Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса–Дарбу без предположения выпуклости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 4, 163–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/im299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:19:30

УДК 517.977

А. А. Толстоногов

Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса–Дарбу без предположения выпуклости

Доказана теорема существования решения в задаче минимизации интегрального функционала на решениях управляемой системы, описываемой линейным относительно фазовых переменных и их частных производных уравнением Гурса–Дарбу с ограничениями на управления, фазовые переменные и их первые частные производные.

Система управляется с помощью граничных и распределенных управлений. Не предполагается, что минимизируемый функционал является выпуклым относительно управлений. Множества допустимых управлений и ограничения на фазовые переменные и их первые частные производные также являются невыпуклыми.

Библиография: 19 наименований.

Введение и основной результат

В последние годы интенсивно изучаются вопросы существования решений в невыпуклых задачах оптимального управления и вариационного исчисления. Термин “невыпуклость” подразумевает, что минимизируемый функционал является невыпуклой функцией по управлению. Невыпуклым является также и множество допустимых управлений. То же самое имеется в виду и для невыпуклых задач вариационного исчисления (см., например, [1]). Наиболее интересные результаты для невыпуклых задач оптимального управления получены в [2]–[9] и др. Поскольку не существует достаточно общих схем для изучения таких задач, то в каждой из указанных выше работ рассматриваются конкретные управляемые системы с конкретным видом минимизируемого функционала и с конкретными ограничениями. В данной работе рассматривается следующая управляемая система.

Пусть $a > 0$, $b > 0$, $I_1 = [0, a]$, $I_2 = [0, b]$ – отрезки числовой прямой и $I_3 = I_1 \times I_2$ – прямоугольник с мерами Лебега μ_1, μ_2, μ_3 , $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ – конечномерные пространства, $U_i: I_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$, $U: I_3 \rightarrow Y$ – измеримые многозначные отображения с замкнутыми, невыпуклыми значениями.

Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, u \right), \\ z(x, 0) &= z_0 + \int_0^x u_1(s) ds, \quad x \in I_1, \\ z(0, y) &= z_0 + \int_0^y u_2(t) dt, \quad y \in I_2, \quad z_0 \in X, \end{aligned} \quad (0.1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00216).

с ограничениями на управления

$$\begin{aligned} u_1(x) \in U_1(x), \quad u_2(y) \in U_2(y), \quad u(x, y) \in U(x, y) \text{ п.в.}, \\ u_i(\cdot) \in L_p(I_i, X), \quad i = 1, 2, \quad u(\cdot) \in L_p(I_3, Y), \quad 2 \leq p < \infty, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где сокращение п.в. означает “почти всюду” и

$$F(x, y, z, z_1, z_2, z_3, u) = A(x, y)z + B(x, y)z_1 + C(x, y)z_2 + D(x, y)z_3 + H(x, y, u). \quad (0.3)$$

Здесь $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $D(x, y)$, $(x, y) \in I_3$, – матрицы размера $(n \times n)$, элементы которых принадлежат $L_\infty(I_3, \mathbb{R})$, $H: I_3 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – функция типа Каратеодори и

$$\|H(x, y, u)\| \leq \lambda(x, y) + \lambda_1 \|u\|_Y \text{ п.в.}, \quad \lambda(\cdot) \in L_p(I_3, \mathbb{R}^+), \quad \lambda_1 \geq 0, \quad (0.4)$$

где $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_Y$ – нормы в пространствах X и Y соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Совокупность $(z(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot), u(\cdot), z_0)$, $z(\cdot) \in C(I_3, X)$, $u_1(\cdot) \in L_p(I_1, X)$, $u_2(\cdot) \in L_p(I_2, X)$, $u(\cdot) \in L_p(I_3, Y)$, $z_0 \in X$, называется *решением управляемой системы* (0.1), (0.2), если существует элемент $\psi(\cdot) \in L_p(I_3, X)$ такой, что

$$z(x, y) = z_0 + \int_0^x u_1(s) ds + \int_0^y u_2(t) dt + \int_0^x \int_0^y \psi(s, t) ds dt, \quad (x, y) \in I_3, \quad (0.5)$$

и почти всюду выполняются равенство

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = F\left(x, y, z(x, y), u_1(x) + \int_0^y \psi(x, t) dt, u_2(y) \right. \\ \left. + \int_0^x \psi(s, y) ds, \psi(x, y), u(x, y)\right) \end{aligned} \quad (0.6)$$

и включения (0.2).

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что норма $\|D(x, y)\|$ матрицы $D(x, y)$ п.в. удовлетворяет неравенству $\|D(x, y)\| \leq c < 1$.

Рассмотрим задачу (Р) минимизации функционала:

$$\begin{aligned} J(z, u, u_1, u_2, z_0) = \iint_{I_3} g(x, y, z(x, y)) dx dy + \int_{I_1} g_1(x, u_1(x)) dx \\ + \int_{I_2} g_2(y, u_2(y)) dy + \iint_{I_3} g_3(x, y, u(x, y)) dx dy + g_4(z_0) \end{aligned} \quad (0.7)$$

на решениях управляемой системы (0.1), (0.2) при ограничениях

$$V_i(z) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (0.8)$$

$$W_j(z_x, z_y, u_1, u_2, u) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, l. \quad (0.9)$$

Пусть $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ – расширенная числовая прямая. Сделаем следующие предположения $H(g)$, $H(g_i)$, $i = 1, \dots, 4$, $H(V)$, $H(W)$, $H(J)$:

– $H(g)$; $g: I_3 \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ является нормальным интегрантом [1], функция $z \rightarrow g(x, y, z)$ вогнута п.в. и

$$g(x, y, z) \geq -\alpha_1 \|z\|^{p-1} - \alpha_2(x, y) \text{ п.в., } \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2(\cdot) \in L_1(I_3, \mathbb{R}^+); \quad (0.10)$$

– $H(g_i)$; $g_i: I_i \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, i = 1, 2, g_3: I_3 \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ являются нормальными интегрантами и

$$g_1(x, u_1) \geq \beta_1 \|u_1\|^p - \gamma_1(x) \text{ п.в., } \beta_1 > 0, \quad \gamma_1(\cdot) \in L_1(I_1, \mathbb{R}^+), \quad (0.11)$$

$$g_2(y, u_2) \geq \beta_2 \|u_2\|^p - \gamma_2(y) \text{ п.в., } \beta_2 > 0, \quad \gamma_2(\cdot) \in L_1(I_2, \mathbb{R}^+), \quad (0.12)$$

$$g_3(x, y, u) \geq \beta_3 \|u\|_Y^p - \gamma_3(x) \text{ п.в., } \beta_3 > 0, \quad \gamma_3(\cdot) \in L_1(I_3, \mathbb{R}^+); \quad (0.13)$$

– $H(g_4)$; $g_4: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ является полунепрерывной снизу функцией и

$$g_4(z) \geq \beta_4 \|z\|^p - \gamma_4, \quad \beta_4 > 0, \quad \gamma_4 > 0; \quad (0.14)$$

– $H(V)$; $V_i: C(I_3, X) \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$, является непрерывной вогнутой функцией;

– $H(W)$; $W_j, j = 1, \dots, l$, является вогнутой функцией из

$$Z = L_p(I_3, X) \times L_p(I_3, X) \times L_p(I_1, X) \times L_p(I_2, X) \times L_p(I_3, Y)$$

в $\mathbb{R}$, непрерывной в слабой топологии пространства Z .

Совокупность $(z^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u^*(\cdot), z_0^*)$ назовем *допустимой для задачи (P)*, если она является решением управляемой системы (0.1), (0.2) и удовлетворяет неравенствам (0.8), (0.9).

Сделаем еще одно предположение.

– $H(J)$; существует допустимая совокупность $(z^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u^*(\cdot), z_0^*)$ задачи (P) такая, что

$$J(z^*(\cdot), u^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), z_0^*) < \infty. \quad (0.15)$$

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что гипотезы $H(g), H(g_i), i = 1, \dots, 4, H(V), H(W), H(J)$ выполняются.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Задача (P) имеет решение.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Примером функций $W_j, j = 1, \dots, l$, удовлетворяющих гипотезе $H(W)$, могут служить непрерывные линейные функционалы на пространстве Z .

Работа состоит из введения, трех параграфов и комментариев.

Во введении дается постановка задачи и сформулирован результат.

В § 1 вводятся основные определения и доказываются ряд вспомогательных утверждений, которые используются при доказательстве основной теоремы.

В § 2 рассматривается овыпукленная, так называемая релаксационная задача и доказываются существование решения этой задачи.

§ 3 посвящен доказательству основного результата.

В комментариях обсуждаются существующие подходы при изучении невыпуклых задач и проводится сравнение полученного результата с известными.

§ 1. Основные определения и вспомогательные результаты

В этом параграфе мы приведем основные определения и ряд вспомогательных результатов.

Следуя [1, гл. 8, § 1, с. 231] функцию $g: I_3 \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ назовем *нормальным интегрантом*, если для почти всех $(x, y) \in I_3$ функция $z \rightarrow g(x, y, z)$ полунепрерывна снизу на X и существует борелевская функция $\tilde{g}: I_3 \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $\tilde{g}(x, y, z) = g(x, y, z)$ при почти всех $(x, y) \in I_3$.

Аналогичный смысл это определение имеет и для функций $g_1(x, u_1)$, $g_2(y, u_2)$, $g_3(x, y, u)$.

Пусть (T, Σ, μ) – измеримое пространство. Мнозначное отображение $\Gamma: T \rightarrow X$ называется *измеримым*, если для любого замкнутого множества $C \subset X$ множество $\{t \in T; \Gamma(t) \cap C \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Последовательность $f_n(\cdot) \in L_p(T, X)$, $n \geq 1$, называется *p -равномерно интегрируемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_E \|f_n(t)\|^p dt \leq \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$, $\mu(E) \leq \delta$ и любого $f_n(\cdot)$, $n \geq 1$.

Пусть $C(I_3, X)$ – пространство всех непрерывных функций из I_3 в X с топологией равномерной сходимости на I_3 .

Обозначим $C_p(I_3, X)$ пространство всех непрерывных функций $z: I_3 \rightarrow X$ таких, что существуют $h \in L_p(I_3, X)$, $h_1 \in L_p(I_1, X)$, $h_2 \in L_p(I_2, X)$ такие, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \int_0^{b-\varepsilon} \left\| \varepsilon^{-2} [z(x+\varepsilon, y+\varepsilon) - z(x+\varepsilon, y) - z(x, y+\varepsilon) + z(x, y)] - h(x, y) \right\| dx dy &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \left\| \varepsilon^{-1} [z(x+\varepsilon, b) - z(x, b)] - h_1(x) \right\| dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{b-\varepsilon} \left\| \varepsilon^{-1} [z(a, y+\varepsilon) - z(a, y)] - h_2(y) \right\| dy &= 0. \end{aligned}$$

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1 из [10] (см. также [11, теорема 1.1]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Функция $z: I_3 \rightarrow X$ является элементом пространства $C_p(I_3, X)$ тогда и только тогда, когда существуют $h \in L_p(I_3, X)$, $h_1 \in L_p(I_1, X)$, $h_2 \in L_p(I_2, X)$ такие, что*

$$z(x, y) = z(0, 0) + \int_0^x h_1(s) ds + \int_0^y h_2(t) dt + \int_0^x \int_0^y h(s, t) ds dt, \quad (x, y) \in I_3.$$

При этом

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \int_0^{b-\delta} \left\| (\varepsilon\delta)^{-1} [z(x+\varepsilon, y+\delta) - z(x+\varepsilon, y) - z(x, y+\delta) + z(x, y)] - h(x, y) \right\|^p dx dy &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \int_0^b \left\| \varepsilon^{-1} [z(x+\varepsilon, y) - z(x, y)] - h_1(x) - \int_0^y h(x, t) dt \right\|^p dx dy &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^a \int_0^{b-\delta} \left\| \delta^{-1} [z(x, y+\delta) - z(x, y)] - h_2(y) - \int_0^x h(s, y) ds \right\|^p dx dy &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $z \in C_p(I_3, X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функции $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$ из пространства $L_p(I_3, X)$ мы назовем *частными производными функции z* , если

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \int_0^{b-\delta} \left\| (\varepsilon\delta)^{-1} [z(x+\varepsilon, y+\delta) - z(x+\varepsilon, y) - z(x, y+\delta) + z(x, y)] - \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|^p dx dy &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \int_0^b \left\| \varepsilon^{-1} [z(x+\varepsilon, y) - z(x, y)] - \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right\|^p dx dy &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^a \int_0^{b-\delta} \left\| \delta^{-1} [z(x, y+\delta) - z(x, y)] - \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right\|^p dx dy &= 0. \end{aligned}$$

Из определения частных производных и утверждения 1.1 мы получаем, что если $z \in C_p(I_3, X)$, то частные производные $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ и $\partial^2 z/\partial x \partial y$ существуют и почти всюду на I_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} &= h_1(x) + \int_0^y \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x \partial t} dt, \\ \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} &= h_2(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 z(s, y)}{\partial s \partial y} ds, \quad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = h(x, y). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из (1.1), (0.5), (0.6) следует, что введенное определение решения управляемой системы (0.1), (0.2) согласовано с формальной записью уравнения (0.1).

Для каждого $z \in C_p(I_3, X)$ положим

$$\|z\|_{C_p(I_3, X)} = \|z\|_{C(I_3, X)} + \left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|_{L_p(I_3, X)} + \left\| \frac{\partial z}{\partial y} \right\|_{L_p(I_3, X)} + \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right\|_{L_p(I_3, X)}.$$

Очевидно, что $\|\cdot\|_{C_p(I_3, X)}$ является нормой на $C_p(I_3, X)$.

Обозначим через S_p пространство $L_p(I_3, X) \times L_p(I_1, X) \times L_p(I_2, X) \times X$ с нормой прямого произведения

$$\|\cdot\|_{S_p} = \|\cdot\|_{L_p(I_3, X)} + \|\cdot\|_{L_p(I_1, X)} + \|\cdot\|_{L_p(I_2, X)} + \|\cdot\|.$$

Пусть $\mathcal{T}: S_p \rightarrow C_p(I_3, X)$ – оператор, определенный по правилу

$$\mathcal{T}(h, h_1, h_2, z_0)(x, y) = \int_0^x \int_0^y h(s, t) ds dt + \int_0^x h_1(s) ds + \int_0^y h_2(t) dt + z_0. \quad (1.2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Оператор $\mathcal{T}$ является топологическим изоморфизмом пространств S_p и $C_p(I_3, X)$. Если последовательность $(h^n, h_1^n, h_2^n, z_0^n)$, $n \geq 1$, сходится к (h, h_1, h_2, z_0) в слабой топологии пространства S_p , то последовательность $z_n(\cdot) = \mathcal{T}(h^n, h_1^n, h_2^n, z_0^n)$ сходится к $z(\cdot) = \mathcal{T}(h, h_1, h_2, z_0)$ в топологии пространства $C(I_3, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Топологический изоморфизм пространств S_p и $C_p(I_3, X)$ следует из [11, утверждение 1.1].

Пусть последовательность $(h^n, h_1^n, h_2^n, z_0^n)$ сходится к (h, h_1, h_2, z_0) в слабой топологии пространства S_p . Тогда $h^n \rightarrow h$ в слабой топологии пространства $L_p(I_3, X)$, $h_1^n \rightarrow h_1$ в слабой топологии пространства $L_p(I_1, X)$, $h_2^n \rightarrow h_2$ в слабой топологии пространства $L_p(I_2, X)$ и $z_0^n \rightarrow z_0$ в топологии пространства X . Поэтому последовательности h^n, h_1^n, h_2^n равномерно p -интегрируемы. Воспользовавшись (1.2), получаем, что последовательность $z_n(x, y)$, $n \geq 1$, равномерно непрерывна на I_3 . Так как последовательность $z_n(\cdot)$, $n \geq 1$, сходится к $z(\cdot)$ в слабой топологии пространства $C_p(I_3, X)$, то она сходится к $z(\cdot)$ и в слабой топологии пространства $C(I_3, X)$. Поскольку последовательность $z_n(\cdot)$, $n \geq 1$, равномерно непрерывна, то она сходится к $z(\cdot)$ в топологии пространства $C(I_3, X)$. Утверждение доказано.

На пространстве $L_p(I_3, X)$ рассмотрим норму

$$\|\psi\|_0 = \max_{(x,y) \in I_3} \exp[-k(x+y)] \left(\int_0^x \int_0^y \|\psi(s,t)\|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad k > 0, \quad (1.3)$$

которая, очевидно, эквивалентна стандартной норме пространства $L_p(I_3, X)$.

Пространство $L_p(I_3, X)$ с нормой (1.3) будем обозначать $L_p^0(I_3, X)$.

Пусть $P: L_p(I_3, X) \times L_p(I_1, X) \times L_p(I_2, X) \times L_p^0(I_3, X) \times X \rightarrow L_p^0(I_3, X)$ – оператор, определенный по правилу

$$\begin{aligned} P(v, u_1, u_2, \psi, z_0)(x, y) = & A(x, y) \left(z_0 + \int_0^x u_1(s) ds \right. \\ & + \int_0^y u_2(t) dt + \int_0^x \int_0^y \psi(s, t) ds dt \Big) + B(x, y) \left(u_1(x) + \int_0^y \psi(s, t) dt \right) \\ & + C(x, y) \left(u_2(x) + \int_0^x \psi(s, y) ds \right) + D(x, y) \psi(x, y) + v(x, y), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $v(\cdot) \in L_p(I_3, X)$, $\psi(\cdot) \in L_p^0(I_3, X)$, $u_1(\cdot) \in L_p(I_1, X)$, $u_2(\cdot) \in L_p(I_2, X)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. P является линейным оператором, и существуют $k > 0$, $0 < \gamma < 1$, $M > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} & \|P(v', u'_1, u'_2, \psi', z'_0) - P(v'', u''_1, u''_2, \psi'', z''_0)\|_{L_p^0(I_3, X)} \\ & \leq M (\|v' - v''\|_{L_p(I_3, X)} + \|u'_1 - u''_1\|_{L_p(I_1, X)} + \|u'_2 - u''_2\|_{L_p(I_2, X)} \\ & \quad + \|z'_0 - z''_0\|) + \gamma \|\psi' - \psi''\|_{L_p^0(I_3, X)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность оператора P следует из (1.4). Доказательство неравенства (1.5) проводится с помощью несложных, но громоздких выкладок (см., например, [11], [12]). Поэтому мы опускаем эти выкладки.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= F_1 \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, v \right), \\ z(x, 0) &= z_0 + \int_0^x u_1(s) ds, \quad x \in I_1, \\ z(0, y) &= z_0 + \int_0^y u_2(t) dt, \quad y \in I_2, \quad z_0 \in X, \\ u_i(\cdot) &\in L_p(I_i, X), \quad i = 1, 2, \quad v(\cdot) \in L_p(I_3, X), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$F_1(x, y, z, z_1, z_2, z_3, v) = A(x, y)z + B(x, y)z_1 + C(x, y)z_2 + D(x, y)z_3 + v. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любых $v(\cdot)$, $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, z_0 уравнение (1.6) имеет единственное решение $z(\cdot) \in C_p(I_3, X)$, причем*

$$z(\cdot) = \mathcal{A}(v, u_1, u_2, z_0), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathcal{A}_1(v, u_1, u_2, z_0), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \mathcal{A}_3(v, u_1, u_2, z_0), \quad (1.10)$$

где $\mathcal{A}: S_p \rightarrow C_p(I_3, X)$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2: S_p \rightarrow L_p(I_3, X)$ – непрерывные линейные операторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 1.3 следует, что при фиксированных $v(\cdot)$, $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, z_0 оператор P является сжимающим из банахова пространства $L_p^0(I_3, X)$ в $L_p^0(I_3, X)$. Поэтому он имеет единственную неподвижную точку

$$\psi^* = P(v, u_1, u_2, \psi^*, z_0). \quad (1.11)$$

Воспользовавшись (1.1), (1.2), (1.4), (1.7) и определением решения уравнения (1.6), мы получаем, что

$$z^*(\cdot) = \mathcal{T}(\psi^*, u_1, u_2, z_0) \quad (1.12)$$

является единственным решением уравнения (1.6).

Обозначим через $P_1: S_p \rightarrow L_p(I_3, X)$ оператор, который каждому элементу $(v, u_1, u_2, z_0) \in S_p$ ставит в соответствие единственную неподвижную точку ψ^* оператора P . Из линейности оператора P следует, что оператор P_1 является линейным. Воспользовавшись (1.5), (1.11), получаем

$$\begin{aligned} \|P_1(v', u'_1, u'_2, z'_0) - P_1(v'', u''_1, u''_2, z''_0)\|_{L_p^0(I_3, X)} &\leq \frac{M}{1 - \gamma} \\ &\times (\|v' - v''\|_{L_p(I_3, X)} + \|u'_1 - u''_1\|_{L_p(I_1, X)} + \|u'_2 - u''_2\|_{L_p(I_2, X)} + \|z'_0 - z''_0\|). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $P_1: S_p \rightarrow L_p(I_3, X)$ является непрерывным. Тогда согласно (1.12)

$$z(\cdot) = \mathcal{T}(P_1(v, u_1, u_2, z_0), u_1, u_2, z_0) = \mathcal{A}(v, u_1, u_2, z_0).$$

Поэтому равенство (1.8) доказано.

Воспользовавшись (1.1), (1.2), (1.12), получаем

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = u_1(x) + \int_0^y \psi^*(x, t) dt = u_1(x) + \int_0^y P_1(v, u_1, u_2, z_0)(x, t) dt. \quad (1.13)$$

Обозначим через $\mathcal{A}_1: S_p \rightarrow L_p(I_3, X)$ оператор, определенный по правилу

$$\mathcal{A}_1(v, u_1, u_2, z_0)(x, y) = u_1(x) + \int_0^y P_1(v, u_1, u_2, z_0)(x, t) dt,$$

который, как легко показать, является линейным и непрерывным из S_p в $L_p(I_3, X)$. Теперь равенство (1.9) вытекает из (1.13). Равенство (1.10) доказывается аналогично. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Для любых $u(\cdot)$, $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, $z_0 \in X$, удовлетворяющих ограничениям (0.2), уравнение (0.1) имеет решение $z(\cdot) \in C_p(I_3, X)$.*

Следствие вытекает из теоремы 1.1, если положить $v(x, y) = H(x, y, u(x, y))$ и воспользоваться неравенством (0.4).

§ 2. Релаксационная задача

В этом параграфе мы рассмотрим вспомогательную, так называемую релаксационную задачу.

Для удобства и единообразия мы будем обозначать переменную x через x_1 , переменную y через x_2 , пару (x, y) через x_3 , пространство X через Y_1 и Y_2 , пространство $Y \times X = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ через Y_3 , пару $(u, v) \in Y \times X$ через u_3 , переменную z_0 через u_4 .

Рассмотрим многозначное отображение $U_3: I_3 \rightarrow Y_3$, определенное по правилу

$$U_3(x_3) = \{u_3 = (u, v) \in Y \times X = Y_3, u \in U(x_3), v = H(x_3, u)\}. \quad (2.1)$$

Пусть $\tilde{g}_i: I_i \times Y_i \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2, 3$, — функции, определенные следующим образом:

$$\tilde{g}_i(x_i, u_i) = \begin{cases} g_i(x_i, u_i), & u_i \in U_i(x_i), \\ +\infty, & u_i \notin U_i(x_i). \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь мы считаем, что

$$g_3(x_3, u_3) = g_3(x, y, u). \quad (2.3)$$

Пусть $g_i^{**}(x_i, u_i)$, $i = 1, 2, 3$, — биполяры функций $u_i \rightarrow \tilde{g}_i(x_i, u_i)$ [1, гл. 1, § 4, с. 27]. Рассмотрим релаксационную задачу (RP) минимизации функционала

$$\begin{aligned} J^{**}(z, u_3, u_1, u_2, u_4) &= \int_{I_3} g(x_3, z(x_3)) d\mu_3 + \int_{I_1} g_1^{**}(x_1, u_1(x_1)) d\mu_1 \\ &+ \int_{I_2} g_2^{**}(x_2, u_2(x_2)) d\mu_2 + \int_{I_3} g_3^{**}(x_3, u_3(x_3)) d\mu_3 + g_4(u_4) \end{aligned}$$

на решениях управляемой системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= F_1 \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, v \right), \\ z(x, 0) &= u_4 + \int_0^x u_1(s) ds, \quad x \in I_1, \\ z(0, y) &= u_4 + \int_0^y u_2(t) dt, \quad y \in I_2, \quad u_4 \in X,\end{aligned}\tag{2.4}$$

с ограничениями

$$\begin{aligned}(u(x, y), v(x, y)) &= (u_3(x_3)) \in \overline{\text{co}} U_3(x_3) \text{ п.в.}, \\ u_i(\cdot) &\in L_p(I_i, Y_i), \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{2.5}$$

и (0.8), (0.9), где F_1 – функция (1.7) и $\overline{\text{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества.

ТЕОРЕМА 2.1. *Задача (RP) имеет решение.*

Доказательству теоремы предположим ряд вспомогательных утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Мнозначное отображение $U_3: I_3 \rightarrow Y_3$ является измеримым с замкнутыми значениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость значений отображения $U_3(x_3)$ следует из замкнутости значений отображения $U(x, y)$ и непрерывности функции $u \rightarrow H(x, y, u)$.

Так как $H(x, y, u)$ является функцией типа Каратеодори, а $U(x, y)$ – измеримое многозначное отображение, то из [13, лемма 1.3] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $I_\varepsilon \subset I_3$ такое, что $\mu(I_3 \setminus I_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и сужение $H(x, y, u)$ на $I_\varepsilon \times Y$ непрерывно, а сужение $U(x, y)$ на I_ε имеет замкнутый график в $I_3 \times Y$. Поэтому сужение $U_3(x_3)$ на I_3 имеет замкнутый график в $I_\varepsilon \times Y_3$. Воспользовавшись теоремой 3.5 из [14], получаем, что отображение $U_3(x_3)$ измеримо. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Функции g_i^{**} , $i = 1, 2, 3$, являются нормальными интегрантами и*

$$-\gamma_i(x_i) + \beta_i \|u_i\|^p \leq g_i^{**}(x_i, u_i) \leq \tilde{g}_i(x_i, u_i), \quad i = 1, 2,\tag{2.6}$$

$$-\gamma_3(x_3) + \beta_3 \|u\|^p \leq g_3^{**}(x_3, u_3) \leq \tilde{g}_3(x_3, u_3).\tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что функция $g_3^{**}(x_3, u_3)$ является нормальным интегрантом. Из [12, лемма 1.3] и [1, гл. 8, § 1, теорема 1.1, с. 231] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют компакт $I_\varepsilon \subset I_3$ такой, что $\mu_3(I_3 \setminus I_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и сужение $g_3(x, y, u)$ на $I_\varepsilon \times Y$ и, следовательно, на $I_\varepsilon \times Y_3$ является полунепрерывной снизу функцией, а сужение $U_3(x, y)$ на I_ε имеет замкнутый график $I_3 \times Y_3$. Тогда согласно (2.2) сужение $\tilde{g}_3(x_3, u_3)$ на $I_\varepsilon \times Y_3$ будет полунепрерывной снизу функцией. Воспользовавшись теоремой 1.1 из [1, гл. 8, § 1, с. 231], получаем, что функция $\tilde{g}_3(x_3, u_3)$ является нормальным интегрантом. Следовательно, согласно предложению 1.3 из [1, гл. 8, § 1, с. 238] функция $g_3^{**}(x_3, u_3)$ является нормальным интегрантом.

Так как функция $u_3 = (u, v) \rightarrow -\gamma_3(x_3) + \beta_3 \|u\|^p$ является выпуклой, то неравенство (2.7) вытекает из (0.13) и предложения 4.1 из [1, гл. 1, § 4, с. 27].

Аналогично можно доказать, что функции g_i^{**} , $i = 1, 2$, являются нормальными интегрантами и что справедливы неравенства (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Из утверждения 2.2, гипотез $H(g)$, $H(g_4)$ следует, что для любых $z(\cdot) \in C(I_3, X)$, $u_i(\cdot) \in L_p(I_i, Y_i)$, $i = 1, 2, 3$, $u_4 \in X$ функции $g(x, y, z(x, y))$, $g_i^{**}(x_i, u_i(x_i))$, $i = 1, 2, 3$, измеримы и

$$-\infty < J^{**}(z, u_3, u_1, u_2, u_4) \leq +\infty. \quad (2.8)$$

Пусть $(z_n(\cdot), w_n(\cdot))$, $n \geq 1$, $w_n(\cdot) = (u_3^n(\cdot), u_1^n(\cdot), u_2^n(\cdot), u_4^n(\cdot))$ — минимизирующая последовательность задачи (RP).

Если $(z^*(\cdot), u^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u_4^*)$ — допустимая совокупность задачи (P), то из (2.6), (2.7), (2.2), (2.3), (0.4) следует, что совокупность $(z^*(\cdot), u_3^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u_4^*)$, $u_3^*(\cdot) = (u^*(\cdot), v^*(\cdot))$, $v^*(x_3) = H(x_3, u^*(x_3))$ является допустимой для задачи (RP). Поэтому существует $M > 0$ такое, что

$$-\infty < J^{**}(z_n, w_n) < M, \quad n \geq 1. \quad (2.9)$$

Воспользовавшись (2.6), (2.7), (0.10), (0.14), получим

$$\begin{aligned} & -c_1 - c_2 \|z_n(\cdot)\|_{C_p(I_3, X)}^{p-1} + \\ & + c_3 \left(\|u_1^n\|_{L_p(I_1, Y_1)}^p + \|u_2^n\|_{L_p(I_2, Y_2)}^p + \|u_n\|_{L_p(I_3, Y)}^p + \|u_4^n\|^p \right) \leq M, \end{aligned}$$

$n \geq 1$, при некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$.

Тогда из теоремы 1.1 следует, что

$$\begin{aligned} & -c_1 - c_2 \|\mathcal{A}\|^{p-1} (\|u_1^n\|_{L_p(I_1, Y_1)} + \|u_2^n\|_{L_p(I_2, Y_2)} + \|v_n\|_{L_p(I_3, X)} + \|u_4^n\|)^{p-1} \\ & + c_3 (\|u_1^n\|_{L_p(I_1, Y_1)}^p + \|u_2^n\|_{L_p(I_2, Y_2)}^p + \|u_n\|_{L_p(I_3, Y)}^p + \|u_4^n\|^p) \leq M. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как $u_3^n(x_3) = (u_n(x_3), v_n(x_3)) \in \overline{\text{co}} U_3(x_3)$, то из (0.4) получаем, что

$$\|v_n\|_{L_p(I_3, X)} \leq c_4 + \lambda_1 \|u_n\|_{L_p(I_3, Y)}, \quad n \geq 1. \quad (2.11)$$

Покажем, что последовательность $r_n = (\|u_1^n\|_{L_p(I_1, Y_1)}^p + \|u_2^n\|_{L_p(I_2, Y_2)}^p + \|u_n\|_{L_p(I_3, Y)}^p + \|u_4^n\|^p)$ ограничена.

Предположим, что это не так. Переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем считать, что $r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая (2.11), легко показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^{-1} (\|u_1^n\|_{L_p(I_1, Y_1)} + \|u_2^n\|_{L_p(I_2, Y_2)} + \|v_n\|_{L_p(I_3, X)} + \|u_4^n\|)^{p-1} = 0.$$

Поэтому из (2.10) получаем, что $c_3 \leq 0$. Так как $c_3 > 0$, то приходим к противоречию. Следовательно, последовательность r_n , $n \geq 1$, ограничена.

Не нарушая общности, мы можем считать, что последовательность $(u_n(\cdot), v_n(\cdot), u_1^n(\cdot), u_2^n(\cdot))$ сходится к $(u^*(\cdot), v^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))$ в слабой топологии пространства $L_p(I_3, Y) \times L_p(I_3, X) \times L_p(I_1, Y_1) \times L_p(I_2, Y_2)$, а $u_4^n \rightarrow u_4^*$ в топологии пространства X .

Рассмотрим функцию $G: C(I_3, X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определенную по правилу

$$G(z) = \int_{I_3} g(x_3, z(x_3)) d\mu_3. \quad (2.12)$$

Из гипотезы $H(g)$ следует, что функция $G(z)$ вогнута и

$$G(z) \geq -\alpha_1 \|z\|_{C(I_3, X)}^{p-1} - \|\alpha(\cdot)\|_{L_1(I_3, \mathbb{R})}. \quad (2.13)$$

Возьмем фиксированное n_0 . Тогда из (2.9) следует, что

$$G(z_{n_0}) < +\infty. \quad (2.14)$$

Воспользовавшись (2.13), (2.14) и предложением 2.5 из [1, гл. 1, § 2, с. 21] применительно к функции $-G(z)$, получаем, что $G(z)$ является непрерывной функцией из $C(I_3, X)$ в $\mathbb{R}$. Из утверждения 1.2 и теоремы 1.1 вытекает, что последовательность $z_n(\cdot) = \mathcal{A}(v_n, u_1, u_2, u_4)$, $n \geq 1$, сходится к $z^*(\cdot) = \mathcal{A}(v^*, u_1^*, u_2^*, u_4^*)$ в пространстве $C(I_3, X)$. Поэтому $z^*(\cdot)$ является решением уравнения (2.4). Аналогично, из гипотез $H(V)$, $H(W)$ и теоремы 1.1 получаем, что

$$\begin{aligned} V_i(z^*(\cdot)) &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ W_j(z_x^*(\cdot), z_y^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u^*(\cdot)) &\leq d_j, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

И, наконец, из теоремы Мазура следует, что

$$u_3^*(x_3) = (u^*(x_3), v^*(x_3)) \in \overline{\text{co}} U_3(x_3). \quad (2.15)$$

Следовательно, $(z^*(\cdot), u^*(\cdot), v^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u_4^*)$ является решением управляемой системы (2.4), (2.5), удовлетворяющим ограничениям (0.8), (0.9).

Воспользовавшись утверждением 2.2 и следствием 1.2 из [1, гл. 8, § 1, с. 238], получаем, что функции $u_i(\cdot) \rightarrow \int_{I_i} g_i^{**}(x_i, u_i(x_i)) d\mu_i$, $i = 1, 2, 3$, слабо секвенциально полунепрерывны снизу. Принимая во внимание непрерывность функции $G(z)$ (2.12) и полунепрерывность снизу функции $g_4(u_4)$, получаем

$$J^{**}(z^*, u_3^*, u_1^*, u_2^*, u_4^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J^{**}(z_n, u_3^n, u_1^n, u_2^n, u_4^n).$$

Теорема доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Рассмотрим задачу $(\tilde{P})$ минимизации функционала

$$\tilde{J}(z, u_3, u_1, u_2, u_4) = \int_{I_3} g(x_3, z(x_3)) d\mu_3 + \sum_{i=1}^3 \int_{I_i} \tilde{g}_i(x_i, u_i(x_i)) d\mu_i + g_4(u_4)$$

на решениях управляемой системы (2.4) с ограничениями

$$u_3(x_3) \in U_3(x_3), \quad u_i(\cdot) \in L_p(I_i, Y_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

и ограничениями (0.8), (0.9).

Из (2.1)–(2.3) следует, что любая допустимая совокупность $(z^*(\cdot), u^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u_4^*)$ задачи (P) является допустимой и для задачи $(\tilde{P})$ с $u_3(x_3) = (u(x_3), v(x_3))$, $v(x_3) = H(x_3, u(x_3))$. Так как

$$\min J^{**}(z, u_3, u_1, u_2, u_4) \leq \inf \tilde{J}(z, u_3, u_1, u_2, u_4) < \infty, \quad (3.1)$$

то в соответствии с (2.1)–(2.3) задачи (P) и ($\tilde{P}$) эквивалентны.

Пусть $(z^0(\cdot), u_3^0(\cdot), u_1^0(\cdot), u_2^0(\cdot), u_4^0(\cdot))$ – решение задачи (RP).

Основная теорема будет доказана, если мы покажем, что существует допустимая совокупность $(z^*(\cdot), u_3^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u_4^*(\cdot))$ задачи ($\tilde{P}$) такая, что

$$J^{**}(z^0, u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0) = \tilde{J}(z^*, u_3^*, u_1^*, u_2^*, u_4^*).$$

Так как $-\infty < \int_{I_i} g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) d\mu_i < \infty$, $i = 1, 2, 3$, то функции $g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i))$, $i = 1, 2, 3$, интегрируемы и, следовательно, почти всюду на I_i

$$|g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i))| < \infty, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Пусть $k_1 = n$, $k_2 = n$, $k_3 = n + m$. Из предложения 3.1 [1, гл. 9, § 3, с. 281] следует, что существуют измеримые функции (p_i^j, u_i^j) из I_i в $[0, 1] \times \mathbb{R}^{k_i}$, $j = 1, \dots, k_i + 1$, $i = 1, 2, 3$, такие, что

$$u_i^0(x_i) = \sum_{j=1}^{k_i+1} p_i^j(x_i) u_i^j(x_i), \quad (3.3)$$

$$g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) = \sum_{j=1}^{k_i+1} p_i^j(x_i) \tilde{g}_i(x_i, u_i^j(x_i)), \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^{k_i+1} p_i^j(x_i) = 1. \quad (3.5)$$

Для фиксированного $i = 1, 2, 3$ положим

$$E_i^j = \{x_i \in I_i; u_i^j(x_i) \notin U_i(x_i)\}, \quad j = 1, \dots, k_i + 1.$$

Легко показать, что множества E_i^j измеримы. Если $x_i \in E_i^j$ и $\mu(E_i^j) = 0$, то $u_i^j(x_i) \in U_i(x_i)$ п.в. на I_3 . Если же $\mu_i(E_i^j) > 0$, то $\tilde{g}_i(x_i, u_i^j(x_i)) = +\infty$ п.в. на E_i^j . Тогда согласно (3.2), (3.4), (3.5) $p_i^j(x_i) = 0$ п.в. на E_i^j . Следовательно, не нарушая равенств (3.3), (3.4), мы можем изменить $u_i^j(x_j)$ на множестве E_i^j так, что $u_i^j(x_j)$ останутся измеримыми функциями и

$$u_i^j(x_i) \in U_i(x_i) \text{ п.в.}, \quad j = 1, \dots, k_i + 1. \quad (3.6)$$

Тогда из (3.4), (2.2) мы получим

$$g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) = \sum_{j=1}^{k_i+1} p_i^j(x_i) g_i(x_i, u_i^j(x_i)) \text{ п.в.}, \quad (3.7)$$

имея в виду, что для $i = 3$ имеет место равенство (2.3).

Воспользовавшись (3.3), (3.6), мы получаем, что

$$u_i^0(x_i) \in \text{co } U_i(x_i) \text{ п.в. на } I_3, \quad (3.8)$$

где co означает выпуклую оболочку множества.

Из теоремы Лузина [1, гл. 8, § 1, с. 230] следует, что существует последовательность Q_i^l , $l = 1, 2, \dots$, $Q_i^l \subset I_i$, попарно непересекающихся компактных множеств таких, что $\mu_i(\bigcup_{l=1}^{\infty} Q_i^l) = \mu_i(I_i)$ и сужение каждой из функций $x_i \rightarrow u_i^j(x_i)$, $x_i \rightarrow g_i(x_i, u_i^j(x_i))$, $j = 1, \dots, k_i + 1$, на любом из множеств Q_i^l непрерывно.

Рассмотрим измеримые многозначные отображения $\Gamma_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$ с компактными значениями, определенные следующим образом:

$$\Gamma_i(x_i) = \bigcup_{j=1}^{k_i+1} g_i(x_i, u_i^j(x_i)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда из (3.7) вытекает, что

$$g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) \in \text{co } \Gamma_i(x_i) \quad \text{п.в. на } I_i. \quad (3.9)$$

Так как $g_i(x_i, u_i^j(x_i))$ непрерывна на каждом из множеств Q_i^l , $l = 1, 2, \dots$, то многозначное отображение $\Gamma_i(x_i)$ интегрально ограничено на каждом из множеств Q_i^l . Воспользовавшись свойствами многозначного интеграла в конечномерном пространстве [15], мы получим, что

$$\int_{Q_i^l} \Gamma_i(x_i) d\mu_i = \int_{Q_i^l} \text{co } \Gamma_i(x_i) d\mu_i.$$

Из этого равенства и (3.9) следует, что для каждого $l = 1, 2, \dots$ существуют попарно непересекающиеся измеримые множества $Q_i^{l,j}$, $j = 1, \dots, k_i + 1$, такие, что $\mu_i(\bigcup_{j=1}^{k_i+1} Q_i^{l,j}) = \mu_i(Q_i^l)$ и

$$\begin{aligned} \int_{Q_i^l} g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) d\mu_i &= \int_{Q_i^l} \sum_{j=1}^{k_i+1} p_i^j(x_i) g_i(x_i, u_i^j(x_i)) d\mu_i \\ &= \int_{Q_i^l} \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) g_i(x_i, u_i^j(x_i)) d\mu_i, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\chi(Q_i^{l,j})$ означает характеристическую функцию множества $Q_i^{l,j}$.

Покажем, что для любого измеримого разбиения $Q_i^{l,j}$, $j = 1, \dots, k_i + 1$, множества Q_i^l , для которого имеет место равенство (3.10), функция

$$f_i(x_i) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) g_i(x_i, u_i^j(x_i)) \quad (3.11)$$

интегрируема.

Рассмотрим последовательность

$$f_i^n(x_i) = \sum_{l \leq n} \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) (g_i(x_i, u_i^j(x_i)) + \gamma_i(x_i)). \quad (3.12)$$

Из гипотезы $H(g_i)$ следует, что функции $f_i^n(x_i)$, $n \geq 1$, неотрицательны на I_i , последовательность $f_i^n(x_i)$, $n \geq 1$, монотонно не убывает и почти всюду сходится к функции $f_i(x_i) + \gamma_i(x_i)$.

Воспользовавшись (3.10), (3.12), получаем

$$\begin{aligned} \int_{I_i} f_i^n(x_i) d\mu_i &= \sum_{l \leq n} \int_{Q_i^l} \left(\sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) g_i(x_i, u_i^j(x_i)) + \gamma_i(x_i) \right) d\mu_i \\ &= \sum_{l \leq n} \int_{Q_i^l} \left(\sum_{j=1}^{k_i+1} p_i^j(x_i) g_i(x_i, u_i^j(x_i)) + \gamma_i(x_i) \right) d\mu_i \\ &= \sum_{l \leq n} \int_{Q_i^l} (g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) + \gamma_i(x_i)) d\mu_i. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (2.6), (2.7) следует, что функция $g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) + \gamma_i(x_i)$ неотрицательна. Так как функция $g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i))$ интегрируема, то из (3.13) и леммы Фату следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_i} f_i^n(x_i) d\mu_i = \int_{I_i} \lim_{n \rightarrow \infty} f_i^n(x_i) d\mu_i = \int_{I_i} (f_i(x_i) + \gamma_i(x_i)) d\mu_i < \infty.$$

Следовательно, функция $f_i(x_i)$ интегрируема.

Рассмотрим функцию

$$u_i^*(x_i) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) u_i^j(x_i). \quad (3.14)$$

Воспользовавшись (3.11), (0.11)–(0.13), получаем

$$\begin{aligned} -\gamma_i(x_i) + \beta_i \|u_i^*(x_i)\|^p &\leq f_i(x_i), \quad i = 1, 2, \\ -\gamma_3(x_3) + \beta_3 \|u^*(x_3)\|^p &\leq f_3(x_3). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что функции $u_1^*(\cdot)$, $u_2^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ интегрируемы с p -степенью. Согласно (3.6) $u_3^j(x_3) \in U_3(x_3)$ п.в. на I_3 . Воспользовавшись (2.1), (0.4), (3.14), получаем, что и функция $v^*(\cdot)$ интегрируема с p -степенью. Поэтому функция $u_3^*(\cdot) = (u^*(\cdot), v^*(\cdot))$ интегрируема с p -степенью.

Согласно теореме 1.1 решение $z(\cdot)$ управляемой системы (2.4) может быть представлено в виде (1.8) и справедливы равенства (1.9), (1.10).

Рассмотрим операторы $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{A}_1^0$, $\mathcal{A}_2^0$, определенные на пространстве $Z = (\prod_{i=1}^3 L_p(I_i, Y_i)) \times X$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0(u_3, u_1, u_2, u_4) &= \mathcal{A}(v, u_1, u_2, u_4), \\ \mathcal{A}_1^0(u_3, u_1, u_2, u_4) &= \mathcal{A}_1(v, u_1, u_2, u_4), \\ \mathcal{A}_2^0(u_3, u_1, u_2, u_4) &= \mathcal{A}_2(v, u_1, u_2, u_4), \quad u_3 = (u, v). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{A}^0: Z \rightarrow C_p(I_3, X)$, $\mathcal{A}_i^0: Z \rightarrow L_p(I_3, X)$, $i = 1, 2$, являются линейными, непрерывными операторами и

$$z(\cdot) = \mathcal{A}^0(u_3, u_1, u_2, u_4), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathcal{A}_1^0(u_3, u_1, u_2, u_4), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \mathcal{A}_2^0(u_3, u_1, u_2, u_4). \quad (3.17)$$

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ – скалярное произведение в пространстве Y_i и $L_q(I_i, Y_i)$ – пространство, сопряженное к $L_p(I_i, Y_i)$, $i = 1, 2, 3$, $1/p + 1/q = 1$. Как было показано в § 2, функция $G(z)$ (2.12) является непрерывной из $C(I_3, X)$ в $\mathbb{R}$ и вогнутой. Воспользовавшись (3.15), получаем, что функция $-G(\mathcal{A}^0(u_3, u_1, u_2, u_4))$ является непрерывной из $(\prod_{i=1}^3 L_p(I_i, Y_i)) \times X$ и выпуклой. Тогда согласно предложению 5.2 из [1, гл. 1, § 5, с. 31] функция $-G(\mathcal{A}^0(u_3, u_1, u_2, u_4))$ субдифференцируема в точке $(u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0)$. Поэтому существуют $\varphi_i(\cdot) \in L_q(I_i, Y_i)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что

$$\begin{aligned} & G(\mathcal{A}^0(u_3, u_1, u_2, u_4^0)) - G(\mathcal{A}^0(u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0)) \\ & \leq \sum_{i=1}^3 \int_{I_i} \langle \varphi_i(x_i), u_i(x_i) - u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i, \quad u_i(\cdot) \in L_p(I_i, Y_i). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для простоты изложения и избежания громоздкости будем считать, что ограничение (0.8) состоит из одной функции $V(z)$. Тогда, воспользовавшись $H(V)$ и (3.15), по аналогии получим, что существуют $\psi_i(\cdot) \in L_q(I_i, Y_i)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что

$$\begin{aligned} & V(\mathcal{A}^0(u_3, u_1, u_2, u_4^0)) - V(\mathcal{A}^0(u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0)) \\ & \leq \sum_{i=1}^3 \int_{I_i} \langle \psi_i(x_i), u_i(x_i) - u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i, \quad u_i(\cdot) \in L_p(I_i, Y_i). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Точно так же мы будем предполагать, что ограничение (0.9) состоит из одной функции $W(z_x, z_y, u_1, u_2, u)$. Если мы положим

$$W(z_x, z_y, u_1, u_2, u_3) = W(z_x, z_y, u_1, u_2, u),$$

то функция $W(z_x, z_y, u_1, u_2, u_3)$ обладает теми же свойствами непрерывности и вогнутости, что и функция $W(z_x, z_y, u_1, u_2, u)$. Поэтому, воспользовавшись (3.16), (3.17), мы получим, что существуют $q_i(\cdot) \in L_q(I_i, Y_i)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что

$$\begin{aligned} & W(\mathcal{A}_1^0(u_3, u_1, u_2, u_4^0), \mathcal{A}_2^0(u_3, u_1, u_2, u_4^0), u_1, u_2, u_3) \\ & - W(\mathcal{A}_1^0(u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0), \mathcal{A}_2^0(u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0), u_1^0, u_2^0, u_3^0) \\ & \leq \sum_{i=1}^3 \int_{I_3} \langle q_i(x_i), u_i(x_i) - u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i, \quad u_i(\cdot) \in L_p(I_i, Y_i). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Зафиксируем i . Тогда на I_i мы можем определить измеримые функции $\gamma_i^j: I_i \rightarrow \mathbb{R}^4$, $j = 1, \dots, k_i + 1$,

$$\gamma_i^j(x_i) = (\langle \varphi_i(x_i), u_i^j(x_i) \rangle_i, \langle \psi_i(x_i), u_i^j(x_i) \rangle_i, \langle q_i(x_i), u_i^j(x_i) \rangle_i, g_i(x_i, u_i^j(x_i))), \quad (3.21)$$

где $u_i^j(x_i)$ удовлетворяют равенству (3.3).

Рассмотрим измеримое многозначное отображение с компактными значениями $\Gamma_i^*: I_i \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$\Gamma_i^*(x_i) = \bigcup_{j=1}^{k_i+1} \gamma_i^j(x_i).$$

Так как на каждом из множеств Q_i^l , $l = 1, 2, \dots$, непрерывны функции $u_i^j(x_i)$, $g_i(x_i, u_i^j(x_i))$, $j = 1, \dots, k_i + 1$, то на каждом из множеств Q_i^l , $l = 1, 2, \dots$, функции $\gamma_i^j(x_i)$, $j = 1, \dots, k_i + 1$, интегрируемы. Поэтому на каждом из множеств Q_i^l , $l = 1, 2, \dots$, многозначное отображение $\Gamma_i^*(x_i)$ интегрально ограничено.

Рассмотрим функцию $\gamma_i^*: I_i \rightarrow \mathbb{R}^4$:

$$\gamma_i^*(x_i) = \left\{ \langle \varphi_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i, \langle \psi_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i, \langle q_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i, g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) \right\}. \quad (3.22)$$

Тогда из (3.3), (3.7), (3.21) следует, что

$$\gamma_i^*(x_i) \in \text{co } \Gamma_i^*(x_i) \quad \text{п.в. на } I_i. \quad (3.23)$$

Так как множество $\Gamma_i^*(x_i)$ состоит из $k_i + 1$ точки в пространстве $\mathbb{R}^4$, то из (3.23) и свойств многозначных интегралов следует, что для каждого Q_i^l , $l = 1, 2, \dots$, существует измеримое разбиение $Q_i^{l,j}$, $j = 1, \dots, k_i + 1$, множества Q_i^l такое, что

$$\int_{Q_i^l} \gamma_i^*(x_i) d\mu_i = \int_{Q_i^l} \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) \gamma_i^j(x_i) d\mu_i. \quad (3.24)$$

Воспользовавшись (3.21), (3.22), (3.24), получаем

$$\int_{Q_i^l} \langle \varphi_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i = \int_{Q_i^l} \left\langle \varphi_i(x_i), \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) u_i^j(x_i) \right\rangle_i d\mu_i, \quad (3.25)$$

$$\int_{Q_i^l} \langle \psi_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i = \int_{Q_i^l} \left\langle \psi_i(x_i), \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) u_i^j(x_i) \right\rangle_i d\mu_i, \quad (3.26)$$

$$\int_{Q_i^l} \langle q_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i = \int_{Q_i^l} \left\langle q_i(x_i), \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) u_i^j(x_i) \right\rangle_i d\mu_i, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_i^l} g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) d\mu_i &= \int_{Q_i^l} \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) g_i(x_i, u_i^j(x_i)) d\mu_i \\ &= \int_{Q_i^l} g_i \left(x_i, \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) u_i^j(x_i) \right) d\mu_i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Определим измеримые функции

$$u_i^*(x_i) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_i+1} \chi(Q_i^{l,j})(x_i) u_i^j(x_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.29)$$

Тогда из (3.6), (3.29) следует, что

$$u_i^*(x_i) \in U_i(x_i) \text{ п.в. на } I_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.30)$$

Выше было показано, что для любого измеримого разбиения $Q_i^{l,j}$, $j = 1, \dots, k_i+1$, множества Q_i^l , для которого имеет место равенство (3.10), функции (3.14) интегрируемы с p -степенью. Воспользовавшись (3.28), (3.29), получаем, что $u_i^*(\cdot) \in L_p(I_i, Y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Из (3.25)–(3.28) получаем

$$\int_{I_i} \langle \varphi_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i = \int_{I_i} \langle \varphi_i(x_i), u_i^*(x_i) \rangle_i d\mu_i, \quad (3.31)$$

$$\int_{I_i} \langle \psi_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i = \int_{I_i} \langle \psi_i(x_i), u_i^*(x_i) \rangle_i d\mu_i, \quad (3.32)$$

$$\int_{I_i} \langle q_i(x_i), u_i^0(x_i) \rangle_i d\mu_i = \int_{I_i} \langle q_i(x_i), u_i^*(x_i) \rangle_i d\mu_i, \quad (3.33)$$

$$\int_{I_i} g_i^{**}(x_i, u_i^0(x_i)) d\mu_i = \int_{I_i} g_i(x_i, u_i^*(x_i)) d\mu_i. \quad (3.34)$$

Пусть $z^*(\cdot) = \mathcal{A}_0(u_3^*, u_1^*, u_2^*, u_4^0) = \mathcal{A}(u^*, u_1^*, u_2^*, u_4^0)$. Тогда из (3.18)–(3.20), (3.31)–(3.34) получаем

$$\tilde{J}(z^*, u_3^*, u_1^*, u_2^*, u_4^0) \leq J^{**}(z^0, u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0), \quad (3.35)$$

$$V(z^*) \leq V(z^0), \quad (3.36)$$

$$W(z_x^*, z_y^*, u_1^*, u_2^*, u^*) \leq W(z_x^0, z_y^0, u_1^0, u_2^0, u^0). \quad (3.37)$$

Воспользовавшись (3.1), (3.35), (3.30), (3.36), (3.37), получаем, что

$$\tilde{J}(z^*, u_3^*, u_1^*, u_2^*, u_4^0) = J(z^*, u^*, u_1^*, u_2^*, u_4^0) = J^{**}(z^0, u_3^0, u_1^0, u_2^0, u_4^0),$$

$$V_i(z^*) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$W_j(z_x^*, z_y^*, u_1^*, u_2^*, u^*) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, l,$$

и

$$u_1^*(x) \in U_1(x), \quad u_2^*(y) \in U_2(y), \quad u^*(x, y) \in U(x, y), \quad u_4^0 \in X, \\ u_1^*(\cdot) \in L_p(I_1, X), \quad u_2^*(\cdot) \in L_p(I_2, X), \quad u^*(\cdot) \in L_p(I_3, Y).$$

Следовательно, совокупность $(z^*(\cdot), u^*(\cdot), u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), u_4^0)$ является решением задачи (P). Теорема доказана.

Рассмотрим задачу (P₁) минимизации функционала (0.7) на решениях управляемой системы (0.1), (0.2) при ограничениях

$$z(a, b) \in S, \quad S \subset \mathbb{R}^n,$$

где S – замкнутое множество. Как обычно, мы предполагаем, что существует допустимая совокупность задачи (P₁) такая, что выполняется неравенство (0.15).

ТЕОРЕМА 3.1. *Задача (P₁) имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функции $V_i: C(I_3, X) \rightarrow \mathbb{R}$, $V_i(z) = z_i(a, b)$, $i = 1, \dots, n$, где $z_i(a, b)$ — i -координата точки $z(a, b)$, являются непрерывными линейными функционалами из $C(I_3, X)$ в $\mathbb{R}$, то, дословно повторяя доказательство теоремы 2.1, получаем, что релаксированная задача (RP_1) имеет решение $(z^0(\cdot), u_1^0(\cdot), u_2^0(\cdot), u_3^0(\cdot), u_4^0(\cdot))$.

Пусть $V_i(z^0) = z_i^0(a, b)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $V(z^0) \in S$. Рассмотрим задачу $(\tilde{P}_1)$ при ограничениях

$$V_i(z) \leq z_i^0(a, b), \quad -V_i(z) \leq z_i^0(a, b), \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь, дословно повторяя доказательство основной теоремы и учитывая, что $V_i(z)$, $-V_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, являются непрерывными линейными функционалами на $C(I_3, X)$, мы получаем, что задача (P_1) имеет решение. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Основная теорема будет верна, если вместо условий роста (0.10) взять следующие условия роста:

$$g(x, y, z) \geq -\alpha_1 \|z\|^p - \alpha_2(x, y). \quad (3.38)$$

Однако в этом случае для существования решения, кроме условий роста (3.38), (0.11)–(0.14), требуются определенные соотношения, связывающие коэффициенты $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ и нормы операторов $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ (см. (1.8)–(1.10)), которые в свою очередь выражаются через нормы матриц, входящих в уравнение (0.1). Ввиду громоздкости этих соотношений этот случай мы не рассматриваем.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Основная теорема может быть доказана и для случая, когда $p = 1$. В этом случае вместо условий роста (0.10)–(0.14) следует взять такие условия роста, которые обеспечивают существование решения релаксированной задачи (см., например, [2], [16]).

Комментарии

При изучении вопросов существования решений в невыпуклых задачах оптимального управления в явном или неявном виде используется теорема А. А. Ляпунова о выпуклости и замкнутости множества значений неатомической меры в конечномерном пространстве. В неявном виде эта теорема сводится к совпадению интегралов от измеримого многозначного отображения с невыпуклыми замкнутыми значениями и от овыпукленного многозначного отображения. На этом пути доказывается замкнутость множества достижимости некоторых классов линейных управляемых систем с невыпуклым множеством допустимых управлений и тем самым решается задача минимизации терминального функционала (см. [17], [18] и др.)

В работе [8] замкнутость множества достижимости для специального класса нелинейных управляемых систем без предположений выпуклости была доказана путем одновременного использования теоремы Ляпунова и теоремы Бэра о категориях.

Задача минимизации интегрального функционала с подынтегральной функцией

$$g(t, x) + g_1(t, u)$$

на решениях управляемой системы, описываемой линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями без предположения выпуклости множества допустимых управлений, изучалась многими авторами. Наиболее общий результат, по-видимому, получен в [17], где кроме ограничений на управление рассматривались и граничные условия. В этих работах функция $x \rightarrow g(t, x)$ предполагалась линейной, а функция $u \rightarrow g_1(t, u)$ невыпуклой.

Основополагающей для дальнейших исследований была работа [16], где рассматривалась простейшая вариационная задача минимизации интегрального функционала

$$\int_0^1 g(t, x(t)) dt + \int_0^1 g_1(t, \dot{x}(t)) dt$$

при ограничениях $x(0) = a$, $x(1) = b$, $\dot{x}(t) \in F(t)$, где $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — измеримое многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями, $g(t, x)$, $g_1(t, u)$ являются нормальными интегрантами и функция $x \rightarrow g(t, x)$ является вогнутой. При определенных условиях роста функций $g(t, x)$, $g_1(t, u)$ и для случая $1 \leq p < \infty$ было доказано существование решения. Для доказательства была использована в явном виде теорема А. А. Ляпунова. Идеи этой работы применительно к некоторым классам линейных и нелинейных (но близких к линейным) систем получили свое развитие в [2], [3], [9], [6], [7].

Интересный вариант теоремы А. А. Ляпунова, имеющий приложение к задаче Гурса–Дарбу с граничными условиями на всей границе, был доказан в [19]. Эта теорема в виде свойств многозначного интеграла Аумана многих переменных была переформулирована в работе [5], в которой в качестве приложения рассматривалась задача минимизации функционала

$$\int_0^a \int_0^b g(x, y, z(x, y)) dx dy + \int_0^a \int_0^b g_1(x, y, u(x, y)) dx dy$$

на решениях управляемой системы

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, u), \quad u(x, y) \in U,$$

с граничными условиями

$$z(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \partial([0, a] \times [0, b]),$$

где символ ∂ — означает границу множества, g, g_1 — нормальные интегранты, функция $z \rightarrow g(x, y, z)$ вогнута и $U \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество. При определенных условиях роста здесь была доказана теорема существования решения.

Другой подход для изучения невыпуклых задач оптимального управления, связанный с использованием мер Янга, развивается в [4].

В своих исследованиях мы следуем основным идеям работы [16]. Однако в техническом плане, в отличие от работ [16], [2], [3], [6], [7], наше доказательство базируется на использовании свойств многозначных интегралов и общем виде линейного непрерывного функционала на пространстве интегрируемых функций. Это позволило простыми средствами изучить задачу с различными видами ограничений. В заключение отметим, что наши результаты дополняют результаты работ [5], [18].

Список литературы

1. Экланд И. Р., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
2. Raymond J. P. Existence theorems in optimal control problems without convexity assumptions // J. Optimiz. Theory and Appl. 1990. V. 67. № 1. P. 109–132.
3. Raymond J. P. Existence theorems without convexity assumptions for optimal control problems governed by parabolic and elliptic systems // Appl. Math. Optim. 1992. V. 26. P. 39–62.
4. Balder Eric J. New existence results for optimal controls in the absence of convexity: the importance of extremality // SIAM J. Control and Optimiz. 1994. V. 32. № 3. P. 890–916.
5. Bressan A., Flores F. Multivariable Aumann integrals and controlled wave equation // J. Math. Anal. and Appl. 1995. V. 189. № 2. P. 315–334.
6. Colombo G., Goncharov V. V. Existence for a nonconvex optimal control problem with nonlinear dynamics // Nonlinear Anal. Theory. Meth. Appl. 1995. V. 24. № 6. P. 795–800.
7. Colombo G., Goncharov V. V., Ramazzina E. On a class of nonconvex and nonlinear optimal control problems // No DEA. 1996. V. 3. P. 115–126.
8. Bressan A., Piccoli B. A Baire category approach to the bang-bang property // J. Diff. Equat. 1995. V. 116. № 2. P. 318–337.
9. Толстоногов Д. А. О минимуме в вариационных эллиптических задачах без предположения выпуклости // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 130–142.
10. Kisynski J. Solution generalisees du probleme de Cauchy–Darboux pour l'equation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sect. A. 1960. V. 14. № 6. P. 87–109.
11. Marano S. A. Generalized solutions of partial differential inclusions depending on a parameter // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. 1989. V. 3. P. 281–295.
12. Tolstonogov A. A. Continuous selectors of fixed points sets of multifunctions with decomposable values // Set-valued Anal. 1998. V. 6. P. 129–147.
13. Толстоногов А. А. К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 109–120.
14. Himmelberg C. J. Measurable relations // Fundamenta Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
15. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
16. Cellina A., Colombo G. On a classical problem of the calculus of variations without convexity assumptions // Ann. Inst. H. Poincare Analyse non lineaire. 1990. № 7. P. 97–106.
17. Cesari L. An existence theorem without convexity condition // SIAM J. Control. 1974. V. 12. № 2. P. 319–331.
18. Suryanarayan M. B. Existence theorems for optimization problems concerning linear, hyperbolic partial differential equations without convexity conditions // J. Optimiz. Theory and Appl. 1976. V. 19. № 1. P. 47–61.
19. Bressan A. A multidimensional Lyapunov type theorem // Studia Math. 1993. V. 106. № 2. P. 121–128.

Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения РАН, Иркутск, Россия
E-mail: aatol@icc.ru

Поступило в редакцию
13.IV.1999