Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О группе Брауэра, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 4, 141–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/im298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:06:27

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О группе Брауэра

Для арифметической модели X поверхности Ферма или гиперкэлерова многообразия с числом Бетти $b_2(V \otimes \bar{k}) > 3$ над чисто мнимым числовым полем k доказывается конечность l -компоненты $\mathrm{Br}'(X)$ для любого простого числа $l \gg 0$. Это дает вариант гипотезы М. Артина.

Если V – гладкая проективная иррегулярная поверхность над числовым полем k , $V(k) \neq \emptyset$, то для любого простого числа l l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ бесконечна. Пусть $A^1 \rightarrow M^1$ – универсальное семейство эллиптических кривых с якобиевой жесткостью уровня $N \geq 3$ над числовым полем $k \supset \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$. Предположим, что $M^1(k) \neq \emptyset$. Если V – гладкая проективная компактификация поверхности A^1 , то для любого достаточно большого простого числа l l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(M^1)$ конечна.

Библиография: 28 наименований.

Введение

Пусть V – гладкое проективное многообразие над совершенным полем k и l – простое число, отличное от $\mathrm{char}(k)$. Рассмотрим l -адическое представление в этальных когомологиях

$$\rho_l: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathrm{GL}(H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))).$$

В случае когда k конечно порождается над простым подполем, Дж. Тэйт предположил, что

$$\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_l)} \quad (0.1)$$

(см. [25, гипотеза 1]). Эта гипотеза дает соотношение

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \quad (0.2)$$

для конечно порожденного k , где (по определению [27, § 4]) $\mathrm{NS}(V)$ – образ $\mathrm{Pic}(V)$ в $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$. Если (0.2) выполняется для всех достаточно больших конечных расширений k , то гипотеза верна.

С другой стороны, М. Артин высказал гипотезу о конечности группы Брауэра $\mathrm{Br}(X)$ собственной схемы X над $\mathrm{Spec} \, \mathbb{Z}$ [15, гл. IV, § 2, вопрос 2.19].

Начиная с этого места, мы обозначаем через $\mathrm{Br}'(V) = H^2(V, G_m)$ когомологическую группу Брауэра V . Хорошо известно, что $\mathrm{Br}(V) \subset \mathrm{Br}'(V)$ [15, гл. IV, § 2,

Работа выполнена при финансовой поддержке Центра грантов Новосибирского государственного университета.

теорема 2.5]. Если V – кривая или поверхность, то $\mathrm{Br}(V) = \mathrm{Br}'(V)$ [15, гл. IV, § 2, теорема 2.16].

Четномерное односвязное гладкое проективное многообразие V над полем характеристики нуль называется *гиперкэлеровым*, если $H^0(V, \Omega_V^2)$ одномерно и порождается формой ω , не вырожденной в каждой точке. Следуя [2, § 6,7] и [1, § 1.2], мы напомним, что существуют некоторые простые конструкции гиперкэлеровых многообразий V в любой размерности $2r \geq 2$:

i) для любой КЗ-поверхности S возьмем $V = S^{[r]}$ – точечную схему Гильберта, параметризующую конечные замкнутые подсхемы S длины r ; таким образом, для $r = 1$ имеем $V = S$;

ii) для любой абелевой поверхности A построим тем же приемом $A^{[r+1]}$ и возьмем $V = K_r = \{ \text{слой над } 0 \text{ морфизма "суммирования"} A^{[r+1]} \rightarrow A \}$; таким образом, для $r = 1$ V – поверхность Куммера, отвечающая A ;

iii) рассмотрим любую проективную деформацию V гиперкэлерова многообразия типа $S^{[r]}$ или K_r (мы называем эти многообразия *многообразиями КЗ-типа*).

В частности, А. Бовиль и Р. Донаги доказали, что многообразие прямых четырехмерной кубики имеет КЗ-тип [3]. Некоторые модулярные многообразия для стабильных векторных расслоений на КЗ-поверхности являются многообразиями КЗ-типа [17].

В этой статье мы докажем следующие теоремы конечности: теорему 2.5, теорему 3.3 и теорему 4.2.

Напротив, для иррегулярного многообразия V над числовым полем k мы имеем следующие результаты: теорему 5.1, теорему 5.3, теорему 6.1 и следствие 6.2.

§ 1. Одна точная последовательность

1.1. ЛЕММА. *Предположим, что спектральная последовательность $E_2^{p,q}$ дает инъективный морфизм $E_2^{3,0} \rightarrow E^3$. Тогда имеется точная последовательность*

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что канонические морфизмы $E_2^{3,0} \rightarrow E_3^{3,0} \rightarrow E_4^{3,0} \rightarrow \dots$ сюръективны [9, гл. 1, § 4.5]. Поэтому отображение $E_2^{3,0} \rightarrow E_\infty^{3,0}$ сюръективно. По условию леммы композиция естественных морфизмов $E_2^{3,0} \rightarrow E_\infty^{3,0} \subset E^3$ инъективна. Поэтому

$$E_2^{3,0} = E_3^{3,0} = \dots = E_\infty^{3,0};$$

с другой стороны,

$$E_3^{3,0} = \frac{\mathrm{Ker}(d_2^{3,0})}{\mathrm{Im}(d_2^{1,1})} = \frac{\mathrm{Ker}[E_2^{3,0} \rightarrow E_2^{5,-1}]}{\mathrm{Im}[E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0}]} = \frac{E_2^{3,0}}{\mathrm{Im}[E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0}]}.$$

Поскольку $\text{Ker}[E_2^{3,0} \rightarrow E_3^{3,0}] = (0)$, то мы получаем следующее соотношение:

$$\text{Im}[E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0}] = (0).$$

Напомним, что спектральная последовательность $E_2^{p,q}$ дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0}, \quad (1.2)$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [15, приложение В]. Поэтому лемма 1.1 следует из (1.2).

§ 2. Некоторые замечания о группе Брауэра

2.1. ЛЕММА. Пусть C – гладкая проективная кривая над совершенным полем k . Если $C(k) \neq \emptyset$, то существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(C) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(C \otimes \bar{k})) \rightarrow 0.$$

В частности, $\text{Br}(k) = \text{Br}(\mathbb{P}_k^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем спектральную последовательность Хохшильда-Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^q(C \otimes \bar{k}, G_m)) \Rightarrow H^{p+q}(C, G_m)$$

для бесконечного накрытия Галуа $C \otimes \bar{k} \rightarrow C$ [15, гл. 3, § 2, замечание 2.21(b)]. Согласно (1.2) она дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^0(C \otimes \bar{k}, G_m)) \rightarrow H^1(C, G_m) \\ &\rightarrow H^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^1(C \otimes \bar{k}, G_m)) \rightarrow H^2(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^0(C \otimes \bar{k}, G_m)) \\ &\rightarrow \text{Ker}[H^2(C, G_m) \rightarrow H^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^2(C \otimes \bar{k}, G_m))] \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^1(C \otimes \bar{k}, G_m)) \rightarrow H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^0(C \otimes \bar{k}, G_m)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

С другой стороны, $H^r(C \otimes \bar{k}, G_m) = (0)$ для $r \geq 2$ [15, гл. 3, § 2, пример 2.22, случай (d)]. Хорошо известно, что

$$H^0(C \otimes \bar{k}, G_m) = \bar{k}^\times, \quad H^1(C \otimes \bar{k}, G_m) = \text{Pic}(C \otimes \bar{k}), \quad H^1(C, G_m) = \text{Pic}(C)$$

(см. [15, гл. 3, § 4, предложение 4.9]). С другой стороны, $\text{Br}(C) = H^2(C, G_m)$, $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times) = (0)$ по теореме Гильберта 90 [5, гл. 5, § 2.7].

Поэтому (2.1) выглядит как

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Pic}(C) \rightarrow [\text{Pic}(C \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(C) \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(C \otimes \bar{k})) \rightarrow H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поскольку $C(k) \neq \emptyset$, мы имеем сечение канонического отображения $C \rightarrow \text{Spec } k$, поэтому канонические отображения

$$\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(C), \quad E_2^{3,0} = H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times) = H^3(\text{Spec } k, G_m) \rightarrow E^3 = H^3(C, G_m)$$

инъективны. В силу леммы 1.1 последовательность (2.2) расщепляется в следующие точные последовательности:

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}(C) \simeq [\mathrm{Pic}(C \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}(C) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(C \otimes \bar{k})) \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

С другой стороны, существует каноническая точная последовательность $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}^0(C \otimes \bar{k}) \rightarrow \mathrm{Pic}(C \otimes \bar{k}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Она дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(C \otimes \bar{k})) &\rightarrow H^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(C \otimes \bar{k})) \\ &\rightarrow H^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(C \otimes \bar{k})) \\ &\rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(C \otimes \bar{k})) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

В силу (2.3) эта последовательность имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Pic}^0(C) &\rightarrow \mathrm{Pic}(C) \rightarrow \mathbb{Z} \\ &\rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(C \otimes \bar{k})) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(C \otimes \bar{k})) \\ &\rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Более того, $\mathrm{Pic}(C) \rightarrow \mathbb{Z}$ является сюръективным отображением в силу соотношения $C(k) \neq \emptyset$, и

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) = (0),$$

потому что $\mathbb{Z}$ не имеет нетривиальных компактных подгрупп. В итоге мы получаем изоморфизм

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(C \otimes \bar{k})) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(C \otimes \bar{k})).$$

Следовательно, (2.4) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}(C) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(C \otimes \bar{k})) \rightarrow 0.$$

С другой стороны, $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{P}_k^1 \otimes \bar{k}) = (0)$, поэтому $\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(\mathbb{P}_k^1)$. Лемма доказана.

2.2. Пусть V – гладкое проективное многообразие над совершенным полем k . Хорошо известно, что l -примарная компонента когомологической группы Брауэра $\text{Br}'(V \otimes \bar{k}) = H^2(V \otimes \bar{k}, G_m)$ имеет вид $(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^{\rho_0(V \otimes \bar{k}, l)} \oplus$ (конечная группа) [11, § 3.2, 3.3]. Следовательно,

$$T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \text{Br}'(V \otimes \bar{k})_{l^m} = \text{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \text{Br}'(V \otimes \bar{k}))$$

– свободный конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль ранга $\rho_0(V \otimes \bar{k}, l)$ [27, § 5]. Последовательность Куммера

$$1 \rightarrow \mu_{l^m} \rightarrow G_m \xrightarrow{l^m} G_m \rightarrow 1$$

дает точную последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^1(V \otimes \bar{k}, G_m) &\xrightarrow{l^m} H^1(V \otimes \bar{k}, G_m) \rightarrow H^2(V \otimes \bar{k}, \mu_{l^m}) \\ &\rightarrow H^2(V \otimes \bar{k}, G_m) \xrightarrow{l^m} H^2(V \otimes \bar{k}, G_m) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем точную последовательность $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$0 \rightarrow \text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k}) \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

(см. [15, гл. V, § 3, замечание 3.29 (d)]).

Точная последовательность (2.5) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &\rightarrow [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &\rightarrow [T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть V – гладкое проективное многообразие над совершенным полем k . Можно выбрать такое конечное расширение Галуа K/k , что $\text{NS}(V \otimes K) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. В этом случае:

- а) $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))$ – конечная группа;
- б) $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$ аннулируется числом $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$; для простого числа $l > \text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$ подгруппа l -кручения в $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$ тривиальна;
- в) $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$ – группа кручения, аннулируемая некоторым положительным натуральным числом $d > 0$; для любого простого числа $l > d$ подгруппа l -кручения этой группы тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что $\text{NS}(V \otimes \bar{k})$ имеет конечное множество образующих и каждая из образующих “определена” над конечным расширением, поэтому можно так выбрать конечное расширение Галуа K/k , что $\text{NS}(V \otimes K) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Более того, $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))$ – конечная группа [5, гл. IV, § 6, следствие 2].

Рассмотрим точную последовательность “инфляции–ограничения” [5, гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathrm{NS}(V \otimes K)) &\xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ &\xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Поскольку $\mathrm{NS}(V \otimes K) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$, группа $\mathrm{Gal}(\bar{k}/K)$ действует тривиально на $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathbb{Z}^\rho \oplus [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}}$ (неканонический изоморфизм, где $\rho = \mathrm{rank} \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$). Следовательно,

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}}), \end{aligned}$$

потому что $\mathbb{Z}^\rho$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и в результате мы имеем $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) = (0)$. Следовательно,

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$$

аннулируется числом $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$. Значит, для простого числа $l > \mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$ подгруппа l -кручения в $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))$ тривиальна (иначе эта группа содержит элемент порядка l и не аннулируется числом $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$).

С другой стороны, (2.7) и конечность $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathrm{NS}(V \otimes K))$ показывают, что $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))$ является группой кручения, аннулируемой некоторым положительным натуральным числом $d > 0$; поэтому для любого простого числа $l > d$ подгруппа l -кручения этой группы тривиальна (иначе она содержит элемент порядка l и не аннулируется числом d). Предложение доказано.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над совершенным полем k . Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$. Если

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)},$$

то l -примарная компонента группы кручения $[\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^q(V \otimes \bar{k}, G_m)) \Rightarrow H^{p+q}(V, G_m)$$

для бесконечного накрытия Галуа $V \otimes \bar{k} \rightarrow V$ [15, гл. 3, § 2, замечание 2.21(b)]. В силу (1.2) мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^0(V \otimes \bar{k}, G_m)) &\rightarrow H^1(V, G_m) \\ \rightarrow H^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^1(V \otimes \bar{k}, G_m)) &\rightarrow H^2(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^0(V \otimes \bar{k}, G_m)) \\ \rightarrow \mathrm{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^2(V \otimes \bar{k}, G_m))] & \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^1(V \otimes \bar{k}, G_m)) &\rightarrow H^3(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^0(V \otimes \bar{k}, G_m)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Мы имеем:

$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^0(V \otimes \bar{k}, G_m)) = H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times) = (0)$ по теореме Гильберта 90,

$$\begin{aligned} H^1(V, G_m) &= \text{Pic}(V), \\ H^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^1(V \otimes \bar{k}, G_m)) &= [\text{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}, \\ H^2(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^0(V \otimes \bar{k}, G_m)) &= H^2(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times) = \text{Br}(k), \\ \text{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^2(V \otimes \bar{k}, G_m))] \\ &= \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}], \\ H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^1(V \otimes \bar{k}, G_m)) &= H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(V \otimes \bar{k})), \\ H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^0(V \otimes \bar{k}, G_m)) &= H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times). \end{aligned}$$

Поэтому (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Pic}(V) &\rightarrow [\text{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &\rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, мы имеем сечение канонического отображения $V \rightarrow \text{Spec } k$, поэтому канонические отображения $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)$, $E_2^{3,0} = H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times) = H^3(\text{Spec } k, G_m) \rightarrow E^3 = H^3(V, G_m)$ инъективны. В силу леммы 1.1 последовательность (2.9) расщепляется в следующие точные последовательности:

$$0 \rightarrow \text{Pic}(V) \simeq [\text{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow 0, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k) &\rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

По определению $\text{NS}(V)$ является образом $\text{Pic}(V)$ в $\text{NS}(V \otimes \bar{k})$ [27, § 4]. Следовательно, $\text{NS}(V) \subset \text{NS}(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$. Если $\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$, то точная последовательность (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l &\xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &\rightarrow [[T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k})] \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Известно, что каждая из образующих группы $\text{NS}(V \otimes \bar{k})$ “определена” над конечным расширением, поэтому $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})^U$ для некоторой открытой нормальной подгруппы $U \subset \text{Gal}(\bar{k}/k)$, и, следовательно, $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l$ является дискретным $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулем. Для любой открытой нормальной подгруппы U $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U)$ аннулируется числом $\text{Card}(\text{Gal}(\bar{k}/k)/U)$ [5, гл. IV, § 6, следствие 1]. Значит,

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = (0)$$

и

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l) = \varinjlim H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = (0).$$

Поэтому (2.12) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow [[T_l \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})] \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow 0,$$

значит,

$$(0) = [T_l \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} = [T_l \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Следовательно, $(0) = [T_l \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ (действительно, в силу замечаний из п. 2.2 $T_l \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})$ является *свободным* конечно порожденным $\mathbb{Z}_l$ -модулем, поэтому $[T_l \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ – *свободный* конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль).

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (0) &= [T_l \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} = [\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k}))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &= \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, [\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) = T_l [\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(l). \end{aligned}$$

Поэтому максимальная l -делимая подгруппа в $[\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ тривиальна. Следовательно, $[\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ – конечная группа [27, § 5.2]. Теорема доказана.

2.5. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над совершенным полем k . Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$ и $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$. Если $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ для простого числа $l > \mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$ и для многообразия V , то l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$ – касательное пространство в нуле группы $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})$ [18, лекция 24]. Поэтому имеем $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = (0)$. Следовательно,

$$\mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})/\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}),$$

и (2.11) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу предложения 2.3 все группы в (2.13) являются группами кручения, поэтому мы получаем точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогично мы получаем из (2.7) точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathrm{NS}(V \otimes K))(l) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l). \end{aligned} \quad (2.15)$$

В силу предложения 2.3 мы имеем $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) = (0)$, поэтому (2.15) дает изоморфизм $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))(l) \simeq H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))(l)$. В силу предложения 2.3 $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))$ – конечная группа, поэтому $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))(l)$ – конечная группа.

С другой стороны, $[\text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ является конечной группой в силу теоремы 2.4, поэтому $\text{Ker}[\text{Br}'(V)(l) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}]$ – подгруппа конечного индекса в $\text{Br}'(V)(l)$. Следовательно, мы получаем из (2.14) конечность группы $\text{Br}'(V)(l)/\text{Br}(k)(l) = [\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)](l)$. Теорема доказана.

§ 3. О конечности l -примарных компонент $\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)$ для некоторых регулярных многообразий

3.1. Пусть k – поле алгебраических функций одной переменной над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и V – геометрически неприводимая гладкая проективная поверхность над k . Мы обозначаем через S полную гладкую модель поля k над $\mathbb{C}$.

По определению V имеет стабильные редукции во всех точках k , если и только если существует такой собственный морфизм $\pi: X \rightarrow S$ гладких связных $\mathbb{C}$ -схем, что его общий схемный слой изоморфен V , и для любой замкнутой точки $s \in S$ имеем:

- а) геометрический слой X_s приведен;
- б) X_s – объединение гладких неприводимых компонент с нормальными пересечениями.

По теореме о стабильной редукции [14] любая гладкая проективная поверхность над k имеет стабильные редукции во всех точках некоторого конечного алгебраического расширения поля k .

Напомним, что поверхность V имеет *стабильное сильное вырождение* [23, § 1] в точке v поля k , если и только если V имеет стабильную редукцию в точке v и для любой неприводимой компоненты $E \subset X_v$

$$H^0(E, \Omega_{E/\mathbb{C}}^2) = (0).$$

Если поверхность V имеет стабильное сильное вырождение в некоторой точке v поля k , то для любого конечного алгебраического расширения k' поля k поверхность $V \otimes_k k'$ имеет стабильное сильное вырождение в любой точке v' поля k' , лежащей над v [23, предложение 1.3].

3.2. ЛЕММА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k . Если $\text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}) = h^{1,1}(V \otimes_k \bar{k})$, то $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ порождается классами когомологий дивизоров на V ; в частности, гипотеза Тэйта верна для V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого гладкого проективного многообразия V мы имеем неравенство $\text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}) \leq h^{1,1}(V \otimes_k \bar{k})$. В рассматриваемой ситуации мы исследуем экстремальный случай: $\text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}) = h^{1,1}(V \otimes_k \bar{k})$, поэтому можно ожидать некоторые геометрические и арифметические следствия.

Основная теорема p -адической теории Ходжа дает разложение

$$H^m(V \otimes_k \bar{k}_v, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^{\wedge} \bar{k}_v \simeq \bigoplus_{a+b=m} H^a(V \otimes_k k_v, \Omega_{V \otimes_k k_v/k_v}^b) \otimes_{k_v} \bigwedge^{\wedge} \bar{k}_v(-b),$$

где k_v – пополнение k по отношению к неархимедовой точке v поля k с полем вычетов характеристики p , и $^{\wedge}$ означает p -адическое пополнение [8]. Вкладывая k в некоторое p -адическое пополнение, мы получим из теоремы сравнения и теоремы о собственной замене базы [15], что

$$\text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}_v) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} H^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\text{Lie Im}(\rho_p)} \leq \dim_{k_v} H^{1,1}(V \otimes_k k_v);$$

следовательно,

$$\text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}) = \text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}_v) = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p(1))^{\text{Lie Im}(\rho_p)},$$

и лемма доказана.

3.3. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над полем k характеристики нуль. Предположим, что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$, $V(k) \neq \emptyset$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) k – конечно порожденное расширение $\mathbb{Q}$ и V – поверхность типа КЗ над k ;
- 2) k – поле алгебраических функций нескольких переменных над $\mathbb{C}$ и V – потенциально непостоянная поверхность типа КЗ над k ;
- 3) k – поле алгебраических функций одной переменной над $\mathbb{C}$, V – поверхность со стабильным сильным вырождением в некоторой точке поля k и $l > \text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$;
- 4) k – числовое поле, V – поверхность Ферма и $l > \text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$;
- 5) k – числовое поле, $\text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}) = h^{1,1}(V \otimes_k \bar{k})$ и $l > \text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$;
- 6) V – гиперкэлерово многообразие над числовым полем k с числом Бетти $b_2(V \otimes \bar{k}) > 3$.

Тогда l -примарная компонента группы $\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если V – поверхность типа КЗ над числовым полем, то

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)},$$

поэтому гипотеза Тэйта верна для V [24].

Если k – конечно порожденное расширение поля $\mathbb{Q}$ и V – поверхность типа КЗ над k , то или V – потенциально постоянная поверхность (другими словами, для некоторого конечного алгебраического расширения k'/k поверхность $V \otimes_k k'$ определена над числовым полем, поэтому гипотеза Тэйта верна для $V \otimes_k k'$ и, следовательно, для V), или V – общий слой неизотривиального семейства поверхностей типа КЗ $\pi: X \rightarrow S$ над схемой S размерности ≥ 1 (в этом случае гипотеза Тэйта верна для V в силу [23, теорема 3.3] в случае плохой стабильной редукции в некоторой точке поля k , где k имеет степень трансцендентности единица над полем констант, в силу [28, следствие 4.1.1] (общий случай) и принципа Лефшеца (согласно которому можно перейти от $\bar{\mathbb{Q}}$ к $\mathbb{C}$; это позволяет свести ситуацию к случаю поверхности типа КЗ над функциональным полем с полем $\mathbb{C}$ в качестве поля констант). Заметим, что для поверхности V типа КЗ мы имеем $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$

и $[\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}} = (0)$. В силу теоремы 2.5 l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна.

Если k – поле алгебраических функций одной переменной над $\mathbb{C}$, $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$, поверхность V имеет стабильное сильное вырождение в некоторой точке поля k и $l > \mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$, то

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)},$$

поэтому гипотеза Тэйта верна для V [23, теорема 1.4]. Остается применить теорему 2.5.

Пусть V – поверхность Ферма степени $m > 1$ над числовым полем k . Фиксируем такое $\varepsilon \in \bar{k}$, что $\varepsilon^m = -1$. Пусть $C: x_0^m + x_1^m + x_2^m = 0$ – кривая Ферма степени m , $S: y_0^m + y_1^m + y_2^m = 0$ – копия C . Существует рациональное отображение степени m над полем $k' = k(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Phi: (C \otimes_k k') \times (S \otimes_k k') &\longrightarrow V \otimes_k k', \\ (x_0: x_1: x_2) \times (y_0: y_1: y_2) &\longrightarrow (x_0 y_2: x_1 y_2: \varepsilon x_2 y_0: \varepsilon x_2 y_1) \end{aligned}$$

(см. [21], [22]). В силу теорем Г. Фалтингса [7] и Дж. Тэйта [26, теорема 3] гипотеза Тэйта верна для $(C \otimes_k k') \times (S \otimes_k k')$, поэтому она верна для $V \otimes_k k'$ и для V . Остается применить теорему 2.5, потому что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$.

Если k – числовое поле, $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k}) = h^{1,1}(V \otimes_k \bar{k})$, $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$ и $l > \mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$, то остается применить лемму 3.2 и теорему 2.5.

Если V – гиперкэлерово многообразие над числовым полем k , $b_2(V \otimes \bar{k}) > 3$, то $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$, $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$ не имеет кручения [1, § 2.1], V удовлетворяет условиям A_1 , B_1^+ из [1, § 1.4], поэтому $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ [1, теорема 1.6.1]. Остается применить теорему 2.5.

3.4. ТЕОРЕМА. Пусть k – конечно порожденное расширение $\mathbb{Q}$, и пусть $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – эллиптическая поверхность типа КЗ с сечением. Тогда для любого простого числа l l -примарная компонента группы кручения $H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{Pic}(V/\mathbb{P}_k^1))$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сечение $\theta: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow V$ дает $H^3(\mathbb{P}_k^1, G_m) \hookrightarrow H^3(V, G_m)$, поэтому спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}_k^1, R^q \pi_* G_m) \Rightarrow H^{p+q}(V, G_m)$$

определяет инъективный морфизм $E_2^{3,0} \rightarrow E^3$. По лемме 1.1 мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow 0;$$

в силу леммы 2.1 она дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) = H^2(\mathbb{P}_k^1, G_m) &\rightarrow \mathrm{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_k^1, R^2 \pi_* G_m)] \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{P}_k^1, R^1 \pi_* G_m) = H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{Pic}(V/\mathbb{P}_k^1)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(V) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_k^1, R^2 \pi_* G_m)] \\ \rightarrow H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{Pic}(V/\mathbb{P}_k^1)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $V(k) \neq \emptyset$, так как $\mathbb{P}_k^1(k) \neq \emptyset$. По теореме 3.3 l -примарная компонента группы кручения $H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{Pic}(V/\mathbb{P}_k^1))$ конечна. Теорема доказана.

§ 4. О конечности l -примарных компонент $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(\overline{M}^1)$ для модулярной эллиптической поверхности V

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть $f: V \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность с сечением $\theta: C \rightarrow V$ над числовым полем k . Предположим, что сечение $\theta: C \rightarrow V$ определяет изоморфизм $\mathrm{Pic}^0(C) \simeq \mathrm{Pic}^0(V)$ и $C(k) \neq \emptyset$. Если $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ и l – достаточно большое простое число, то l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(C)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $V(k) \neq \emptyset$. В силу леммы 2.1 мы имеем

$$\mathrm{Br}(C)/\mathrm{Br}(k) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(C \otimes \bar{k})).$$

Поскольку сечение $\theta: C \rightarrow V$ определяет изоморфизм $\mathrm{Pic}^0(C) \simeq \mathrm{Pic}^0(V)$, то

$$\mathrm{Br}(C)/\mathrm{Br}(k) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})). \quad (4.1)$$

Точная последовательность (2.11) дает точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}))(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

С другой стороны, существует каноническая точная последовательность $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей $0 \rightarrow \mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) \rightarrow \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow 0$. Она дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow [\mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ \rightarrow [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})) \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Соотношение (2.10) дает $\mathrm{Pic}(V) \simeq [\mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$. С другой стороны, $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ и $\mathrm{NS}(V)$ – образ $\mathrm{Pic}(V)$ в $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$ [27, § 4]. Следовательно, $\mathrm{NS}(V) \subset \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ – подгруппа конечного индекса. Поэтому точная последовательность (4.3) расщепляется в следующие точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow \mathrm{Pic}(V) \rightarrow \mathrm{NS}(V) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} / \mathrm{NS}(V) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})) \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} / \mathrm{NS}(V)$ – конечная группа, то ее l -примарная компонента тривиальна для любого достаточно большого простого числа l :

$$[\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} / \mathrm{NS}(V)](l) = (0) \quad \text{для любого } l \gg 0. \quad (4.5)$$

С другой стороны, теорема 2.4 дает конечность группы $\mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$.

В силу предложения 2.3 $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))$ – группа кручения, аннулируемая натуральным числом $d > 0$, и для любого простого числа $l > d$ мы имеем

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) = (0).$$

Для $l \gg 0$ мы получаем из (4.1), (4.4) и (4.5) изоморфизм l -примарных компонент

$$[\mathrm{Br}(C) / \mathrm{Br}(k)](l) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}))(l).$$

Поэтому (4.2) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \rightarrow [\mathrm{Br}(C) / \mathrm{Br}(k)](l) \rightarrow 0;$$

поскольку $\theta: C \rightarrow V$ дает вложение $\mathrm{Br}(C) \subset \mathrm{Br}(V)$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] / \mathrm{Br}(k)(l) &\simeq [\mathrm{Br}(C) / \mathrm{Br}(k)](l), \\ \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] / \mathrm{Br}(C)(l) &= (0), \\ \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] &= \mathrm{Br}(C)(l), \\ \mathrm{Im}[\mathrm{Br}(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] &= \mathrm{Br}(V)(l) / \mathrm{Br}(C)(l). \end{aligned}$$

Следовательно, конечность $[\mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(l)]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ дает конечность $\mathrm{Br}(V)(l) / \mathrm{Br}(C)(l)$. Теорема доказана.

4.2. ТЕОРЕМА. Пусть $A^1 \rightarrow M^1$ – универсальное семейство эллиптических кривых с яковиевой жесткостью уровня $N \geq 3$ над числовым полем $k \supset \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$. Предположим, что $M^1(k) \neq \emptyset$. Если V – гладкая проективная компактификация поверхности A^1 и $\bar{M}^1$ – замыкание $\theta(M^1)$ в V , то для любого достаточно большого простого числа l l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}(V) / \mathrm{Br}(\bar{M}^1)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: V \rightarrow \bar{M}^1$ – канонический морфизм. Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(\bar{M}^1, R^q f_* \mathcal{O}_V) \Rightarrow H^{p+q}(V, \mathcal{O}_V)$ определяет точную последовательность $0 \rightarrow H^1(\bar{M}^1, \mathcal{O}_{\bar{M}^1}) \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow H^0(\bar{M}^1, R^1 f_* \mathcal{O}_V) = (0)$, потому что $R^1 f_* \mathcal{O}_V$ – обратимый пучок отрицательной степени на $\bar{M}^1$. Условие леммы 3.2 выполняется для V (см. [20]; [10, теорема 2]). Поэтому гипотеза Тейта верна для V , и результат следует из теоремы 4.1.

§ 5. О бесконечности l -примарных компонент $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)$ для иррегулярного многообразия

5.1. ТЕОРЕМА. Пусть J – абелево многообразие размерности ≥ 1 над числовым полем k . Тогда для любого простого числа l l -примарная компонента группы Вейля–Шатле $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), J(\bar{k}))$ бесконечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема хорошо известна для эллиптических кривых [4, § 27], поэтому при доказательстве мы следуем Дж. Касселсу. Пусть

$$\mathrm{III}(k, J) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker} \left[H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), J(\bar{k})) \rightarrow \bigoplus_v H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v), J(\bar{k}_v)) \right]$$

– группа Шафаревича–Тэйта абелева многообразия J . Мы обозначаем через J^t двойственное абелево многообразие. Если l -примарная компонента группы Шафаревича–Тэйта бесконечна, то результат очевиден. Если l -примарная компонента группы Шафаревича–Тэйта конечна, то имеется точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{III}(k, J)(l) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), J(\bar{k}))(l) \\ \rightarrow \bigoplus_v H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v), J(\bar{k}_v))(l) \rightarrow [J^t(k)]^* \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $[J^t(k)]^\wedge$ – пополнение конечно порожденной (по теореме Морделла–Вейля) группы $J^t(k)$ по отношению к топологии, определенной подгруппами конечного индекса, являющегося степенью l , $[J^t(k)]^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}([J^t(k)]^\wedge, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ – группа непрерывных характеров конечного порядка $[J^t(k)]^\wedge$ [16, гл. I, § 6, теорема 6.26]. Очевидно, что $[J^t(k)]^\wedge \simeq \mathbb{Z}_l^r \oplus \{\text{конечная группа}\}$, где $r = \mathrm{rank} J^t(k)$. Следовательно, $[J^t(k)]_l^*$ – конечная группа. В силу (5.1) остается показать, что $\bigoplus_v H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v), J(\bar{k}_v))_l$ – бесконечная группа.

Пусть $x \in J^t(\bar{k})$ – точка порядка l , $x \neq 0$. Можно найти такое конечное расширение Галуа $k'/\mathbb{Q}$, что $k \subset k'$ и $x \in J^t(k')$. По теореме Чеботарева плотность Дирихле множества

$$B = \{p \mid p \text{ – такое простое число, что } k' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \simeq \mathbb{Q}_p^{[k':\mathbb{Q}]}\}$$

равна $[k':\mathbb{Q}]^{-1}$ [5, упражнение 6]. Следовательно, имеется бесконечно много неархимедовых точек v поля k со следующими свойствами: а) $\mathrm{char} k(v) = p_v \in B$; б) J^t имеет хорошую редукцию в точке v .

Если v удовлетворяет обоим условиям, то $k(v') = \mathbb{Z}/p_v\mathbb{Z} = k(v)$ для любой точки $v' \mid v$, специальный слой $J_{v'}^t \simeq J_v^t$ минимальной модели Нерона имеет рациональную $\mathbb{Z}/p_v\mathbb{Z}$ -точку порядка l . Более того, отображение редукции определяет изоморфизм $[J^t(\bar{k}_v)]_l^{I(\bar{v})}$ на $J_v^t(\bar{k}(v))_l$, коммутирующий с действием группы разложения $D(\bar{v})$ [19, § 1, лемма 2]. Поскольку J^t имеет хорошую редукцию в точке v ,

действие группы инерции $I(\bar{v})$ на $J^t(\bar{k}_v)_l$ тривиально [19, теорема 1], поэтому мы получаем изоморфизм $D(\bar{v})$ -модулей

$$J^t(\bar{k}_v)_l \simeq J_v^t(\bar{k}(v))_l.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J^t(k_v)_l &= [J^t(\bar{k}_v)_l]^{\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)} = [J^t(\bar{k}_v)_l]^{D(\bar{v})} \simeq [J_v^t(\bar{k}(v))_l]^{D(\bar{v})} \\ &= [J_v^t(\bar{k}(v))_l]^{D(\bar{v})/I(\bar{v})} = [J_v^t(\bar{k}(v))_l]^{\text{Gal}(\bar{k}(v)/k(v))} = J_v^t(k(v))_l \neq (0). \end{aligned}$$

В силу хорошо известных результатов И. Р. Шафаревича и Дж. Тэйта существует каноническое спаривание

$$H^i(\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v), J^t(\bar{k}_v)) \times H^{1-i}(\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v), J(\bar{k}_v)) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

индуцирующее изоморфизм компактных групп

$$J^t(k_v) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{cont}}(H^1(\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v), J(\bar{k}_v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(см. [16, гл. I, § 3, следствие 3.4]). Поэтому $H^1(\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v), J(\bar{k}_v))_l \neq (0)$. Поскольку это верно для бесконечного множества точек v поля k , то теорема 5.1 доказана.

5.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть C – гладкая проективная кривая рода $g \geq 1$ над числовым полем k . Если $C(k) \neq \emptyset$, то для любого простого числа l l -примарная компонента группы $\text{Br}(C)/\text{Br}(k)$ бесконечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.1

$$\text{Br}(C)/\text{Br}(k) \simeq H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(C \otimes \bar{k})).$$

Поэтому результат следует из теоремы 5.1.

5.3. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k . Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$ и $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) \neq (0)$. Тогда для любого простого числа l l -примарная компонента группы $\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)$ бесконечна. Если $\dim_k V \leq 2$, то l -примарная компонента группы $\text{Br}(V)/\text{Br}(k)$ бесконечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точная последовательность (2.11) дает изоморфизм

$$\text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] / \text{Br}(k) \simeq H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(V \otimes \bar{k})).$$

Поэтому достаточно проверить бесконечность группы $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(V \otimes \bar{k}))(l)$.

Точная последовательность $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) \rightarrow \text{Pic}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow \text{NS}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow 0$$

дает точную последовательность

$$\begin{aligned} [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k})) \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(V \otimes \bar{k})). \end{aligned} \quad (5.2)$$

По условию теоремы $\dim_{\bar{k}} \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = \dim_{\bar{k}} H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) \neq 0$. Следовательно, по теореме 5.1 l -примарная компонента группы кручения $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}))$ бесконечна. С другой стороны, $\text{Im}[[\text{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}))]$ – конечная группа, потому что $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}))$ – группа кручения и $[\text{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ – конечно порожденная абелева группа. Поэтому теорема 5.3 следует из точности последовательности (5.2).

§ 6. О группе Брауэра арифметической модели

6.1. ТЕОРЕМА. Пусть V – такое гладкое проективное многообразие над чисто мнимым числовым полем k , что

$$V(k) \neq \emptyset, \quad H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0), \quad \text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Предположим, что существует собственный плоский морфизм $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(A)$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V , все схемные слои π приведены, существует такое сечение $\theta: \text{Spec}(A) \rightarrow X$ морфизма π , что $\theta(\text{Spec}(A))$ пересекается в точности с одной неприводимой компонентой любого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \text{Spec}(A)$ (мы называем $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(A)$ арифметической моделью V). Тогда для любого простого числа $l > \text{Card}([NS(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$ l -примарная компонента группы $\text{Br}'(X)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i_y: \text{Spec}(k(y)) \rightarrow X$ – каноническое вложение $y \in X$ и

$$\text{Div}_X^{\text{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок “вертикальных” дивизоров Картье.

Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии X)

$$0 \rightarrow G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V} \rightarrow \text{Div}_X^{\text{vert}} \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

где $h: V \rightarrow X$ – вложение общего слоя π . Действительно, пусть η – общая точка $\text{Spec}(A)$; тогда для любого этального морфизма $U \rightarrow X$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times_X U & \hookrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{\eta\} & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

где каждый прямоугольник дает диаграмму расслоенного произведения. Мы видим, что $V \times_X U$ – общий слой канонического морфизма $U \rightarrow \text{Spec}(A)$. Поскольку

$$H^0(U, h_* G_{m,V}) = H^0(V \times_X U, G_m),$$

то существует каноническое вложение $G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V}$, которое на U является вложением $H^0(U, \mathcal{O}_U^\times) \hookrightarrow H^0(V \times_X U, \mathcal{O}_{V \times_X U}^\times)$. Ядро этого отображения – пучок вертикальных дивизоров Картье $\text{Div}_X^{\text{vert}}$ (специальный случай точной последовательности (6.1) приводится в [6, с. 637]).

Мы имеем

$$\text{Div}_X = \bigoplus_{\substack{y \in X \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\substack{y \in V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} \right) \oplus \text{Div}_X^{\text{vert}}.$$

С другой стороны, $H^1(X, \text{Div}_X) = (0)$ [15, гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно, $H^1(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) = (0)$. Таким образом, (6.1) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(X, G_m) \rightarrow H^2(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \\ \rightarrow H^3(X, G_m) \rightarrow H^3(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^3(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q h_* G_{m,V}) \Rightarrow H^{p+q}(V, G_{m,V})$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [15, приложение В]. Следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^1(V, G_m) \\ \rightarrow H^0(X, R^1 h_* G_{m,V}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(X, h_* G_{m,V}) \\ \rightarrow \text{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^1(X, R^1 h_* G_{m,V}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Слой $R^1 h_* G_{m,V}$ в геометрической точке $\bar{x} \rightarrow x \in X$ изоморфен $H^1(V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m)$ [15, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)], где $\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}$ – строгая гензелезация локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ [15, гл. I, § 4, замечание 4.11]. Очевидно, что $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}})$ – схема над $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A), \pi(x)}$.

Напомним, что строгая гензелезация $\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}$ регулярного локального нётерова кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным локальным нётеровым кольцом [12, предложение 18.8.8, следствие 18.8.13]. Следовательно, это кольцо факториально, и поэтому

$$H^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}), G_m) = \text{Pic}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}) = (0)$$

(см. [13, гл. II, § 6, предложение 6.2, следствие 6.16]).

Если $\bar{x} \rightarrow x \in V$, то $\pi(x)$ – общая точка $\text{Spec}(A)$, поэтому $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – схема над k и $V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} &= H^1(V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) \\ &= H^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) = \text{Pic}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = (0). \end{aligned}$$

Если $\bar{x} \rightarrow x \in X \setminus V$, то $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}})$ – схема над дискретно нормированным кольцом $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A), \pi(x)}$. Пусть η – общая точка $\text{Spec}(A)$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{\eta\} & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

где каждый прямоугольник дает диаграмму расслоенного произведения. Мы видим, что $V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – общий слой канонического морфизма $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$. С другой стороны, морфизм $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ является композицией канонических морфизмов

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A),\pi(x)}) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A).$$

Напомним, что $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A),\pi(x)}$ – дискретно нормированное кольцо. Поэтому $V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – открытая подсхема в $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$. Поскольку $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ и $V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – нётеровы регулярные схемы, то они локально факториальны. Следовательно, существуют естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \operatorname{Cl}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) &\simeq \operatorname{Pic}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})), \\ \operatorname{Cl}(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) &\simeq \operatorname{Pic}(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \end{aligned}$$

(см. [13, гл. II, § 6, следствие 6.16]). Поскольку $V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – открытая подсхема в нётеровой регулярной схеме $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$, то существует точная последовательность

$$\operatorname{Cl}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \rightarrow \operatorname{Cl}(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \rightarrow 0$$

(см. [13, гл. II, § 6, предложение 6.5]). Таким образом, равенство $\operatorname{Pic}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = (0)$ дает равенство $\operatorname{Pic}(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = (0)$. В частности,

$$(R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} = H^1(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) = (0).$$

Следовательно, $(R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} = (0)$ для всех геометрических точек $\bar{x} \rightarrow x \in X$. Поэтому $R^1 h_* G_{m,V} = (0)$, и (6.3) дает следующий изоморфизм:

$$H^2(X, h_* G_{m,V}) \simeq \operatorname{Ker}[\operatorname{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})].$$

Значит, (6.2) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Br}'(X) \rightarrow \operatorname{Ker}[\operatorname{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^2(X, \operatorname{Div}_X^{\operatorname{vert}}). \quad (6.4)$$

Начиная с этого места, мы обозначаем через $k(y)^s$ сепарабельное замыкание $k(y)$ в $\bar{k}(y)$. Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, то существует каноническое вложение $\operatorname{Br}(k) \hookrightarrow \operatorname{Br}'(V)$. С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Br}(A) \rightarrow \operatorname{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^3(\operatorname{Spec}(A), G_m) \rightarrow H^3(\operatorname{Spec}(k), G_m) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

(см. [15, гл. III, § 3, пример 2.22(e)]). Из глобальной теории полей классов известно, что существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Br}(k) \rightarrow \left[\bigoplus_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Br}(k_v) \right] \oplus \left[\bigoplus_{v \text{ архимедова}} \operatorname{Br}(k_v) \right] \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (6.6)$$

где k_v – пополнение k относительно дискретного нормирования v .

В рассматриваемом случае k не имеет вещественных точек, поэтому для архимедовой точки v мы имеем $\mathrm{Br}(k_v) = (0)$ и (6.6) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{v \text{ неархимедова}} \mathrm{Br}(k_v) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (6.7)$$

Используя существование коммутативных диаграмм [15, гл. III, § 3, пример 2.22, (c), (f)]

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k_v) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^2(\mathrm{Spec}(k), G_m) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

мы перепишем (6.7) как

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{codim}_{\mathrm{Spec}(A)}(v)=1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (6.8)$$

В частности, (6.5) дает равенство $\mathrm{Br}(A) = (0)$, поэтому мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{codim}_{\mathrm{Spec}(A)}(v)=1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^3(\mathrm{Spec}(A), G_m). \quad (6.9)$$

Заметим, что

$$H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}) = \bigoplus_{\substack{v \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{codim}_{\mathrm{Spec}(A)}(v)=1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(см. [15, гл. III, § 2, пример 2.22, (a)]). Следовательно, (6.9) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}) \rightarrow H^3(\mathrm{Spec}(A), G_m). \quad (6.10)$$

Пусть $\theta: \mathrm{Spec}(A) \rightarrow X$ – сечение морфизма π , удовлетворяющее условиям теоремы. В частности, $\theta(\mathrm{Spec}(A))$ пересекается в точности с одной неприводимой компонентой любого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \mathrm{Spec}(A)$. Следовательно, любой вертикальный дивизор Картье D с носителем в $\pi^{-1}(v)$ может быть единственным образом представлен в виде

$$D = n_0 \cdot \pi^{-1}(v) + \sum_i n_i \cdot D_i,$$

где $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 0, 1, \dots$, и D_i – такие неприводимые компоненты слоя $\pi^{-1}(v)$, что $D_i \cap \theta(\text{Spec}(A)) = \emptyset$. Поэтому мы получаем следующее разложение пучков:

$$\text{Div}_X^{\text{vert}} = \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V, \text{codim}_X(y)=1 \\ \{y\} \cap \theta(\text{Spec}(A)) = \emptyset}} i_{y*} \mathbb{Z} \right). \quad (6.11)$$

С другой стороны, можно определить канонический морфизм

$$\pi^*: H^*(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \rightarrow H^*(X, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec}(A)})),$$

используя резольвенту Годемана [15, гл. III, § 1, замечание 1.20, (c)]

$$0 \rightarrow \text{Div}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow \mathcal{C}^0(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \rightarrow \dots,$$

точность функтора π^* на категории пучков для этальной топологии [15, гл. II, § 2, предложение 2.6; § 3] и общую конструкцию $\pi^*: H^*(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \rightarrow H^*(X, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec}(A)}))$, следуя работе [9, гл. II, § 4.16].

Соотношение $\pi\theta = \text{id}_{\text{Spec}(A)}$ показывает, что композиция

$$H^*(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \xrightarrow{\pi^*} H^*(X, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec}(A)})) \xrightarrow{\theta^*} H^*(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)})$$

является тождественным морфизмом. Поэтому мы получаем вложение

$$H^2(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(X, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec}(A)})).$$

С другой стороны, разложение (6.11) дает вложение

$$H^2(X, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec}(A)})) \hookrightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}).$$

Следовательно, мы имеем инъективные морфизмы

$$\pi^*: \text{Br}(k) \hookrightarrow \text{Br}'(V), \quad H^2(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) \hookrightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}). \quad (6.12)$$

Пусть $K = \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})]$. Очевидно, что (6.4), (6.10) и (6.12) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Br}'(X) & \rightarrow & K & \rightarrow & H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \\ & & & & \cup & & \cup \\ 0 & \rightarrow & \text{Br}(k) \cap K & \rightarrow & H^2(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) & & \end{array}$$

Таким образом, $\text{Br}'(X) \cap \text{Br}(k) = (0)$ внутри $\text{Br}'(V)$. Следовательно, $\text{Br}'(X) \hookrightarrow \text{Br}'(V)/\text{Br}(k)$, и теорема 6.1 следует из теоремы 2.5.

6.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть V – такое гладкое проективное многообразие над чисто мнимым числовым полем k , что $V(k) \neq \emptyset$, существует арифметическая модель $\pi: X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ многообразия V с приведенными схемными слоями и для некоторого сечения $\theta: \operatorname{Spec}(A) \rightarrow X$ морфизма π $\theta(\operatorname{Spec}(A))$ пересекается в точности с одной неприводимой компонентой любого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \operatorname{Spec}(A)$. Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) V – поверхность типа КЗ;
- 2) V – поверхность Ферма и $l > \operatorname{Card}([\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\operatorname{tors}})$;
- 3) $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$, $\operatorname{rank} \operatorname{NS}(V \otimes \bar{k}) = h^{1,1}(V \otimes \bar{k})$, $l > \operatorname{Card}([\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\operatorname{tors}})$;
- 4) V – гиперкэлерово многообразие с числом Бетти $b_2(V \otimes \bar{k}) > 3$.

Тогда l -примарная компонента группы $\operatorname{Br}'(X)$ конечна.

Заметим, что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$ для поверхности Ферма и для гиперкэлерова многообразия [1, § 2.1]. Если V – гиперкэлерово многообразие, то $[\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\operatorname{tors}} = (0)$ [1, § 2.1]. Поэтому результат следует из теоремы 6.1 и соотношения $\operatorname{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$, доказанного в п. 3.3.

Список литературы

1. André Y. On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties // Math. Ann. 1996. V. 305. P. 205–248.
2. Beauville A. Variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 755–782.
3. Beauville A., Donagi R. The variety of lines of a cubic fourfold // C.R.A.S. Paris. 1985. V. 301. Serie I. P. 703–706.
4. Cassels J. W. S. Diophantine equations with special reference to elliptic curves. Survey article // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 193–291.
5. Касселс Дж., Фрелих А. Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1969.
6. Colliot-Thélène J.-L., Skorobogatov A. N., Swinnerton-Dyer P. Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points // Invent. Math. 1998. V. 134. № 3. P. 579–650.
7. Faltings G. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. V. 73. № 3. P. 349–366.
8. Faltings G. p-adic Hodge theory // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. № 1. P. 255–299.
9. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
10. Gordon B. B. Algebraic cycles and the Hodge structure of a Kuga fiber variety // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1993. V. 336. № 2. P. 933–947.
11. Grothendieck A. Le groupe de Brauer. II // Séminaire Bourbaki. 1965/66. Exposé 297. P. 1–21.
12. Grothendieck A. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes des schémas // Publ. Math. IHES. 1967. V. 32.
13. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
14. Kempf G. Toroidal embeddings. I // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 1973. V. 339.
15. Милн Дж. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
16. Milne J. S. Arithmetic duality theorems. Academic Press Inc., 1986.
17. Mukai S. Symplectic structure on the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface // Invent. Math. 1984. V. 77. P. 101–116.
18. Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.

19. *Serre J.-P., Tate J.* Good reduction of abelian varieties // *Ann. Math. (2)*. 1968. V. 88. P. 492–517.
20. *Shioda T.* On elliptic modular surfaces // *J. Math. Soc. Japan*. 1972. V. 24. P. 20–59.
21. *Shioda T., Katsura T.* On Fermat varieties // *Tohoku Math. J.* 1979. V. 31. P. 97–115.
22. *Shioda T.* The Hodge conjecture for Fermat varieties // *Math. Ann.* 1979. V. 245. P. 175–184.
23. *Танкеев С. Г.* Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1981. Т. 45. № 2. С. 398–434.
24. *Танкеев С. Г.* Поверхности типа K3 над числовыми полями и l -адические представления // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1988. Т. 52. № 6. С. 1252–1271.
25. *Tate J.* Algebraic cycles and poles of zeta functions // *Arithmetical Algebraic Geometry*. N.-Y.: Harper and Row, 1965. P. 93–110.
26. *Tate J.* Endomorphisms of abelian varieties over finite fields // *Invent. Math.* 1966. V. 2. P. 134–144.
27. *Tate J.* On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog // *Séminaire Bourbaki*. 1965/66. Exposé 306. P. 1–26.
28. *Zarhin Yu. G.* Hodge group of K3 surface // *J. für die reine und angew. Math.* 1983. V. 341. P. 193–220.

E-mail: tankeev-m2@vpti.vladimir.su

Поступило в редакцию
22.XII.1998