числе особых множеств [2]–[6] имеем

$$\text{ind}(\infty, \mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{ind}(0, \mathcal{A} + \mathcal{B}) + \text{ind}(X_1, \mathcal{A} + \mathcal{B}) + \dots + \text{ind}(X_s, \mathcal{A} + \mathcal{B}).$$

Теперь (7) следует из равенств

$$\begin{aligned} \text{ind}(\infty, \mathcal{A} + \mathcal{B}) &= \text{ind}(\infty, \mathcal{A}) = \text{ind}(0, \mathcal{A}), \\ \text{ind}(0, \mathcal{A} + \mathcal{B}) &= \text{ind}(0, \mathcal{B}), \quad \text{ind}(X_i, \mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{ind}(W_i, \mathcal{A} + \lambda_i \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогичный теореме 2 результат [5, с. 181] относится к случаю, когда V – конечномерное пространство, $\mathcal{A}$ – однозначный оператор, $\mathcal{B}$ – оператор тождественного преобразования. Если в условиях теоремы 2 оператор $\mathcal{B}$ монотонен, то $(v, v^*) \geq 0 \quad \forall v^* \in \mathcal{B}(v)$, поэтому $\text{ind}(0, \mathcal{B}) = 1$ и (7) приводит к равенству

$$\text{ind}(0, \mathcal{A}) = 1 + \sum_{i=1}^s \text{ind}(W_i, \mathcal{A} + \lambda_i \mathcal{B}).$$

Аналогично, монотонность оператора $\mathcal{A}$ влечет равенство

$$1 = \text{ind}(0, \mathcal{B}) + \sum_{i=1}^s \text{ind}(W_i, \mathcal{A} + \lambda_i \mathcal{B}).$$

Для вычисления индексов $\text{ind}(W_i, \mathcal{A} + \lambda_i \mathcal{B})$ можно использовать известные методы [2]–[6]. Наиболее простым представляется случай, когда W_i , $i = 1, \dots, s$, – одноточечные множества, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – однозначные гладкие операторы.

2. Рассмотрим задачу о вычислении индекса потенциального векторного поля. Пусть $\Phi \in \Lambda(V)$, $x \in V$, $v \in V$. Положим

$$\Phi^0(x, v) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x, t \rightarrow +0} \frac{\Phi(y + tv) - \Phi(y)}{t}.$$

Число $\Phi^0(x, v)$ называют *обобщенной производной функционала Φ в точке x по направлению v* . Функционал $\Phi^0(x, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$ есть опорная функция множества класса $\text{Cv } V^*$, обозначаемого символом $\partial\Phi(x)$ и называемого *обобщенным градиентом функционала Φ в точке x* [7, с. 34].

Через $\Lambda_1(V)$ обозначим часть $\Lambda(V)$, состоящую из функционалов Φ , для которых градиентное отображение $\mathcal{F}(x) = \partial\Phi(x)$, $x \in V$, принадлежит классу $S(V)$. В этом случае функционал Φ назовем *потенциалом оператора $\mathcal{F}$* ,

особые точки оператора $\mathcal{F}$ – критическими точками функционала Φ . Число c назовем критическим значением функционала Φ , если множество уровня $\{\Phi = c\} = \{v \in V, \Phi(v) = c\}$ содержит критическую точку Φ , в противном случае c назовем регулярным значением функционала Φ .

Пусть b – регулярное значение функционала Φ класса $\Lambda_1(V)$ и нижнее лебегово множество $\mathcal{M}_b = \{x \in V, \Phi(x) \leq b\}$ ограничено. Тогда найдется такое число $a < b$, что отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений функционала Φ . В этом случае множество $\mathcal{M}_{a,b} = \{x \in V, a \leq \Phi(x) \leq b\}$ замкнуто и ограничено в пространстве V , а оператор $\mathcal{F}(x) = \partial\Phi(x)$ невырожден на $\mathcal{M}_{a,b}$. Согласно предложению 1 существуют пространство E класса $\Gamma(V)$, векторное поле w класса $\Lambda(\mathcal{M}_{a,b}, E)$ и постоянная $\delta > 0$ такие, что $\Phi^0(x, w(x) - x) < -\delta$ и $\|w(x)\| \leq r_0$, где $r_0 > \sup\{\|x\|, x \in \mathcal{M}_{a,b}\}$.

Из результатов работы [9] вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть Γ принадлежит $\Gamma(V)$ и обладает указанными выше свойствами. Тогда:

- 1) пара $(\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_a \cap E)$ есть деформационный ретракт пары $(\mathcal{M}_b, \mathcal{M}_b \cap E)$;
- 2) группы гомологий пространств $\mathcal{M}_b$ и $\mathcal{M}_b \cap E$ изоморфны: $H_l(\mathcal{M}_b) \approx H_l(\mathcal{M}_b \cap E)$, $l = 0, 1, \dots$; имеет смысл эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{M}_b)$ пространства $\mathcal{M}_b$ и $\gamma(\partial\Phi, \mathcal{M}_b) = \chi(\mathcal{M}_b)$.

Функционал Φ класса $\Lambda_1(V)$ назовем p -однородным ($p > 1$), если $\Phi(\lambda x) = \lambda^p \Phi(x)$ для любых $\lambda > 0$, $x \in V$; в этом случае $F = \partial\Phi$ есть $(p-1)$ -однородный оператор класса $S(V)$. Справедливы равенства

$$\Phi^0(v, v) = p\Phi(v) = -\Phi^0(v, -v)$$

– естественные аналоги формулы Эйлера $(v, \Phi'(v)) = p\Phi(v)$ для гладкого функционала Φ . Очевидно, что 0 – критическая точка p -однородного функционала Φ ; если других критических точек нет, то функционал Φ назовем невырожденным. Для невырожденного функционала Φ $\text{ind}(0, \partial\Phi) = \text{ind}(\infty, \partial\Phi)$.

Если $\Phi(v) \geq 0 \ \forall v \in V$, то 0 – точка абсолютного минимума функционала Φ , поэтому $\text{ind}(0, \partial\Phi) = 1$ [14]. Рассмотрим случай, когда множество $\mathfrak{R} = \{v \in V, \|v\| = 1, \Phi(v) < 0\}$ непусто. Введем в $\mathfrak{R}$ метрику, индуцированную пространством V .

ТЕОРЕМА 3. Пусть Φ – невырожденный p -однородный функционал класса $\Lambda_1(V)$ и $\mathfrak{R} \neq \emptyset$. Тогда:

- 1) существует такое пространство E из $\Gamma(V)$, что $H_l(\mathfrak{R}) \approx H_l(\mathfrak{R} \cap E)$, $l = 0, 1, \dots$;
- 2) имеет смысл эйлерова характеристика $\chi(\mathfrak{R})$ пространства $\mathfrak{R}$ и $\text{ind}(0, \partial\Phi) = 1 - \chi(\mathfrak{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на несколько этапов.

1-й этап (вспомогательные функционалы). Не ограничивая общности, можно считать, что V, V^* – локально равномерно выпуклые пространства. При выполнении этого предположения функционал $\Psi(x) = \|x\|^{2p}$ непрерывно дифференцируем на V , его производная Ψ' есть $(2p-1)$ -однородный регулярный на ∞ оператор класса $S(V)$ [14]. Очевидно, что $\text{ind}(0, \Psi') = 1$.

Введем в рассмотрение функционал $\Phi_1 = \Phi + \Psi$. Поскольку $\partial\Phi_1 = \partial\Phi + \Psi'$, то $\Phi_1 \in \Lambda_1(V)$, 0 – изолированная критическая точка функционала Φ_1 и $\text{ind}(0, \partial\Phi_1) =$

$\text{ind}(0, \partial\Phi)$. Множество $\mathcal{K}(\Phi_1)$ ненулевых критических точек Φ_1 принадлежит внешности некоторого шара $\mathfrak{B}_V(0, \rho_0)$, $\rho_0 > 0$, поэтому $\Psi(v) \geq \rho_0^{2p}$, $v \in \mathcal{K}(\Phi_1)$. Если $v \in \mathcal{K}(\Phi_1)$, то $0 \in \partial\Phi(v) + \Psi'(v)$, т.е. $-\Psi'(v) \in \partial\Phi(v)$. В частности,

$$2p\Psi(v) = (-v, -\Psi'(v)) \leq \Phi^0(v, -v) = -p\Phi(v),$$

следовательно, $2p\Psi(v) + p\Phi(v) \leq 0$. Отсюда получаем

$$p\Phi_1(v) \leq -p\Psi(v) \leq -p\rho_0^{2p}, \quad \Phi_1(v) \leq -\rho_0^{2p}.$$

Таким образом, $\mathcal{K}(\Phi_1) \subset \{v : \Phi_1(v) \leq -\rho_0^{2p}\}$. Если $-\rho_0^{2p} < b < 0$, то b — регулярное значение функционала Φ_1 ; $\mathcal{M}_b = \{v : \Phi_1(v) \leq b\} \subset \mathcal{M}_0 \subset \{v : \|v\| < r_0\}$ и $\mathcal{K}(\Phi_1) \subset \overset{\circ}{\mathcal{M}}_b$.

2-й этап (построение пространства E). Согласно предложению 1 существуют E_0 из $\Gamma(V)$, отображение w_0 сферы $S_1 = \{v \in V, \|v\| = 1\}$ класса $\Lambda(S_1, E_0)$ и постоянная $\delta_0 > 0$, обладающие свойствами

$$\|w_0(x)\| \leq 2, \quad \Phi^0(x, w_0(x) - x) \leq -\delta_0 \quad \forall x \in S_1.$$

Продолжим w_0 до 1-однородного отображения на все пространство V . За продолжением сохраним то же обозначение; таким образом, $w_0 \in \Lambda(V, E_0)$, $\|w_0(x)\| \leq 2\|x\|$, $\Phi^0(x, w_0(x) - x) \leq -\delta_0\|x\|^p$.

Фиксируем число $R > 0$ такое, что $2R < \rho_0$ и выполняется неравенство $3r_0\|\Psi'(x)\|_* \leq (\delta_0/2)\|x\|^p$, если $\|x\| \leq 2R$. Введем в рассмотрение множество $\mathcal{L}_a(R) = \{v \in V, \|v\| \geq R, a \leq \Phi_1(v) \leq 0\}$, где $-\rho_0^{2p} < a < 0$. Множество $\mathcal{L}_a(R)$ замкнуто и не содержит критических точек функционала Φ_1 ; справедливы включения $\mathcal{L}_a(R) \subset \mathcal{M}_0 \subset \{v : \|v\| < r_0\}$. В силу предложения 1 существуют E_1 из $\Gamma(V)$, отображение w_1 класса $\Lambda(\mathcal{L}_a(R), E_1)$ и постоянная $\delta_1 > 0$ такие, что $\|w_1(x)\| \leq r_0$ и $\Phi_1^0(x, w_1(x) - x) < -\delta_1 \quad \forall x \in \mathcal{L}_a(R)$.

Пусть $E = E_0 + E_1$; очевидно, что $E \in \Gamma(V)$. Обозначим через λ функцию на $[0, \infty)$, равную нулю на $[0, R]$ и единице на $[2R, \infty)$ и линейную на отрезке $[R, 2R]$. Положим

$$w(x) = (1 - \lambda(\|x\|))w_0(x) + \lambda(\|x\|)w_1(x), \quad x \in \mathcal{M}_0;$$

так как $\lambda(s) = 0$, если $0 \leq s \leq R$, способ продолжения отображения w_1 на шар $\|w\| \leq R$ несуществен. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(x, w(x) - x) &\leq (1 - \lambda(\|x\|))\Phi_1^0(x, w_0(x) - x) + \lambda(\|x\|)\Phi_1^0(x, w_1(x) - x) \\ &\leq (1 - \lambda(\|x\|))(\Psi'(x, w_0(x) - x) + \Phi^0(x, w_0(x) - x)) - \delta_1\lambda(\|x\|) \\ &\leq (1 - \lambda(\|x\|))(3r_0\|\Psi'(x)\|_* - \delta_0\|x\|^p) - \delta_1\lambda(\|x\|) \\ &\leq -(1 - \lambda(\|x\|))\frac{\delta_0}{2}\|x\|^p - \delta_1\lambda(\|x\|) \leq -\delta_2\|x\|^p \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $\delta_2 > 0$. Отображение w принадлежит классу $\Lambda(\mathcal{M}_0, E)$ и $\Phi_1^0(x, w(x) - x) \leq -\delta_2\|x\|^p$; в частности, $\sup\{\Phi_1^0(x, w(x) - x), a \leq \Phi_1(x) \leq b\} < 0$ для любых a, b из $(-\rho_0^{2p}, 0)$.

3-й этап (доказательство первого утверждения). Из предложения 3 следует, что пара $(\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_a \cap E)$ есть деформационный ретракт пары $(\mathcal{M}_b, \mathcal{M}_b \cap E)$. Фиксируем

целое число $l \geq 0$. Согласно предложению 3 группы $H_l(\mathcal{M}_b)$, $H_l(\mathcal{M}_b \cap E)$, $H_l(\mathcal{M}_a)$, $H_l(\mathcal{M}_a \cap E)$ изоморфны между собой. Порождаемый вложением $i_a^b: (\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_a \cap E) \rightarrow (\mathcal{M}_b, \mathcal{M}_b \cap E)$ гомоморфизм $(i_a^b)^*: H_l(\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_a \cap E) \rightarrow H_l(\mathcal{M}_b, \mathcal{M}_b \cap E)$ является изоморфизмом. Система $\{H_l(\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_a \cap E), (i_a^b)^*\}$ образует прямой спектр на интервале $(-\rho_0^{2p}, 0)$. Если $\mathfrak{R}_1 = \{v : \Phi_1(v) < 0\}$ – метрическое пространство с индуцированной $\|\cdot\|$ метрикой, то из определения групп гомологий с компактными носителями вытекает изоморфизм групп $H_l(\mathcal{M}_b)$, $H_l(\mathcal{M}_b \cap E)$, $H_l(\mathfrak{R}_1)$, $l = 0, 1, \dots$. В частности, из проведенных рассуждений вытекает, что имеют смысл и равны эйлеровы характеристики пространств $\mathcal{M}_b$, $\mathcal{M}_b \cap E$, $\mathfrak{R}_1$.

Покажем, что пространства $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_1$ имеют одинаковый гомотопический тип. Если $v \in \mathfrak{R}_1$, то $\Phi(v) + \Psi(v) = \Phi_1(v) < 0$, следовательно, $\Phi(v) < 0$. Отображение $g_1(v) = v/\|v\|$ действует и непрерывно из $\mathfrak{R}_1$ в $\mathfrak{R}$. Для v из $\mathfrak{R}$ положим

$$T(v) = (-\Phi(v))^{\frac{1}{p}}, \quad g_2(v) = \frac{T(v)}{2}v.$$

Отображение $g_2: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_1$ непрерывно. Композиция $g_1 \circ g_2: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ есть тождественное преобразование $\mathfrak{R}$, а композиция $g_2 \circ g_1: \mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_1$ гомотопна тождественному. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_1$ имеют одинаковый гомотопический тип; то же самое верно и для пересечений $\mathfrak{R} \cap E$, $\mathfrak{R}_1 \cap E$. Из проведенных рассуждений следует изоморфизм групп $H_l(\mathfrak{R})$, $H_l(\mathfrak{R} \cap E)$, $H_l(\mathcal{M}_b)$, $H_l(\mathcal{M}_b \cap E)$.

4-й этап (доказательство второго утверждения). Так как $H_l(\mathfrak{R}) \approx H_l(\mathfrak{R} \cap E) \approx H_l(\mathcal{M}_b)$, то имеют смысл и совпадают эйлеровы характеристики соответствующих пространств. Справедливы равенства (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ind}(\infty, \partial\Phi_1) = \text{ind}(0, \partial\Phi_1) + \gamma(\partial\Phi_1, \overset{\circ}{\mathcal{M}}_b) \\ &= \text{ind}(0, \partial\Phi) + \chi(\mathcal{M}_b) = \text{ind}(0, \partial\Phi) + \chi(\mathfrak{R}). \end{aligned}$$

Равенство $1 = \text{ind}(\infty, \partial\Phi_1)$ следует из того, что Φ_1 – коэрцитивный функционал [9], [14]; равенство $\text{ind}(\infty, \partial\Phi_1) = \text{ind}(0, \partial\Phi_1) + \gamma(\partial\Phi_1, \overset{\circ}{\mathcal{M}}_b)$ есть результат применения теоремы об алгебраическом числе особых точек к полю $\partial\Phi_1$; далее используются вытекающее из теоремы Руше равенство $\text{ind}(0, \partial\Phi_1) = \text{ind}(0, \partial\Phi)$ и предложение 3; завершает доказательство отмечавшееся выше равенство $\chi(\mathcal{M}_b) = \chi(\mathfrak{R})$. Итак, $1 = \text{ind}(0, \partial\Phi) + \chi(\mathfrak{R})$. Теорема доказана.

Для гладкой однородной функции Φ конечного числа переменных формула $\text{ind}(0, \Phi') = 1 - \chi(\mathfrak{R})$ установлена в [8]. Если считать, что $\chi(\emptyset) = 0$, то эта формула сохраняется и в случае $\mathfrak{R} = \emptyset$.

Если E_n , $n = 1, 2, \dots$, – исчерпывающая V последовательность класса $\Gamma(V)$, то в качестве пространства E , фигурирующего в теореме 3, можно взять пространство E_n при $n > n_0$. Первое утверждение теоремы 3 влечет стабилизацию гомологических характеристик пространства $\mathfrak{R}$ при аппроксимации конечномерными сечениями.

Содержащиеся в теоремах 2, 3 формулы вычисления индекса по обычным схемам [1]–[6] можно применить к исследованию включения $0 \in \mathcal{F}(x)$. Например, на их основе получаются оценки сверху и снизу числа решений этого включения, исследуется вопрос о сходимости метода Галёркина и т.п.

3. Ниже H – гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$, пространство V компактно и плотно вложено в H . Пространство H далее отождествляется с ему сопряженным H^* , а $H^* = H$ – с некоторым подпространством сопряженного к V пространства V^* . Число (v, v^*) означает и скалярное произведение элементов v и v^* из H , и значение функционала v^* из V^* на элементе $v \in V$.

Пусть $T = [\alpha, \omega]$, $-\infty < \alpha < \omega < \infty$, $1 < p < \infty$, $Y_1 = L^p(T, V)$, $Y_2 = L^\infty(T, H)$, $Z_1 = L^q(T, V^*)$ ($1/p + 1/q = 1$), $Z_2 = L^1(T, H)$, $Y = Y_1 \cap Y_2$, $Z = Z_1 + Z_2$.

Пространство Y (Y_1) является сопряженным к пространству Z (Z_1) [12]. Билинейная форма, определяющая двойственность, задается равенством

$$\langle y, z \rangle = \int_T (y(t), z(t)) dt.$$

Если необходимо подчеркнуть зависимость пространств Y, Z от T , будем обозначать их символами $Y(T)$ и $Z(T)$.

Положим $W = \{y \mid y \in Y, y' \in Z\}$. Равенство $y' + z = 0$ означает, что $\langle y, \varphi'v \rangle = \langle \varphi v, z \rangle$, $\varphi \in C_0^\infty(T)$, $v \in V$. Класс W вложен в $C(T, H)$; это позволяет ввести понятие значения функции из W в каждой точке отрезка T . Если $y \in W$, то функция $t \rightarrow |y(t)|^2$ абсолютно непрерывна на T и справедлива формула $(|y(t)|^2)' = 2(y(t), y'(t))$ п.в. [12], [13].

Пространство Y , наделенное слабой топологией, мажорирующих топологий $\sigma(Y, Z)$ и $L_w^p(T, H)$, обозначается символом Y_0 . Оно непрерывно вложено в $L^p(T, H)$ [17].

Введем некоторые классы многозначных операторов. Через $\alpha_1(Y, Z)$ обозначим совокупность операторов $F: Y \rightarrow \text{Cv } Z$, удовлетворяющих условиям:

- 1) для каждого $\mathfrak{N}$ из $\mathcal{B}(Y)$ область значений $F(\mathfrak{N}) = \cup F(y)$, $y \in \mathfrak{N}$, предкомпактна в топологии $\sigma(Z, Y)$;
- 2) для произвольных последовательностей $y_n \in Y$, $z_n \in F(y_n)$, обладающих свойствами

$$y_n \rightarrow y \text{ в } Y_0, \quad z_n \rightarrow z \text{ в } \sigma(Z, Y), \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, z_n \rangle} \leq \langle y, z \rangle, \quad (8)$$

имеет место включение $z \in F(y)$ и сходимость $\langle 1_{[\alpha, t]} y_n, z_n \rangle \rightarrow \langle 1_{[\alpha, t]} y, z \rangle$ в $C(T)$ (здесь и далее 1_Δ – характеристическая функция множества $\Delta \in \mathbb{R}$).

Условия 1), 2) выражают некоторые усиления свойств ограниченности и замкнутости оператора F . Условие усиленной ограниченности выполнено, если, например, оператор F действует и ограничен из Y в $Z_1 + L^r(T, H)$, $r > 1$. Требование усиленной замкнутости оператора F естественно для эллиптических операторов в дивергентной форме, рассматриваемых на пространствах Соболева (см., например, [1]–[3], [6], [12]).

Многозначный оператор $F: Y \rightarrow Z$ назовем *локальным*, если существует семейство операторов $\mathcal{F}(t): V \rightarrow V^*$, $t \in T$, порождающее F в том смысле, что для любого y из Y множество $F(y)$ совпадает с множеством измеримых сечений отображения $t \rightarrow \mathcal{F}(t, y(t))$ (здесь и ниже $\mathcal{F}(t, v) = \mathcal{F}(t)v$). Примеры локальных операторов класса $\alpha_1(Y, Z)$ приведены в [17], [18]; частный пример рассматривается в конце пункта.

Естественным образом определяется сужение F_I локального оператора $F: Y(T) \rightarrow Z(T)$ на пространство $Y(I)$, где $I \subset T$. Для любой функции y из $Y(I)$

$F_I(y)$ есть множество измеримых сечений отображения $\mathcal{F}(t, y(t))$, $t \in I$, где $\mathcal{F}(t, \cdot)$ – порождающий оператор F семейства отображений из V в V^* . Как нетрудно видеть, если $F \in \alpha_1(Y, Z)$, то $F_I = \alpha_1(Y(I), Z(I))$.

Пусть F – локальный оператор класса $\alpha_1(Y, Z)$, порождаемый семейством отображений $\mathcal{F}(t, \cdot): V \rightarrow V^*$, $t \in T$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$0 \in y' + \mathcal{F}(t, y). \quad (9)$$

Под его решением будем понимать функцию y класса W , для которой $-y' \in F(y)$, или (что то же самое) $0 \in y' + \mathcal{F}(t, y(t))$ п.в. Задача Коши для включения (9) заключается в отыскании решения y , удовлетворяющего условию

$$y(\alpha) = h, \quad h \in H. \quad (10)$$

Один из способов исследования задачи (9), (10) основан на построении ее аппроксимаций Галёркина и последующем предельном переходе. Пусть E_n , $n = 1, 2, \dots$, – исчерпывающая V последовательность конечномерных пространств, наделенных индуцированной из H евклидовой структурой, $j_n: E_n \rightarrow V$ – оператор вложения, j_n^* – сопряженный к нему оператор. Заменим включение (9) конечномерным дифференциальным включением

$$0 \in x' + j_n^* g_n, \quad (11)$$

под решением которого понимается функция x_n класса W , удовлетворяющая включению $x_n(t) \in E_n$ и равенству

$$0 = (v, x'_n + g_n) \text{ п.в. на } T, \quad (12)$$

где v – произвольный элемент из E_n . Ниже

$$d_{Y \times Z}((x_n; g_n); \text{Gr } F) = \inf \{ \|x_n - y; Y\| + \|g_n - z; Z\|, y \in Y, z \in F(y) \}$$

– расстояние от $(x_n; g_n) \in Y \times Z$ до графика отображения F .

Основополагающей для дальнейшего является

ЛЕММА 1. Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, – решение включения (11), $x_n \rightarrow x$ в $\sigma(Y, Z)$, $d_{Y \times Z}((x_n; g_n); \text{Gr } F) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда:

1) x есть решение дифференциального включения (9) и $(t - \alpha)x_n \rightarrow (t - \alpha)x$ в $C(T, H)$;

2) если $x_n(\alpha) \rightarrow h$ в метрике H , то x есть решение задачи Коши (9), (10) и $x_n \rightarrow x$ в $C(T, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале установим справедливость второго утверждения леммы. Пусть $x_n(\alpha) \rightarrow h$ в метрике H , $z_n \in F(y_n)$ и $\|x_n - y_n; Y\| + \|g_n - z_n; Z\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из равенства (12) вытекает соотношение

$$|x_n(t)|^2 - |x_n(\alpha)|^2 + 2\langle 1_{[\alpha, t]} x_n, g_n \rangle = 0 \quad (13)$$

и компактность последовательностей x_n , y_n в пространстве $L_w^p(T, H)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{aligned} y_n &\rightarrow x \text{ в } Y_0, & y_n(t) &\rightarrow x(t) \text{ в } H \text{ п.в. на } T, \\ x_n &\rightarrow x \text{ в } C_w(T, H), & z_n &\rightarrow z \text{ в } \sigma(Z, Y). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (12), (14) и замкнутость оператора дифференцирования, получаем, что x принадлежит W и удовлетворяет равенствам $x' + z = 0$, $x(\alpha) = h$, следствием которых является аналогичное (13) соотношение

$$|x(t)|^2 - |x(\alpha)|^2 + 2\langle 1_{[\alpha, t]}x, z \rangle = 0. \quad (15)$$

Имеем, далее, оценки

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, z_n \rangle = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n(\alpha)|^2 - |x_n(\omega)|^2}{2} \leq \frac{|x(\alpha)|^2 - |x(\omega)|^2}{2} = \langle x, z \rangle,$$

при выводе которых используется равенство (13) для $t = \omega$, сходимости $x_n(\alpha) \rightarrow x(\alpha)$ в H , $x_n(\omega) \rightarrow x(\omega)$ в $\sigma(H, H)$ и равенство (15) при $t = \omega$. Последовательности y_n, z_n обладают свойствами (8) (с заменой y на x), поэтому справедливо включение $z \in F(x)$ и последовательность $\langle 1_{[\alpha, t]}y_n, z_n \rangle$ равномерно на T сходится к $\langle 1_{[\alpha, t]}x, z \rangle$. В соединении с (13)–(15) это влечет равномерную на отрезке T сходимость $|x_n(t)|^2 \rightarrow |x(t)|^2$. Поскольку $x_n \rightarrow x$ в $C_w(T, H)$, то $x_n \rightarrow x$ в $C(T, H)$. Второе утверждение леммы доказано.

Для доказательства первого утверждения леммы фиксируем отрезок $I = [t_0, \omega]$ так, что $\alpha < t_0$ и $x_n(t_0) \rightarrow x(t_0)$ в метрике H . Сужение F_I оператора F на пространство $Y(I)$ принадлежит $\alpha_1(Y(I), Z(I))$. Применяя уже доказанную часть леммы, получаем, что $x_n \rightarrow x$ в $C(I, H)$. Ввиду имеющегося произвола в способе выбора точки t_0 , это влечет сходимость $(t - \alpha)x_n \rightarrow (t - \alpha)x$ в $C(T, H)$. Лемма доказана.

Включение (11) можно трактовать как приближение Галёркина к включению (9). Лемма 1 означает сходимость метода Галёркина при достаточно необременительных предположениях.

Рассмотрим многозначное отображение $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times V \rightarrow \text{Cv } V^*$, удовлетворяющее условиям:

I) $\mathcal{F}$ хеминепрерывно сверху;

II) справедлива оценка $\theta_{V^*}(\mathcal{F}(t, v), 0) \leq k(1 + \|v\|^{p-1})$, постоянные $k > 0$, $p > 1$ не зависят от t, v .

Из условия I) вытекает, что при любом $t \in \mathbb{R}$ отображение $\mathcal{F}(t, \cdot): V \rightarrow V^*$ хеминепрерывно, а при любом v из V отображение $\mathcal{F}(\cdot, v): \mathbb{R} \rightarrow V^*$ измеримо, в частности имеет измеримое сечение. Если $y: \mathbb{R} \rightarrow V$ – измеримая по Лебегу–Бохнеру функция, то множество $F(y)$ измеримых сечений многозначного отображения $t \rightarrow \mathcal{F}(t, y(t))$ непусто. Определяемый таким образом оператор суперпозиции F локален; сохраним обозначение F и для сужения этого оператора на пространство $L^p(T, V)$, где T – произвольный отрезок действительной прямой. При выполнении условий I), II) $F: L^p(T, V) \rightarrow L^q(T, V^*)$ – ограниченный выпуклозначный оператор; его график $\text{Gr } F$ есть замкнутое подмножество $L^p(T, V) \times L^q(T, V^*)$, если наделять $L^p(T, V)$ сильной, а $L^q(T, V^*)$ слабой топологиями [15], [17].

Если не оговорено противное, всюду далее предполагается, что выполнены условия I), II). В случае конечномерного пространства V оператор F принадлежит классу $\alpha_1(Y(T), Z(T))$ для любого отрезка T . В бесконечномерном случае аналогичный факт верен при определенных дополнительных предположениях. Полезным оказывается следующий вариант условия эллиптичности отображения $\mathcal{F}(t, \cdot): V \rightarrow V^*$ [6], [19]:

III) существуют такие константы $k_0 \geq 0$, $k_1 > 0$, что

$$(v_1 - v_2, v_1^* - v_2^*) + k_0 |v_1 - v_2|^p \geq k_1 \|v_1 - v_2\|^p, \quad (16)$$

где $v_i \in V$, $v_i^* \in \mathcal{F}(t, v_i)$, $i = 1, 2$. Оценка (16) есть нелинейный аналог неравенства Гординга.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия I)–III). Тогда:

- 1) $\mathcal{F}(t, \cdot) \in S(V)$ для каждого t ;
- 2) порождаемый $\mathcal{F}$ оператор суперпозиции $F: Y(T) \rightarrow Z(T)$ принадлежит классу $\alpha_1(Y(T), Z(T))$;
- 3) если y_n, z_n обладают свойствами (8), то $y_n \rightarrow y$ в $L^p(T, V)$ для любого отрезка $T \subset \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \mathbb{R}$, $v_n \in V$, $v_n^* \in \mathcal{F}(t, v_n)$ – последовательности, обладающие свойствами (1). Фиксируем v_0^* из $\mathcal{F}(t, v)$. Можно считать, что $v_n \rightarrow v$ в метрике H . В силу (16) имеем неравенство

$$(v_n - v, v_n^* - v_0^*) + k_0 |v_n - v|^p \geq k_1 \|v_n - v\|^p,$$

левая часть которого в силу (1) стремится к нулю. Отсюда вытекает сходимость $v_n \rightarrow v$ в метрике пространства V . Поскольку оператор $\mathcal{F}(t, \cdot): V \rightarrow V^*$ хеминепрерывен сверху, то $v^* \in \mathcal{F}(t, v)$. Ограниченность оператора $\mathcal{F}(t, \cdot): V \rightarrow V^*$ следует из условия II).

Второе утверждение леммы вытекает из результатов работы [17]. Для доказательства третьего утверждения воспользуемся вытекающим из (16) неравенством

$$(y_n(t) - y(t), z_n(t) - z(t)) + k_0 |y_n(t) - y(t)|^p \geq k_1 \|y_n(t) - y(t)\|^p,$$

где последовательности y_n, z_n обладают свойствами (8), $z \in F(y)$. Интегрируя это равенство по отрезку T и используя (8), получаем, что интегралы от левой части неравенства стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует сходимость $y_n \rightarrow y$ в $L^p(T, V)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия лемм 1, 2, то $x_n \rightarrow x$ в $L^p(T, V)$.

Более широкие, чем I)–III), условия, гарантирующие включения $\mathcal{F}(t, \cdot) \in S(V)$, $F \in \alpha_1(Y, Z)$, можно найти в [2], [6], [17], [18].

4. В этом пункте $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times V \rightarrow V^*$ – отображение, удовлетворяющее условиям I), II), порождаемый $\mathcal{F}$ оператор суперпозиции F принадлежит классу $\alpha_1(Y(T), Z(T))$ для любого отрезка $T \subset \mathbb{R}$. Решение $y: \mathbb{R} \rightarrow V$ включения (9) назовем *ограниченным*, если оно имеет конечную норму

$$\|y; C_b(\mathbb{R}, H)\| = \sup\{|y(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$

Таким образом, если y – ограниченное решение включения (9), то для любого отрезка $T \subset \mathbb{R}$ имеем $y \in W(T)$ и $\sup_t |y(t)| < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_p(V)$ совокупность таких $(p-1)$ -однородных отображений $\mathcal{A}: V \rightarrow \text{Cv } V^*$, для которых не зависящее от t отображение $\mathcal{F}(t, v) = \mathcal{A}(v)$ удовлетворяет условиям I)–III). Однородность оператора $\mathcal{A}$ влечет оценку $\theta_{V^*}(\mathcal{A}(v), 0) \leq k \|v\|^{p-1}$ с некоторой постоянной k . В силу леммы 2 порождаемый

отображением $\mathcal{F}(t, v) = \mathcal{A}(v)$ оператор суперпозиции A принадлежит классу $\alpha_1(Y(T), Z(T))$ для каждого отрезка T .

Если $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_p(V)$, то $0 \in \mathcal{A}(0)$, поэтому дифференциальное включение

$$0 \in y' + \mathcal{A}(y) \quad (17)$$

имеет нулевое решение: $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathfrak{N}_p(V)$ часть класса $\mathfrak{M}_p(V)$, состоящую из таких операторов $\mathcal{A}$, для которых 0 – единственное ограниченное решение включения (17).

Для однозначных операторов в конечномерном пространстве аналогичный $\mathfrak{N}_p$ класс введен Н. Н. Красовским [20]. В последующем были установлены необходимые и достаточные условия принадлежности классу $\mathfrak{N}_p$ (см., например, [5] и приведенную там литературу). Примеры операторов данного класса в бесконечномерных пространствах рассматриваются в п. 6.

Отображение $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times V \rightarrow V^*$ назовем *равномерно асимптотически* $(p-1)$ -*однородным*, если найдется такой оператор $\mathcal{A}$ класса $\mathfrak{M}_p(V)$, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{p-1}} \sup_{\|v\| \leq R, t} \theta_{V^*}(\mathcal{F}(t, v), \mathcal{A}(v)) = 0. \quad (18)$$

В частности, $\mathcal{A}$ есть главная часть операторов $\mathcal{F}(t, \cdot): V \rightarrow V^*$. Равенство (18) эквивалентно существованию такой убывающей функции $K: (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$, что при любом ε из $(0, 1]$ верна оценка

$$\theta_{V^*}(\mathcal{F}(t, v), \mathcal{A}(v)) \leq \varepsilon \|v\|^{p-1} + K(\varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in V. \quad (19)$$

Далее наряду с отображением $\mathcal{F}$ окажется полезным рассматривать семейство отображений $\mathcal{F}_{R, \tau}$, $R > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, определяемое равенством $\mathcal{F}_{R, \tau}(t, v) = R^{1-p} \mathcal{F}(\tau + R^{2-p}t, Rv)$. Как нетрудно видеть, если $u(t)$ – решение включения (9), то функция $y(t) = (1/R)u(\tau + R^{2-p}t)$ есть решение включения

$$0 \in y' + \mathcal{F}_{R, \tau}(t, y). \quad (20)$$

Исследуем зависимость от параметров R, τ операторов суперпозиции $F_{R, \tau}$, порождаемых отображениями $\mathcal{F}_{R, \tau}: \mathbb{R} \times V \rightarrow V^*$. Введем пространство $\text{BS}^p(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ ограниченных по Степанову функций на $\mathbb{R}$ со значениями в B -пространстве $\mathcal{E}$. Оно состоит из измеримых по Лебегу–Бохнеру функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|f; \text{BS}^p\| = \sup\{\|f; L^p(I, \mathcal{E})\|\},$$

где $\sup$ берется по всем отрезкам $I \subset \mathbb{R}$ единичной длины.

ЛЕММА 3. Пусть выполнено равенство (18), $\mathfrak{B} = \{y \in \text{BS}^p(\mathbb{R}, V) : \|y; \text{BS}^p\| \leq 1\}$. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathfrak{B}, \tau \in \mathbb{R}} \theta_{\text{BS}^q(\mathbb{R}, V^*)}(F_{R, \tau}(y), A(y)) = 0. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из (19) вытекает неравенство

$$\theta_{V^*}(\mathcal{F}(t, Rv), \mathcal{A}(Rv)) \leq \varepsilon R^{p-1} \|v\|^{p-1} + K(\varepsilon),$$

верное для любого $R > 0$. Если $R > R_1(\varepsilon) = \sqrt[p-1]{K(\varepsilon)/\varepsilon}$, то приходим к неравенству

$$\theta_{V^*}(\mathcal{F}_{R,\tau}(t, v), \mathcal{A}(v)) < \varepsilon(1 + \|v\|^{p-1}). \quad (22)$$

Пусть $y \in \mathfrak{B}$, $R > R_1(\varepsilon)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $f(t)$ – измеримое сечение многозначного отображения $\mathcal{F}_{R,\tau}(t, y(t))$. Из оценки (22) следует соотношение

$$\theta_{V^*}(f(t), \mathcal{A}(y(t))) < \varepsilon(1 + \|y(t)\|^{p-1}). \quad (23)$$

Применяя (23) и известные результаты об измеримом выборе [21], найдем такое измеримое сечение $z(t)$ многозначного отображения $t \rightarrow \mathcal{A}(y(t))$, что $\|f(t) - z(t)\| < \varepsilon(1 + \|y(t)\|^{p-1})$. Это неравенство и условие $\|y; \text{BS}^p\| \leq 1$ влекут оценки

$$\|f - z; \text{BS}^q\| < 2\varepsilon, \quad \theta_{\text{BS}^q(\mathbb{R}, V^*)}(F_{R,\tau}(y), A(y)) \leq 2\varepsilon$$

при $R > R_1(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Из равенства (18) и включения $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_p(V)$ вытекает оценка

$$(v, v^*) + \varkappa_0 |v|^p \geq \varkappa_1 \|v\|^p - \varkappa_2, \quad (24)$$

в которой $v \in V$, $v^* \in \mathcal{F}_{R,\tau}(t, v)$, $\varkappa_i$ – положительные константы, не зависящие от t, v, τ, R . Если y – ограниченное решение включения (20), то $y' = -z$, где $z(t) \in \mathcal{F}_{R,\tau}(t, y(t))$ п.в. В этом случае

$$\frac{1}{2}(|y(t)|^2)' = -(y(t), z(t)) \leq \varkappa_0 |y(t)|^p - \varkappa_1 \|y(t)\|^p - \varkappa_2$$

и, следовательно,

$$\varkappa_1 \int_{t_0}^{t_1} \|y(t)\|^p dt \leq \varkappa_0 \int_{t_0}^{t_1} |y(t)|^p dt - \varkappa_2(t_1 - t_0) - \frac{|y(t_1)|^2 - |y(t_0)|^2}{2}.$$

Последнее неравенство влечет включение $y \in \text{BS}^p(\mathbb{R}, V)$ и оценку $\|y; \text{BS}^p\| \leq \psi(\|y; C_b(\mathbb{R}, H)\|)$, где $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – возрастающая функция, зависящая лишь от фигурирующих в (24) постоянных $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$. Таким образом, ограниченное решение включения (20) автоматически оказывается и ограниченным по Степанову; функция ψ характеризует связь норм решений y в пространствах $C_b(\mathbb{R}, H)$ и $\text{BS}^p(\mathbb{R}, V)$.

Существование ограниченных решений дифференциального включения (9) может быть доказано с помощью метода Галёркина. Пусть E_n – исчерпывающая V последовательность конечномерных пространств, наделенных индуцированной из H евклидовой структурой, $j_n: E_n \rightarrow V$ – оператор вложения, $j_n^*: V^* \rightarrow E_n$ – сопряженный к нему оператор. Рассматриваются аппроксимации Галёркина вида

$$0 \in u' + j_n^* F(j_n u). \quad (25)$$

Под ограниченным решением включения (25) понимается абсолютно непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция $u: \mathbb{R} \rightarrow E_n$, для которой $0 \in u'(t) + j_n^* \mathcal{F}(t, u(t))$ п.в. на $\mathbb{R}$. Для подобных решений справедлива оценка $\|u; \text{BS}^p\| \leq \psi(\|u; C_b(\mathbb{R}, H)\|)$; предшествующие рассуждения сохраняют силу. Важно заметить, что функция ψ не зависит от n .

ЛЕММА 4. Пусть выполнено неравенство (24) и $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(V)$. Пусть для каждого n включение (25) имеет ограниченное решение u_n . Тогда и включение (9) имеет ограниченное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R_n = \|u_n; C_b(\mathbb{R}, H)\|$ и установим ограниченность последовательности R_n . В предположении противного можно без ограничения общности считать, что $R_n \rightarrow \infty$ и $R_n > 1$. Фиксируем $\tau_n \in \mathbb{R}$ таким, что $|u_n(\tau_n)| > R_n/2$. Положим

$$y_n(t) = \frac{u_n(\tau_n + R_n^{2-p}t)}{R_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, $\|y_n; C_b(\mathbb{R}, H)\| = 1$, $|y_n(0)| > 1/2$ и y_n – решение дифференциального включения

$$0 \in y'_n + j_n^* F_{R_n, \tau_n}(j_n y_n). \quad (26)$$

Из (26) вытекает оценка $\|y_n; BS^p\| \leq \psi(1)$ и равенство $0 = y'_n + j_n^* f_n$, где $f_n \in F_{R_n, \tau_n}(j_n y_n)$.

В силу леммы 3 $\theta_{BS^q}(f_n, A(y_n)) \rightarrow 0$; включение $0 \in y' + j_n^* f_n$ аналогично включению (11) и возникает при замене F на A . Не ограничивая общности, можно считать, что для любого отрезка $T = [\alpha, \omega] \subset \mathbb{R}$ выполнены соотношения $y_n \rightarrow y$ в $\sigma(Y(T), Z(T))$, $z_n \rightarrow z$ в $\sigma(Z(T), Y(T))$. Из леммы 1 следует тогда, что предельная функция y есть решение дифференциального включения (17) и $(t - \alpha)y_n(t) \rightarrow (t - \alpha)y(t)$ в $C(T, H)$. Полагая $\alpha = -1$, $\omega = 1$, получаем, что $y_n(0) \rightarrow y(0)$ в H , поэтому $|y(0)| \geq 1/2$, т.е. y – ненулевое решение включения (17). Это противоречит условию $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(V)$. Полученное противоречие доказывает ограниченность последовательности u_n в пространстве $C_b(\mathbb{R}, H)$: $\|u_n; C_b(\mathbb{R}, H)\| \leq R_0$. Последовательность u_n ограничена и в пространстве $BS^p(R, V)$: $\|u_n; BS^p\| \leq \psi(R_0)$.

Можно считать, что $u_n \rightarrow u$ в $\sigma(Y(T), Z(T))$ для любого отрезка T , $u'_n = -j_n^* g_n$, $g_n \in F(u_n)$ и $g_n \rightarrow g$ в $\sigma(Z(T), Y(T))$. Снова применяя лемму 1, получаем, что u – решение включения (9) и $\|u; C_b(\mathbb{R}, H)\| \leq R_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(V)$, то $j_n^* \mathcal{A} j_n \in \mathfrak{N}_p(E_n)$ при достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположении противного для бесконечного числа индексов n включение $0 \in u' + j_n^* \mathcal{A}(j_n u)$ имеет ненулевое ограниченное решение u_n . Будем считать, что это верно при любом n , и положим $R_n = \|u_n; C_b(\mathbb{R}, H)\|$. Подберем τ_n так, что $|u_n(\tau_n)| > R_n/2$. Вектор-функция $y_n(t) = (1/R_n)u_n(\tau_n + R_n^{2-p}t)$ удовлетворяет соотношениям $0 \in y'_n + j_n^* \mathcal{A}(j_n y_n)$, $|y_n(0)| > 1/2$, $|y_n(t)| \leq 1$. Отсюда вытекает ограниченность последовательности y_n в пространствах $C_b(\mathbb{R}, H)$, $BS^p(\mathbb{R}, V)$. Без ограничения общности можно считать, что $y_n \rightarrow y$ в $\sigma(Y(T), Z(T))$ для любого отрезка $T \subset \mathbb{R}$. В силу леммы 1 y – ограниченное решение дифференциального включения (17), при этом $y_n(0) \rightarrow y(0)$ в метрике H , следовательно, $|y(0)| \geq 1/2$. Таким образом, y есть ненулевое ограниченное решение включения (17), а это противоречит условию $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(V)$. Лемма доказана.

5. Пусть E – конечномерное евклидово пространство, $(\cdot, \cdot)$ и $|\cdot|$ – скалярное произведение и евклидова норма в пространстве E , $E^2 = E \times E$ – прямое произведение евклидова пространства E на себя, $\theta_{E^2}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ – уклонение множества $\mathcal{M}_1$ от множества $\mathcal{M}_2$ в метрике пространства E^2 . Изучается дифференциальное включение (9), где $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times E \rightarrow \text{Cv } E$ – многозначное отображение, удовлетворяющее условиям I), II) (с естественной заменой пространств V, H, V^* пространством E ; аналогичное замечание относится и к последующим конструкциям).

Как нетрудно видеть, оператор $\mathcal{A}: E \rightarrow \text{Cv } E$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_p(E)$, если и только если он полунепрерывен сверху и $(p-1)$ -однороден. Через $\theta(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, $\mathcal{A}_i \in \mathfrak{M}_p(E)$, будем обозначать уклонение $\theta_{E^2}(\text{Gr } \mathcal{A}_1, \text{Gr } \mathcal{A}_2)$ графика $\text{Gr } \mathcal{A}_1$ оператора $\mathcal{A}_1$ на шаре $\{v: |v| \leq 1\}$ от графика $\text{Gr } \mathcal{A}_2$ оператора $\mathcal{A}_2$ на том же шаре. Отметим некоторые свойства уклонения. Справедлив вариант неравенства треугольника:

$$\theta(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \leq \theta(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) + \theta(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2), \quad \mathcal{A}_i \in \mathfrak{M}_p(E), \quad i = 1, 2, 3.$$

Множество однозначных операторов плотно в $\mathfrak{M}_p(E)$: для каждого оператора $\mathcal{A}$ из $\mathfrak{M}_p(E)$ и каждого $\delta > 0$ существует такой однозначный оператор $\mathcal{A}^\delta$ из $\mathfrak{M}_p(E)$, что $\theta(\mathcal{A}^\delta, \mathcal{A}) < \delta$. Если $\theta(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $\mathcal{B}_i = \text{co}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A})$ ($\mathcal{B}_i(v) = \text{co}(\mathcal{A}_i(v) \cup \mathcal{A}(v))$), то $\theta(\mathcal{B}_i, \mathcal{A}) \rightarrow 0$. Как и в п. 4, $\mathfrak{N}_p(E)$ – часть $\mathfrak{M}_p(E)$, состоящая из таких операторов $\mathcal{A}$, что дифференциальное включение (17) не имеет ненулевых ограниченных решений. Класс $\mathfrak{N}_p(E)$ устойчив по отношению к малым уклонениям. Более точно, справедлива

ЛЕММА 6. Пусть $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{N}_p(E)$. Тогда найдется такое $\delta = \delta(\mathcal{A}_0) > 0$, что если $\theta(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0) < \delta$, то $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположении противного для любого натурального числа n найдется такой оператор $\mathcal{A}_n$ из $\mathfrak{M}_p(E)$, что $\theta(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_0) < 1/n$, и в то же время существует ненулевое решение u_n включения $0 \in u' + \mathcal{A}_n(u)$, $\|u_n; C_b(R, E)\| = R_n < \infty$. Не ограничивая общности (см. доказательство леммы 5), можно считать, что $R_n = 1$, $|u_n(0)| > 1/2$ и последовательность u_n сходится к некоторой функции $u: \mathbb{R} \rightarrow E$ равномерно на каждом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}$. Предельная функция u ограничена: $|u(t)| \leq 1$, отлична от нуля: $|u(0)| \geq 1/2$, и согласно лемме 1 является решением включения $0 \in u' + \mathcal{A}_0(u)$. Но это противоречит условию $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{N}_p(E)$. Лемма доказана.

Будем говорить, что семейство операторов $\mathcal{A}_\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, соединяет операторы $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ класса $\mathfrak{N}_p(E)$, если $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{N}_p(E) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ и $\theta(\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\lambda) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \lambda$; операторы $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ назовем *гомотопными* в классе $\mathfrak{N}_p(E)$. Отношение гомотопности есть эквивалентность. Соответствующие классы эквивалентности назовем *компонентами множества* $\mathfrak{N}_p(E)$. Из леммы 6 следует, что в каждой компоненте $\mathfrak{N}_p(E)$ имеется однозначный оператор.

Обозначим через $\mathfrak{K}_p(E)$ совокупность таких операторов $\mathcal{A}$ класса $\mathfrak{N}_p(E)$, что для любого многозначного отображения $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, удовлетворяющего условиям I), II) и равенству (18), включение (9) имеет ограниченное решение.

ЛЕММА 7. Однозначный оператор $\mathcal{A}$ класса $\mathfrak{N}_p(E)$ принадлежит классу $\mathfrak{K}_p(E)$ в том и только том случае, если он обладает свойством

$(k)_p$ для любого непрерывного отображения $f: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, удовлетворяющего условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{p-1}} \sup_{|v| \leq R, t} |f(t, v) - \mathcal{A}(v)| = 0, \quad (27)$$

дифференциальное уравнение $0 = u' + f(t, u)$ имеет ограниченное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость свойства $(k)_p$ для справедливости включения $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_p(E)$ очевидна. Остановимся на доказательстве достаточности. Пусть оператор $\mathcal{A}$ обладает свойством $(k)_p$; $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times E \rightarrow \text{Cv } E$ – многозначное отображение, удовлетворяющее условиям I), II) и равенству (18). Для каждого $\varepsilon > 0$ существует однозначная и непрерывная ε -аппроксимация $f_\varepsilon: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ отображения $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times E \rightarrow \text{Cv } E$, $\theta_{E^2}(f_\varepsilon, \text{Gr } \mathcal{F}) < \varepsilon$ [4]. Отсюда легко выводится, что при любом $\varepsilon > 0$ отображение $f = f_\varepsilon$ удовлетворяет условию (27). Поэтому существуют ограниченные решения x_ε дифференциальных уравнений $0 = x' + f_\varepsilon(t, x)$. Используя включение $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(E)$, можно по обычной схеме [5, с. 331–337] установить оценку $|x_\varepsilon(t)| < R_0$, константа R_0 не зависит от t и ε . Семейство функций $x_\varepsilon(t)$, $0 < \varepsilon < 1$, равномерно ограничено и равномерно непрерывно на прямой $\mathbb{R}$. Если $x(t)$ – предельная для семейства $x_\varepsilon(t)$ функция (в топологии равномерной сходимости на компактах), то $|x(t)| \leq R_0$ и x есть решение включения (9). Лемма доказана.

Свойство $(k)_p$ было введено и изучено в статье [8]; там же указаны широкие достаточные условия для включения $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_p(E)$, $\mathcal{A}$ – однозначный оператор класса $\mathfrak{N}_p(E)$. Ниже результаты [8] переносятся на многозначные операторы.

ЛЕММА 8. Если $A_0 \in \mathfrak{K}_p(E)$, $\text{co}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) \in \mathfrak{N}_p(E)$, то $\mathcal{A}_1 \in \mathfrak{K}_p(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A} = \text{co}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$, многозначное отображение $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times E \rightarrow \text{Cv } E$ удовлетворяет условиям I), II) и равномерно асимптотически близко к оператору $\mathcal{A}_1$. Многозначное отображение $\mathcal{F}_1(t, v) = \text{co}(\mathcal{F}(t, v), \mathcal{A}_0(v))$ равномерно асимптотически близко к оператору $\mathcal{A}$ класса $\mathfrak{N}_p(E)$, поэтому совокупность ограниченных решений x дифференциального включения $0 \in x' + \mathcal{F}_1(t, x)$ есть ограниченное в $C_b(\mathbb{R}, E)$ множество: $\|x; C_b(\mathbb{R}, E)\| < R_0$. В частности, подобная оценка верна для ограниченных решений дифференциальных включений вида

$$0 \in u' + \varphi(|u|)\mathcal{F}(t, u) + (1 - \varphi(|u|))\mathcal{A}_0(u), \quad (28)$$

где $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ – финитные непрерывные функции.

Пусть $\varphi(s) = 1$ при $0 \leq s \leq R_0$, $0 < \varphi(s) < 1$ при $R_0 < s < R_0 + 1$ и $\varphi(s) = 0$ при $s > R_0 + 1$. Отображение $\varphi(|v|)\mathcal{F}(t, v) + (1 - \varphi(|v|))\mathcal{A}_0(v)$ равномерно асимптотически близко к оператору $\mathcal{A}_0$ класса $\mathfrak{K}_p(E)$, поэтому включение (28) имеет решение x , для которого $|x(t)| \leq R_0$. Следовательно, $1 = \varphi(|x(t)|)$, поэтому x есть решения включения (9). Лемма доказана.

Ее усилением является

ТЕОРЕМА 4. Если операторы $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ гомотопны в классе $\mathfrak{N}_p(E)$ и $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{K}_p(E)$, то $\mathcal{A}_1 \in \mathfrak{K}_p(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, – семейство операторов класса $\mathfrak{N}_p(E)$, соединяющее $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$. Множество $\Lambda = \{\lambda \in [0, 1], \mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{K}_p(E)\}$ содержит нуль, поэтому непусто. Если $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in [0, 1]$ и $|\lambda - \mu| < \delta$, то при достаточно малых δ в силу леммы 6 $\text{co}(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_\mu) \in \mathfrak{N}_p(E)$. Согласно лемме 8 $\mathcal{A}_\mu \in \mathfrak{K}_p(E)$, т.е. $\mu \in \Lambda$ и, таким образом, Λ – открытое множество в $[0, 1]$. Если $\lambda_i \in \Lambda$ и $\lambda_i \rightarrow \lambda$, то $\text{co}(\mathcal{A}_{\lambda_i}, \mathcal{A}_\lambda) \in \mathfrak{N}_p(E)$ при больших i , следовательно, $\lambda \in \Lambda$. Итак, $\Lambda = [0, 1]$, в частности, $\mathcal{A}_1 \in \mathfrak{K}_p(E)$. Теорема доказана.

Теорема 4 означает, что каждая компонента $\mathfrak{N}_p(E)$ либо вся входит в класс $\mathfrak{K}_p(E)$, либо не пересекается с этим классом. В первом случае соответствующую компоненту назовем, следуя [8], *компонентой существования*. Очевидно, в каждой компоненте существования найдется однозначный оператор класса $\mathfrak{K}_p(E)$.

ЛЕММА 9. Пусть $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(E)$ и $\text{ind}(0, \mathcal{A}) \neq 0$. Тогда $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_p(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_0$ – однозначный оператор класса $\mathfrak{N}_p(E)$, гомотопный оператору $\mathcal{A}$. Тогда $\text{ind}(0, \mathcal{A}_0) = \text{ind}(0, \mathcal{A}) \neq 0$. В силу известных результатов [5, § 14], [8] $\mathcal{A}_0$ обладает свойством $(k)_p$, поэтому согласно теореме 4 и лемме 7 $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_p(E)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [8]. Пусть $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая 2-однородная невырожденная функция и множество $\mathfrak{X} = \{v \in E, |v| = 1, \Phi(v) < 0\}$ нестягиваемо по себе в точку. Тогда $\nabla \Phi \in \mathfrak{K}_2(E)$.

6. Обобщим результаты предшествующего пункта на случай бесконечномерного пространства V . Пусть многозначное отображение $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times V \rightarrow V^*$ удовлетворяет условиям I), II), порождаемый $\mathcal{F}$ оператор суперпозиции F принадлежит классу $\alpha_1(Y(T), Z(T))$ для любого отрезка $T \subset \mathbb{R}$ и, наконец, выполнено условие (18) равномерной асимптотической однородности $\mathcal{F}$ с некоторым оператором $\mathcal{A}$ класса $\mathfrak{M}_p(V)$, $1 < p < \infty$. При этих предположениях справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(V)$ и $\text{ind}(0, \mathcal{A}) \neq 0$. Тогда дифференциальное включение (9) имеет ограниченное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E_n – исчерпывающая V последовательность конечномерных подпространств, j_n , j_n^* – порождаемые E_n операторы. В силу леммы 5 и определения индекса найдется такой номер n_0 , что $j_n^* \mathcal{A} j_n \in \mathfrak{N}_p(E_n)$ и $\text{ind}(0, j_n^* \mathcal{A} j_n) = \text{ind}(0, \mathcal{A}) \neq 0$ при $n > n_0$. Согласно лемме 9 $j_n^* \mathcal{A} j_n \in \mathfrak{K}_p(E_n)$, поэтому включение вида (25) имеет ограниченное решение при $n > n_0$. Теперь существование ограниченного решения дифференциального включения (9) вытекает из леммы 4. Теорема доказана.

Остановимся на бесконечномерном варианте предложения 4. Напомним, что метрическое пространство $\mathfrak{X}$ называют *гомологически тривиальным*, если его группы гомологий изоморфны группам гомологий одноточечного пространства, и *гомологически нетривиальным* в противном случае.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_2(V)$, $\mathcal{A}$ – потенциальный оператор с гладким потенциалом Φ , $\Phi(0) = 0$, и метрическое пространство $\mathfrak{X} = \{v \in V, \|v\| = 1, \Phi(v) < 0\}$ гомологически нетривиально. Тогда включение (9) имеет ограниченное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 и леммы 5 найдется такой индекс n_0 , что пространство $\mathfrak{R} \cap E_n$ гомологически нетривиально и $j_n^* \mathcal{A} j_n \in \mathfrak{N}_p(E_n)$ при $n > n_0$. В частности, пространство $\mathfrak{R} \cap E_n = \{v \in E_n, \|v\| = 1, \Phi(v) < 0\}$ нестягиваемо, поэтому $j_n^* \mathcal{A} j_n \in \mathfrak{K}_p(E_n)$. Следовательно, дифференциальное включение (25) имеет ограниченное решение при $n > n_0$. Теперь требуемый результат вытекает из леммы 4. Теорема доказана.

Полезно заметить, что в условиях теоремы 6 может выполняться равенство $\text{ind}(0, \mathcal{A}) = 0$. Такого рода примеры для конечномерного пространства V рассмотрены в [8]. Отметим определенную аналогию теорем 1 и 5. В условиях теоремы 1 гарантируется существование стационарного решения автономного дифференциального включения $0 \in y' + \mathcal{F}(y)$.

Для применения теорем 5, 6 желательно располагать примерами операторов класса $\mathfrak{N}_p(V)$. Сравнительно просто подобные примеры конструируются для потенциальных операторов.

ЛЕММА 10. Пусть $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкий p -однородный невырожденный функционал и $\Phi' \in \mathfrak{M}_p(V)$, $p \geq 2$. Тогда $\Phi' \in \mathfrak{N}_p(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y_0 – ограниченное решение дифференциального уравнения $0 = y' + \Phi'(y)$. Докажем равенство $y_0(t) = 0$. Вначале установим, что при любом α из $\mathbb{R}$ $y_0(t)$ – единственное решение задачи Коши $0 = y' + \Phi'(y)$, $y(\alpha) = y_0(\alpha)$. Действительно, если $y_1(t)$ – еще одно решение этой же задачи, то разность $u(t) = y_1(t) - y_0(t)$ удовлетворяет соотношениям $u'(t) = \Phi'(y_0) - \Phi'(y_1)$, $u(\alpha) = 0$. Используя равенство $(|u(t)|^2)' = 2(u(t), u'(t))$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{|u(t)|^2}{2} &= \int_{\alpha}^t (y_1(s) - y_0(s), \Phi'(y_0(s)) - \Phi'(y_1(s))) ds \leq k_0 \int_{\alpha}^t |u(s)|^p ds \\ &\quad - k_1 \int_{\alpha}^t \|u(s)\|^p ds \leq k_0 \int_{\alpha}^t |u(s)|^p ds, \quad t > \alpha, \end{aligned}$$

откуда вытекает равенство $u(t) = 0$, т.е. $y_1(t) = y_0(t)$.

Фиксируем $\alpha \in \mathbb{R}$ так, что $y_0(\alpha) \in V$. Пусть E_n , j_n , j_n^* – пространства и операторы, фигурирующие в методе Галёркина. Подберем последовательность h_n из E_n , сходящуюся к $y_0(\alpha)$ в метрике V .

Рассмотрим задачу Коши

$$0 = y' + j_n^* \Phi'(j_n y), \quad y(\alpha) = h_n. \quad (29)$$

Для каждого отрезка $T = [\alpha, \omega]$ найдется номер $N = N(T)$ такой, что при $n > N(T)$ задача Коши (29) имеет решение $y_n(t)$, $\alpha \leq t \leq \omega$; если $z_n(t) = \Phi'(y_n(t))$, $z_0(t) = \Phi'(y_0(t))$, то в силу леммы 2 и результатов работы [17]

$$\begin{aligned} y_n &\rightarrow y_0 \text{ в } L^p(T, V) \cap C(T, H), \quad z_n \rightarrow z_0 \text{ в } L^q(T, V^*), \\ y_n(t) &\rightarrow y_0(t) \text{ в } V \text{ п.в. на } T, \quad z_n(t) \rightarrow z_0(t) \text{ в } V^* \text{ п.в. на } T. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $y'_n = -j_n^* z_n$, то $(\Phi(y_n))' = -|j_n^* z_n|^2$ и

$$\Phi(y_n(t)) - \Phi(y_n(\alpha)) = - \int_{\alpha}^t |j_n^* z_n(s)|^2 ds. \quad (31)$$

С другой стороны,

$$p\Phi(y_n) = (y_n, \Phi'(y_n)) = (y_n, z_n) \geq k_1 \|y_n\|^p - k_0 |y_n|^p,$$

следовательно,

$$k_1 \|y_n(t)\|^p \leq k_0 |y_n(t)|^p + p\Phi(y_n(t)) \leq k_0 |y_n(t)|^p + p\Phi(y_n(\alpha)).$$

Поэтому последовательность $\|y_n(t)\|$ ограничена: $\|y_n(t)\| \leq R_1$; последовательность $z_n(t)$ ограничена в пространстве V^* : $\|z_n(t)\|_* \leq R_2$. В дополнение к (30) можно считать, что $y_n \rightarrow y$ в $C_w(T, V)$. Проведенные рассуждения показывают, в частности, что в качестве α можно взять любое число из $\mathbb{R}$.

Имеем далее

$$|p\Phi(y_n)| = |(y_n, z_n)| \leq |j_n y_n| |j_n^* z_n| \leq c_n |j_n^* z_n|,$$

где $c_n = \|y_n; C(T, H)\| + 1$. Неравенство (31) и последняя оценка приводят к соотношению

$$\Phi(y_n(t)) - \Phi(y_n(\alpha)) \leq - \int_{\alpha}^t \frac{p^2}{c_n^2} \Phi^2(y_n(s)) ds.$$

Поскольку $y_n(t) \rightarrow y_0(t)$ в $\sigma(V, V^*)$, $y_n(\alpha) \rightarrow y(\alpha)$ в V , а последовательность $\Phi(y_n(s))$ сходится почти всюду к $\Phi(y_0(s))$ и ограничена, то в пределе получаем оценку

$$\Phi(y_0(t)) - \Phi(y_0(\alpha)) \leq - \int_{\alpha}^t \frac{p^2}{c^2} \Phi^2(y_0(s)) ds, \quad (32)$$

в которой $c = \|y_0; C(T, H)\| + 1$. Оценка (32) верна для любых $t > \alpha$. Из нее без труда вытекает равенство $\Phi(y_0(t)) = 0$. Но тогда

$$0 = \Phi(y_0(\omega)) - \Phi(y_0(\alpha)) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\omega} |j_n^* z_n(s)|^2 ds,$$

в частности, $j_n^* z_n(s) \rightarrow 0$ в H почти при всех s . Если $j_n^* z_n(s_0) \rightarrow 0$ в H , то для любого v из E_k при $n > k$ имеем $(v, z_n(s_0)) = (v, j_n^* z_n(s_0)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как объединение пространств E_k , $k = 1, 2, \dots$, всюду плотно в пространстве V , то $z_n(s_0) \rightarrow 0$ в $\sigma(V^*, V)$. Из проведенных рассуждений следует равенство $z_0(t) = \Phi'(y_0(t)) = 0$ п.в. Поскольку Φ – невырожденный функционал, то $y_0(t) \equiv 0$. Лемма доказана.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим параболическое уравнение с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + (b - \lambda c) |y|^{p-2} y + g \left(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0, \quad (33)$$

где $x \in \Omega = (0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in C^1(\overline{\Omega})$, $a(x) > 0$, $b \in C(\overline{\Omega})$, $b(x) \geq 0$, $c \in C(\overline{\Omega})$, $c(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(t, x, \eta, \xi)$ – функция, определенная и непрерывная на $\mathbb{R} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$,

$$|g(t, x, \eta, \xi)| \leq \text{const}(1 + |\eta|^r + |\xi|^r), \quad (34)$$

$2 \leq p < \infty$, $1 < r < p - 1$. Применим предшествующие результаты, считая, что V есть пространство Соболева $\mathring{L}_p^1(\Omega)$ функций $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих нулевому граничному условию: $v|_{\partial\Omega} = 0$, $H = L^2(\Omega)$. Пара пространств V, H однозначно определяет соответствующие им пространства $\text{BS}^p(\mathbb{R}, V)$, $C_b(\mathbb{R}, H)$, которые могут быть интерпретированы как пространства функций на полосе $\Omega \times \mathbb{R}$; функции y из $\text{BS}^p(\mathbb{R}, V)$ удовлетворяют нулевому граничному условию

$$y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Под ограниченным решением задачи (33), (35) понимается ограниченное решение включения (9), где однозначное отображение $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times V \rightarrow V^*$ определяется равенством

$$(w, \mathcal{F}(t, v)) = \int_{\Omega} (w' a |v'|^{p-2} v' + w(b - \lambda c) |v|^{p-2} v + w g(t, x, v, v')) dx \quad \forall w \in V.$$

В силу результатов работы [18] порождаемый $\mathcal{F}$ оператор суперпозиции F принадлежит классу $\alpha_1(Y(T), Z(T))$ для любого отрезка $T \subset \mathbb{R}$. Из оценки (34) вытекает, что отображение $\mathcal{F}$ равномерно асимптотически однородно, его главная часть $\mathcal{A}: V \rightarrow V^*$ определена равенством

$$(w, \mathcal{A}(v)) = \int_{\Omega} (w a |v'|^{p-2} v' + w(b - \lambda c) |v|^{p-2} v) dx \quad \forall w \in V.$$

Оператор $\mathcal{A}$ потенциален. Ненулевые особые точки $\mathcal{A}$ являются ненулевыми решениями нелинейной краевой задачи

$$-(a |u'|^{p-2} u')' + (b - \lambda c) |u|^{p-2} u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0; \quad (36)$$

числа λ называют *собственными значениями* задачи (36). Наименьшее собственное значение $\lambda_1 > 0$. Если $\lambda_1 c(x) - b(x) > 0$, то у задачи (36) точно счетное множество собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, причем $\lambda_n \rightarrow \infty$ [22].

При сформулированных выше предположениях относительно функций a, b, c, g справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Если $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, то задача (33), (35) имеет ограниченное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, то $\mathcal{A}$ – регулярный на ∞ потенциальный оператор. Согласно лемме 10 $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_p(V)$, а так как $\mathcal{A}$ – нечетный оператор, то $\text{ind}(0, \mathcal{A}) \neq 0$. Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 5. Теорема доказана.

При $\lambda \gg 1$ оператор $\mathcal{A}$ немонотонен. Следовательно, в отличие от [23], [24] наши результаты применимы к параболическим уравнениям с немонотонной главной частью. Аналогичные теореме 7 утверждения имеют место для широкого класса параболических уравнений (здесь оказываются полезными установленные в [25] обобщения результатов статьи [22]).

Развитая выше схема применима и к задаче о периодических решениях дифференциального включения (9). Не останавливаясь на формулировках бесконечномерных многозначных аналогов известных результатов (см., например, [5, с. 331–338]), отметим, что если в условиях теоремы 7 функция g периодична по t , то задача (33), (35) имеет ограниченное решение того же периода.

Список литературы

1. *Потожаев С. И.* О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 66–73.
2. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
3. *Browder F. E.* Nonlinear elliptic boundary value problems and the generalized topological degree // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. № 5. P. 999–1005.
4. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обутовский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.
5. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
6. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наук. думка, 1973.
7. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
8. *Мухамадиев Э.* Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 5. С. 596–598.
9. *Климов В. С.* О топологических характеристиках негладких функционалов // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 117–134.
10. *Масси У.* Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
11. *Стинрод Н., Эйленберг С.* Основания алгебраической топологии. М.: ИЛ, 1958.
12. *Гаевский Г., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
13. *Климов В. С.* К задаче о периодических решениях операторных дифференциальных включений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 309–327.
14. *Климов В. С., Сенчакова Н. В.* Об относительном вращении многозначных векторных полей // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 10. С. 1393–1407.
15. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
16. *Скрыпник И. В.* Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений // Современные проблемы математики. 1976. Т. 9. С. 131–254.
17. *Климов В. С.* Эволюционные параболические неравенства с многозначными операторами // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 37–54.
18. *Климов В. С.* Об операторе сдвига по траекториям параболических включений // Дифф. уравн. 1995. Т. 31. № 10. С. 1719–1724.
19. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики. 1976. Т. 9. С. 5–130.
20. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
21. *Castaing C., Valadier M.* Convex analysis and measurable multifunctions // Lecture Notes in Math. № 580. Berlin: Springer, 1977.
22. *Нечас И.* О дискретности спектра нелинейного уравнения Штурма–Лиувилля // ДАН СССР. 1971. Т. 201. № 5. С. 1045–1048.
23. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
24. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1985.
25. *Fučík S., Nečas J., Souček J., Souček V.* Spectral analysis of nonlinear operators // Lecture Notes in Mathematics. № 346. Berlin: Springer, 1973.

Поступило в редакцию
21.XII.1998