Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Одинокое, Спектральный синтез в некоторых пространствах целых функций экспоненциального типа и его применения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 4, 131–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:48:28

УДК 517.55

О. В. Одинокоев

Спектральный синтез в некоторых пространствах целых функций экспоненциального типа и его применения

Рассматриваются некоторые пространства P_Ω целых функций экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, ассоциируемые с областью $\Omega \in \mathbb{R}^n$ и, фактически, являющиеся преобразованиями Лапласа распределений в Ω . Показано, что любое подпространство таких функций, инвариантное относительно сдвига, допускает спектральный синтез, т.е. совпадает с замыканием линейной оболочки экспоненциальных полиномов, содержащихся в нем. В качестве приложения результата описано пространство решений из P_Ω системы однородных уравнений для дифференциальных операторов бесконечного порядка с бесконечно дифференцируемыми в Ω характеристическими функциями.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Введение

Пусть Ω – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Через $E(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций в Ω с топологией локально равномерной сходимости функций вместе со всеми частными производными. Через $E'(\Omega)$ обозначим сопряженное с $E(\Omega)$ пространство, т.е. пространство распределений с компактным носителем в Ω . Далее мы покажем, что любой функционал $F \in E'(\Omega)$ может быть записан в “интегральном” виде:

$$F(f) = (F, f) = \int_{\Omega} P(D, x) f(x) d\mu(x), \quad (1.1)$$

где $f(x) \in E(\Omega)$, $P(\xi, x)$ – μ -интегрируемая по x функция и полином по $\xi \in \mathbb{R}^n$, $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, μ – борелева мера с компактным носителем в Ω . То, что для произвольных фиксированных μ и P равенство (1.1) определяет элемент $E'(\Omega)$, – очевидно.

Рассмотрим так называемое преобразование Лапласа L , которое каждому распределению F ставит в соответствие функцию $\hat{F}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, по правилу

$$\hat{F}(\lambda) = F(e^{\langle \lambda, x \rangle}) = \int_{\Omega} e^{\langle \lambda, x \rangle} P(\lambda, x) d\mu(x),$$

где μ и P – соответственно мера и функция, определяющие распределение F по формуле (1.1). Через P_Ω обозначим пространство функций $\{\hat{F}(\lambda)\}$, $F \in E'(\Omega)$. Элементы P_Ω – целые функции экспоненциального типа. Действительно, если $\hat{F}(\lambda) \in P_\Omega$, то

$$\begin{aligned} |\hat{F}(\lambda)| &= \left| \int_{\Omega} e^{\langle \lambda, x \rangle} P(\lambda, x) d\mu(x) \right| \leq \exp(H_K(\operatorname{Re} \lambda)) \left| \int_{\Omega} P(\lambda, x) d\mu(x) \right| \\ &\leq C(1 + |\lambda|)^N \exp(H_K(\operatorname{Re} \lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Здесь H_K – опорная функция выпуклого компакта K из Ω , содержащего носитель меры μ , N – степень полинома $P(\lambda, x)$ по λ .

Кроме того, из теоремы Пэли–Винера–Шварца [1] следует, что P_Ω можно независимо определить следующим образом. Пусть K – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, N – целое неотрицательное число:

$$P_{K,N} = \left\{ u(z) \in H(\mathbb{C}^n) : \|u\| = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |u(z)|(1 + |z|)^{-N} \exp(-H_K(\operatorname{Re} z)) < \infty \right\},$$

$$\tilde{P}_\Omega = \limind_{K \subset \subset \Omega} \limind_{N \nearrow \infty} P_{K,N}$$

($\limind$ – индуктивный предел пространств).

Теорема Пэли–Винера–Шварца фактически утверждает, что $P_\Omega = \tilde{P}_\Omega$. В дальнейшем мы сохраним эти два обозначения одного и того же пространства, чтобы различать вышеуказанные два подхода к его определению.

В [2] рассматривались пространства P_B , когда B – область Рунге в $\mathbb{C}^n$ и P_B – пространство преобразований Лапласа аналитических функционалов в области B . Было показано, что любое подпространство из P_B , инвариантное относительно сдвига, допускает спектральный синтез, т.е. оно совпадает с замыканием линейной оболочки экспоненциальных полиномов, содержащихся в нем. В той же работе в качестве приложения этого результата описывалось множество решений из пространства P_B системы однородных дифференциальных уравнений бесконечного порядка:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha^j D_z^\alpha u(z) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (1.2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, c_α^j – постоянные, $D_z^\alpha = (\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}})$; характеристические функции уравнений (1.2), $A_j(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha^j \zeta^\alpha$ – аналитические в области B функции. Заметим, что такие операторы бесконечного порядка, корректность определения их действия на функции из P_B , образуемая ими алгебра и другие вопросы подробно изучены в работах Ю. А. Дубинского (см., например, [3]).

Цель данной работы – получить аналогичный вышеизложенному результат о спектральном синтезе в пространствах P_Ω , а также рассмотреть приложения этого результата к системам однородных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с характеристическими функциями из $E(\Omega)$ в пространстве $\tilde{P}_\Omega$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Прежде всего покажем, что любое распределение F с компактным носителем можно представить в виде

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} P(D, x) \varphi(x) d\mu(x),$$

где φ – бесконечно дифференцируемая функция в Ω , μ – некоторая мера с компактным носителем (вообще говоря, содержащим носитель распределения), $P(\xi, x)$ – μ -интегрируемая по x функция, являющаяся полиномом по ξ .

Действительно, известна следующая структурная теорема для распределений с компактным носителем в области Ω (см., например, [4]).

ТЕОРЕМА 1. *Распределение F с компактным носителем всегда имеет конечный порядок сингулярности m .*

Пусть компакт G содержит носитель распределения F ($\text{supp } F \subset \subset G$). Тогда существуют число $m' \geq m$ и набор мер $\{\mu_\alpha\}$, $|\alpha| \leq m'$ (α – мульти-индекс), такие, что

$$F = \sum_{|\alpha| \leq m'} D^\alpha \mu_\alpha. \quad (2.1)$$

При этом $\text{supp } \mu_\alpha \subset \subset G$.

Далее воспользуемся схемой, примененной в доказательстве теоремы 1 из [5]. Рассмотрим меру $\mu = \sum_{|\alpha| \leq m'} |\mu_\alpha|$. Очевидно, что $\text{supp } \mu \subset \subset G$. Из определения меры μ видно, что каждая мера μ_α абсолютно непрерывна относительно меры μ (т.е. если некоторое множество имеет μ -нулевую меру, то и его $|\mu_\alpha|$ -мера равна нулю). Из теоремы Лебега–Радона–Никодима (см., например, [6]) имеем, что для каждой меры μ_α найдется μ -интегрируемая функция $f_\alpha(x)$ такая, что $\mu_\alpha = f_\alpha(x)\mu$. Подставляя это в (2.1), получаем

$$F = \sum_{|\alpha| \leq m'} D^\alpha f_\alpha(x)\mu.$$

Тогда для произвольной бесконечно дифференцируемой функции φ в Ω имеем

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m'} D^\alpha f_\alpha(x)\mu, \varphi \right\rangle = \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leq m'} (-1)^\alpha f_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) \right) d\mu(x) \\ &= \int_\Omega P(D, x) \varphi(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

где $P(\xi, x)$ – μ -интегрируемая по x функция и полином по ξ . Таким образом, представление (1.1) получено.

Далее покажем, что введенное отображение (преобразование Лапласа) $L: E'(\Omega) \rightarrow P_\Omega$ взаимно однозначно.

ЛЕММА 1. *В $E(\Omega)$ плотна система экспонент $\{e^{\langle \lambda, x \rangle}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это можно показать, например, следующим образом. Следуя схеме из [7], прежде всего заметим, что в $E(\Omega)$ плотно вложено пространство $D(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω . Пусть $\varphi(x) \in D(\Omega)$, $\text{supp } \varphi$ – носитель φ . Для любой такой функции существует последовательность $\varphi_j(x) \in A(\Omega)$ ($A(\Omega)$ – пространство вещественно-аналитических функций на Ω) такая, что:

- 1) $\varphi_j \rightarrow \varphi$ в $E(\Omega)$;
- 2) $\varphi_j \rightarrow 0$ в $A(\Omega \setminus \text{supp } \varphi)$.

В качестве φ_j выберем функции:

$$\varphi(x) = g_j * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_j(x-y) \varphi(y) dy,$$

где $g_j(x) = \frac{j^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-j^2|x|^2}$ – ядро Гаусса. Известны свойства $g_j(x)$:

- a) $g_j(x) \geq 0$;
- b) $\int_{\mathbb{R}^n} g_j(x) dx = 1$;
- c) $\int_{|x| \leq \epsilon} g_j(x) dx \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$ для любого $\epsilon > 0$;
- d) $g_j(x) \in A(\mathbb{R}^n)$.

Из этих свойств получаем, что $\varphi_j \in A(\mathbb{R}^n)$ и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha(\varphi_j(x) - \varphi(x))| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g_j(x-y) |\varphi^{(\alpha)}(y) - \varphi^{(\alpha)}(x)| dy.$$

Пусть $\sup_{\text{supp } \varphi} |\varphi^{(\alpha)}| = A_\alpha$. В силу равномерной непрерывности функций $\varphi^{(\alpha)}(x)$ на $\text{supp } \varphi$ для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|\varphi^{(\alpha)}(y) - \varphi^{(\alpha)}(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{при } |x - y| < \delta.$$

Далее, из свойств $g_j(x)$ заключаем, что, каковы бы ни были $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ и $A_\alpha > 0$, найдется номер J такой, что

$$\int_{|x-y| \geq \delta} g_j(x-y) dy < \frac{\epsilon}{4A_\alpha} \quad \text{для всех } j > J.$$

Тогда для выбранного номера J

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} g_j(x-y) |\varphi^{(\alpha)}(y) - \varphi^{(\alpha)}(x)| dy \\ &= \int_{|x-y| < \delta} g_j(x-y) |\varphi^{(\alpha)}(y) - \varphi^{(\alpha)}(x)| dy \\ &+ \int_{|x-y| \geq \delta} g_j(x-y) |\varphi^{(\alpha)}(y) - \varphi^{(\alpha)}(x)| dy < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{при всех } j > J, \end{aligned}$$

т.е. $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha(\varphi_j(x) - \varphi(x))| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ для любого α . Таким образом 1) доказано.

Для доказательства 2) выберем произвольный компакт $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \text{supp } \varphi$. Существует комплексная окрестность V компакта K такая, что $\text{Re}(z-y)^2 \geq c > 0$ при $z \in V$, $y \in \text{supp } \varphi$. Тогда

$$\sup_{\substack{z \in V \\ y \in \text{supp } \varphi}} |g_j(z-y)| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\varphi_j(z) \rightarrow 0$ равномерно на V . Отсюда и вытекает 2).

Из приведенных рассуждений заключаем, что $A(\Omega)$ плотно в $D(\Omega)$.

Далее, каждый компакт $K \subset \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ полиномиально выпукл в $\mathbb{C}^n$. Таким образом, для любой голоморфной в некоторой окрестности K функции найдется последовательность полиномов или линейных комбинаций экспонент $e^{\langle \lambda, x \rangle}$, которая сходится к этой функции на данной окрестности. Значит, система экспонент $\{e^{\langle \lambda, x \rangle}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, плотна в $A(\Omega)$. Окончательно получаем желаемый результат о плотности системы экспонент в $E(\Omega)$.

Вернемся к отображению L . Допустим, что L не взаимно однозначно, т.е. пусть двум различным распределениям $F_1, F_2 \in E'(\Omega)$ соответствует одна и та же функция $\widehat{F}(\lambda)$:

$$\widehat{F}(\lambda) = F_1(e^{\langle \lambda, x \rangle}) = F_2(e^{\langle \lambda, x \rangle}) \quad \text{для любого } \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

то есть

$$(F_1 - F_2)(e^{\langle \lambda, x \rangle}) = 0 \quad \text{для любого } \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Из плотности системы экспонент заключаем, что $F_1 = F_2$. Значит, допущение неверно. Итак, L – изоморфизм между $E'(\Omega)$ и P_Ω . Нетрудно видеть, что если P_Ω наделить топологией $\widehat{P}_\Omega$, то L – топологический изоморфизм. Отсюда, кстати, получаем интегральное представление функций из P_Ω .

Обозначим P_Ω^* пространство, сопряженное с P_Ω .

ЛЕММА 2. *Всякая функция $f(x) \in E(\Omega)$ представляется в виде*

$$f(x) = (S, \exp \langle x, z \rangle), \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

где $S \in P_\Omega^*$, и это представление единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $E(\Omega)$ рефлексивно. Пусть θ – канонический изоморфизм $E(\Omega)$ на $E^{**}(\Omega)$. (Мы можем считать θ тождественным отображением.) Введем сопряженное с L отображение

$$L^*: P_\Omega^* \rightarrow E^{**}.$$

Это линейный топологический изоморфизм, поскольку таковым является L . Рассмотрим линейный топологический изоморфизм $\kappa = \theta^{-1} \circ L^*: P_\Omega^* \rightarrow E(\Omega)$. Пусть $f(x) \in E(\Omega)$, S – такой элемент P_Ω^* , что $f = \kappa(S)$, $F \in E'(\Omega)$. Справедливо:

$$(F, f) = (F, \kappa(S)) = (F, \theta^{-1} \circ L^*(S)) = (F, L^*(S)) = (L(F), S) = (\widehat{F}, S). \quad (2.3)$$

Положим в качестве F функционал $\delta(t - x)$, $x \in \Omega$, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Поскольку $L(\delta(t - x)) = e^{\langle x, z \rangle}$, получаем

$$f(x) = (\delta(t - x), f(t)) = (S, e^{\langle x, z \rangle}), \quad x \in \Omega.$$

Таким образом, представление (2.2) имеется. Докажем его единственность. Пусть при $S_1 \in P_\Omega^*$ имеется другое представление $f(x) = (S_1, e^{\langle x, z \rangle})$, $x \in \Omega$. Тогда

$$(S - S_1, e^{\langle x, z \rangle}) = f(x) - f(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega,$$

или

$$(\kappa(S - S_1), \delta(t - x)) \equiv 0, \quad x \in \Omega,$$

т.е. функция $g(x) = \kappa(S - S_1) \in E(\Omega)$ тождественно равна нулю на Ω и является нулевым элементом $E(\Omega)$. Так как κ – изоморфизм, то $S - S_1 = 0$ и $S = S_1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По ходу доказательства мы фактически установили, что линейная оболочка системы $\{e^{\langle x, z \rangle}\}$, $x \in \Omega$, полна в P_Ω .

Обозначим представленное в (2.2) соответствие $\tilde{L}: S \mapsto (S, \exp \langle x, z \rangle)$ и назовем его *преобразованием Лапласа* функционала $S \in P_\Omega^*$. Будем в дальнейшем обозначать $\tilde{L}(S)$ также $\hat{S}$.

ЛЕММА 3. Если $\hat{F}(z) \in P_\Omega$, то $\hat{F}(z + \zeta) \in P_\Omega$ для любого $\zeta \in \mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь интегральным представлением

$$\hat{F}(z + \zeta) = \int_{\Omega} e^{\langle x, z + \zeta \rangle} P_m(x, z + \zeta) d\mu(x),$$

где μ – мера с компактным в Ω носителем, $P_m(x, z + \zeta)$ – полином по $z + \zeta$ степени m , а значит, полином той же степени по z (ζ – как параметр), т.е. $P_m(x, z + \zeta) = \tilde{P}_{m, \zeta}(x, z)$. Отметим, что по параметру ζ это также полином степени m . Обозначим $\tilde{\mu}_\zeta = e^{\langle x, \zeta \rangle} \mu$, $\tilde{\mu}_\zeta$ – мера и $\text{supp } \tilde{\mu}_\zeta = \text{supp } \tilde{\mu}$. Итак,

$$\hat{F}(z + \zeta) = \int_{\Omega} e^{\langle x, z \rangle} \tilde{P}_{m, \zeta}(x, z) d\tilde{\mu}_\zeta(x).$$

Как было отмечено во введении, это – элемент P_Ω . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если $\hat{F}(z) \in P_\Omega$, $\Phi \in P_\Omega^*$, то $(\Phi_z, \hat{F}(z + u)) \in P_\Omega$ (но $u \in \mathbb{C}^n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) = (\Phi, e^{\langle x, z \rangle}) = \tilde{L}(\Phi)$ – по (2.2). Далее, как и в доказательстве леммы 3,

$$\begin{aligned} \hat{F}(z + u) &= \int_{\Omega} e^{\langle x, z + u \rangle} P_m(x, z + u) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} e^{\langle x, z \rangle} \tilde{P}_{m, u}(x, z) d\tilde{\mu}_u(x) = \hat{F}_{1, u}(z). \end{aligned}$$

Тогда, используя (2.3), получим

$$(\Phi_z, \hat{F}(z + u)) = (\Phi, \hat{F}_{1, u}(z)) = (f, F_{1, u}).$$

Учитывая (1.1), приходим к следующему:

$$\begin{aligned} (\Phi_z, \hat{F}(z + u)) &= \int_{\Omega} \tilde{P}_{m, u}(x, D) f(x) d\tilde{\mu}_u(x) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, u) f^{(\alpha)}(x) e^{\langle x, u \rangle} d\mu(x) = \int_{\Omega} e^{\langle x, u \rangle} \tilde{\tilde{P}}_m(x, u) d\mu(x), \end{aligned}$$

где $\tilde{\tilde{P}}_m(x, u)$ – μ -измеримая функция по x и полином степени m по u . Здесь мы учли, что $a_\alpha(x, u)$ μ -измеримы по x и являются полиномами степени не больше m по u . Справедливость утверждения леммы доказана.

Пусть Φ_1 и Φ_2 из P_Ω^* . Определим свертку $\Phi = \Phi_2 * \Phi_1$ этих функционалов по следующему правилу:

$$\Phi(\hat{F}) = (\Phi_2 * \Phi_1)(\hat{F}) = (\Phi_{2u}, (\Phi_{1z}, \hat{F}(z + u))).$$

Очевидно, что $\Phi_2 * \Phi_1 = \Phi_1 * \Phi_2$. С операцией свертки в качестве умножения пространство P_Ω^* является алгеброй. А отображение $\hat{L}: P_\Omega^* \rightarrow E(\Omega)$ есть алгебраический и топологический изоморфизм.

Поскольку пространство P_Ω изоморфно $E'(\Omega)$, оно рефлексивно. Для рефлексивных пространств справедлив (см. [8]) общий принцип двойственности. Привлекая его, так же как в [8], получаем следующий специальный принцип двойственности.

Между совокупностью $\{V\}$ всех замкнутых подпространств в P_Ω , инвариантных относительно сдвига (т.е. если функция $f(z) \in V$, то и $f(z + u) \in V$ для любого $u \in \mathbb{C}^n$), и совокупностью всех замкнутых идеалов $\{V^*\}$ из алгебры P_Ω^* можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу $V \leftrightarrow V^*$ тогда и только тогда, когда $V^* = \text{An } V$ и $V = \text{An } V^*$.

Здесь $\text{An } V$ – совокупность всех функционалов, обращающихся в нуль на V , а $\text{An } V^*$ – совокупность всех функций, на которых каждый функционал из V^* обращается в нуль.

§ 3. Спектральный синтез в P_Ω

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Через F_γ обозначим алгебру формальных степенных рядов от n переменных $(x_1 - \gamma_1), \dots, (x_n - \gamma_n)$. В алгебре F_γ будем рассматривать топологию покоеэффициентной сходимости (см., например, [6]).

Приведем несколько результатов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 2 [6]. *Каждый идеал в F_γ замкнут.*

Пусть I – некоторый идеал в $E(\Omega)$. Определим идеал $\hat{I}$ следующим образом (см. [9]). Функция $f \in E(\Omega)$ называется *поточечно принадлежащей идеалу I* , если $T_x^m f \in T_x^m I$ для всех $x \in \Omega$ и всех $m \geq 0$. Здесь T_x^m – естественное отображение $E(\Omega) \rightarrow F_x$, которое можно отождествить с разложением Тейлора порядка m функции f в точке x , $\hat{I}$ – идеал всех функций f , поточечно принадлежащих I .

ТЕОРЕМА 3 [9]. *Пусть I – идеал в $E(\Omega)$, $\bar{I}$ – его замыкание в $E(\Omega)$. Тогда $\hat{I} = \bar{I}$.*

Как прямое следствие этой теоремы имеем

ТЕОРЕМА 4. *Любой замкнутый идеал алгебры $E(\Omega)$ однозначно определяется своими локальными идеалами.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что локальные идеалы I_x являются идеалами в F_x , а не в кольце ростков E_x в точке x бесконечно дифференцируемых функций.

Пусть $V \subset P_\Omega$ – произвольное подпространство, инвариантное относительно сдвига. Задача спектрального синтеза заключается в том, чтобы показать, что множество экспоненциальных полиномов, содержащихся в V , образует полную в V систему. Экспоненциальные полиномы – это функции вида $P(z)e^{(x,z)}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$P(z)$ – многочлен. Пусть $J = \text{An } V$. Согласно специальному принципу двойственности это – замкнутый идеал в P_Ω^* . В силу изоморфизма идеалу J соответствует замкнутый идеал I в алгебре $E(\Omega)$.

Пусть $\gamma \in \Omega$. Тогда идеал I порождает в точке γ локальный идеал $I_\gamma \subset F_\gamma$, F_γ – нётерово кольцо (см. [9], [6]), поэтому существуют элементы $g_1, \dots, g_r \in F_\gamma$ такие, что любой элемент $f \in I_\gamma$ можно записать в виде $f = \sum_{j=1}^r \beta_j g_j$ для некоторых $\beta_j \in F_\gamma$.

Обозначим через E^γ множество всех функций вида $P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle}$, которые принадлежат V . Пусть $\Phi \in P_\Omega^*$ и $\hat{\Phi}$ – преобразование Лапласа функционала Φ .

ЛЕММА 5. *Для того чтобы функция $\hat{\Phi}$ принадлежала I_γ , необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(h) = 0$ для любого $h \in E^\gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство F_γ^* . По лемме 5.1 из [8] всякий элемент из F_γ^* имеет вид $P(D)\delta(x - \gamma)$, где $P(\eta)$ – полином. Пусть $I_\gamma^\perp$ – подпространство в F_γ^* , ортогональное к I_γ . Прежде чем доказать лемму 5, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6. *Экспоненциальный многочлен $P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle}$ принадлежит E^γ в том и только том случае, когда $P(-D)\delta(x - \gamma) \in I_\gamma^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $h(z) = P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle}$ – произвольный экспоненциальный многочлен и $\Phi \in P_\Omega^*$. Тогда из (2.3) и из следующего за (2.3) рассуждения имеем $(\Phi, h) = (P(-D)\delta(z - \gamma), \hat{\Phi})$. Отсюда вытекает, что для любого экспоненциального полинома $h(z) \in E^\gamma$ и для любой функции $f(x) \in I$

$$(P(-D)\delta(x - \gamma), f(x)) = 0.$$

Это же верно и для любого элемента f из идеала I_γ (из определения I_γ).

Достаточность. Пусть $P(-D)\delta(x - \gamma) \in I_\gamma^\perp$. Докажем, что $P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle} \in E^\gamma$. Действительно, в частности, имеем $(P(-D)\delta(x - \gamma), f(x)) = 0$ для любой функции $f(x) \in I$, но тогда $(F, P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle}) = 0$ для любого $F \in J = \text{An } V$, т.е. $P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle}$ принадлежит V , а значит, принадлежит E^γ . Лемма доказана.

Вернемся к доказательству леммы 5.

Достаточность. Пусть $\Phi(h) = 0$ для любого $h \in E^\gamma$; I_γ замкнут в F_γ по теореме 2. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Хана–Банаха и показать, что любой функционал в F_γ^* , ортогональный I_γ , ортогонален и $\hat{\Phi}$.

Пусть $P(-D)\delta(z - \gamma) \in I_\gamma^\perp$. По лемме 6 $P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle} \in E^\gamma$ и, значит,

$$(P(-D)\delta(z - \gamma), \hat{\Phi}) = (\Phi, P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle}) = 0,$$

т.е. $\hat{\Phi} \in I_\gamma$. Достаточность доказана.

Все рассуждения в доказательстве достаточности можно обратить. Таким образом условия леммы являются и необходимыми. Лемма доказана.

Из леммы 5 и теоремы 4 следует

ТЕОРЕМА 5. Для того чтобы функция $\widehat{\Phi}(z) \in E(\Omega)$ принадлежала замкнутому идеалу I , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\gamma \in \Omega$ и любого экспоненциального полинома $h(z) = P(z)e^{\langle \gamma, z \rangle} \in E^\gamma$ имело место равенство $\Phi(h) = 0$.

ТЕОРЕМА 6. Замыкание линейной оболочки множества $E = \bigcup_{\gamma \in \Omega} E^\gamma$ совпадает с подпространством V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное. Тогда существуют функция $\widehat{F}(\lambda) \in V$ и функционал $\Phi \in P_\Omega^*$ такие, что:

1) $\Phi(\widehat{F}(\lambda)) \neq 0$; 2) $\Phi(E) = 0$.

Из теоремы 5 следует, что $\widehat{\Phi} \in I$. Но тогда $\Phi \in J = \text{An } V$. Поэтому $\Phi(\widehat{F}(\lambda)) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 4. Приложение

Прежде всего определим действие дифференциального оператора бесконечно-го порядка с бесконечно дифференцируемой в Ω характеристической функцией на функциях из пространства P_Ω .

Из “интегрального” представления (1.1), как отмечалось во введении, каждая функция $u(z) \in P_\Omega$ представима в виде

$$u(z) = \int_{\Omega} e^{\langle z, x \rangle} P(z, x) d\mu(x)$$

для некоторых μ (борелевой меры с компактным носителем в Ω) и $P(z, x)$ (μ -интегрируемой по x функции и полинома по z).

Каждой бесконечно дифференцируемой в Ω функции $A(\xi) \in E(\Omega)$ поставим в соответствие дифференциальный оператор бесконечного порядка $A(D)$, который действует на каждую функцию $u(z) \in P_\Omega$ по правилу

$$A(D)u(z) = \int_{\Omega} e^{\langle z, x \rangle} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{A^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} D_z^\alpha P(z, x) d\mu(x),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $D_z^\alpha = (\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}})$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Заметим, что вопрос о сходимости ряда под интегралом не стоит, поскольку $P(z, x)$ – полином по z .

Корректность действия оператора (т.е. независимость от способа “интегрального” представления $u(z)$) устанавливается аналогично подобному результату для дифференциальных операторов бесконечного порядка с ультрадифференцируемой характеристической функцией (см. [5]).

Пусть есть набор $A_1(\xi), \dots, A_N(\xi)$ функций из $E(\Omega)$. Рассмотрим систему однородных уравнений:

$$A_j(D)u(z) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (*)$$

Из теоремы 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Каждое решение системы $(*)$ из пространства P_Ω есть предел в пространстве P_Ω линейных комбинаций экспоненциальных полиномов, являющихся решениями системы $(*)$.

Список литературы

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
2. *Филиппов В. Н.* Спектральный синтез в некоторых пространствах целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки 1981. Т. 30. №4. С. 527–534.
3. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с комплексными аргументами и ее приложения // Современные проблемы математики. Новейшие достижения (Итоги науки и техники). Т. 29. М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. С. 109–150.
4. *Шиллов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. *Одинокое О. В.* Интегральное представление целых функций и дифференциальные операторы бесконечного порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №4. С. 179–186.
6. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
7. *Komatsu H.* Ultradistributions.I // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA. 1973. V. 20. № 1. P. 25–105.
8. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
9. *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций. М.: Мир, 1968.

Поступило в редакцию
15.V.1999