Общероссийский математический портал

А. М. Шур, Структура множества бескубных Z -слов в двухбуквенном алфавите,
Изв. РАН. Сер. матем., 2000, том 64, выпуск 4, 201–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:18:08

УДК 512.532.2+519.11

А. М. Шур

Структура множества бескубных Z -слов в двухбуквенном алфавите

Объектом изучения являются Z -слова, т.е. бесконечные цепочки алфавитных символов, индексированные целыми числами. Рассматривается вполне упорядоченное семейство подмножеств множества всех бескубных Z -слов в двухбуквенном алфавите, построенное на основе вводимого понятия локальной экспоненты Z -слова. Решен вопрос о существовании бескубных Z -слов заданной локальной экспоненты. Описана комбинаторная структура множества всех сильно бескубных Z -слов, являющихся Z -словами локальной экспоненты 2, минимальной из возможных. Указано важное отличие сильно бескубных Z -слов от Z -слов большей локальной экспоненты.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Z -слова, т.е. бесконечные цепочки символов, индексированные целыми числами, наряду с ω -словами – бесконечными цепочками, индексированными натуральными числами, представляют собой наиболее естественные обобщения обычных (конечных) слов. Отметим, что ряд пионерских результатов в комбинаторной теории слов связан именно с бесконечными словами (см., например, [1]–[3]).

В исследовании бесконечных слов можно выделить два основных подхода. Первый из них состоит в рассмотрении для бесконечных слов задач, уже ставившихся для конечных слов (при необходимости адаптируя соответствующие постановки). Таким образом, можно выяснить, какие свойства обычных слов сохраняются при переходе к бесконечным, а какие видоизменяются, теряются либо заменяются новыми. В качестве примера отметим работу [4], в которой показано, что очень многие понятия из обычной теории языков могут быть обобщены на множества ω -слов. При этом обобщения понятий рационального языка и конечного автомата могут быть выбраны таким образом, чтобы для них выполнялся аналог теоремы Клини.

Второй подход состоит в изучении свойств, специфических для бесконечных объектов. В этом направлении отметим монографию [5], одна из глав которой посвящена описанию топологических свойств множества всех бинарных сильно бескубных Z -слов относительно естественно определенной метрики.

Данная работа находится в рамках первого подхода: все основные понятия применимы и к конечным словам. Исследуемые свойства и методы исследования являются комбинаторными.

Объектом нашего изучения является множество всех бескубных Z -слов в двухбуквенном алфавите. Куб является минимальной степенью слова, избегаемой в минимальном нетривиальном алфавите, что обусловило высокий интерес к проблемам, связанным со свойством бескубности. О структуре множества конечных

бескубных слов известно крайне мало. Это множество велико (количество бескубных слов длины n зависит от n экспоненциально, см. [6]); хорошо изучено лишь небольшое его подмножество, состоящее из всех сильно бескубных слов (количество которых зависит от длины менее чем квадратично; см. [7]). При рассмотрении Z -слов мы имеем аналогичную картину: практически ничего не известно о множестве всех бескубных Z -слов, но есть существенная информация о множестве всех сильно бескубных Z -слов (см., например, [5], [8]).

Автору удалось получить важную информацию об устройстве множества всех бескубных Z -слов. В работе введено понятие экспоненты, избегаемой словом (Z -словом), на основе которого определена иерархия подмножеств указанного множества. Доказан ряд свойств иерархии в целом и наиболее важных ее ступеней.

Текст состоит из трех параграфов. В первом из них приводятся необходимые определения и вспомогательные комбинаторные утверждения, а также вводится иерархия множеств бескубных слов. В §2 приведено описание множества сильно бескубных Z -слов (первой ступени упомянутой иерархии) в комбинаторных терминах; §3 содержит сведения о мощности данной иерархии, ее устройстве и важное свойство второй ступени этой иерархии.

§1. Определения и предварительные замечания

1.1. Определения.

1. Пусть A – конечный алфавит. Кроме слов, т.е. конечных последовательностей алфавитных символов, определим также три типа счетных последовательностей таких символов. А именно, последовательности вида

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 \dots a_n \dots, \\ & \dots a_{-n} \dots a_{-2} a_{-1} a_0, \\ & \dots a_{-n} \dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots \end{aligned}$$

мы называем соответственно ω -, ω^* - и Z -словами. Для обозначения ω -слов (соответственно ω^* -слов) будем использовать те же буквы, что и для слов, но с индексом ∞ справа (соответственно слева). Z -слова будем обозначать жирными буквами.

Через A^+ (A^ω , A^Z) обозначается множество всех непустых слов (соответственно всех ω -слов, всех Z -слов) над алфавитом A . *Пустое слово* мы обозначаем через λ . *Языками* мы будем называть произвольные подмножества из A^+ , A^ω , A^Z (из контекста всегда будет ясно, о множестве каких слов идет речь).

Ниже везде считается, что $A = \{a, b\}$.

2. Слово V называется *подсловом* слова W (или говорят, что W *содержит* V , обозначается $V \leq W$), если $W = PVQ$ для некоторых слов P , Q . При этом V называется *префиксом* (*суффиксом*) W , если $P = \lambda$ (соответственно $Q = \lambda$). Непустой префикс (суффикс) слова называется *собственным*, если он не совпадает с самим словом.

3. Через ϕ будем обозначать эндоморфизм A^+ , определяемый равенствами

$$\phi(a) = ab, \quad \phi(b) = ba.$$

Слова

$$U_n = \phi^n(a), \quad V_n = \phi^n(b), \quad n \geq 0,$$

называются *словами Туэ–Морса*.

Справедливы равенства

$$U_{n+1} = U_n V_n, \quad V_{n+1} = V_n U_n.$$

Так как U_n является собственным префиксом U_{n+1} , а V_n – собственным префиксом V_{n+1} , то существуют ω -слова U_∞, V_∞ , являющиеся “пределами” последовательностей $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ соответственно. Определим также ω^* -слова ${}_\infty U, {}_\infty V$, получающиеся “переворачиванием” ω -слов U_∞ и V_∞ соответственно.

Слова U_n и V_n будем называть также *n -цепочками*.

4. Определим ряд комбинаторных параметров, связанных с произвольным словом W . Длина слова W обозначается через $|W|$. Мы считаем, что буквы в слове W занумерованы по порядку от 1 до $|W|$ (слева направо). Номер, соответствующий каждой букве, входящей в W , мы называем ее *позицией* в W . Буквы в бесконечных словах занумерованы от 1 до ∞ (ω -слова), от $-\infty$ до 0 (ω^* -слова) и от $-\infty$ до ∞ (Z -слова). Через $0_W, 1_W$ будем обозначать первую (соответственно последнюю) букву слова W . Запись $W_{[i]}$ означает i -ю букву слова (бесконечного слова) W .

Число $p > 0$ называется *периодом* слова W , если $W_{[i]} = W_{[i+p]}$ для всякого i такого, что $1 \leq i \leq |W| - p$. В частности, по определению слово W имеет период $|W|$. Минимальный период W обозначается через $\text{per}(W)$.

При $n \geq 2$ выполняются равенства $\text{per}(U_n) = \text{per}(V_n) = 3 \cdot 2^{n-2}$.

Как и в работе [9], *экспонентой* слова W мы называем число $\text{exp}(W) = |W|/\text{per}(W)$. Из определения видно, что целую экспоненту, большую единицы, имеют в точности слова, являющиеся целыми степенями других слов. Таким образом, экспонента является обобщением степени на нецелые показатели.

Следующее определение играет ключевую роль в данной работе. *Локальной экспонентой* слова W мы будем называть число $\text{lexp}(W) = \max\{\text{exp}(V) \mid V \leq W\}$.

Локальная экспонента бесконечного слова определяется так же, только максимум в формуле необходимо заменить на супремум.

5. *Разбиением* W будем называть произвольное представление W в виде произведения сомножителей. Сомножители – элементы разбиения – будем называть *блоками*. Разбиение бесконечного слова определяется точно так же.

Слово W будем называть *равномерным*, если оно допускает разбиение вида

$$W = cQ_1 \dots Q_n d,$$

где $c, d \in \{\lambda, a, b\}$, а все Q_i являются 1-цепочками.

Бесконечное слово называется *равномерным*, если всякое его подслово равномерно.

Из определения слов Туэ–Морса, очевидно, следует, что все они равномерны.

6. Говорят, что слово W *избегает* слово V , если W не содержит образов V при гомоморфизмах свободных полугрупп. Слово V называется *избегаемым* в алфавите A , если в A^+ найдется бесконечно много слов, избегающих V .

Язык бескубных слов CF состоит из всех слов, избегающих слова xxx . Заметим, что $CF = \{W \mid \text{lexp}(W) < 3\}$.

Язык сильно бескубных слов OF состоит из всех слов, избегающих слова xxx и $xuxux$. Можно проверить, что $OF = \{W \mid \text{lexp}(W) \leq 2\}$.

Язык Туэ–Морса TM состоит из всех слов Туэ–Морса и всех их подслов.

Включение $TM \subseteq OF$ было впервые доказано А. Туэ (см. [1]). Это включение строгое: так, например, $aabaa \in OF \setminus TM$. Очевидно также, что $OF \subset CF$.

Через L^Z мы обозначаем язык, состоящий из всех Z -слов, все конечные подслова которых принадлежат языку L .

1.2. Сохранение экспонент при действии морфизма ϕ . Определенное выше отображение ϕ (морфизм Туэ–Морса) обладает множеством примечательных свойств. Как показывают два следующих предложения, ϕ сохраняет экспоненту и локальную экспоненту слова в максимально широком диапазоне, в принципе возможном для несюръективных отображений. Свойство сохранения экспонент при действии ϕ нам потребуется при доказательстве большинства результатов работы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $W \in A^+$ и $\exp(W) > 1$. Тогда

$$\exp(\phi(W)) = \exp(W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $p = \text{per}(W)$. Тогда, очевидно, слово $\phi(W)$ имеет период $2p$; значит, $\exp(\phi(W)) \geq \exp(W)$. Предположим, что у $\phi(W)$ есть также период $t < 2p$. Если число t четное, то слово W имеет период $t/2$, меньший p ; противоречие с минимальностью p . Следовательно, t нечетное. Очевидно, $t \geq 3$.

Представим $\phi(W)$ в виде произведения PQ , где $|P| = t$. Покажем, что слово Q не содержит подслов aa и bb . В самом деле, пусть $aa \leq Q$. Тогда на t позиций левее в слове $\phi(W)$ также находится подслово aa (по определению периода). Так как t нечетно, то одно из этих подслов начинается в $\phi(W)$ с нечетной позиции. Получаем противоречие, так как подслово длины 2, начинающееся в $\phi(W)$ с нечетной позиции, должно быть 1-цепочкой.

Итак, Q состоит из чередующихся букв. Таким образом, первая и $(2p - t + 1)$ -я буквы слова Q различны. Но эти две буквы суть $(t + 1)$ -я и $(2p + 1)$ -я буквы в $\phi(W)$, которые совпадают по определению периода. Полученное противоречие доказывает, что у слова $\phi(W)$ нет периодов, меньших $2p$, откуда следует требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $W \in A^+$ и $\text{lexp}(W) \geq 2$. Тогда

$$\text{lexp}(\phi(W)) = \text{lexp}(W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\beta = \text{lexp}(W)$. Неравенство $\text{lexp}(\phi(W)) \geq \beta$, очевидно, следует из определений ϕ и локальной экспоненты. Докажем, что при $\beta \geq 2$ справедливо и противоположное неравенство.

Предположим, что противоположное неравенство нарушается; выберем слово W такое, что $\text{lexp}(\phi(W)) > \text{lexp}(W) = \beta \geq 2$. Пусть V – максимальное подслово в $\phi(W)$ экспоненты, большей β . Рассмотрим различные варианты расположения V в слове $\phi(W)$. Через V' при этом будем обозначать максимальное подслово в V , начинающееся в $\phi(W)$ с нечетной позиции и заканчивающееся на четной.

Если $V = V'$, то слово $\phi^{-1}(V)$ содержится в W . По предложению 1.1 экспонента последнего слова равна экспоненте V . Противоречие с условием $\text{lexp}(W) = \beta$.

Пусть $V = V'c$, где $c \in A$, и $p = \text{per}(V)$. Из предложения 1.1 следует, что $\exp(V') \leq \beta$, т.е. $\exp(V) > \exp(V')$ и, значит, $\text{per}(V) = \text{per}(V')$. Минимальный период слова V' четен по предложению 1.1. Таким образом, слово $Vc = V'cc$ не

имеет периода p , так как слово V' не может содержать подслово cc , начинающееся с нечетной позиции. Тогда слово Vd , где $d \in A$, $d \neq c$, имеет период p . Следовательно, $\text{exp}(Vd) > \text{exp}(V)$; осталось заметить, что $Vd \leq \phi(W)$. Противоречие с максимальнойностью V .

Случай $V = cV'$ ($c \in A$) симметричен только что разобранным. В последнем оставшемся случае ($V = cV'd$) заметим, что пара условий: $\text{exp}(V) > \text{exp}(V')$ и $\text{exp}(V) > 2$, влечет за собой совпадение минимальных периодов слов V и V' . Далее проводим то же рассуждение, что и в предыдущем абзаце. Тем самым доказательство предложения завершено.

1.3. Иерархия множеств бескубных Z -слов. Скажем, что слово W избегает экспоненту β , если $\text{lexp}(W) < \beta$; соответственно экспоненту β назовем избегаемой в A , если в A^+ найдется бесконечное множество слов с локальной экспонентой, меньшей β . Данные определения согласуются со введенными ранее: слово W избегает экспоненту k в тех же случаях, когда оно избегает слово x^k .

Куб является минимальной степенью буквы, избегаемой в алфавите A ; в то же время любая экспонента, строго большая двух, также избегаема в A (бесконечный язык OF состоит только из слов с локальной экспонентой, не превосходящей 2). Таким образом, точная числовая граница избегаемости в A – это число 2, а не 3.

Определим два однопараметрических семейства языков следующим образом:

$$\begin{aligned} L_\beta &= \{W \in A^+ \mid \text{lexp}(W) < \beta\}, \\ L'_\beta &= \{W \in A^+ \mid \text{lexp}(W) \leq \beta\}, \end{aligned}$$

где $2 \leq \beta < 3$. Как каждое семейство по отдельности, так и оба они в совокупности образуют вполне упорядоченные множества (цепи) по включению. При этом, если судить по результатам исследований бескубных и сильно бескубных слов, чем выше язык находится в такой цепи, тем менее регулярно его внутреннее устройство.

Нас интересуют те свойства языков (по-видимому, более фундаментальные), которые переносятся на множества бесконечных слов (а именно, Z -слов). Такие свойства не зависят от “краевых эффектов” – влияния границ слова. Приведем такой пример. Еще в 1964 г. Готшалк и Хэдлунд доказали [8], что $OF^Z = TM^Z$. Далее, в работе [10] доказано, что большое подслово любого конечного сильно бескубного слова (составляющее не менее $7/10$ от длины слова) принадлежит языку TM . Таким образом, “настоящие” сильно бескубные слова – это в точности подслова слов Туэ–Морса.

Рассмотрим множество языков вида L_β^Z, L'_β^Z , где $2 \leq \beta < 3$. Так же как и их конечные аналоги, эти языки образуют вполне упорядоченные множества. Вполне упорядоченное множество, состоящее из всех упомянутых языков из A^Z , мы будем называть *иераргией* множеств бескубных Z -слов. Свойствам иерархии в целом и ее отдельных ступеней и посвящена основная часть данной работы.

Рассмотрим отображения F, F' из $\mathbb{R}$ во множество всех языков из A^Z , определенные следующим образом:

$$F(\beta) = L_\beta^Z, \quad F'(\beta) = L'_\beta^Z.$$

Очевидно, что $F(\beta) = \emptyset$ при $\beta < 2$, $F'(\beta) = \emptyset$ при $\beta \leq 2$. Таким образом, исследование отображений F, F' имеет смысл на промежутке $[2, +\infty)$. Вначале

покажем, что отображение F непрерывно слева. В самом деле, пусть последовательность $\{\beta_i\}$ сходится к числу β снизу. Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F(\beta_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_{\beta_i}^Z = L_{\beta}^Z = F(\beta),$$

что и означает непрерывность F слева. Аналогичная проверка F на непрерывность справа дает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F(\beta_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_{\beta_i}^Z = L_{\beta}^{\prime Z} = F'(\beta),$$

т.е. непрерывность F в точке β справа имеет место тогда и только тогда, когда $F(\beta) = F'(\beta)$. Точно так же доказывается, что отображение $F'(\beta)$ непрерывно справа, а непрерывным слева является в тех и только тех точках β , где $F(\beta) = F'(\beta)$.

Результаты, которые будут доказаны в §3, позволяют описать поведение обоих отображений на отрезке $[2, 3]$. А именно, оба отображения являются константами вплоть до точки $\beta = 7/3$, после чего их поведение меняется коренным образом: при $\beta \geq 7/3$ оба отображения становятся строго возрастающими и имеют скачок в каждой точке. При этом несложная экстраполяция доказательств из §3 показывает, что два последних свойства выполняются на всем промежутке $[7/3, +\infty)$.

Так как множества $\{L_{\beta}^Z\}_{\beta \in \mathbb{R}}$, $\{L_{\beta}^{\prime Z}\}_{\beta \in \mathbb{R}}$ вполне упорядочены, то отображения F и F' можно проиллюстрировать следующими графиками:

Из приведенных графиков видно, что во введенной иерархии есть две выделенные ступени. Первую из них занимает наименьший нетривиальный язык в иерархии – язык $OF^Z = L_2^Z$, а вторую – следующий за ним язык $L_{\alpha}^{\prime Z}$, где $\alpha = 7/3$. Эти два языка изучаются в данной работе отдельно.

§2. Структура языка OF^Z

Произвольное Z -слово мы будем представлять себе как числовую прямую, на которой “расставлены” буквы алфавита: каждому отрезку $[i - 1, i]$, где i – целое число, поставлена в соответствие i -я буква Z -слова. Определим элементарные операции над Z -словами: операция автоморфизма Aut (замена всех букв a на b и наоборот), операция реверса Rev (симметричное отражение Z -слова относительно точки 0) и набор операций сдвига Shift_k , k целое (сдвиг всего Z -слова на k единиц вправо по числовой прямой). Два Z -слова будем называть *изоморфными*, если одно из них можно получить из другого с помощью элементарных операций.

В связи с уже упоминавшимся результатом [8] о равенстве языков OF^Z и TM^Z естественно возникает предположение, что различных (неизоморфных) сильно бескубных Z -слов немного и их достаточно несложно перечислить. Однако в [5] доказано, что таких Z -слов континуум. В данном параграфе мы дадим исчерпывающую комбинаторную характеристику множества OF^Z , а именно перечислим все его элементы с точностью до изоморфизма.

2.1. Понятие n -разбиения. Порядок точки. Пусть дано Z -слово $\mathbf{W}$. Разбиение $\mathbf{W}$ на n -цепочки (если такое существует) будем называть *n -разбиением* (тривиальное 0-разбиение существует для всякого Z -слова). Будем называть целочисленную точку x *граничной* для данного разбиения, если ближайшие к ней буквы $\mathbf{W}$ принадлежат разным блокам. *Порядком* точки x относительно $\mathbf{W}$ ($\deg_{\mathbf{W}}(x)$) будем называть максимум из чисел n таких, что x является граничной для некоторого n -разбиения $\mathbf{W}$, либо ∞ , если максимум не существует. Очевидно, что для произвольной точки x условие $\deg_{\mathbf{W}}(x) \geq n$ выполнено тогда и только тогда, когда $\deg_{\mathbf{W}}(x + k \cdot 2^n) \geq n$ для любого k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Для любого $\mathbf{W} \in OF^Z$ и любого натурального n существует, и притом единственное, n -разбиение $\mathbf{W}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякое подслово из $\mathbf{W}$ является элементом TM . Следовательно, $\mathbf{W}$ равномерно, т.е. допускает разбиение на 1-цепочки.

Теперь рассмотрим Z -слово $\mathbf{W}'$, получаемое из $\mathbf{W}$ операцией ϕ^{-1} : каждому блоку Q_i построенного разбиения $\mathbf{W}$ соответствует буква $\phi^{-1}(Q_i)$ в $\mathbf{W}'$. (Для однозначности определения потребуем, чтобы первой букве $\mathbf{W}'$ соответствовал блок, содержащий первую букву $\mathbf{W}$.) По предложению 1.1 $\mathbf{W}' \in OF^Z$; по доказанному выше существует 1-разбиение $\mathbf{W}'$, которое в свою очередь индуцирует 2-разбиение $\mathbf{W}$. Рассуждая по индукции, получаем, что существует n -разбиение $\mathbf{W}$ для всех n .

Предположим, что для некоторого n существуют два n -разбиения $\mathbf{W}$. Рассмотрим ω -подслово $\mathbf{W}$, начинающееся с граничной точки одного из разбиений двумя одинаковыми n -цепочками:

Как видно из рисунка, следующий за $U_n U_n$ блок выбранного разбиения начинается с той же буквы, что и U_n (т.е. равен ему). Противоречие с сильной бескубностью $\mathbf{W}$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\mathbf{W} \in OF^Z$, x – точка порядка $\geq n$ и $k < 2^n$. Тогда $\deg_{\mathbf{W}}(x + k) < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\deg_{\mathbf{W}}(x + k) \geq n$. Согласно определению порядка точки Z -слово $\mathbf{W}$ допускает два n -разбиения. Противоречие с предложением 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\mathbf{W} \in OF^Z$. Тогда из двух соседних точек порядка $\geq n$ одна имеет порядок n , а другая – порядок $> n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все точки, отстоящие от выбранных на расстояние, меньшее 2^n , имеют порядок, меньший n (следствие 2.2). Таким образом, ровно одна из выбранных точек будет являться граничной для $(n + 1)$ -разбиения $\mathbf{W}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Z -слово $\mathbf{W} \in OF^Z$ имеет не более одной точки порядка ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом следствия 2.3 доказательство очевидно.

Z -слово $\mathbf{W}$ будем называть Z -словом *бесконечного* (конечного) *порядка*, если $\mathbf{W}$ имеет (соответственно не имеет) точку бесконечного порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Язык OF^Z содержит в точности два неизоморфных Z -слова бесконечного порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наличие в Z -слове точки порядка ∞ означает, что для любого $n \geq 0$ отрезок этого слова длины 2^n , примыкающий справа или слева к этой точке, является n -цепочкой. Таким образом, справа от этой точки стоит по определению ω -слово U_∞ или V_∞ , а слева – ω^* -слово ${}_\infty U$ или ${}_\infty V$. Перенесем точку порядка ∞ нашего Z -слова в 0 с помощью подходящей операции Shift и заметим, что

$$\begin{aligned}\text{Aut}({}_\infty U U_\infty) &= {}_\infty V V_\infty, \\ \text{Aut}({}_\infty U V_\infty) &= \text{Rev}({}_\infty U V_\infty) = {}_\infty V U_\infty,\end{aligned}$$

а из ${}_\infty U U_\infty$ нельзя получить ${}_\infty U V_\infty$ с помощью элементарных операций. Доказательство завершено.

2.2. Метод раскачивания. Построим пример сильно бескубного Z -слова конечного порядка. Предлагаемый метод построения будем называть *методом раскачивания*.

Возьмем числовую прямую и начнем расставлять на ней буквы. Пусть $x_0 = 1/3$, $W_0 = a = \mathbf{W}_{[1]}$.

i -й ШАГ: к имеющемуся слову W_{i-1} приписываем $(i - 1)$ -цепочку, не совпадающую с W_{i-1} , с того конца, который ближе к x_0 . Полученная i -цепочка и будет являться словом W_i .

Таким образом,

$$\begin{aligned}W_1 &= \mathbf{W}_{[0]} \mathbf{W}_{[1]} = ba, \\ W_2 &= \mathbf{W}_{[0]} \mathbf{W}_{[1]} \mathbf{W}_{[2]} \mathbf{W}_{[4]} = baab, \\ W_3 &= \mathbf{W}_{[-4]} \dots \mathbf{W}_{[4]} = abbabaab \text{ и т.д.}\end{aligned}$$

В пределе результатом описанного процесса будет Z -слово $\mathbf{W}$, каждое подслово которого лежит в некотором W_i , т.е. принадлежит TM . Значит, мы действительно построили элемент OF^Z .

Точка, являющаяся серединой отрезка, занимаемого W_i ($i > 0$), имеет по построению порядок $n = i - 1$. Докажем это по индукции. Точка $x = 0$, являющаяся серединой отрезка, занятого W_1 , имеет порядок 0, так как отрезок длины 2, находящийся справа от нее, равен aa .

ШАГ индукции: пусть x и y – середины отрезков, занимаемых W_i и W_{i+1} соответственно. Тогда $|x - y| = 2^{i-1}$, т.е. x и y суть соседние точки порядка $\geq 2^{i-1}$ (по предположению индукции). По следствию 2.3 $\deg_{\mathbf{W}}(y) \geq i$. Так как при построении W_{i+2} рядом с y оказываются две одинаковые i -цепочки (это две средние i -цепочки в $(i + 2)$ -цепочке), то окончательно $\deg_{\mathbf{W}}(y) = i$.

Середина отрезка, занимаемого W_i , находится на расстоянии $2^n/3$ от точки x_0 , а значит, является ближайшей к x_0 точкой порядка $\geq n$ по следствию 2.2. В итоге имеем

$$\forall k, \forall x \quad (\deg_{\mathbf{W}}(x) \geq k) \Rightarrow \left(|x - x_0| \geq \frac{2^k}{3} \right).$$

Следовательно, Z -слово $\mathbf{W}$ не имеет точки порядка ∞ .

2.3. Теорема о Z -словах конечного порядка. Произвольному Z -слову $\mathbf{U} \in OF^Z$ поставим в соответствие две последовательности $\{y_n\}_0^\infty$ и $\{r_n\}_0^\infty$ по следующим правилам. Ближайшая к $x_0 = 1/3$ точка порядка $\geq n$ относительно $\mathbf{U}$ есть y_n , а $r_n = |x_0 - y_n|$. Для всякого n реализуется одна из двух возможностей:

- 1) $\deg_{\mathbf{U}}(y_n) \geq n + 1$, тогда $y_{n+1} = y_n$ и соответственно $r_{n+1} = r_n$;
- 2) $\deg_{\mathbf{U}}(y_n) = n$, тогда по следствию 2.3 точки, отстоящие от y_n на расстояние 2^n , имеют порядок $\geq n + 1$; таким образом, одна из этих точек есть y_{n+1} , т.е. $|y_{n+1} - y_n| = 2^n$. Так как $r_k < 2^{k-1}$ для любого k (неравенство строгое, так как r_k – не целое число), то $r_{n+1} = 2^n - r_n$.

Таким образом, $\{r_n\}$ однозначно кодируется бинарной последовательностью $\{h_n\}_0^\infty$ по правилу

$$\begin{aligned} r_{n+1} = 2^n - r_n &\Rightarrow h_n = 1, \\ r_{n+1} = r_n &\Rightarrow h_n = 0 \end{aligned}$$

(можно записать $h_n = \operatorname{sgn} |r_{n+1} - r_n|$). Будем называть $\{h_n\}$ *характеристической последовательностью* $\mathbf{U}$ и обозначать $\{h_n^{\mathbf{U}}\}$.

ТЕОРЕМА 2.6. 1) *Всякая бинарная последовательность с бесконечным числом единиц является характеристической для некоторого сильно бескубного Z -слова конечного порядка.*

2) *Два сильно бескубных Z -слова конечного порядка изоморфны тогда и только тогда, когда их характеристические последовательности почти совпадают (т.е. различаются в конечном числе точек).*

СЛЕДСТВИЕ 2.7 [5]. *Язык OF^Z содержит континуум попарно неизоморфных Z -слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество всех бинарных последовательностей (их континуум) и отношение эквивалентности на нем: две последовательности эквивалентны тогда и только тогда, когда существует номер N , начиная с которого они совпадают. Последовательности можно рассматривать как ω -слова; каждое ω -слово, совпадающее с данным с N -й буквы, однозначно определяется своим префиксом длины $(N - 1)$; таким образом, класс эквивалентности данного слова инъективно отображается в A^+ , т.е. счетен. Следовательно, классов эквивалентности континуум. Согласно п. 2) теоремы 2.6 требуемое утверждение доказано.

2.4. Доказательство теоремы 2.6, 2). Нам будет удобнее доказать вначале п. 2). Пусть $\mathbf{U} \neq \mathbf{V} \in OF^Z$. Доказательство естественным образом разбивается на несколько этапов. Сначала докажем необходимость.

Этап 1. Если $\mathbf{V} = \text{Aut}(\mathbf{U})$, то порядки всех точек относительно $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ совпадают, т.е. совпадают и характеристические последовательности этих Z -слов.

Этап 2. Покажем, что если $\mathbf{V} = \text{Shift}_m(\mathbf{U})$, то существует номер N , начиная с которого последовательности $\{h_n^{\mathbf{U}}\}$ и $\{h_n^{\mathbf{V}}\}$ совпадают. Пусть $k = \max\{\deg_{\mathbf{U}}(x) \mid x \in [x_0, x_0 + m]\}$. Рассмотрим точку x_1 порядка k из отрезка $[x_0, x_0 + m]$, а также точки x_2, x_3 – ближайшие к x_1 точки порядка $\geq k$. Согласно следствию 2.3 одна из них (пусть это x_2) имеет порядок $(k + 1)$, а другая – порядок $\geq (k + 2)$. В итоге картина такова (с точностью до переименования x_2 и x_3):

$$\mathbf{U} = \quad \dots \quad \begin{array}{c} | \\ x_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ x_0 \end{array} \begin{array}{c} | \\ x_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ x_0 + m \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ x_2 \end{array} \quad \dots$$

Видно, что x_3 является ближайшей точкой порядка $\geq k + 2$ как к точке x_0 , так и к точке $x_0 + m$. Пусть порядок x_3 равен j . Тогда ближайшей к x_0 и $x_0 + m$ точкой порядка $(j + 1)$ будет точка $x_3 + 2^j$. Рассуждая по индукции, получаем, что $y_n^{\mathbf{U}} = y_n^{\mathbf{V}} + m$ при всех $n \geq k + 2$. Следовательно,

$$|y_{n+1}^{\mathbf{U}} - y_n^{\mathbf{U}}| = |y_{n+1}^{\mathbf{V}} - y_n^{\mathbf{V}}|,$$

откуда $h_n^{\mathbf{U}} = h_n^{\mathbf{V}}$. Таким образом, можно взять $N = k + 2$.

Этап 3. На втором этапе мы фактически показали, что характеристическая последовательность Z -слова и аналогичная последовательность, построенная исходя из произвольной точки x'_0 , совпадают, начиная с некоторого элемента (при этом нам не было важно, что $|x_0 - x'_0|$ – целое число). Рассмотрим Z -слово $\text{Rev}(\mathbf{U})$. Очевидно, что, взяв за исходную для построения точку $x'_0 = -1/3$, мы получим последовательность, совпадающую с $\{h_n^{\mathbf{U}}\}$. Следовательно, характеристические последовательности Z -слов $\mathbf{U}$ и $\text{Rev}(\mathbf{U})$ совпадают, начиная с некоторого номера N . Отметим, что для всех $n \geq N$ выражения $y_n^{\mathbf{U}} - x_0$ и $y_n^{\text{Rev}(\mathbf{U})} - x_0$ имеют противоположные знаки.

Итак, мы проверили требуемые условия для всех элементарных операций – доказательство необходимости закончено. Докажем достаточность.

Этап 4. Предположим, что $\{h_n^{\mathbf{U}}\} = \{h_n^{\mathbf{V}}\}$, и покажем, что $\mathbf{V} = \text{Aut}(\mathbf{U})$.

В самом деле, из равенства характеристических последовательностей следует, что порядки всех точек относительно $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ также равны. Если условие $\mathbf{V} = \text{Aut}(\mathbf{U})$ не выполняется, то найдется такая точка x , что в $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ либо совпадают буквы с номером x и не совпадают буквы с номером $(x + 1)$, либо наоборот. Без ограничения общности можно считать, что имеет место следующая картина:

$$\begin{array}{l} \mathbf{U} = \quad \dots \quad \begin{array}{c} |a|a| \\ \bullet \\ x \end{array} \quad \dots \\ \mathbf{V} = \quad \dots \quad \begin{array}{c} |a|b| \\ \bullet \\ x \end{array} \quad \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{U} = & \dots & \text{---} \frac{|b| \, |a| \, |a| \, |b|}{x} \text{---} \dots \\ \mathbf{V} = & \dots & \text{---} \frac{|b| \, |a| \, |b| \, |a|}{x} \text{---} \dots \end{array}$$

Этап 5. Пусть теперь у Z -слов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ совпадают характеристические последовательности, начиная с k -го члена. Рассмотрим вначале случай, когда знаки разностей $y_k^{\mathbf{U}} - x_0$ и $y_k^{\mathbf{V}} - x_0$ совпадают:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{U} = & \dots & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \\ & & y_k \quad x \\ \mathbf{V} = & \dots & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \\ & & y_k \quad x \end{array}$$

$$|y_{n+1}^{\mathbf{U}} - y_n^{\mathbf{U}}| = |y_{n+1}^{\mathbf{V}} - y_n^{\mathbf{V}}|$$
$$\deg_{\mathbf{U}}(x) = \deg_{\text{Shift}_m(\mathbf{V})}(x).$$
$$\mathbf{U} \in \{\text{Shift}_m(\mathbf{V}), \text{Aut}(\text{Shift}_m(\mathbf{V}))\}.$$
$$\begin{array}{lcl} \mathbf{U} = & \dots & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \\ & & y_k \quad x \\ \mathbf{V} = & \dots & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \\ & & x \quad y_k \end{array}$$

Доказательство п. 2) теоремы завершено.

2.5. Доказательство теоремы 2.6, 1). Определим метод построения Z -слов, который мы называем *обобщенным методом раскачивания*.

Пусть $d \in \{0, 1\}$, а $\{\gamma_i\}_1^\infty$ – произвольная последовательность натуральных чисел. Положим $x_0 = (2 - d)/3$, $W_0 = \mathbf{W}_{[1]} = a$ и определим индуктивно i -й шаг. Пусть слово W_{i-1} являлось m -цепочкой. На i -м шаге к этому слову приписывается (с той стороны, которая ближе к точке x_0) $2^{\gamma_i} - 1$ штук m -цепочек, причем так, чтобы полученное слово W_i являлось $(m + \gamma_i)$ -цепочкой (это можно осуществить единственным способом).

Заметим, что всякое W_k является в точности Γ_k -цепочкой, где $\Gamma_k = \sum_{i=1}^k \gamma_i$.

Какую бы последовательность $\{\gamma_i\}$ мы не выбрали, данный метод приводит к построению Z -слова из OF^Z (всякое подслово полученного Z -слова лежит в некотором $W_k \in TM$); при этом последовательность, состоящая из единиц, приводит к построению Z -слова по обычному методу раскачивания.

Пусть $\{h_n\}_0^\infty$ – бинарная последовательность с бесконечным числом единиц. Выберем d и $\{\gamma_n\}_1^\infty$ для построения Z -слова обобщенным методом раскачивания. Пусть $d = h_0$, γ_1 есть номер первой единицы в $\{h_n\}_1^\infty$, а для $k > 1$ число γ_k есть разность номеров k -й и $(k - 1)$ -й единиц в $\{h_n\}_1^\infty$ (т.е. в $\{h_n\}_1^\infty$ единицы стоят в точности на всех позициях и с номерами, равными частичным суммам последовательности $\{\gamma_n\}$).

Пусть обобщенный метод строит по d и $\{\gamma_n\}$ Z -слово $\mathbf{W}$. Проверим, что последовательность $\{h_n\}$ характеристическая для $\mathbf{W}$.

Точку x назовем k -крайней, если при построении $\mathbf{W}$ она являлась концом отрезка, занимаемого W_k , но попадала внутрь отрезка, занимаемого W_{k+1} . Покажем, что k -крайняя точка имеет порядок Γ_k . В самом деле, слово W_k является Γ_k -цепочкой; при дальнейшем построении добавляются блоки, являющиеся произведением, по меньшей мере, Γ_k -цепочек. Таким образом, порядок k -крайней точки не меньше Γ_k по определению. Далее, легко проверить, что другим концом отрезка, занимаемого W_k , является $(k + 1)$ -крайняя точка. Ее порядок строго больше Γ_k , так как $\gamma_{k+1} > 0$. Но расстояние между концами этого отрезка равно 2^{Γ_k} , откуда по следствию 2.3 порядок k -крайней точки в точности равен Γ_k .

Теперь построим характеристическую последовательность для $\mathbf{W}$. Заметим, что k -крайняя точка ($k \geq 1$) является ближайшей к $x_0 = 1/3$ (и вообще к любой точке интервала $(0, 1)$) точкой порядка $\geq \Gamma_k$. Более того, ближайшая к x_0 точка порядка $\geq \Gamma_k + 1$ ($k \geq 0$) отстоит от k -крайней точки на расстоянии 2^{Γ_k} и, следовательно, совпадает с $(k + 1)$ -крайней точкой:

Таким образом, $y_1, \dots, y_{\Gamma_1}$ совпадают с 1-крайней точкой, и в общем случае $y_{\Gamma_k+1}, \dots, y_{\Gamma_{k+1}}$ совпадают с $(k + 1)$ -крайней точкой. Точка y_0 совпадает, как легко убедиться, с 0-крайней точкой при $d = 1$ и с 1-крайней в противном случае. Отсюда получаем, что $h_0^{\mathbf{W}} = 1$ тогда и только тогда, когда y_0 – 0-крайняя точка, т.е. $d = 1$. Пусть $i > 0$. Имеем $h_i^{\mathbf{W}} = 1$ тогда и только тогда, когда $i = \Gamma_k$ для некоторого k . В итоге $\{h_n^{\mathbf{W}}\} = \{h_n\}$, что и требовалось доказать.

Итак, мы завершили доказательство п. 1), а с ним и всей теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства п. 1) следует, что всякое сильно бескубное Z -слово конечного порядка (с точностью до автоморфизма) можно построить обобщенным методом раскачивания по подходящей бинарной последовательности с бесконечным числом единиц.

2.6. Заключительные замечания. Бинарные последовательности из “почти нулевого” класса (т.е. с конечным числом единиц) являются характеристическими для Z -слов бесконечного порядка. Таким образом, этому “вырожденному” классу можно поставить в соответствие два вырожденных класса Z -слов бесконечного порядка. Этим завершена характеристика сильно бескубных Z -слов на языке бинарных последовательностей.

Если теперь заметить, что бинарные последовательности суть то же самое, что ω -слова в двухбуквенном алфавите, то мы получим впечатляющую разницу в масштабах между множествами Z -слов и ω -слов:

§ 3. Языки, промежуточные между OF^Z и CF^Z

В предыдущем параграфе мы описали структуру языка, являющегося самой нижней ступенью иерархии, введенной в п. 1.3. Основная цель данного параграфа – установить, какие из языков вида L_β , L'_β различны, а какие совпадают. Таким образом мы выясним, сколько различных ступеней в данной иерархии и как они расположены между OF^Z и CF^Z . Мы также докажем одно свойство языка, являющегося второй ступенью иерархии, демонстрирующее глубокое различие между данным языком и языком OF^Z .

3.1. Язык L'_α – вторая ступень иерархии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\alpha = 7/3$. Тогда $L_\alpha^Z = OF^Z \subset L'_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что все элементы L_α^Z равномерны. Предположим противное: существует неравномерное слово $\mathbf{W} \in L_\alpha^Z$. Тогда оно содержит неравномерное подслово U . Легко проверить, что конечное слово неравномерно тогда и только тогда, когда оно содержит подслово ss и dd , $s, d \in A$, одно из которых начинается в U с нечетной позиции, а другое – с четной. Рассмотрим $V \leq U$ такое, что V имеет префикс ss , суффикс dd и не содержит других подслов ss , dd .

Тогда V либо совпадает с одним из слов $aaa/bbb/aabaa/bbabb$, либо содержит подслово $ababa$ ($babab$). В итоге $\mathbf{W}$ необходимо содержит хотя бы одно из слов

$$aaa, \quad bbb, \quad abbabba, \quad baabaab, \quad ababa, \quad babab,$$

каждое из которых имеет экспоненту, не меньшую $7/3$. Противоречие с условием $\mathbf{W} \in L_\alpha^Z$.

Таким образом, все элементы L_α^Z допускают разбиение на 1-цепочки (ср. предложение 2.1). По предложению 1.2 Z -слово, получаемое применением к элементу L_α^Z операции ϕ^{-1} , также принадлежит L_α^Z . Рассуждая по индукции, как в предложении 2.1, получаем, что всякое $\mathbf{W} \in L_\alpha^Z$ допускает разбиение на n -цепочки для всех натуральных n . Таким образом, всякое подслово из $\mathbf{W}$ принадлежит TM , т.е. $L_\alpha^Z = OF^Z$.

В отличие от элементов L_α^Z , элементы $L_\alpha'^Z$ могут содержать подслова $abbabba$, $baabaab$. Примером элемента множества $L_\alpha'^Z \setminus OF^Z$ может служить Z -слово ${}_\infty UabaU_\infty$.

Таким образом, в исследуемой иерархии есть вторая ступень – язык $L_\alpha'^Z$. Число $\alpha = 7/3$ зафиксируем до конца параграфа, чтобы уменьшить громоздкость некоторых обозначений.

Сейчас укажем одно принципиальное различие между языком $L_\alpha'^Z$ и языком OF^Z , занимающим нижнюю ступень иерархии.

Слово над алфавитом A называется *уравновешенным*, если $|W|_a = |W|_b$ (через $|W|_c$, где $c \in A$, обозначается число букв c в слове W). Z -слово $\mathbf{W}$ над A назовем *уравновешенным уровня n* , если для всякого (конечного) его подслова W выполняется неравенство $||W|_a - |W|_b| \leq n$.

Легко заметить, что все равномерные Z -слова и, в частности, все элементы OF^Z являются уравновешенными уровня 2. В то же время для языка $L_\alpha'^Z$ картина совсем иная, как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. *В языке $L_\alpha'^Z$ есть неуравновешенные Z -слова.*

3.2. Доказательство теоремы 3.2. Укажем метод построения требуемого Z -слова. Легко заметить, что слово $baabaab$, имеющее экспоненту $7/3$, может встречаться в Z -словах из $L_\alpha'^Z$ только внутри сегмента $W = abbaabaabba$. Имеем $|W|_a - |W|_b = 1$. Построим Z -слово $\mathbf{W}$, соединив счетный набор сегментов W специальным образом подобранными уравновешенными словами-связками. Показав затем, что $\mathbf{W} \in L_\alpha'^Z$, мы докажем данную теорему.

Возьмем в качестве связок слова

$$\begin{aligned} X_1 = V_4 &= baab \ abba \ abba \ baab, \\ X_2 = V_3 V_2 V_2 &= baab \ abba \ baab \ baab, \\ X_3 = V_2 V_2 V_3 &= baab \ baab \ abba \ baab, \end{aligned}$$

и пусть Δ – произвольное бесквадратное Z -слово над трехбуквенным алфавитом $\{1, 2, 3\}$. Теперь составим Z -слово из блоков X_i , полагая k -й блок равным $X_{\Delta[k]}$. Между каждой парой соседних блоков полученного Z -слова вставим слово W . Итоговое Z -слово и будет искомым $\mathbf{W}$. Говоря в дальнейшем о *разбиении* $\mathbf{W}$, мы будем иметь в виду разбиение на блоки X_i и W , индуцированное построением. Сразу отметим, что $X_i \in TM$, откуда $\text{lexp}(X_i) = 2$ и X_i – равномерное слово. Отметим также, что $\text{lexp}(W) = 7/3$, $|W| = 11$, $|X_i| = 16$.

Докажем, что $\mathbf{W} = L'_\alpha Z$. Покажем, что всякое подслово $P \leq \mathbf{W}$ имеем экспоненту, не превышающую $7/3$. Предположим, что $P = XYXYX$ (т.е. $\exp(P) > 2$) и P пересекается с блоками $T^{(1)}, \dots, T^{(k)}$ разбиения $\mathbf{W}$:

При малых k выполнение требуемого условия будет обеспечиваться за счет устройства слов W и X_i , а при больших $k \geq 6$ – за счет бесквадратности Δ .

Доказательство разделим на семь этапов.

Этап 1. При $k \leq 2$ требуемое условие на $\exp(P)$ выполняется.

а) $k = 1$. Так как $\text{lexp}(X_i) = 2$, $\text{lexp}(W) = 7/3$, то $\exp(P) \leq 7/3$.

б) $k = 2$. Покажем, что $\text{lexp}(WX_i) \leq 7/3$. Неравенство $\text{lexp}(X_iW) \leq 7/3$ проверяется точно так же.

Пусть $P \leq WX_i$, $\exp(P) > 2$. Предположим вначале, что $aabaa \leq P$. Так как WX_i содержит ровно одно подслово $aabaa$ (X_i – равномерное слово), то $\text{per}(P) < |aabaa| = 5$. Тогда, очевидно, $\text{per}(P) = 3$, откуда $P \leq W$, $P = baabbaab$, $\exp(P) = 7/3$. Если же P не содержит $aabaa$, то $P \leq abaabbaX_i$. Рассмотрим слова $Y_i = baabbaX_i$:

$$Y_i \leq abbaabbaX_i = \phi^2(a\phi^{-2}(X_i)).$$

Таким образом, $Y_1 = \phi^2(aabaa)$, $Y_2 = \phi^2(aababb)$, $Y_3 = \phi^2(aabbab)$. Так как все слова в скобках имеют локальную экспоненту 2, то $\text{lexp}(Y_i) = 2$ по предложению 1.2. Теперь видно, что число $\text{lexp}(aY_i)$ меньше $7/3$, что и требовалось доказать.

Этап 2. Требуемое условие на $\exp(P)$ выполняется при $k = 3$.

Рассмотрим сначала слово вида X_iWX_j . Если в нем есть подслово P экспоненты, большей $7/3$, то согласно результатам этапа 1 $W \leq P$. Тогда $aabaa \leq P$ и $\text{per}(P) \geq 5$. Следовательно, P содержит еще одно подслово $aabaa$; однако в слове X_iWX_j такое подслово всего одно. Данное противоречие показывает, что $\exp(P) \leq 7/3$.

Теперь рассмотрим слово вида WX_iW . Аналогично, если оно содержит подслово P экспоненты, большей $7/3$, то $X_i \leq P$. Если $i \neq 1$, то $baabbaab \leq P$. Так как $\text{per}(P) \geq \text{per}(X_i) = 12$, то P должно содержать еще одно подслово $baabbaab$; получаем противоречие, так как таких подслов в WX_iW больше нет. Случай $i = 1$ рассмотрен на рисунке. Здесь P – наибольшее подслово в WX_iW с периодом 12; его экспонента в точности равна $7/3$:

$$P = XYXYX, \quad X = baab, \quad Y = babaabab,$$

$$WX_1W = \boxed{\begin{array}{c} \text{abbaabaabba} \quad \text{baababbaabbabaab} \quad \text{abbaabaabba} \end{array}}$$

Итак, мы доказали, что $\exp(P) \leq 7/3$ при $k \leq 3$. Для того чтобы доказать требуемое для $k = 4$, $k = 5$, нужно вычислить периоды некоторых подслов из $\mathbf{W}$. Этому посвящен следующий этап.

Этап 3. а) $\text{per}(X_i W) > 21$. В самом деле, слово $X_i W$ содержит ровно одно подслово $aabaa$ (см. рисунок ниже). Таким образом, это подслово не может входить в суффикс слова $X_i W$ длины $(|X_i W| - \text{per}(X_i W))$ (в противном случае $aabaa$ входит в $X_i W$ еще раз, на $\text{per}(X_i W)$ букв левее). Следовательно, $\text{per}(X_i W) > 19$. Далее замечаем, что если X_i имеет префикс $baabba$ ($i = 3$), то $\text{per}(X_i W) = 21$, а если префикс $baabab$, то $\text{per}(X_i W) = 25$.

Симметричное рассуждение показывает, что $\text{per}(W X_i) \geq 21$.

б) $\text{per}(ba X_i W) = 27$. Аналогично п. а) единственность подслова $aabaa$ в рассматриваемом слове влечет неравенство $\text{per}(ba X_i W) > 21$. Заметив, что слово $baba$ является префиксом рассматриваемого слова и не встречается справа от $aabaa$, мы получаем требуемое:

Симметрично получаем $\text{per}(W X_i ab) = 27$.

в) $\text{per}(W X_i W) = 27$. В самом деле, $27 = |W X_i|$, т.е. слово $W X_i W$ имеет такой период; с другой стороны, $ba X_i W \leq W X_i W$ и согласно п. б) $\text{per}(W X_i W) \geq 27$.

г) Слово $W X_i W$ не имеет периодов, меньших 34, за исключением минимального (непосредственно проверяется).

д) $\text{per}(X_i W X_j) > 27$. Пользуясь а), получаем, что $\text{per}(X_i W X_j) \geq 21$. Далее, непосредственно устанавливается, что $\text{per}(X_i W b) = 27$, откуда следует $\text{per}(X_i W X_j) \geq 27$. Но в случае $X_i W X_j \leq \mathbf{W}$ выполняется $i \neq j$ (в силу бесквадратности Δ). В итоге $\text{per}(X_i W X_j) > |X_i W| = 27$.

Этап 4. Ограничение на $\text{exp}(P)$ выполняется при $k = 4, 5$. Пусть $k = 4$. Тогда $|P| \leq 2|W| + 2|X_i| = 54$. Но сегмент $T^{(2)}T^{(3)}$, состоящий из слова W и связки, не имеет периодов, меньших 21 (этап 3). Таким образом, экспонента P может превосходить $7/3$ только при $|P| > 49$. Но в этом случае P обязательно содержит сегмент $ba X_i W$ или $W X_i ab$, каждый из которых имеет период не менее 27 (этап 3). В итоге $\text{exp}(P) \leq 7/3$.

Пусть $k = 5$. Если $T^{(1)} = W$, то $\text{per}(P) \geq \text{per}(X_i W X_j) > 27$ (этап 3), а $|P| \leq 3|W| + 2|X_i| = 65$. Ограничение на экспоненту P выполняется.

Если же $T^{(1)}$ является связкой, то период P является периодом слова $W X_i W$. По результатам этапа 3 $\text{per}(W X_i W) = 27$, а следующий по величине период этого слова не меньше 34. Имеем $|P| \leq 3|X_i| + 2|W| = 70$. Так как $70/34 \leq 7/3$, то достаточно проверить случай $\text{per}(P) = 27$. Две разные связки имеют равные префиксы длины не более 8 и равные суффиксы также длины ≤ 8 ; следовательно, подслово в $X_i W X_j W X_m$ с периодом 27 не может иметь длину, большую, чем

$$8 + |W| + |X_j| + |W| + 8 = 54.$$

Ниже приведен фрагмент слова $X_3WX_1WX_2$, на котором это значение достигается:

Итак, мы доказали требуемое и для $k = 5$.

Теперь докажем утверждение, позволяющее получить желаемую оценку при $k \geq 6$.

Этап 5. Пусть $U \leq \mathbf{W}$, U имеет собственный префикс $X_{i_1}WX_{i_2}W$. Тогда $\exp(U) < 2$.

Экспонента слова $X_{i_1}WX_{i_2}W$ меньше двух, так как согласно этапу 3 $\text{per}(X_{i_1}WX_{i_2}) > |X_{i_1}W|$. Предположим, что $U = XYXYX$ (возможно, $X = \lambda$). Тогда $X_{i_1}W$ есть префикс XY , так как $\text{per}(X_{i_1}WX_{i_2}) > |X_{i_1}W|$. Второе вхождение XY в U также начинается с $X_{i_1}W$; рассмотрим, как оно размещается в $\mathbf{W}$. Так как $\mathbf{W}$ содержит по одному подслову $aabaa$ внутри каждого блока разбиения, равного W , и не содержит других подслов $aabaa$, то сегмент W во втором вхождении $X_{i_1}W$ должен совпадать с блоком разбиения. Следовательно, и X_{i_1} совпадает с некоторой связкой $X_{i_{k+1}}$. Таким образом, $XY = X_{i_1}W \dots X_{i_k}W$. Тогда $i_1 = i_{k+1}, \dots, i_k = i_{2k}$. Получаем противоречие с бесквадратностью Z -слова Δ . Итак, $\exp(U) < 2$.

Этап 6. Аналогично доказанному на этапе 5, $\exp(U) < 2$ для всякого слова $U \leq \mathbf{W}$, имеющего префикс $WX_{i_1}WX_{i_2}$. Далее, симметричные рассуждения приводят к той же оценке для экспоненты всякого подслова из $\mathbf{W}$, имеющего суффикс, равный одному из приведенных префиксов.

Этап 7. Пусть теперь $k \geq 6$. Воспользовавшись результатами этапов 5, 6, получаем, что префикс слова $P = XYXYX$, заканчивающийся блоком $T^{(k-1)}$, и суффикс этого слова, начинающийся блоком $T^{(2)}$, имеют экспоненту, меньшую двух. Следовательно, слово $XYXY$ пересекается с $T^{(k)}$, а слово $YXYX$ — с $T^{(1)}$. Таким образом, X является собственным подсловом как в $T^{(1)}$, так и в $T^{(k)}$. Отсюда следует, что $|X| \leq 14$. Заметим также, что $\text{per}(P) > |T^{(2)} \dots T^{(k-1)}|/2 \geq |X_i| + |W| = 27$. Таким образом, при $|X| \leq 9$ все уже доказано.

Пусть $|X| \geq 10$. Тогда $T^{(1)}$ и $T^{(k)}$ — связки, т.е. k должно быть нечетным. Осталось заметить, что при таком условии P содержит подслово WX_iWX_jW ($i \neq j$), минимальный период которого равен $|WX_iWX_j|$, т.е. 54. Так как $|X| \leq 14$, то и в этом случае экспонента P не превосходит $7/3$. Теорема доказана.

Заметим, что можно построить континуум различных неуравновешенных Z -слов, принадлежащих множеству $L'_\alpha{}^Z$, так как существует континуум различных бесквадратных Z -слов в трехбуквенном алфавите (см., например, [11]).

3.3. Структура иерархии выше языка $L'_\alpha{}^Z$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть β — рациональное число, $7/3 < \beta < 3$. Тогда существует Z -слово $\mathbf{W}$ такое, что $\text{lexp}(\mathbf{W}) = \beta$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Все языки L_γ^Z , где $\gamma \in [7/3, 3]$, различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_1 < \gamma_2$; тогда существует рациональное β такое, что $\gamma_1 < \beta < \gamma_2$. Слово экспоненты β , существующее по теореме 3.3, принадлежит $L_{\gamma_2}^Z \setminus L_{\gamma_1}^Z$.

Таким образом, данная теорема и следствие проясняют вопрос о мощности исследуемой иерархии языков (она континуальна) и демонстрируют, что ступени иерархии расположены всюду плотно для локальных экспонент из отрезка $[7/3, 3]$. Вопрос о строгости включения $L_\gamma^Z \subseteq L_{\gamma'}^Z$ для иррациональных γ будет разобран в п. 3.6.

3.4. Комбинаторные леммы. Нам потребуются три технические леммы.

ЛЕММА 3.5. Пусть m – неотрицательное четное число. Тогда существует слово $R \in TM$ такое, что $|R| = m$ и слово $P = aabRbaa$ также принадлежит TM .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале разберем случай, когда m делится на 4. Заметим, что $P \leq V_2RV_2$. Возьмем Z -слова UV_∞ , VV_∞ и их 2-разбиения (единственные по предложению 2.1). В каждом из этих Z -слов рассмотрим блок 2-разбиения, являющийся префиксом V_∞ и равный V_2 . Так как m кратно 4, то на $m + 4$ символа левее этой 2-цепочки в каждом из указанных Z -слов также расположена 2-цепочка; эта последняя цепочка, очевидно, равна U_2 в одном из Z -слов и V_2 в другом. В итоге одно из указанных Z -слов, являющихся элементами OF^Z , содержит подслово вида V_2RV_2 , где $|R| = m$, а следовательно, и слово P .

Пусть теперь m не делится на 4. Положим $R = R'ab$. Тогда $P \leq V_2R'U_2U_2$ и $|R'|$ кратно 4. Возьмем те же Z -слова, что и в предыдущем случае, и рассмотрим самый левый сегмент U_2U_2 в ω -слове V_∞ . Непосредственно слева от него расположена цепочка V_2 , являющаяся префиксом V_∞ . Как было показано выше, на любом расстоянии, кратном 4, слева от этой 2-цепочки, одно из выбранных Z -слов содержит 2-цепочку V_2 . В итоге получаем, что слово $V_2R'U_2U_2$, а с ним и слова R и P принадлежат TM . Лемма доказана.

Две оставшиеся леммы характеризуют квадраты (слова вида XX), являющиеся подсловами элементов OF и TM . Доказательство первой из них приведено в [10], а второй – в [12].

ЛЕММА 3.6. Пусть $XX \in OF$. Тогда $|X| = 2^k$ или $|X| = 3 \cdot 2^k$ для подходящего k .

ЛЕММА 3.7. Пусть $XX \leq U_n$. Если $|X| = 2^k$, то слово X является k -цепочкой и позиция 1_X в U_n кратна 2^k . Если $|X| = 3 \cdot 2^k$, то $X = U_kV_kU_k$ ($X = V_kU_kV_k$) и позиция 1_X в U_n кратна 2^k .

3.5. Доказательство теоремы 3.3. Для произвольного слова $R \in A^+$ зафиксируем следующее свойство:

(*) у всех подслов R , минимальный период которых меньше $\text{per}(R)$, экспонента не превосходит $7/3$.

Пусть, как и в предыдущей теореме, $W = abbaabaabba$, и пусть $m \geq 4$. На первом этапе доказательства построим слово U , состоящее из m 2-цепочек такое, что слово $T = (WU^3)$ обладает свойством (*). Очевидно, что первая 2-цепочка в U не равна $abba$ (в противном случае слово WU содержит подслово $baabbaabba$ экспоненты $5/2$). Аналогично, последняя 2-цепочка в U также не равна $abba$. Таким

образом, $U = baabZbaab$, где Z также является произведением 2-цепочек. Чтобы указать подходящее Z , рассмотрим слово $V = baabbabaabZbaababbaab$:

и слово $V' = aab\phi^{-2}(Z)baa$. Длина слова $Z' = \phi^{-2}(Z)$ равна $m - 2$ по определению Z . Если m – четное число, то выберем Z' так, чтобы слово V' принадлежало TM (такое Z' существует по лемме 3.5). Если же m нечетно, то $|Z'| \geq 3$; положим $Z' = aabZ''$.

Снова пользуясь леммой 3.5, выберем Z'' так, чтобы $aabZ''baa \in TM$. Заметим, что $Z'' \in \{\lambda, ab, ba, abbaX, babaX, baabX\}$, где X – некоторое слово из $A^+ \cup \lambda$. Выясним, чему равна локальная экспонента слова $V' = aabaabZ''baa$. В случаях $Z'' = \lambda$, $Z'' = ba$ непосредственно вычисляем $\text{lexp}(V') = 2$. Исследуем остальные возможности.

Очевидно, условие $aabZ''baa \in TM$ влечет $baabZ''baa \in TM$. Если слово Z'' имеет префикс $baab$, то $baabZ''baa$ не может начинаться квадратом слова длины > 4 согласно лемме 3.7. Значит, слово $abaabZ''baa$ не имеет префикса экспоненты, большей 2, откуда $\text{lexp}(abaabZ''baa) = 2$. Далее, заметим, что слово $abaabZ''baa$ не начинается квадратом никакого слова. В самом деле, пусть оно имеет префикс XX . Непосредственно проверяем, что $|X| > 4$. Так как $abaabZ''baa \in OF$, из леммы 3.6 получаем, что $|X|$ – четное число. Так как слово $abaabZ''baa$ равномерно и имеет разбиение вида $aQ_1 \dots Q_nd$, то слово $1_X 0_X$ есть 1-цепочка, т.е. $1_X = b$. Но тогда после XX в исследуемом слове снова идет буква $a = 0_X$. Противоречие с условием $\text{lexp}(abaabZ''baa) = 2$. В итоге $\text{lexp}(V') = 2$, так как при отбрасывании первой буквы этого слова мы получаем слово экспоненты 2, не начинающееся квадратом никакого слова.

Из приведенного рассуждения ясно, что $\text{lexp}(V') = 2$ и при равенстве $Z'' = babaX$.

Теперь разберем случай, когда слово Z'' равно ab или имеет префикс $abba$. Тогда слово $baabZ''baa \in TM$ не может начинаться квадратом длины, меньшей 8 (напомним, что согласно доказательству леммы 3.5 Z'' есть произведение нескольких 2-цепочек, домноженное справа на цепочку ab). Если это слово имеет префикс XX , $|X| = k \geq 8$, то k четное (лемма 3.6), X заканчивается 1-цепочкой, а слово $abaabZ''baa$, возможно, имеет префикс экспоненты $2 + 1/k$, которая не превосходит $17/8$. При этом слово V' не может иметь префикс экспоненты $2 + 2/k$, так как X заканчивается 1-цепочкой. Далее, слово V' состоит из префикса $aabaa$ и равномерного суффикса; таким образом, оно начинается квадратом длины 3 и не начинается никаким другим квадратом; в итоге $\text{lexp}(V') = 7/3$.

Вернемся к словам $U = baabZbaab$ и $V = baabbaUabbaab$. Согласно предложению 1.2

$$\text{lexp}(V') = \text{lexp}(\phi^2(V')) \geq \text{lexp}(V),$$

так как $V \leq \phi^2(V')$.

Итак, нами построено слово U , состоящее из m 2-цепочек. Покажем, что слово $T = (WU)^3$ удовлетворяет свойству (*):

$$T = \underbrace{\text{abbaabaabba} \quad U \quad \text{abbaabaabba} \quad U \quad \text{abbaabaabba} \quad U}_{V \quad V}$$

Пусть $P \leq T$ и $\exp(P) \geq 2$. Если P содержит один сегмент $aabaa$, то $\text{per}(P) < 5$ и, очевидно, $P = baabaab$, т.е. $\exp(P) = 7/3$. Если P содержит два или три сегмента $aabaa$, то минимальный период P не меньше расстояния между двумя соседними вхождениями этого сегмента в T , а это расстояние равно $\text{per}(T)$. Если же P вообще не содержит сегмента $aabaa$, то $P \leq aVa$, так как этот сегмент не содержится в U . Докажем, что и в этом случае $\exp(P) \leq 7/3$. Это неравенство очевидно выполняется при $\text{lexp}(V) = 2$; случай $\text{lexp}(V) > 2$ рассмотрим подробнее.

Условие $\text{lexp}(V) > 2$ означает, что $\text{lexp}(V') > 2$, что возможно только в случае $V' = aabaabZ''baa$, когда $0_{Z''} = a$. В этом случае V' имеет префикс длины 7 с периодом 3 и не имеет других префиксов и суффиксов экспоненты, большей 2 (см. выше). Тогда само слово V имеет префикс длины $26 = 7 \cdot 2^2 - 2$ с периодом $12 = 3 \cdot 2^2$ и не имеет других префиксов и суффиксов экспоненты, большей 2. Кроме этого, V не содержит префиксов/суффиксов длины ≤ 6 , имеющих экспоненту 2. Этого достаточно, чтобы утверждать, что слово aVa имеет экспоненту не более $7/3$.

Итак, свойство (*) выполняется.

Из определения T и свойства (*) следует, что всякий префикс T длины $k \geq 7|WU|/3$ имеет локальную экспоненту, равную $k/|WU|$. Попутно сделаем следующее простое наблюдение.

(i) *Всякий префикс T , содержащий все три подслова $aabaa$, не имеет периодов, промежуточных между $|WU|$ и $2|WU|$.*

Пусть число β представимо в виде несократимой дроби $k/(2^s \cdot n)$, где n нечетно. Так как числа n и 4 взаимно просты, то существуют числа $m \geq 4$ и $t \geq 1$ такие, что $11 + 4m = |WU| = tn$.

Построим слово T , соответствующее данному m , и возьмем слово $\phi^s(T)$. В силу предложений 1.1, 1.2 слово $\phi^s(T)$ удовлетворяет свойству (*). Обозначим через S префикс $\phi^s(T)$ длины tk . Имеем

$$\text{lexp}(S) = \exp(S) = \frac{|S|}{|\phi^s(WU)|} = \frac{tk}{2^s tn} = \beta.$$

Покажем, что при подходящем (достаточно большом) натуральном q слово $\phi^q(S)$ заведомо можно достроить до Z -слова с локальной экспонентой β .

Заметим, что $\exp(1_{\phi^{s+q}(U)} \phi^q(S)) > \beta$. Напомним также, что последние буквы слова и его ϕ -образа всегда различны; следовательно, $1_{\phi^{s+q}(U)} = 1_U = b$ при четном $(s+q)$ и $1_{\phi^{s+q}(U)} = a$, если $(s+q)$ нечетно. Пусть Q – произвольное слово такое, что $1_Q = a$. Пусть также p – период некоторого собственного префикса S , причем $p < \text{per}(S)$, а P – максимальный префикс S такой, что $\text{per}(P) = p$. Тогда $\exp(P) \leq 7/3 < \beta$ по свойству (*). Следовательно, начиная с некоторого q , выполняется неравенство

$$\frac{2^q |P| + |Q|}{2^q p} \leq \frac{7}{3} + \frac{|Q|}{2^q p} < \beta.$$

Применив предложение 1.1, получаем $\text{lexp}(\phi^q(P)) = \text{lexp}(P)$ и, таким образом, $\text{lexp}(Q\phi^q(P)) \leq \beta$.

Нетрудно заметить, что слово $\phi^q(P)$ является максимальным префиксом в $\phi^q(S)$ с периодом $2^q p$ (в силу того же предложения 1.1). Теперь выберем $q > 0$ достаточно большим, чтобы оно подходило для любого p , являющегося периодом префикса слова S . Кроме того, сделаем его таким, чтобы $(s + q)$ было четным числом; тогда, как отмечалось выше, $1_{\phi^{s+q}(U)} = b$, а значит, слово $a\phi^q(S)$ не имеет периода $2^{s+q}|WU|$. Учитывая равенство $\phi^q(0_S) = \phi^q(a) = U_q$, мы получим, что

$$\text{lexp}(Q\phi^q(S)) \leq \beta \Leftrightarrow \text{lexp}(QU_q) \leq \beta.$$

Возьмем слово $Q = abbaaba$. Проверка показывает, что $\text{lexp}(QU_q) = 7/3$. (В самом деле, $q > 0$, а следовательно, QU_q имеет ровно одно подслово $aabaa$, справа от которого стоит элемент TM . Таким образом, если $P = XYXYX$ содержится в QU_q , то $aabaa \leq P$ и $|XY| < 5$. Отсюда $P = baabaab$.) Следовательно, $\text{lexp}(Q\phi^q(S)) \leq \beta$. Заметим еще, что слово $Q\phi^q(S)$ всегда имеет префикс W :

$$\begin{array}{c} W \\ \text{-----} \\ | \text{ abbaaba } | \text{ abba } \dots | \\ Q \qquad \qquad \phi^q(S) \end{array}$$

Проверка, аналогичная только что проведенной, показывает, что $\text{lexp}(\infty VW) = 7/3$. Заметив, что ω^* -слово ∞V и слово $\phi^q(S)$ равномерны, мы получаем, что на стыке слов Q и $\phi^q(S)$ находится единственное подслово $aabaa$ ω^* -слова $\infty VQ\phi^q(S)$. Таким образом, $\text{lexp}(\infty VQ\phi^q(S)) = \beta$:

$$\begin{array}{c} \text{lexp}=\beta \\ \text{-----} \\ | \text{ abbaaba } | \text{ abba } \dots | \\ \text{lexp}=\frac{7}{3} \qquad \qquad \qquad W \\ \text{-----} \\ \dots \quad \infty V \quad Q \quad \phi^q(S) \end{array}$$

Для завершения построения Z -слова локальной экспоненты β нам осталось привести рассуждение для суффиксов слова S , аналогичное рассуждению, приведенному для префиксов. Без ограничения общности мы можем считать, что Sb является префиксом $\phi^s(T)$. Тогда возьмем слово Q' такое, что $0_{Q'} = a$, и найдем q' , для которого равносильны условия $\text{lexp}(\phi^{q'}(S)Q) \leq \beta$ и $\text{lexp}(\phi^{q'}(1_S)Q) \leq \beta$. Выбрав $Q' = abaabba$, если $\phi^{q'}(S)$ имеет суффикс $abba$, и $Q' = W$, если этот суффикс равен $baab$, мы построим ω -слово локальной экспоненты β , домножив слово $\phi^{q'}(S)Q$ справа на V_∞ .

Пусть без ограничения общности $q \leq q'$. Учитывая, что $\phi^{q'-q}(\infty V) = \infty V$, запишем Z -слово

$$\mathbf{W} = \infty V \phi^{q'-q}(Q) \phi^{q'}(S) Q' V_\infty.$$

Нам известно, что $\text{lexp}(\infty V \phi^{q'-q}(Q) \phi^{q'}(S)) = \beta$ (по предложению 1.2) и $\text{lexp}(\phi^{q'}(S) Q' V_\infty) = \beta$ по построению. Таким образом, если $\mathbf{W}$ содержит подслово P экспоненты, большей β , то $\phi^{q'}(S) \leq P$.

Напомним, что слово $\phi^{q'}(S)$ является префиксом экспоненты β в слове $\phi^{q'+s}(T)$. В свою очередь, слово T равно $(WU)^3$ по определению, причем по построению $|WU| \geq 27$ (мы выбирали $m \geq 4$, откуда длина слова U , состоящего из m 2-цепочек, не меньше 16). Рассмотрим слово $(WU)^2 abbaabaa$. Согласно (i) оно не имеет периодов, промежуточных между $|WU|$ и $2|WU|$. Экспонента данного слова равна $2 + 8/|WU|$, что меньше, чем $7/3$, а значит, меньше β . Тогда слово $\phi^{q'+s}((WU)^2 abbaabaa)$ является префиксом в $\phi^{q'}(S)$. Пользуясь предложениями 1.1 и 1.2, получаем, что слово $\phi^{q'}(S)$ не имеет периодов, промежуточных между $2^{q'+s}|WU|$ и $2^{q'+s+1}|WU|$.

Первый из указанных периодов слово P не может иметь по построению ($0_{Q'} = a$, а слово $\phi^{q'}(S)a$ не имеет такого периода). Если же P имеет период, не меньший второго из указанных, то его экспонента меньше двух: длина слова $\phi^{q'-q}(Q) \phi^{q'}(S) Q'$, как нетрудно проверить, меньше двух таких периодов, при этом ни одно из слов $\phi^{q'-q}(Q) \phi^{q'}(S)$, $\phi^{q'}(S) Q'$ не может иметь такого периода. (Это следует из предложений 1.1, 1.2 и уже неоднократно использовавшегося наблюдения, что слова $Q \phi^q(S)$ и $\phi^{q'}(S) Q'$ содержат только по одному подслову $abaa$.) Таким образом, мы показали, что Z -слово $\mathbf{W}$ не содержит подслов экспоненты, большей β . Теорема доказана.

3.6. Z -слова с иррациональными экспонентами. Несмотря на то, что локальная экспонента Z -слова по определению является супремумом множества рациональных чисел, до сих пор все построенные нами Z -слова имели рациональную локальную экспоненту. Однако в доказательстве последней теоремы содержалась идея, которая может быть использована для конструирования Z -слов с иррациональной локальной экспонентой. А именно, мы строили такое слово экспоненты β , к которому через специальные “переходные” слова можно присоединить ω - и ω^* -слово Туэ–Морса так, чтобы экспоненты всех подслов полученного Z -слова, не содержащих исходное слово экспоненты β , не превышали $7/3$.

Опираясь на конструкции, приведенные в доказательстве теоремы 3.3, докажем следующий усиленный ее вариант.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$, $7/3 < \gamma < 3$. Тогда существует Z -слово $\mathbf{W}$ такое, что $\text{lexp}(\mathbf{W}) = \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность рациональных чисел $\{\beta_i\}$, сходящуюся к γ снизу. Без ограничения общности предположим, что $\beta_{i+1} > \beta_i > 7/3$ для всех i . Для каждого β_i построим Z -слово $\mathbf{W}_i$ локальной экспоненты β_i с помощью конструкции, используемой в доказательстве теоремы 3.3. Главную часть этой конструкции составляет слово

$$\phi^{q'-q}(Q) \phi^{q'}(S) Q',$$

или, двойственно,

$$Q \phi^q(S) \phi^{q-q'}(Q').$$

Обозначим данное слово через S_i . Конкретный вид слов S , Q , Q' , приведенный в доказательстве теоремы 3.3, нам не важен; напомним лишь, что слово S_i содержит

одно подслово $aabaa$, если $q \neq q'$, и два таких подслова, если $q = q'$. Так как на q, q' не накладывались никакие ограничения сверху, то одно из них всегда можно увеличить таким образом, чтобы выполнялось $q \neq q'$. Поэтому мы будем считать, что S_i содержит единственное подслово $aabaa$.

Построим Z -слово искомой локальной экспоненты γ . Построение проведем по индукции. База индукции: пусть $W_1 = S_1$; $\text{lexp}(W_1) = \beta_1$. Идею шага индукции вначале продемонстрируем на самом первом шаге.

Выберем такое четное положительное число k_1 , что $|S_1| + |S_2| \leq 2^{k_1-1}$, и положим $W_2 = S_1 V_{k_1} S_2$, где V_{k_1} – слово Туэ–Морса. Покажем, что $\text{lexp}(W_2) = \beta_2$. В самом деле, слово $S_1 V_{k_1}$ содержится в ω -слове $S_1 V_\infty$ локальной экспоненты β_1 , а слово $V_{k_1} S_2$ содержится в ω^* -слове ${}_\infty V S_2$ локальной экспоненты β_2 (так как k_1 – четное число, слово V_{k_1} является суффиксом в ${}_\infty V$). Значит, если слово W_2 содержит подслово P экспоненты, большей β_2 , то P содержит V_{k_1} . Так как $k_1 \geq 2$, то $\text{per}(V_{k_1}) = 3 \cdot 2^{k_1-2}$ (см. п. 1.1, 4). Получаем

$$\text{exp}(P) = \frac{|P|}{\text{per}(P)} < \frac{|W_2|}{\text{per}(V_{k_1})} = \frac{|S_1| + |S_2| + 2^{k_1}}{3 \cdot 2^{k_1-2}} \leq \frac{2^{k_1-1} + 2^{k_1}}{3 \cdot 2^{k_1-2}} = 2,$$

следовательно, локальная экспонента построенного слова действительно равна β_2 .

Теперь рассмотрим шаг индукции в общем виде. Четное число k_n выбираем так, чтобы

- 1) $|W_n| + |S_{n+1}| \leq 2^{k_n-1}$;
- 2) $k_n \geq k_{n-1} + 4$.

Положим $W_{n+1} = W_n V_{k_n} S_{n+1}$. Докажем, что $\text{lexp}(W_{n+1}) = \beta_{n+1}$. В силу выбора k_n имеем $\text{lexp}(V_{k_n} S_{n+1}) = \beta_{n+1}$ и $\text{exp}(P) < 2$ для любого подслова P , содержащего V_{k_n} . Таким образом, достаточно показать, что $\text{lexp}(W_n V_{k_n}) = \beta_n$. Данное слово имеет префикс W_n локальной экспоненты β_n (по предположению индукции) и суффикс $V_{k_{n-1}} S_n V_{k_n}$ той же локальной экспоненты (по построению). Указанные префикс и суффикс пересекаются в $W_n V_{k_n}$ по слову $V_{k_{n-1}} S_n$. Значит, подслово $P \leq W_n V_{k_n}$ может иметь экспоненту, большую β_n , только в случае $V_{k_{n-1}} S_n \leq P$. Это означает, в частности, что P содержит подслово $aabaa$. Если $\text{exp}(P) \geq 2$, то число $\text{per}(P)$ равно расстоянию между какими-нибудь двумя вхождениями $aabaa$ в P . Но в силу выбора слова $V_{k_{n-1}}$ расстояние между подсловом $aabaa$ из S_n и подсловом $aabaa$ из S_{n-1} превосходит расстояние между любыми двумя такими подсловами, входящими в W_{n-1} . Таким образом, P содержит ровно два подслова $aabaa$ (входящие в S_{n-1} и S_n соответственно), т.е. $P = X aabaa Y aabaa Z$, где слова X, Y и Z равномерны. Имеем

$$\text{per}(P) > |Y| > |V_{k_{n-1}}| = 2^{k_{n-1}}.$$

В то же время

$$|X| < |S_{n-2} V_{k_{n-2}} S_{n-1}| \leq \frac{3}{2} \cdot |V_{k_{n-2}}| = \frac{3 \cdot 2^{k_{n-2}}}{2} \leq \frac{3 \cdot 2^{k_{n-1}}}{32} < \frac{\text{per}(P)}{3}.$$

Таким образом, $\text{exp}(P) < 7/3 < \beta_n$. Мы доказали, что $\text{lexp}(W_{n+1}) = \beta_{n+1}$.

Построенное по индукции ω -слово будет иметь локальную экспоненту γ по определению. Дописав к нему слева ω^* -слово ${}_\infty V$, мы и получим искомого Z -слово $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} = {}_\infty V S_1 V_{k_1} \dots S_i V_{k_i} \dots$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы показали, что $L_\beta^Z \subset L'_\beta^Z$ для всех $\beta \in [7/3, 3)$. Это позволяет нам изобразить зависимости между β и L_β^Z , между β и L'_β^Z в виде графиков, приведенных в п. 1.3.

Автор выражает глубокую благодарность участникам научных семинаров “Алгоритмические вопросы алгебры и логики” (МГУ, рук. член-корр. РАН С.И. Адян) и “Алгебраические системы” (УрГУ, рук. проф. Л.Н. Шеврин) за многочисленные ценные замечания.

Список литературы

1. Thue A. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Skr. Vid. Kristiania I. Mat. Naturv. Klasse I. 1912. P. 1–67.
2. Аршон С.Е. Доказательство существования n -значных бесконечных асимметричных последовательностей // Матем. сб. 1937. Т. 2(44). №4. С. 769–779.
3. Morse M., Hedlund G. A. Symbolic dynamics // Amer. J. Math. 1938. V. 60. P. 815–866.
4. Perrin D., Pin J.-E. Semigroups and automata on infinite words // Semigroups, Formal languages and Groups. Holland: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 49–72.
5. Gottschalk W. H., Hedlund G. A. Topological dynamics // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1955.
6. Branderburg F.-J. Uniformly growing k -th power free homomorphisms // Theor. Comput. Sci. 1983. V. 23. P. 69–82.
7. Kobayashi Y. Enumeration of irreducible binary words // Discr. Appl. Math. 1988. V. 20. P. 221–232.
8. Gottschalk W. H., Hedlund G. A. A characterization of the Morse minimal set // Proc. of Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 70–74.
9. Crochemore M., Goralčik P. Mutually avoidable ternary words of small exponent // Int. J. Alg. and Comp. 1991. V. 1. P. 407–410.
10. Shur A. M. Overlap-free words and Thue–Morse sequences // Int. J. Alg. and Comp. 1996. V. 6. P. 353–367.
11. Jezek J. Intervals in the lattice of varieties // Algebra Universalis. 1976. V. 6. P. 147–158.
12. Shur A. M. Binary words avoided by the Thue–Morse sequence // Semigroup Forum. 1996. V. 53. P. 212–219.

Поступило в редакцию
28.I.1999